Matematika 2
12. sklop nalog

Skalarni produkt

(5) Naj bo
$$T_n = \left\{ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \psi(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, c_k \in \mathbb{C} \right\}$$
prostor kompleksnih trigonometričnih polinomov stopnje največ n. Na T_n definiramo skalarni produkt
$$\langle \psi, \phi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x)\overline{\phi(x)}\, dx.$$
Pokaži, da je množica $\mathcal{E} = [e^{-inx}, \ldots, e^{inx}]$ ortonormirana baza prostora T_n.

Preslikave med vektorskimi prostori s skalarnim produktom

(1) Izračunaj adjungirana endomorfizma danih endomorfizmov:

(a) $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s predpisom $W(\vec{x}) = \vec{\omega} \times \vec{x}$ za nek $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$,

(b) $D : T_n \to T_n$ s predpisom $D(\psi) = \psi'$.

(2) Skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$ je dan s predpisom
$$\langle x, y \rangle_g = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1,$$
endomorfizem $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pa s predpisom $A(x, y) = (x, 2y)$. Izračunaj endomorfizem A^* glede na dani skalarni produkt.

(3) Zapiši matriko
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
v obliki $A = PDP^T$, kjer je P ortogonalna, D pa diagonalna matrika.