Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Reševanje PDE z metodo Galerkina

11. naloga pri Matematično-fizikalnem praktikumu

Avtor: Marko Urbanč (28191096)
Predavatelj: prof. dr. Borut Paul Krševan

8.9.2023

Kazalo

1 Uvod

Če poznamo lastne funkcije diferencialnega operatorja za določeno geometrijo, se reševanje parcialnih diferencialnih enačb včasih lahko prevede na razvoj po lastnih funkcijah. V tem primeru se lahko diferencialni operator zapiše kot matrika in enačbo potem rešujemo kot sistem linearnih enačb. Tega lahko računamo kot vemo in znamo. Zdaj smo to počeli že parkrat.

V našem primeru bo fizikalna inspiracija Navier-Stokesova enačba, ki je pravzaprav drugi Newtonov zakon za tekočine. Vendar pa je ta enačba zelo zapletena in je še vedno odprt problem, ali sploh obstajajo rešitve v splošnem. Zato se bomo omejili na preprostejši primer, kjer privzamemo, da imamo enakomeren laminaren tok nestisljive tekočine v dolgi ravni cevi pod vplivom stalnega tlačnega gradienta p'. V tem primeru se Navier-Stokesova enačba poenostavi na Poissonovo enačbo

$$\nabla^2 \vec{v} = -\frac{p'}{\eta} \,, \tag{1}$$

kjer je $\vec{v}$ hitrost tekočine in η njena viskoznost. Enačbo rešujemo v notranjosti preseka cevi, medtem ko je ob stenah hitrost enaka nič. Za pretok velja Poiseuillov zakon

$$\Phi = \int_S v \,\mathrm{d}S = C\frac{p'S^2}{8\pi\eta} \,, \tag{2}$$

kjer je S presek cevi in C konstanta, ki je odvisna od oblike preseka. Konstanta znaša $C = 1$ za krožni presek. V našem primeru pa bomo določili konstanto C pa polkrožni presek. Uvedemo nove spremenljivke $\xi = r/R$ in $u = v\eta/(p'R^2)$ in nato se problem glasi

$$\Delta u(\xi,\, \phi) = -1, \qquad u(1,\, \phi) = u(\xi,\, 0) = u(\xi,\, \pi) = 0 \,, \tag{3}$$

$$C = 8\pi \iint \frac{u(\xi,\, \phi)\xi \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\phi}{(\pi/2)^2} \,. \tag{4}$$

Da se izognemo računanju lastnih funkcij (v temu primeru Besselovih) in njihovih ničel, lahko zapišemo rešitev v obliki razvoja po neki poskuni bazi. V našem primeru bomo vzeli bazo

$$\psi_{nm}(\xi,\, \phi) = \xi^{2m+1}(1-\xi)^n \sin((2m+1)\phi) \,. \tag{5}$$

Z njo lahko zapišemo aproksimacijo rešitve kot linearno kombinacijo

$$\tilde{u}(\xi,\, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\psi_{nm}(\xi,\, \phi) \,. \tag{6}$$

Za te funkcije niti ni nujno da so prava baza v smislu, da bi bile ortogonalne druga na drugo. Potrebno je da zadoščajo robnim pogojem tako, da jim bo avtomatično zadoščala tudi linearna kombinacija. Približna funkcija $\tilde{u}$ seveda ne zadosti Poissonovi enačbi za res, ampak ji preostane majhna napaka ε

$$\Delta\tilde{u}(\xi,\, \phi) = -1 + \varepsilon(\xi,\, \phi) \,. \tag{7}$$

Pri metodi Galerkina zahtevamo, da je napaka ortogonalna na vse poskusne funkcije ψ_{nm}, torej

$$\langle \psi_{nm},\, \varepsilon \rangle = 0 \qquad \forall n, m\,. \tag{8}$$

V splošnem bi lahko zahtevali še ortogonalnost napake na nek drug sistem utežnih funkcij. Metoda Galerkina je poseben primer takih metod (angl. *Methods of Weighted Residuals*), kjer je utežna funkcija kar poskusna funkcija sama. Omenjena izbira vodi do sistema enačb za koeficiente a_{nm}

$$A_{nm,n'm'} a_{n'm'} = b_{nm}\,. \tag{9}$$

Koeficiente b_{nm} dobimo iz skalarnega produkta

$$b_{nm} = \langle -1,\, \psi_{nm} \rangle\,, \tag{10}$$

ki se zaradi ortogonalnosti poskusnih funkcij poenostavi v

$$b_{nm} = -\frac{2}{2m+1} \mathrm{B}(2m+3, n+1)\,, \tag{11}$$

kjer je B Eulerjeva beta funkcija. Matrika A pa je definirana kot

$$A_{nm,n'm'} = \langle \nabla^2 \psi_{nm},\, \psi_{n'm'} \rangle\,, \tag{12}$$

kar se po upoštevanju ortogonalnosti poskusnih funkcij poenostavi v

$$A_{nm,n'm'} = -\frac{\pi}{2} \frac{nn'(3+4m)}{2+4m+n+n'} \mathrm{B}(n+n'-1, 3+4m)\, \delta_{mm'}\,. \tag{13}$$

2 Naloga

3 Opis reševanja

4 Rezultati

5 Komentarji in izboljšave

Literatura