第 22 卷 第 4 期　　湖南理工学院学报(自然科学版)　　Vol.22 No.4
2009 年 12 月　　Journal of Hunan Institute of Science and Technology (Natural Sciences)　　Dec. 2009

基于 Copula 的 VaR 计算

彭定忠

(湖南理工学院 数学学院, 湖南 岳阳 414006)

摘　要: VaR 是常见的风险度量工具, 本文在蒙特卡罗方法中引入连接函数(Copula), 通过图形方法、统计推断和 AIC 准则等, 找出最优的 Copula 函数, 并用它计算 VaR 和验证其有效性.

关键词: VaR; Copula; Archimedean-Copula; 蒙特卡洛模拟

中图分类号: O211.9　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1672-5298(2009)04-0018-04

The VaR Computation Based on Copula

PENG Ding-zhong

(College of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China)

Abstract: VaR is a common risk-measuring tool. Link Function(Copula) in Montle-Carlo simulation is presented, and the best Copula is derived through the graph method, statistical inference and AIC criterion . Finally we can compute VaR and prove its effectiveness.

Key words: VaR; Copula; Archimedean Copula; Montle-Carlo simulation

近二十年来, 由于受经济全球化和金融一体化、金融创新等因素的影响, 金融风险不断加剧, 金融风险管理问题逐步引起广大学者和管理层的高度重视. VaR 由于具有一系列优点使其成为 90 年代以后金融机构进行风险度量的最重要手段. VaR 的含义是指: 在一定的概率水平(置信度)下, 某一资产(或资产组合)在未来特定的一段时间内的最大可能损失. 从统计上讲, VaR 的定义如下

$$\mathrm{Prob}(\Delta P > \mathrm{VaR}) = 1 - c \tag{1}$$

其中, ΔP 为资产(或资产组合)在持有期 Δt 内的损失, VaR 为置信水平 c 下处于风险中的价值. 实际中由于对数收益率的一系列的优良性质, 通常使用如下公式计算, 此时 VaR 的含义是最小收益率.

$$\mathrm{Prob}(r_{t,k} > \mathrm{VaR}) = 1 - c \tag{2}$$

其中 $r_{t,k} = \ln(P_{t+k}) - \ln(P_t)$, k 为持有期, P_t 为 t 时刻资产价格.

由(1), (2)式可以看出, 要求解VaR的难点在于如何确定对数收益率的分布, 以及什么样的分布最接近现实的金融时序数据, 为此产生了一系列计算VaR的方法技术. 通常使用的方法有: 历史模拟法、方差—协方差法和蒙特卡罗模拟法. 文[1~5]利用不同计算方法, 结合不同金融模型分析VaR方法在中国证券市场的有效性. 值得注意的是后两种方法通常假设金融工具收益率或市场价格变动呈正态分布, 然而在现实世界中, 金融时序数据由于具有厚尾性、波动聚集性等特征而与这一假定相违背, 这就迫切需要一种新的工具来度量相关结构, 进而用来评估风险. Copula的出现正好充当了这一角色, 它能将多个随机变量 $\xi_1 \cdots \xi_n$ 的联合分布与它们各自的边际分布相连接, 从而能构造出许多复杂的相关结构及相关性指标, 近来也频繁应用于金融市场[6~10], 成为风险分析必不可少的工具之一. 本文在蒙特卡罗方法中引入连接函数(Copula), 通过图形方法、统计推断和AIC准则等, 给出最好的Copula形式, 并用它计算VaR.

1　Copula 和 Archimedean-Copula

为了简化运算, 这里仅考虑两个变量的情况. 首先给出 Copula 的定义.

收稿日期: 2009-08-17
基金项目: 湖南理工学院基金资助项目(2008Y15)
作者简介: 彭定忠(1981−), 男, 湖南浏阳人, 硕士, 湖南理工学院数学学院讲师. 主要研究方向: 概率论与数理统计

定义 1　Copula 是任意一满足下面性质的映射 $C:[0,1]^2 \mapsto [0,1]$

(1) 对任意的 $(u,v)\in I^2=[0,1]^2$，都有 $0 \leqslant C(u,v) \leqslant 1$；

(2) 对任意的 $(u,v)\in I^2$，都有 $C(u,0)=C(0,v)=0$，$C(u,1)=u$，$C(1,v)=v$

(3) 对任意 $u_1,u_2,v_1,v_2 \in I$，且 $u_1 \leqslant u_2, v_1 \leqslant v_2$，都有

$$V_C([u_1,u_2]\times[v_1,v_2]) = C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1) \geqslant 0$$

定义 2　设 Φ 是由 $\phi:[0,1]\mapsto[0,+\infty]$ 的映射组成的集合，其中 ϕ 是连续严格递减的凸函数，并且 $\phi(0)=+\infty,\ \phi(1)=0$．对任意 $\phi\in\Phi$ 反函数 $\phi^{-1}:[0,+\infty]\mapsto[0,1]$ 都存在，且 ϕ^{-1} 也是连续严格递减的凸函数，同时 $\phi^{-1}(0)=1,\ \phi^{-1}(+\infty)=0$，定义下式

$$C(u,v)=\phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v))$$

Schweizer和Sklar证明了 $C(u,v)$ 确实是 Copula，称为 Archimedean-Copula，其中 ϕ 称为C的生成器．常见的连接函数有乘积连接函数、Clayton Copula、Frank Copula、Gumbel Copula等[6]．

Archimedean-Copula 是一类运用广泛的 Copula，不仅因为它涵盖了大量常见的 Copula，同时它拥有许多很好的性质，这些性质对于随机数模拟及参数检验都具有极其重要的作用．利用 Copula 对蒙特卡罗模拟法进行改进，首要的问题是从数据出发找到描述所考虑问题相关结构的连接函数和参数估计，其次便是随机数模拟．

2 参数的估计和检验

极大似然法在参数估计中较常见，设随机变量 X 和 Y 的联合分布为 $H(x,y)=C(F(x),G(y))$，为求联合密度函数 $h(x,y)$，对 $H(x,y)$ 求二阶混合偏导，得到下式

$$h(x,y)=f(x)g(y)C_{12}(F(x),G(y))$$

其中 $C_{12}(u,v)=\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}C(u,v)$，$u=F(x), v=G(y), f(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}, g(y)=\frac{\mathrm{d}G(y)}{\mathrm{d}y}$ 由此，可得似然函数为

$$L(\alpha;u,v)=\prod_{i=1}^{n}C_{12}(u_i,v_i) \tag{3}$$

由此不难得到

$$\hat{\alpha}=\arg\max_{\alpha\in R}\sum_{i=1}^{n}\log L(\alpha;u_i,v_i) \tag{4}$$

由上面可知，只要把边际分布估计出来，参数估计值很快便可获得．一旦参数估计出来后，利用参数检验的各种方法便可找到最好的Copula形式，主要包括图形法，统计推断法和 AIC 准则．其中图形法包括两种：第一类是利用条件分布函数 $H_{Y|X=x}(x,y)=C_1(F(x),G(y))$，其中 $C_1(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}C(u,v)$，注意到 $H_{Y|X=x}(x,y)$ 服从标准均匀分布，结合 $\hat{\alpha}$ 便可得到 $\hat{H}_{Y|X=x}(x,y)$ 对标准均匀分布的 QQ 图，从而判断 $\hat{\alpha}$ 的优劣性；第二类利用 $K_C(t)=t-\frac{\phi(t)}{\phi'(t^+)}$ 同样服从标准均匀分布，这样也可以得到 $K_C(\cdot)$ 对标准均匀分布的 QQ 图．

表 1　单参数阿基米德连接函数族

连接函数类别	$\phi_\alpha(t)$	$\alpha\in$	连接函数类别	$\phi_\alpha(t)$	$\alpha\in$
1. (Clayton)	$\frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha}-1)$	$[-1,\infty)\setminus\{0\}$	8.	$\frac{1-t}{1+(\alpha-1)t}$	$[1,\infty)$
2.	$(1-t)^\alpha$	$[1,\infty)$	9.	$\ln(1-\alpha\ln t)$	$(0,1]$
3.	$\ln\frac{1-\alpha(1-t)}{t}$	$[-1,1]$	10.	$\ln(2t^{-\alpha}-1)$	$(0,1]$
4. (Gumbel)	$(-\ln t)^\alpha$	$[1,\infty)$	11.	$\ln(2-t^\alpha)$	$(0,0.5]$
5. (Frank)	$-\ln\frac{e^{-\alpha t}-1}{e^{-\alpha}-1}$	$[-\infty,+\infty)\setminus\{0\}$	12.	$(\frac{1}{t}-1)^\alpha$	$[1,\infty)$
6.	$-\ln[1-(1-t)^\alpha]$	$[1,\infty)$	13.	$(1-\ln t)^\alpha-1$	$(0,\infty)$
7.	$-\ln[\alpha t+(1-\alpha)]$	$(0,1]$	14.	$(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1)^\alpha$	$[1,\infty)$

3 实证分析

3.1 数据选取及计量方法

选取上海汽车和上海机场两支股票作为研究对象, 分别选取 712 个收盘价数据, 试图从单参数 Archimedean-Copula 族(见表 1)中找出一个能最好体现其相关结构的连接函数, 其次利用所得到的 Copula 形式估计 VaR 值. 由于 VaR 考察的是证券组合的损益分布, 因此应通过资产回报衡量. 这里采用对数回报, 在已知第 t 天收盘价 p_t 的条件下, 日对数回报为 $r_t=\ln\dfrac{p_t}{p_{t-1}}$.

3.2 Copula 函数选择

对对数回报率用(3)式估计 14 类 Archimedean-Copula 的参数, 得到结果见表 2.

表 2 参数估计值

连接函数族	极大似然估计法	是否有效	AIC
1.(Clayton)	0.7093	是	−159.8518
2.	/	否	/
3.	0.9303	是	−156.8972
4.(Gumbel)	1.2482	是	−138.0144
5.(Frank)	3.0403	是	−154.9150
6.	1.5803	是	−162.1570
7.	/	否	/
8.	/	否	/
9.	-0.0715	否	−123.1264
10.	-0.8458	否	−142.1578
11.	/	否	
12.	1.0586	是	−152.6788
13.	2.5396	是	−171.4584
14.	1.1422	是	−168.1788

从表 2 明显可以看出 No.7, No.8, No.9, No.10 以及 No.11 在拟合这组数据时是不可取的, 同时根据 AIC 准则(AIC 值越小, 模型拟合越好), 我们可以从其余 9 个 Copula 中挑选出六个较优的, 它们分别是 No.1, No.3, No.5, No.6, No.13, No.14. 为了从这六个 Copula 中筛选出更优的模型, 我们利用图形法给出直观的判断. 图 1 表明 No.6 和 No.14 的拟合效果较差, 尤其是 No.6, 而其它四个 Copula 的拟合效果都还不错, 直观上并不能区分哪个更好, 因此先排除 No.6 和 No.14, 图 2 同样表明 No.6 和 No.14 的拟合效果不佳, 而 No.1 在[0,1]区间没有图产生, 所以我们有理由拒绝 No.1, 最后还剩下 No.3, No.5, No.13. 接下来, 利用 χ^2 检验和 Kolmogorov-Smirnov 检验将给出最优的数据结构结果见表 3.

表 3 统计检验结果

连接函数族	Kolmogorov-Smirnov	χ^2 检验
N0.3	0.3868	0.0197
N0.5	0.5951	0.1691
N0.13	0.5839	0.0756

从表 3 可以看出 Kolmogorov-Smirnov 检验不能给出判断, 但是 χ^2 检验表明, No.5 能最好地拟合数据, 因为 No.5 对应的 P 值更大, 更不容易被拒绝. 通过上述三种不同的检测手段, 最终可以确定数据的最优结构. 其表达式为:

$$C_\alpha(u,v)=-\frac{1}{3.0403}\ln\Big(1+\frac{(\mathrm{e}^{-3.0403u}-1)(\mathrm{e}^{-3.0403v}-1)}{\mathrm{e}^{-3.0403}-1}\Big)$$

3.3 VaR 计算和比较

下面通过 SAS 程序计算 VaR 值, 方法分别为历史模拟法、方差—协方差矩阵法、传统蒙特卡罗模拟法(Montle-Carlo) 和基于 Copula 的蒙特卡罗法(简记为 VaR-Copula), 其中方差—协方差矩阵法包括: (1)期望值为 0, 波动率采用简单加权移动平均方法(简记为 VaR-SMA1); (2)期望为简单

表 4 不同 VaR 计算方法下的结果比较

VaR 计算方法	实际收益小于 VaR 的天数(违背数)	实际收益小于 VaR 的比率(违背率)	按置信水平实际收益应该小于 VaR 的天数
历史模拟法 (95%)	24	7.16%	17
(99%)	3	0.90%	3
VaR-SMA1 (95%)	12	3.58%	17
(99%)	6	1.79%	3
VaR-SMA2 (95%)	12	3.58%	17
(99%)	7	2.09%	3
VaR-EWMA (95%)	13	3.88%	17
(99%)	4	1.19%	3
Montle-Carlo(95%)	23	6.87%	17
(99%)	12	3.58%	3
VaR-Copula 95%)	9	3.58%	17
(99%)	3	0.90%	3

平均, 波动率采用简单加权移动平均方法(简记为 VaR-SMA2); (3)正态分布, 波动率采用指数加权移动平均方法(简记为 VaR-EWMA). (取 λ=0.94, Montle-Carlo 方法的模拟次数为 1000). 计算结果汇总见表 4.

将 VaR-Copula 与其它方法比较, 不难发现, 它是所有计算方法中最稳健的, 无论是 95%的置信水平还是 99%的置信水平, 其违背率分别在 5%和 1%以内. 特别引起注意的是, 基于 Copula 的 Montle-Carlo 法比传统 Montle-Carlo 法有了很大的改进, 在 95%的置信水平下, VaR-Copula 的违背数仅为 9, 小于传统 Montle-Carlo 的 23; 在 99%的置信水平下, VaR-Copula 的违背数为 3, 同样小于传统 Montle-Carlo 的 12, 说明用 Frank-Copula 代替联合正态分布假设是有效的.

综上所述, 由于中国证券市场目前正处于发展阶段, 缺乏证券市场有效运作和公正博弈的基本理念与普遍的社会实践, 市场效率和市场质量不高, 市场机制和微观经济基础不健全, 制度发展不到位, 因而股市经常出现较大的波动, 所以用一些常规的方法并不能完全满足管理者的需要. 而基于 Copula 的蒙特卡罗方法从历史数据出发, 利用一系列检验手段和统计方法, 找到能较好刻画数据结构的分布函数, 据此进行模拟的效果比较好, 所以基于 Copula 的蒙特卡罗模型在中国证券市场是有效的.

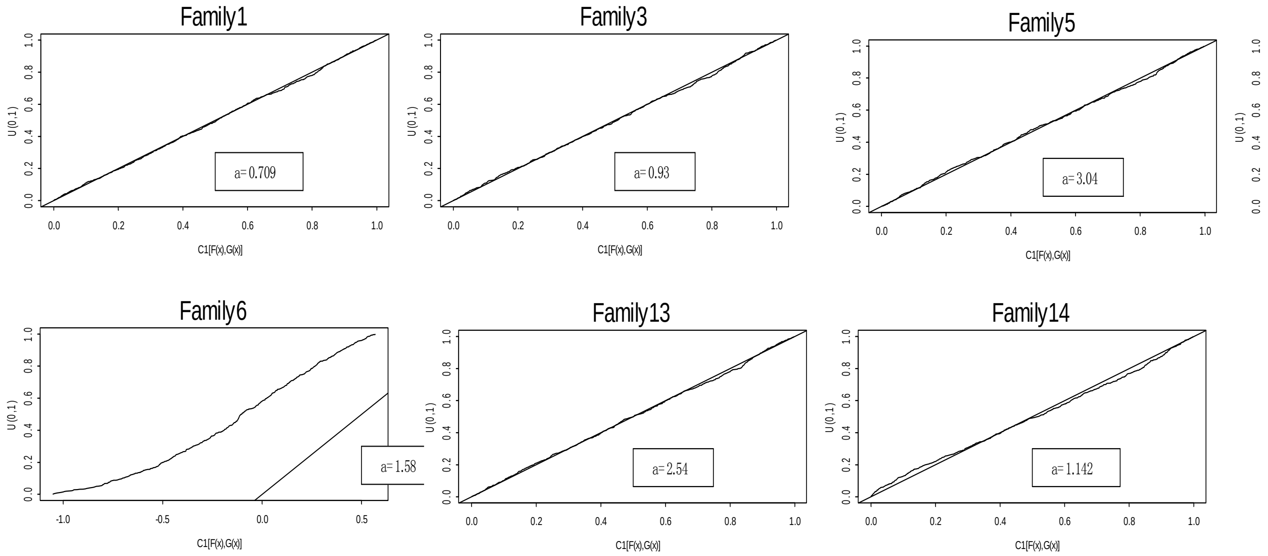

图 1　图形方法 1 和极大似然估计参数

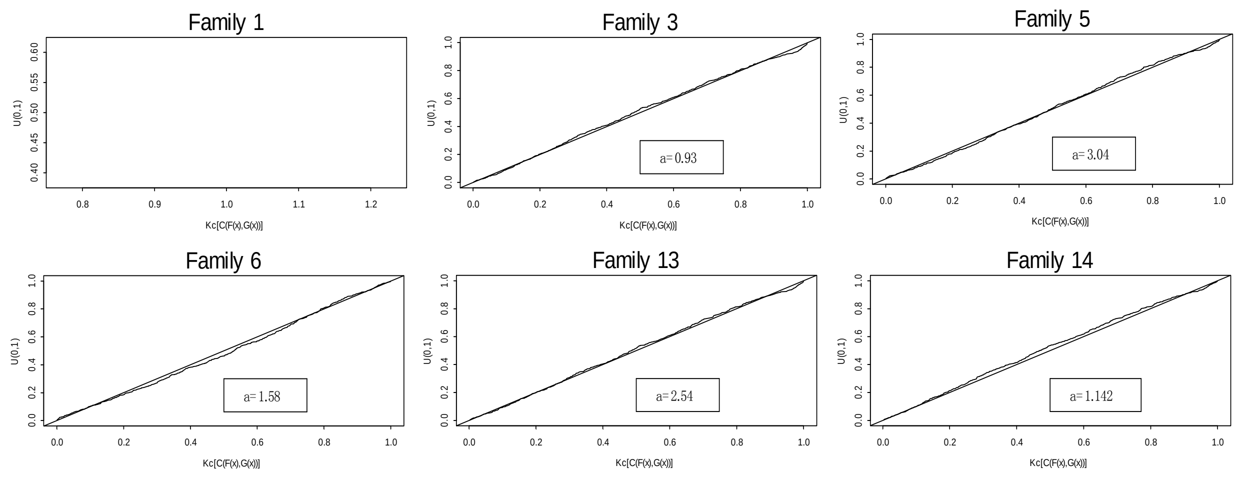

图 2　图形方法 2 和极大似然估计参数

(下转第 29 页)

2.2 方差分析

下面对三个超市利用方差分析来比较它们在二级指标上的差异.

表 4 三个超市购物环境的方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 比	$Pr > F$
组间	41.674	2	20.8373	4.72	0.0371
组内	1722.552	390	4.4168		
总计	1764.226	392			

表 5 三个超市服务质量的方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 比	$Pr > F$
组间	0.1381	2	0.0690	0.27	0.7638
组内	99.8394	390	0.2560		
总计	99.9775	392			

表 6 三个超市商品质量的方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 比	$Pr > F$
组间	1.8871	2	0.9436	4.09	0.0414
组内	89.9670	390	0.2307		
总计	90.0886	392			

表 7 三个超市投诉处理的方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 比	$Pr > F$
组间	1.0312	2	0.5156	1.16	0.3148
组内	173.4399	390	0.4447		
总计	174.4711	392			

表 8 三个超市总体评价的方差分析表

来源	平方和	自由度	均方和	F 比	$Pr > F$
组间	0.4544	2	0.2272	0.78	0.4613
组内	114.3138	390	0.2931		
总计	114.7682	392			

从表 4~8 可以看出三个超市在购物环境, 商品质量问题上存在差异, 而在服务质量, 投诉处理和总体评价上可认为无显著差异. 这与上面相关分析的讨论结果相吻合, 说明整个结论具有合理性.

3 小结

本文利用调查数据进行统计分析, 找出了影响顾客满意度得分的一些主要因素, 如环境, 商品价格, 投诉处理等, 同时发现了三个超市各自的一些优点和缺点, 为超市的管理和建设提供了一些理论依据. 超市要在竞争中赢得顾客, 还需采取多方面的措施. 建议: 1) 尽力降低商品价格; 2) 注意对员工的培训, 提高员工的素质; 3) 创造高雅、舒适的购物环境; 4) 正确对待忠诚构建中的顾客抱怨.

参考文献

[1] 徐小红, 贾海薇, 陈　羽. 广州超市顾客满意度指数调查问卷设计初步探讨[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(14)
[2] 王学民. 应用多元统计分析[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2004
[3] 周纪芗. 回归分析[M]. 上海: 上海华东师范大学出版社, 1991: 71~175
[4] 宋先道, 李　涛. 顾客满意度指数(CSI)研究现状分析及改进措施[J]. 武汉理工大学学报, 2002, 24(1): 2~7
[5] 洪　楠, 林爱华, 侯　军. SPSS for Windows 统计产品和服务解决方案教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003

(上接第 21 页)

参考文献

[1] 马超群, 李红权. VaR 方法及其在金融风险管理中的应用[J]. 系统工程, 2000, 3:56~59
[2] 陈学华, 杨辉耀. APARCH 模型在证券投资风险分析中的应用[J]. 运筹与管理, 2003, 6: 92~97
[3] 邹建军, 宗　益, 秦　拯. GARCH 模型在计算我国股市风险价值中的应用研究[J]. 系统程理论与实践, 2003, 5: 20~25
[4] 彭寿康. 中国证券市场股价指数 VaR 研究[J]. 统计研究, 2003, 6:58~61
[5] 邹新月, 吕先进. VaR 方法在证券市场尖峰、胖尾分布中的实证分析[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33: 59~64
[6] Nelsen R B. *An Introduction to Copulas*[M]. New York: Springer, 1998
[7] Tibiletti L. *Beneficial Changes in Random Variables via Copulas: An Application to Insurance*[J]. Insurance: Mathematics and Economics.1997, 19(2): 166
[8] Frahm G, Junker M, Szimayer A. *Elliptical Copulas: Applicability and Limitations*[J]. Statistics and Probability Letters, 2003, 63(3): 275~286
[9] Hürlimann Werner. *Hutchinson-Lai's Conjecture for Vicariate Extreme Value Copula*[J]. Statistics and Probability Letters, 2003,61(2):191~198
[10] 韦艳华, 张世英. 金融市场的相关性分析—Copula-GARCH 模型及其应用[J]. 系统工程, 2004, 22(4): 7~12