

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Reševanje PDE z metodo Galerkina

11. naloga pri Matematično-fizikalnem praktikumu

Avtor: Marko Urbanč (28191096)
Predavatelj: prof. dr. Borut Paul Kerševan

8.9.2023

Kazalo

1	Uvod	2
2	Naloga	3
3	Opis reševanja	3
4	Rezultati	3
5	Komentarji in izboljšave	3
	Literatura	4

1 Uvod

Če poznamo lastne funkcije diferencialnega operatorja za določeno geometrijo, se reševanje parcialnih diferencialnih enačb včasih lahko prevede na razvoj po lastnih funkcijah. V tem primeru se lahko diferencialni operator zapiše kot matrika in enačbo potem rešujemo kot sistem linearnih enačb. Tega lahko računamo kot vemo in znamo. Zdaj smo to počeli že parkrat.

V našem primeru bo fizikalna inspiracija Navier-Stokesova enačba, ki je pravzaprav drugi Newtonov zakon za tekočine. Vendar pa je ta enačba zelo zapletena in je še vedno odprt problem, ali sploh obstajajo rešitve v splošnem. Zato se bomo omejili na preprostejši primer, kjer privzamemo, da imamo enakomeren laminaren tok nestisljive tekočine v dolgi ravni cevi pod vplivom stalnega tlačnega gradienta p' . V tem primeru se Navier-Stokesova enačba poenostavi na Poissonovo enačbo

$$\nabla^2 \vec{v} = -\frac{p'}{\eta}, \quad (1)$$

kjer je \vec{v} hitrost tekočine in η njena viskoznost. Enačbo rešujemo v notranjosti preseka cevi, medtem ko je ob stenah hitrost enaka nič. Za pretok velja Poiseuillov zakon

$$\Phi = \int_S v \, dS = C \frac{p' S^2}{8\pi\eta}, \quad (2)$$

kjer je S presek cevi in C konstanta, ki je odvisna od oblike preseka. Konstanta znaša $C = 1$ za krožni presek. V našem primeru pa bomo določili konstanto C pa polkrožni presek. Uvedemo nove spremenljivke $\xi = r/R$ in $u = v\eta/(p'R^2)$ in nato se problem glasi

$$\Delta u(\xi, \phi) = -1, \quad u(1, \phi) = u(\xi, 0) = u(\xi, \pi) = 0, \quad (3)$$

$$C = 8\pi \iint \frac{u(\xi, \phi) \xi \, d\xi \, d\phi}{(\pi/2)^2}. \quad (4)$$

Da se izognemo računanju lastnih funkcij (v temu primeru Besselovih) in njihovih ničel, lahko zapišemo rešitev v obliki razvoja po neki poskuni bazi. V našem primeru bomo vzeli bazo

$$\psi_{nm}(\xi, \phi) = \xi^{2m+1} (1 - \xi)^n \sin((2m+1)\phi). \quad (5)$$

Z njo lahko zapišemo aproksimacijo rešitve kot linearno kombinacijo

$$\tilde{u}(\xi, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \psi_{nm}(\xi, \phi). \quad (6)$$

Za te funkcije niti ni nujno da so prava baza v smislu, da bi bile ortogonalne druga na drugo. Potrebno je da zadoščajo robnim pogojem tako, da jim bo avtomatično zadoščala tudi linearna kombinacija. Približna funkcija \tilde{u} seveda ne zadosti Poissonovi enačbi za res, ampak ji preostane majhna napaka ε

$$\Delta \tilde{u}(\xi, \phi) = -1 + \varepsilon(\xi, \phi). \quad (7)$$

Pri metodi Galerkina zahtevamo, da je napaka ortogonalna na vse poskusne funkcije ψ_{nm} , torej

$$\langle \psi_{nm}, \varepsilon \rangle = 0 \quad \forall n, m. \quad (8)$$

V splošnem bi lahko zahtevali še ortogonalnost napake na nek drug sistem utežnih funkcij. Metoda Galerkina je poseben primer takih metod (angl. *Methods of Weighted Residuals*), kjer je utežna funkcija kar poskusna funkcija sama. Omenjena izbira vodi do sistema enačb za koeficiente a_{nm}

$$A_{nm,n'm'} a_{n'm'} = b_{nm}. \quad (9)$$

Koeficiente b_{nm} dobimo iz skalarnega produkta

$$b_{nm} = \langle -1, \psi_{nm} \rangle, \quad (10)$$

ki se zaradi ortogonalnosti poskusnih funkcij poenostavi v

$$b_{nm} = -\frac{2}{2m+1} B(2m+3, n+1), \quad (11)$$

kjer je B Eulerjeva beta funkcija. Matrika A pa je definirana kot

$$A_{nm,n'm'} = \langle \nabla^2 \psi_{nm}, \psi_{n'm'} \rangle, \quad (12)$$

kar se po upoštevanju ortogonalnosti poskusnih funkcij poenostavi v

$$A_{nm,n'm'} = -\frac{\pi}{2} \frac{nn'(3+4m)}{2+4m+n+n'} B(n+n'-1, 3+4m) \delta_{mm'}. \quad (13)$$

Končno, se naša enačba za koeficient za pretok C glasi

$$C = -\frac{32}{\pi} \sum_{mn,m'n'} b_{nm} A_{nm,n'm'}^{-1} b_{m'n'}. \quad (14)$$

2 Naloga

Naloga od nas zahteva, da rešimo Poissonovo enačbo (3) in izračunamo koeficient za pretok C v primeru polkrožnega preseka cevi. Naj si tudi pogledamo kako je odvisna natančnost rešitve od števila členov v indeksih m in n .

3 Opis reševanja

4 Rezultati

5 Komentarji in izboljšave

Literatura