Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Spektralne metode za začetne probleme PDE

9. naloga pri Matematično-fizikalnem praktikumu

Avtor: Marko Urbanč (28191096)
Predavatelj: prof. dr. Borut Paul Kerševan

1.9.2023

Kazalo

1 Uvod

Parcialne diferencialne enačbe (PDE) lahko rešujemo na več različnih načinov. Glavna razlika je v tem, kako diskretiziramo prostor in čas. V tej nalogi bomo reševali PDE z spektralnimi metodami.(Drugo možnost; diferenčne metode, bomo obravnavali v naslednji nalogi.) Pri spektralnih metodah diskretiziramo prostor s tem, začetni pogoj izrazimo z nekim naborom baznih funkcij in nato iščemo rešitev tako, da računamo, kako se koeficienti teh baznih funkcij spreminjajo s časom. V tej nalogi bomo preizkusili reševanje preko Fourierove metode in metode končnih elementov s kubičnimi B-zlepki.

1.1 Fourierova metoda

Fizikalno gledano rešujemo enodimenzionalno toplotno enačbo, torej difuzijsko enačbo, v homogeni neskončni plasti, s končno debelino a, brez izvirov in ponorov toplote.

$$D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 \le x \le a, \quad D = \frac{\lambda}{\rho c} \,. \tag{1}$$

Če Temperaturo $T(x, y)$ izrazimo kot Fourierovo vrsto dobimo

$$T(x,t) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{T}_k(t) \exp\left(\frac{-2\pi i k x}{a}\right) . \tag{2}$$

Torej se PDE (1) zdaj zapiše kot

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(-\frac{4\pi^2 k^2 D}{a^2}\right) \hat{T}_k(t) \exp\left(-\frac{2\pi i k x}{a}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\mathrm{d}\hat{T}_k(t)}{\mathrm{d}t}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i k x}{a}\right). \tag{3}$$

Torej se naša naloga prevede na iskanje koeficientov $\hat{T}_k(t)$, ki jih dobimo preko **evolucijske enačbe**

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}_k(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\pi^2 k^2 D}{a^2} \hat{T}_k(t) \,. \tag{4}$$

Pogosto se uporabi spektralno reprezentacijo za krajevni odvod, časovni korak pa naredimo z neko ekspliticitno metodo. V našem primeru bomo uporabili **Eulerjevo metodo**.

$$\hat{T}_k(t+k) = \hat{T}_k(t) + \frac{4\pi^2 k^2 D}{a^2} \hat{T}_k(t) k \,. \tag{5}$$

Reprezentacijo $T(x, y)$ v običajnem prostoru dobimo z obratno Fourierovo transformacijo. Enačba (4) ima analitično rešitev

$$\hat{T}_k(t) = \hat{T}_k(0) \exp\left(-\frac{4\pi^2 k^2 D}{a^2} t\right) . \tag{6}$$

To bo koristno za preverjanje numeričnih metod.

1.2 Metoda končnih elementov

Pri razvoju $T(x,y)$ nismo omejeni samo na trigonometrične funkcije. Lahko uporabimo tudi poljubne druge funkcije. V našem primeru bomo uporabili kubične B-zlepke. To so funkcije oblike

$$B_{i,k}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x) \, . \tag{7}$$

Začetni pogoj bomo izrazili kot linearno kombinacijo teh funkcij in nato iščemo rešitev v obliki

$$T(x,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} c_k(t) B_{i,3}(x) \, . \tag{8}$$

Tako zasnujemo metodo končnih elementov, s kolokacijskim pogojem. To pomeni, da se začetni pogoj mora ujemati z rešitvijo na nekem končnem številu točk. Podobno kot pri Fourierovi metodi vstavimo razvoj v PDE in dobimo sistem enačb za koeficiente $\hat{T}_i(t)$

$$\sum_{i=-1}^{N+1} D c_k(t) B_{i,3}(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} \left(\frac{\partial c_k(t)}{\partial t} \right) B_{i,3}(x) \, . \tag{9}$$

Uporabimo lastnosti B-zlepkov in dobimo sistem diferencialnih enačb za koeficiente $c_k(t)$

$$\dot{c}_{j-1}(t) + 4\dot{c}_j(t) + \dot{c}_{j+1}(t) = \frac{6D}{h^2} \left(c_{j-1}(t) - 2c_j(t) + c_{j+1}(t) \right) , \tag{10}$$

kjer je h razdalja med točkami, ki smo jih izbrali za kolokacijski pogoj. Iz robnega pogoja pri $x = 0$ ugotovimo, da je $c_{-1} = -4c_0 - c_1$. Podobno iz robnega pogoja pri $x = a$ sledi $c_0 = C_N = 0$ in $c_{-1} = -c_1$ ter $c_{N-1} = -c_{N+1}$. Reševanje smo torej prevedli na reševanje matričnega sistema

$$\mathbf{A} \frac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{B} \vec{c} , \tag{11}$$

kjer je $\mathbf{A}$ tridiagonalna matrika z 4 na diagonali in 1 na pod in nad diagonalo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} , \tag{12}$$

$\mathbf{B}$ tridiagonalna matrika z -2 na diagonali in 1 na pod in nad diagonalo pomnožena z $6D/h^2$

$$
\mathbf{B} = \frac{6D}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \tag{13}
$$

in $\vec{c}$ vektor koeficientov $c_k(t)$. Začetni pogoj za PDE je $T(x,0) = f(x)$, torej je začetni približek za kolokacijsko aproksimacijo

$$
\mathbf{A}\vec{c} = \vec{f}\,, \tag{14}
$$

kjer je $\vec{f}$ vektor $f(x_i)$. To zdaj rešujemo z neko ekspliticno metodo. V našem primeru bomo uporabili **Implicitno Eulerjevo metodo** zaradi njene stabilnosti. To pomeni, da za časovni korak k velja

$$
\mathbf{A}\frac{\vec{c}_{k+1} - \vec{c}_k}{\Delta t} = \mathbf{B}\vec{c}_{k+1}\,. \tag{15}
$$

2 Naloga

3 Opis reševanja

4 Rezultati

5 Komentarji in izboljšave

Literatura