Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

# Reševanje PDE z metodo Galerkina

11. naloga pri Matematično-fizikalnem praktikumu

**Avtor:** Marko Urbanč (28191096)
**Predavatelj:** prof. dr. Borut Paul Krševan

8.9.2023

# Kazalo

**1 Uvod** **2**

**2 Naloga** **2**

**3 Opis reševanja** **2**

**4 Rezultati** **2**

**5 Komentarji in izboljšave** **2**

**Literatura** **3**

# 1 Uvod

Če poznamo lastne funkcije diferencialnega operatorja za določeno geometrijo, se reševanje parcialnih diferencialnih enačb včasih lahko prevede na razvoj po lastnih funkcijah. V tem primeru se lahko diferencialni operator zapiše kot matrika in enačbo potem rešujemo kot sistem linearnih enačb. Tega lahko računamo kot vemo in znamo. Zdaj smo to počeli že parkrat.

V našem primeru bo fizikalna inspiracija Navier-Stokesova enačba, ki je pravzaprav drugi Newtonov zakon za tekočine. Vendar pa je ta enačba zelo zapletena in je še vedno odprt problem, ali sploh obstajajo rešitve v splošnem. Zato se bomo omejili na preprostejši primer, kjer privzamemo, da imamo enakomeren laminaren tok nestisljive tekočine v dolgi ravni cevi pod vplivom stalnega tlačnega gradienta $p'$. V tem primeru se Navier-Stokesova enačba poenostavi na Poissonovo enačbo

$$\nabla^2 \vec{v} = -\frac{p'}{\eta} \,, \tag{1}$$

kjer je $\vec{v}$ hitrost tekočine in $\eta$ njena viskoznost. Enačbo rešujemo v notranjosti preseka cevi, medtem ko je ob stenah hitrost enaka nič. Za pretok velja Poiseuillov zakon

$$\Phi = \int_S v \, \mathrm{d}S = C \frac{p' S^2}{8\pi\eta} \,, \tag{2}$$

kjer je $S$ presek cevi in $C$ konstanta, ki je odvisna od oblike preseka. Konstanta znaša $C = 1$ za krožni presek. V našem primeru pa bomo določili konstanto $C$ pa polkrožni presek. Uvedemo nove spremenljivke $\xi = r/R$ in $u = v\eta/(p'R^2)$ in nato se problem glasi

$$\Delta u(\xi,\, \phi) = -1, \qquad u(1,\, \phi) = u(\xi,\, 0) = u(\xi,\, \pi) = 0 \,, \tag{3}$$

$$C = 8\pi \iint \frac{u(\xi,\, \phi)\xi \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\phi}{(\pi/2)^2} \,. \tag{4}$$

Da se izognemo

# 2 Naloga

# 3 Opis reševanja

# 4 Rezultati

# 5 Komentarji in izboljšave

# Literatura