

MODELSKA ANALIZA I  
2023/24

**Zaključne naloge**

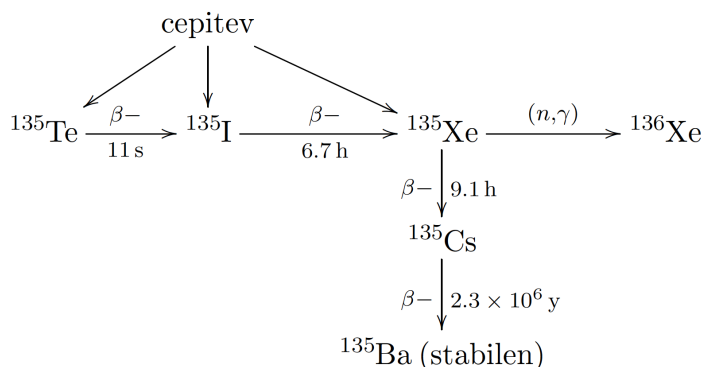
1. Letalska družba želi prepeljati potnike med več mesti, med katerimi so različne razdalje in povpraševanja potnikov, tako da ima čim večji dobiček. Na voljo ima različno velika letala z različnimi stroški goriva in vzdrževanja. Letala imajo lahko tudi različne konfiguracije (različno število sedežev, ločen poslovni razred). Poišči optimalni raspored letov.
2. Imamo  $N$  vagonov z enako lastno maso, povezanih z  $N - 1$  vezmi, te pa imajo naključno porazdeljene natezne trdnosti. Kako je treba razporediti fiksno količino peska po vagonih, če želimo doseči maksimalen pospešek, ne da bi pri tem potrgali vezi med vagoni? Koliko tovora lahko naložimo na vlak, če je pospešek vlaka predpisan? Preveri dve možnosti: v prvi različici vlak vleče motor v prvem vagonu, v drugi različici pa ima vsak vagon svoj motor, pri čemer vsi vlečejo z enako vlečno silo.
3. Kroglice z nezanemarljivim polmerom postavimo v oglišča enostavnih poliedrov in jih povežemo s togimi prečkami z zanemarljivo maso in prostornino. Z numerično minimizacijo poišči vse metastabilne lege teh teles v vodi pri različnih gostotah kroglic. Rezultate prikaži tudi v obliki diagrama  $h(\rho)$ .
4. Razišči Isingov model na mreži s trikotnimi osnovnimi celicami. Spremljaj opazljivke v odvisnosti od temperature in od velikosti mreže ter identificiraj morebitne fazne prehode. Kakšno je obnašanje sistema v antiferomagnetnem režimu?
5. Enako kot prejšnja naloga, vendar na heksagonalni mreži.
6. Isingov model na kartezični mreži, toda v treh dimenzijah.
7. Isingov model z interakcijo dolgega dosega, pri kateri sklopitveni člen med dvema spinoma eksponentno pada z razdaljo med njima.
8. Plastična kocka, v kateri se nevtroni lahko tako sipljejo kot tudi absorbirajo, je premazana s tanko plastjo, ki seva nevtrone. Določi porazdelitev absorbiranih nevtronov po volumnu kocke pri različnih vrednostih absorpcijskih parametrov.
9. Simuliraj mavrico! Upoštevaj, da Sonce seva kot črno telo.
10. Izrabljene gorivne palice jedrskih reaktorjev so shranjene v bazenu z vodo, ki ji je dodan bor  $^{10}\text{B}$  za absorpcijo nevtronov. Opazuj količino nevtronov, izsevanih iz bazena, in porazdelitev absorbiranih nevtronov po prostornini bazena.
11. Rast tumorja lahko obravnavamo s populacijskim modelom

$$\dot{N} = -\lambda N \log \frac{N}{K}, \quad (1)$$

$$\dot{K} = -\alpha c(t)K + \omega N - \gamma N^{2/3}K, \quad (2)$$

kjer je  $N$  število celic v tumorju,  $K$  pa največja velikost tumorja, pogojena z omejeno prekrvavjenostjo. Zaradi te omejitve rast ni eksponentna, ampak jo logaritemski člen v prvi enačbi zaustavi pri končni velikosti. Razišči dinamiko rasti tumorja pri konstantni in pri spremenljivi dozi antiangiogeneskega zdravila  $c(t)$ .

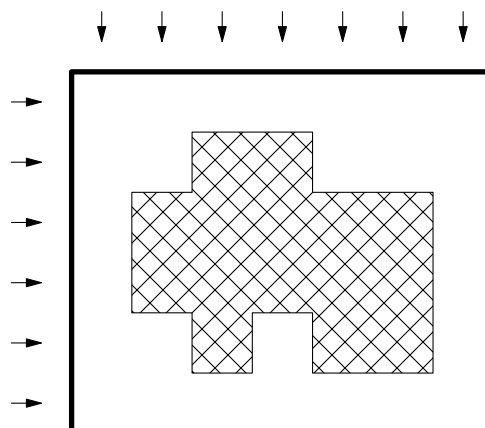
12. Linearna napoved s poli **in** ničlami. Uporabi dve povezani časovno odvisni spremenljivki, tako da je ena odvisna od druge. Primerjaj, ali dodatek ničel izboljša napoved. Nabor primernih podatkov lahko najdeš na <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets.php?type=ts>.
13. Preizkusi, ali lahko konkretne podatke uporabiš kot vir naključnih števil. Uporabiš lahko fizikalne meritve, geografske podatke (velikost mest, jezer, rek), zadnje objave na Twitterju ipd. Številske podatke moraš verjetno najprej transformirati, da dobiš bolj enakomerno porazdelitev. Namig: fizikalne meritve imajo običajno normalno porazdeljen šum. Če se podatki raztezajo čez več velikostnih redov, Benfordov zakon ([https://en.wikipedia.org/wiki/Benford%27s\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Benford%27s_law)) trdi, da je običajno enakomerno porazdeljen logaritem vrednosti oz. vsaj njegov neceli del.
14. V jedrski elektrarni med obratovanjem reaktorja v gorivu nastaja plin ksenon  $^{135}\text{Xe}$ , ki je najpomembnejši nevtronski "strup" med cepitvenimi produkti. Potek reakcij prikazuje diagram:



- Opazuj koncentraciji joda  $^{135}\text{I}$  in ksenona  $^{135}\text{Xe}$  pri konstantnem delovanju reaktorja ter pri časovno odvisnem nevtronskem fluksu (prižig ali zaustavljanje reaktorja, stopničasta odvisnost).
15. Trikotno mrežo tlakujemo s ploščicami, katerih trije robovi imajo prirejen "naboj"  $(-1, 0, 1)$  v treh možnih orientacijah in dveh različno sučnih različicah (v smeri urnega kazalca ali obratno). Interakcijska energija med sosedi naj bo zmnožek nabojev sovpadajočih robov. Razišči fazni diagram te snovi v odvisnosti od temperature za oba predznaka sklopitve. Predpostavi, da so vse ploščice sučne v istem smislu. Lahko dodaš zunanje polje v eni izmed glavnih smeri mreže.
  16. Razporejanje prenosa podatkov po omrežju. Za model omrežja vzemi  $N \times N$  kvadratno mrežo, vsak rob pa ima naključno maksimalno hitrost povezave med 0 in 1. Vozlišča na zgornjem robu so internetni odjemalci, spodnji rob so pa strežniki. V notranjih vozliščih velja 1. Kirchhoffov zakon. S pomočjo linearnega programiranja določi, kolikšne hitrosti prenosa imajo strežniki in odjemalci, ko je skupna hitrost prenosa največja. Ker gre za naključna omrežja, si oglej tudi statistično porazdelitev zanimivih količin.
  17. Po absorpcijsko-sipalnem modelu razišči učinek raznobarvnih slojev polprosojnih pigmentov različnih debelin na barvo odbite svetlobe. Za simulacijo izberi emisijski spekter svetila, absorpcijske spektre materialov in uporabi fiziološke odzivne funkcije očesa za določitev RGB vrednosti barv. Simuliraj barvo krogle absorpcijsko-sipalnega materiala v odvisnosti od kota med smerjo opazovanja in smerjo osvetlitve.
  18. Zajce in lisice postavi v enodimenzionalno sosesko šibko sklopljenih ekosistemov. Velja klasični model Lotka-Volterra, le da izbrani delež rodnostnega prispevka preselimo v sosednja ekosistema. Se kaj spremeni, če tudi lisice lahko žrejo zajce iz sosednjega ekosistema?
  19. Koeficienti linearne napovedi podajajo diferenčno prenosno funkcijo procesa in predstavijo fizikalni pojav kot sistem sklopljenih dušenih oscilatorjev. Naš signal je partikularna rešitev diferenčne enačbe kot odziva na specifično realizacijo belega šuma na vходу. Poišči posnetke različnih resonančnih pojavov, npr. zavijanje vetra, žuborenje potoka, zvok strune, zvok udarca po resonatorju kitare, en ton človeškega glasu. Poišči koeficiente linearne

napovedi in generiraj ter poslušaj odziv sistema na beli šum in na delta funkcijo, lahko pa tudi na kak drug signal: tako pridobljene modele resonatorjev lahko tudi zaporedno sestavljaš.

20. Razišči transformacije koeficientov linearne napovedi pri generiranju zvoka. Izberi nekaj vzorčnih signalov, pridobi njihove koeficiente linearne napovedi, ter skoznje predvajaj delta funkcijo, bel šum in še kakšen drug model šuma. Na koeficientih izvajaj naslednje transformacije: skaliranje dušenja (radialna komponenta) ter frekvence (polarna komponenta) ničel karakterističnega polinoma:  $z \rightarrow |z|^\alpha e^{i\beta \arg z}$ . Ali zvok pri tem ohranja svojo "barvo"? Lahko prenosno funkcijo spreminjaš zvezno?
21. Podobno kot zgoraj pridobi koeficiente linearne napovedi za različne pojave, predvsem pojave z nekaj jasno določenimi frekvencami (inštrumenti), in glej njihov odziv na bel šum na vhodu. Kaj se zgodi, če linearno interpoliraš koeficiente napovedi dveh različnih signalov? Kaj se dogaja z ničlami v kompleksni ravnini in kako to slišimo na zvoku na izhodu?
22. Z Metropolisovim algoritmom obravnavaj obnašanje periodične 2D mreže kock, kjer so edine dovoljene poteze zasuki dveh sosednjih kock okrog njune zveznice v nasprotnih smereh za  $90^\circ$ . Kocke so pobarvane s tremi različnimi barvami (nasprotne ploskve enake barve). Uvedi različne sklopitvene interakcije med barvami (možnih je 6 sklopitev) in razišči fazno obnašanje sistema pri različnih temperaturah.
23. Zajci, lisice in hrana v 2D: vsaka točka prostora ima vrednost iz intervala  $(0, 1)$ , ki pove nasičenost s hrano, z katero je sorazmerna rodnost zajcev, sorazmerno z novimi zajci pa hrane tudi zmanjkuje. Vsaka točka sledi Lotka-Volterrovim enačbam z dodatkom majhne verjetnosti za migracijo zajcev in lisic v sosednjo celico. Razišči obnašanje sistema za različne začetne pogoje.
24. Posplošeni Thomsonov problem: poišči stanja z najnižjo energijo za sistem delcev, ki imajo poleg naboja še fazo, tako da je meddelčna energija sorazmerna s  $\frac{\cos^2(\psi_1 - \psi_2)}{\|r_{12}\|}$ .
25. Postavi klasične elektrostatske dipole na trikotno mrežo in razišči lastnosti lokalnih minimumov elektrostatske potencialne energije. Preizkusi mreže različnih velikosti. Vsak dipol interagira z vsemi ostalimi. Poišči način za simulacijo čim boljšega približka razsežne mreže.
26. Enako kot zgoraj, na heksagonalni mreži (satovje).
27. Thomsonove babuške: razišči primer, ko imamo več kot eno koncentrično kroglo z razporejenimi točkastimi naboji.
28. V radioterapiji je poglobitveni problem načrtovanje doze obsevanja. Izvire sevanja je treba razporediti tako, da v predelih tumorja zagotovijo dozo, ki je večja od kritične doze za uničenje tkiva, v zdravem okoliškem tkivu pa naj bo prejeta doza čim manjša. Postavili bomo najpreprostejši 2D model: obsevanje z vzporednim snopom sevanja, ki ga enakomerno pomikamo prek tarče v dveh pravokotnih smereh. Pojemanje žarka v tkivu z globino zanemarimo.



Tumorsko področje smo označili senčeno, ostalo je zdravo tkivo. Puščice pomenijo posamezne diskretizirane snope sevanja. V gornji sliki  $6 \times 7 = 42$  celic so neznane količine jakosti  $6 + 7 = 13$  curkov. Vsaka celica prejme dozo, ki je vsota jakosti obeh curkov, ki se v njej križata. Za celice tumorja zahtevamo, da je ta vsota večja od kritične (ki jo uporabimo za enoto), za zdrave pa zahtevamo, da je njihova skupna prejeta doza čim manjša. V duhu linearnega programiranja je tudi obratna formulacija (ki pa manj ustreza radiološkim zahtevam): v vsaki od zdravih celic naj bo prejeta doza manjša od enote, skupna doza v tumorskih celicah pa čim večja. Eksperimentiraš lahko še s preprostejšimi obsevalnimi polji ali pa tudi z bolj zahtevnimi, ki terjajo več snopov in s tem več spremenljivk.

29. Preuči Thomsonov problem na površju prevodne kocke in razišči prehod v limito zvezne porazdelitve naboja.
30. Na velikem travniku z detektorjem sevanja iščemo izgubljen radioaktivni vir. Z meritvijo hitrosti doze na nekaj različnih mestih je mogoče ugotoviti lokacijo vira. Koliko merskih točk je potrebnih za določitev vira? Kako je natančnost lege vira odvisna od natančnosti koordinat merilnih mest? Upoštevaj tudi, da je število detektiranih sunkov v izbranem časovnem intervalu porazdeljeno po Poissonovi porazdelitvi.
31. Energijska in kotna porazdelitev elektronov okrog sevalca  $\beta$  ( $^{90}\text{Sr}$ ) s polkrogelno geometrijo (polmer 1 mm).
32. Curek nevtronov (monokromatskih ali s hitrostmi, porazdeljenimi maxwellsko) vpada pravokotno na dve tesno staknjeni plasti redkejšega materiala (izolacija) in gostejšega materiala (kovina). Preuči energijsko in kotno porazdelitev (povratno) sipanih nevtronov v odvisnosti od sipalnih in absorpcijskih lastnosti obeh snovi. (Metoda za odkrivanje korozijskih poškodb v cevovodih zaradi prisotnosti vode v izolacijskem plašču ali pod njim.)
33. Sledimo gibanju delca, ki izgine za zaslon in se čez čas spet prikaže na drugi strani zaslona. Kako vrsta gibanja (na primer poševni met, nihanje) in jakost šuma (negotovi izmerki lege, preden zaslon zakrije delec) vplivata na uspeh napoved lege delca z uporabo Kalmanovega filtra?
34. Z raketo zemlja-zrak želimo sestreliti sovražno letalo, ki enakomerno kroži po nebu. Raketa z vgrajeno radarsko napravo sledi letalu, računa razdaljo in kot do letala ter ustrezno prilagaja smer letenja. Z uporabo Kalmanovega filtra preuči, kaj ključno vpliva na ekstrapolacijo trajektorije rakete in uspešnost zadetka.
35. Prepoznava obrazov z uporabo lastnih obrazov in razcepa na singularne vrednosti.
36. "Shazam": Študiraj spektre časovnih izsekov izbrane glasbe in poišči način za *hitro* prepoznavanje glasbe. Od česa je odvisen uspeh prepoznavanja glasbe?
37. Izkoristek Geiger-Müllerjeve cevi ima močno energijsko odvisnost, ki jo kompenziramo tako, da števec obdamo z ovojem iz kovin z različnimi absorpcijskimi lastnostmi (energijsko odvisni absorpcijski koeficienti). Poišči ovoj, ki naredi energijski odziv Geiger-Müllerjevega detektorja karseda enakomeren.
38. Poišči model, ki najbolje opiše izmerjene vrednosti nabojnega oblikovnega faktorja protona. v odvisnosti od gibalne količine  $Q^2$  in določi nabojni polmer protona. Meritve so dostopne na: <https://arxiv.org/format/1307.6227>.
39. Sestavi model za opis magnetnega spektrometra, ki iz dveh izmerjenih leg ( $x_{\text{Fp}}, y_{\text{Fp}}$ ) in dveh kotov ( $\vartheta_{\text{Fp}}, \varphi_{\text{Fp}}$ ) kar najbolje rekonstruira relativno gibalno količino delca:

$$(x_{\text{Fp}}, \vartheta_{\text{Fp}}, y_{\text{Fp}}, \varphi_{\text{Fp}}) \rightarrow \delta_{\text{Tg}}$$

40. Skonstruiraj in nauči nevronske mreže, ki posnema magnetni spektrometer in iz dveh izmerjenih leg ( $x_{\text{Fp}}, y_{\text{Fp}}$ ) ter dveh kotov ( $\vartheta_{\text{Fp}}, \varphi_{\text{Fp}}$ ) kar najbolje rekonstruira relativno gibalno količino delca:

$$(x_{\text{Fp}}, \vartheta_{\text{Fp}}, y_{\text{Fp}}, \varphi_{\text{Fp}}) \rightarrow \delta_{\text{Tg}}$$

41. Aktivni del visokoločljivega germanijevega spektrometra lahko modeliramo s 5 cm visokim in 5 cm širokim valjem germanija, ki je skrit v 1 mm debel plašč aluminija. Pod detektor (vzdolž osi valja) postavimo različne radioaktivne vzorce, ki vsebujejo radioaktivni  $^{137}\text{Cs}$ . Preuči, kako je izkoristek spektrometra za detekcijo žarkov gama iz vzorca odvisen od oddaljenosti, oblike in velikosti vzorca.