

第一题：分钱游戏

玩家 1 和 2 正在讨论如何平分 10 元钱。每个玩家同时为自己选择一个 0 到 10 之间的数字 s_i ，数字不一定是整数。我们将根据两种不同的规则来研究这个游戏。在这两种情况下，如果 $s_1 + s_2 \leq 10$ ，那么两位玩家都会得到他们指定的金额（如果钱有剩余，则被收回）。

1. 在第一种情况下，如果 $s_1 + s_2 > 10$ ，那么两位玩家都得不到钱。请问这个游戏的纳什均衡是什么？
2. 在第二种情况下，如果 $s_1 + s_2 > 10$ 且 $s_1 \neq s_2$ ，那么说出较小金额的人将得到所说的钱，另一人则得到剩余的钱。如果 $s_1 + s_2 > 10$ 且 $s_1 = s_2$ ，那么双方都能得到 5 元。请问这个游戏的纳什均衡是什么？
3. 现在假设玩家选择的金额必须是整数。请问这个游戏在两种情况下的纳什均衡是什么？

第二题：差异化产品的价格竞争

在课堂上，我们讨论了两种双寡头竞争模式：古诺（数量）竞争和伯特兰德（价格）竞争。虽然价格竞争比数量竞争更常见，但古诺模型的结果似乎比伯特兰德模型的结果更接近现实。本题考虑了双寡头竞争的第三种模式：两家企业虽然也在价格上展开竞争，但与伯特兰德模型不同的是，他们的产品是有差别的。

我们首先把两家企业所在的城市看作一条长度为 1 的线段（线性城市）。在这条线段的两端分别有企业 1 和 2。两家企业分别同时设定价格 p_1 和 p_2 ，都有不变的边际成本 c 。假设消费者在线段上均匀分布，并都会购买一个单位的产品，要么从企业 1 购买，要么从企业 2 购买。

考虑一位在线段上 y 处的消费者。他与企业 1 的距离为 y ，与企业 2 的距离为 $1 - y$ 。消费者既关心价格，也关心与企业的“距离”。以企业 1 为例，消费者从企业 1 购买产品的效用为 $-p_1 - ty^2$ ，其中 ty^2 可以看作是消费者到达企业的“交通成本”（地理距离），或者是得不到最想要的产品而产生的负效用（质量的某个方面，例如冰淇淋的脂肪含量）。随着参数 t 增大，我们可以认为产品变得更加多样化。如果 $t = 0$ ，那么两家企业的产品就是完全替代品。当

$$-p_1 - ty^2 > -p_2 - t(1 - y)^2$$

时，消费者将从企业 1 购买产品。当

$$-p_1 - ty^2 < -p_2 - t(1 - y)^2$$

时，消费者将从企业 2 购买产品。如果左右相等，则掷一枚硬币决定。

1. 两家企业的价格 p_i 是否会小于成本 c ？为什么？
2. 给定企业 2 的价格 p_2 ，企业 1 定什么价格可以占领整个市场（即所有消费者都会购买企业

1 的产品)？

3. 让我们考虑一下，如果企业 1 设定的价格高于问题 2 的答案，是否能做得更好。定更高价格的坏处是会失去部分市场，但好处是可以向留存的消费者收取更高的价格。当市场被两家企业瓜分时，请问哪个位置的消费者对从企业 1 购买和从企业 2 购买没有偏好？进而推导企业 1 的需求量为

$$D_1(p_1, p_2) = \frac{p_2 + t - p_1}{2t}$$

以及利润为

$$u_1(p_1, p_2) = p_1 D_1(p_1, p_2) - c D_1(p_1, p_2),$$

其中第一项为收入，第二项为生产成本。

4. 推导给定中等大小的 p_2 ，企业 1 的最优反应函数为 $BR_1(p_2) = \frac{p_2 + t + c}{2}$ 。
5. 画出企业 1 最优反应函数的图像。在图中说明当 $p_2 < c - t$ 以及当 $p_2 > c + 3t$ 时， $BR_1(p_2)$ 会发生什么变化？（提示：请回忆第 1 和 2 题的答案。）
6. 用代数方法找出纳什均衡。
7. 当 $t = 0$ 时，均衡价格是多少？人们有时会说：“随着产品的差异性越来越大，竞争就会越来越小。这使得企业能够收取更高的价格，赚取更多的利润。因此，企业喜欢产品差异化。”这在本模型中是如何体现的？

第三题：维修建议

假设玩家 1 的立体声音响系统无法正常工作，只能播放单声道。他不知道是需要简单修理（比如清洗）还是需要大修（比如更换一个激光器）。需要更换激光器的概率是 ρ 。在当地的维修店，他发现更换一个激光器的费用为 L ，而清洗的费用为 $C < L$ 。他知道店里的维修人员（玩家 2）如果向他收取一个新激光器的费用并确实更换了激光器，或者向他收取一次清洗的费用并确实做了清洗，那么所得利润都是 π 。维修人员如果他收取新激光器的费用，但实际上只是偷偷地清洗一下，那么可以获得更多的利润 $\Pi > \pi$ 。维修人员不会在真的需要更换激光器时说只需要清洗。

1. 请解释为什么玩家 1 总是能相信玩家 2 说的只需要清洗一下？但如果玩家 2 说需要更换一个激光器，玩家 1 会持怀疑态度？
2. 玩家 1 可以拒绝玩家 2 的建议，并从一位从不说谎的顾问那里获得另外的维修建议。但假设他如果这样做，就必须接受顾问的建议以及新的维修费用，即 $L' > L$ 以及 $C' > C$ 。下面是玩

家 1（行玩家）和玩家 2（列玩家）之间的博弈。请解释在这个效用矩阵中每个效用是如何得到的。

	Honesty	Dishonesty
Always accept advice	$-\rho L - (1 - \rho)C, \pi$	$-L, \rho\pi + (1 - \rho)\Pi$
Reject if told 'laser'	$-\rho L' - (1 - \rho)C, (1 - \rho)\pi$	$-\rho L' - (1 - \rho)C', 0$

- 假设 $L > \rho L' + (1 - \rho)C'$ 。解释为什么不存在纯策略下的纳什均衡。
- 找出（唯一的）混合策略下的纳什均衡 $((P, 1 - P), (Q, 1 - Q))$ 。
- 当激光器更换费用 L 增加时（其他参数保持不变），玩家 2 选择“诚实”策略的均衡概率会发生什么变化？玩家 1 选择“如果被告知需要更换激光器，则拒绝”策略的均衡概率会发生什么变化？
- 当说谎的利润 Π 增加时（其他参数保持不变），玩家 2 选择“诚实”策略的均衡概率会发生什么变化？玩家 1 选择“如果被告知需要更换激光器，则拒绝”策略的均衡概率会发生什么变化？
- 有的人一有疼痛去看医生，他们从不认为自己只得了感冒，会认为自己真的需要“大修”。假设这是真的，为什么我们会认为医生经常不诚实呢？（提示：思考参数 ρ 如何影响均衡）。