

Matematično nihalo

Martin Horvat

20. november 2004

Odmik matematičnega nihala od navpične lege zaznamuje spremenljivka x in dinamika le-te je podana z diferencialno enačbo

$$\ddot{x} + \sin(x) = 0,$$

Definirajmo sedaj moment tega nihala kot $p = \dot{x}$ in tako zgornjo enačbo prepišemo v sistem diferencialne enačbe 1. reda

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p, \\ \dot{p} &= -\sin(x)\end{aligned}$$

Iz osnov fizike vemo, da je to nihalo konservativni hamiltonski sistem enojne prostostne stopnje s pripadajočo hamiltonko H

$$H = 1 - \cos x + \frac{1}{2}p^2 = 2(\sin(x/2))^2 + \frac{1}{2}p^2$$

Aditivna konstanta hamiltonki je izbrana tako, da je $H \leq 0$. Sistem ima eno prostostno stopnjo in zato je sistem popolno integrabilen in rešljiv. Recimo, da je začetna lega nihala

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = 0.$$

in tako se izraži energija nihala kot $E = 2(\sin(x_0/2))^2$. Izpostavimo $p = \dot{x}$ iz hamiltonke in separirajmo spremenljivki pozicije x in časa t v obliko

$$\pm 2dt = \frac{dx}{\sqrt{(\sin(x_0/2))^2 - (\sin(x/2))^2}}.$$

Integriranje te enačbe z ustreznim spreminjanjem predznaka na levi strani, nam poda implicitno določeno trajektorijo izražemo z eliptičnimi integrali[1].

Perioda te dinamike T predstavlja zamik nihala na iz skrajne leve do skrajne desne in nazaj. Torej opravimo 4-krat razdaljo prvotne pozicije x_0 . Zato podamo periodo kot

$$2T = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(\sin(x_0/2))^2 - (\sin(x/2))^2}}.$$

Z uvedbo nove integracijske variable y in konstante $k = \sin(x_0/2)$

$$y = \frac{\sin(x/2)}{\sin(x_0/2)}, \quad dy = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - k^2 y^2}}{k} dx$$

spremenimo integral v

$$T = 4 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}.$$

Slednji izraz poenostavimo s ponovno zamenjavo simbolov $y = \sin \phi$ in prepišemo

$$T = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 (\sin \phi)^2}} = 4K(k)$$

kjer je $K(k)$ popoln eliptični integral 1. vrste $K(k)$ [2].

Literatura

- [1] Kuščer I in Kodre A *Matematika v fiziki in tehniki* (DMFA, Ljubljana, 1994)
- [2] Bronštejn I N, Semedeljev K A, Musiol G in Mülig H *Matematični priročnik* (TZS, Ljubljana, 1997)