

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Linearno programiranje

2. naloga pri Modelske analizi 1

Avtor: Marko Urbanč (28232019)
Predavatelj: prof. dr. Simon Širca
Asistent: doc. dr. Miha Mihovilovič

17.10.2023

Kazalo

1 Uvod	2
2 Naloga	2
3 Opis reševanja	3
3.1 PuLP: basic cookbook	3
4 Rezultati	5
4.1 Osnovni model	5
4.2 Osnovni model brez omejitve mase	5
4.2.1 Osnovni model z omejitvijo mase	6
4.2.2 Osnovni model z omejitvijo mase in dodatnimi omejitvami	7
4.3 Dieta z manj maščobami	9
4.3.1 Dieta z manj maščobami in brez omejitvije mase	9
4.3.2 Dieta z manj maščobami z dodatnimi omejitvami	10
4.3.3 Dieta z manj maščobami in omejitvijo mase	10
4.3.4 Dieta z manj maščobami, omejitvijo mase in dodatnimi omejitvami	11
4.4 Opmizacija cene	12
4.4.1 Čim cenejša dieta, ki zadosti osnovnim potrebam	12
4.4.2 Čim cenejša dieta, z dodatnimi zahtevami	13
4.4.3 Čim cenejša dieta, z dodatnimi zahtevami in omejitvijo kalorij	13
4.4.4 Namenski bon za 15 EUR	13
4.4.5 Namenski bon za 15 EUR z dodatnimi zahtevami in omejitvijo mase	14
5 Komentarji in izboljšave	14
Literatura	16

1 Uvod

Linearna optimizacija je zadnje čase zelo vroča tema, tako da me veseli, da sem se je lahko lotil tudi sam. Linearno programiranje oz. linearna optimizacija je metoda za iskanje maksimuma ali minimuma linearnega izraza, ki je podvržen linearnim omejitvam. Omenjen linearni izraz je funkcija več spremenljivk, ki najpogosteje ovrednoti oz. oceni neko količino, ki jo želimo optimizirati. To je lahko npr. dobiček, strošek, količina proizvodnje, itd. zato to funkcijo imenujemo **cost function** oz. **objective function**. Linearno programiranje je torej metoda, ki nam omogoča, da z linearno funkcijo in linearimi omejitvami poiščemo optimalno rešitev. Uporablja v različnih panogah, kot so ekonomija, logistika, telekomunikacije, transport, kot pa tudi v znanosti, kot je npr. fizika.

Torej če si to pogledamo v matematični notaciji imamo našo cost funkcijo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, definirano kot neko linearno kombinacijo spremenljivk:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n . \quad (1)$$

in set vezi, ki so pogosto izražene kot neenačbe:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 , \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m . \end{aligned} \quad (2)$$

To je pravzaprav to kar se tiče matematičnega opisa osnovnega problema. Seveda so potem izvedenke postopkov oz. algoritmov malo bolj zapletene, ampak to žal ni namen te naloge.

Dotično pri tej nalogi si bomo pogledali problem optimizacije diete. Posebna omemba ni potrebna, kako pomembno je to, da se prehranjujemo zdravo in uravnoteženo. Vendar pa je to v današnjem času vse težje, saj je na voljo ogromno različnih živil, ki so vse prej kot zdrava. Zato je toliko bolj pomembno, da se zavedamo, kaj jemo in da se prehranjujemo zdravo. Vendar pa je to včasih težko, saj je veliko ljudi prezaposlenih in nimajo časa, da bi se ukvarjali s tem. Skratka ideja je taka, da bomo za dane želje kar se tiče hranilnih snovi, poskusili najti optimalno dieto. Optimalno pa je tu mišljeno v tem smislu, kot ga uporabnik določi. Zagotovo bo razlika med tem, ali se minimizira količina hrane, ki jo je potrebno pojesti, cena hrane, količina določene hranilne snovi ali pa kalorična vrednost.

2 Naloga

Naloga torej zahteva, da za dano tabelo živil in njihovih hranilnih vrednosti, najdemo optimalno dieto, kjer minimiziramo kalorije, če zahtevamo sledeče:

1.
 - Vsaj 70 g maščob
 - Vsaj 310 g ogljikovih hidratov

- Vsaj 50 g proteinov
- Vsaj 1000 mg kalcija
- Vsaj 18 mg železa
- Dnevni obroki naj ne presežejo 2000 g

Ta osnovni model lahko potem nadgradimo s tem da dodamo še:

- Vsaj 60 mg Vitamina C
 - Vsaj 3500 mg Kalija
 - Med 500 mg in 2400 mg Natrija
2. Potem pa poglejmo kako se rezultat razlikuje še zahtevamo vsaj 2000 kcal in minimiziramo vnos maščob.
 3. Minimizirajmo zdaj ceno diete
 4. Dodatne izvedbe omejitev za izboljšave uravnoteženosti diete

3 Opis reševanja

Reševanja sem se lotil v klasično v Pythonu. Pri tej nalogi je močno prišel v upoštev pythonian princip, da za vse že obstaja neka knjižnica. In res je tako, za reševanje linearne optimizacije obstaja knjižnica PuLP, ki je zelo enostavna za uporabo in ima še kar solidno dokumentacijo. Pravzaprav je njihov prvi demonstracijski zgled zelo podoben našemu, z razliko da oni mešajo meso v mačji hrani. Poleg tega pa seveda pridejo zraven še standardni `numpy`, `pandas` in takrat zaradi malo alterative izbire vizualizacije še `holoviews`.

3.1 PuLP: basic cookbook

Kot sem že omenil, je knjižnica PuLP zelo enostavna za uporabo. Lahko na hitro povzamem postopek ker tako ali tako trenutno čakam, da se mi predprocesirajo podatki za (hopefully uspe) zadnji del naloge. Torej začnemo s tem da uvozimo knjižnico in definiramo problem.

```
from pulp import *
import pandas as pd

# Create the "prob" variable to contain the problem data
prob = LpProblem("Diet Problem", LpMinimize)
```

Sledi nalaganje podatkov iz tabele živil in ustvarjanje spremenljivk. Spremenljivke so v tem primeru količina živila, ki ga bomo pojedli.

```

df = pd.read_table('Data/table.dat', sep=',', skiprows=2, index_col=0)

# Create a list of the food items
food_items = list(df.index)

# Create variables. These variables are the amounts of each food item to
# buy
food_vars = LpVariable.dicts("Food", food_items, lowBound=0,
                             cat='Continuous')

```

Okay sedaj pa definiramo še našo cost funkcijo. V tem osnovnem primeru bo to količina kalorij, ki jih bomo zaužili.

```

# Define objective function and add it to the problem
prob += lpSum([df.loc[i, 'Energija[kcal]'] * food_vars[i] for i in
              food_items]), "Total energy intake per person"

```

Zelo praktično je, da v bistvu kar prištevamo izraze k našemu problemu. Tako lahko zelo enostavno dodajamo vezi. Storimo to.

```

# And now we can add the constraints
prob += lpSum([df.loc[i, 'Mascobe[g]'] * food_vars[i] for i in
              food_items]) >= 70, "FatRequirement"
prob += lpSum([df.loc[i, 'Ogljikovi_Hidrati[g]'] * food_vars[i] for i in
              food_items]) >= 310, "CarbohydrateRequirement"
prob += lpSum([df.loc[i, 'Proteini[g]'] * food_vars[i] for i in
              food_items]) >= 50, "ProteinRequirement"
prob += lpSum([df.loc[i, 'Ca[mg]'] * food_vars[i] for i in food_items])
              >= 1000, "CalciumRequirement"
prob += lpSum([df.loc[i, 'Fe[mg]'] * food_vars[i] for i in food_items])
              >= 18, "IronRequirement"
prob += lpSum([100 * food_vars[i] for i in food_items]) <= 2000,
              "MassLimit"

```

Zdaj ko smo model tako lepo definirali je smiselno, da ga tudi spravimo v datoteko. Nato pa kličemo reševanje. PuLP bo sam poskrbel za izbiro algoritma, ki bo najbolj primeren za naš problem.

```

model_name = "diet-model_no-weight-con.lp"
prob.writeLP(f"Models/{model_name}")

# Slove the problem
prob.solve()

```

In na koncu še spravimo rešitev v neko obliko, ki jo lahko potem uporabimo za vizualizacijo.

```

# Save the solution to a file with numpy
var_names = np.array([v.name for v in prob.variables()])
var_values = np.array([v.varValue for v in prob.variables()])
solution = np.column_stack((var_names, var_values))

np.savetxt(f"Solutions/{model_name}-sol.dat", solution, delimiter=",",
→ fmt="\%s", header="Item,Value")

```

Če bi nas zanimalo še takojšnje ovrednotenje lahko z spodnjim blokom kode izpišemo nekaj uporabnih informacij.

```

# Print the status of the solution
print("Status:", LpStatus[prob.status])

# Print the optimal solution
for v in prob.variables():
    print(v.name, "=", v.varValue)
print("Total energy intake per person = ", value(prob.objective))

```

Od tod naprej pa lahko poljubno zapletemo vezi (dokler ostanejo linearne seveda) ali pa spremenimo vhodne podatke.

4 Rezultati

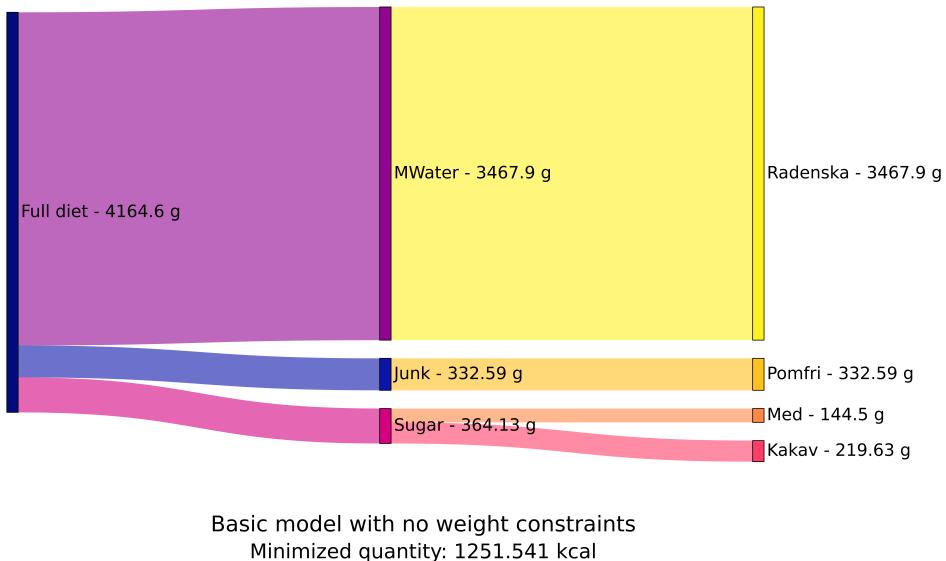
Tole poročilo bo res med krajšimi, kar sem jih napisal, kar se tiče surove vsebine, ampak dejstvo je, da je narava naloge taka, da gremo lahko takoj na zabavne rezultate.

4.1 Osnovni model

4.2 Osnovni model brez omejitve mase

Najprej si poglejmo rezultate osnovnega modela, kjer ne omejujemo mase. Torej lahko pojemo kolikor želimo. Rezultati so prikazani na sliki (1).

Radenska really does give you three hearts!



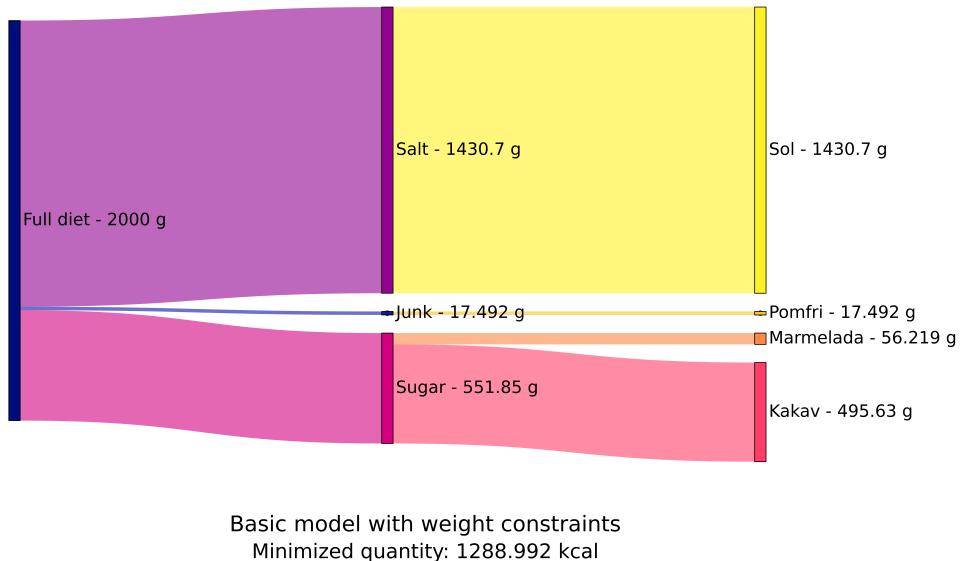
Slika 1: Osnovni model brez omejitve mase

Tu smo dobili znanstveni dokaz, da nam radenska res da tri srčke. Presenetljivo številke niso tako nerealistično velike kot bi lahko bile in kot bomo videli, da bodo, tako da bi dieta, ki bi slonela na radenski, pomfriu, medu in kakavu lahko bila še kar obetavna. Radenska je fenomenalna izbira, ker optimiziramo kalorije, ki jih zaužijemo. Voda ie. radenska pa ima zelo malo kalorij, tako da je to zelo dobra izbira, hkrati pa ima neko količino mineralov, ki jih potrebujemo in tako prevlada v izboru.

4.2.1 Osnovni model z omejitvijo mase

Sedaj pa si poglejmo še rezultate, kjer omejujemo maso na 2000 g. Rezultati so prikazani na sliki (2).

Salt supremacists unite. For rock and stone!



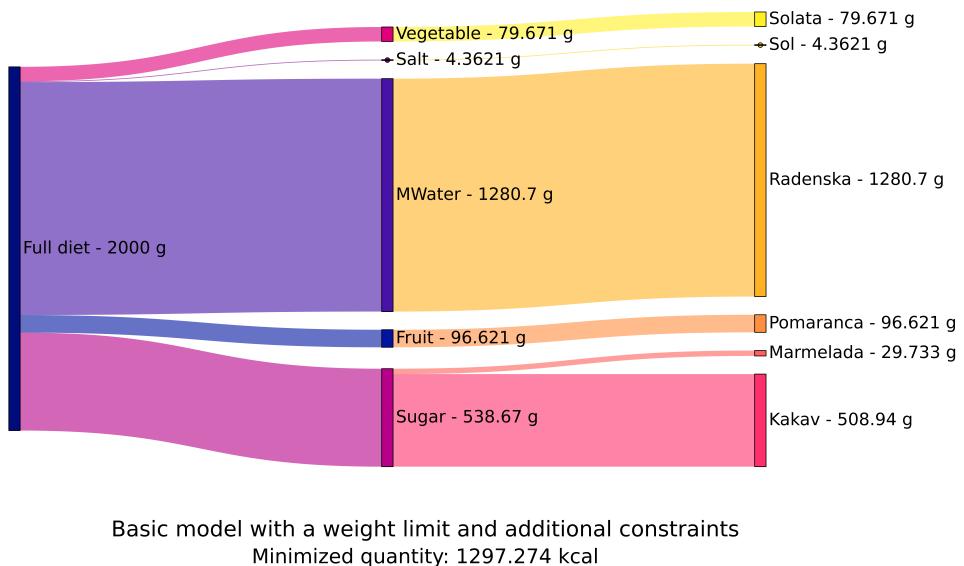
Slika 2: Osnovni model z omejitve mase

Meni se zdi neznosno amusing rezultat, da je glede na naše preproste vezi, optimalna dieta takšna, da se pravzaprav ubiješ s soljo. Dodatno pa ješ kakav za mineralni vnos. To bi lahko bil jedilnik astronautov v distopični prihodnosti, kjer smo nekako ugotovili, kako varno lahko jemo ogromne količine soli. Simpatično je, da imamo tudi za okras in okus malo pomfrija. Mogoče so pa to your average *Mc D's* pomfriji, kjer je verjetno brez šale na 17 g pomfrija 1.4 kg soli. Sicer pa verjetno je tu argument podoben kot pri radenski. Kar naenkrat rabimo nekaj kar je mineralno bolj gosto in kaj je boljše kot mineralna voda? Mineral sam. Tudi sol ima precej nizko kalorično vrednost, tako da je to zelo dobra izbira. O smrtnih posledicah hipernatriemije pa ne bi.

4.2.2 Osnovni model z omejitvijo mase in dodatnimi omejitvami

Zdaj pa izključimo to zoprno sol in dodajmo še tiste dodatne omejitve, kjer si postavimo nek smiselen interval za količino natrija v naši hrani. Ob tem pa lahko še dodamo par vezi, ker lahko. Rezultati so prikazani na sliki (3).

A 'passable' diet



Slika 3: Osnovni model z omejitve mase in dodatnimi omejitvami

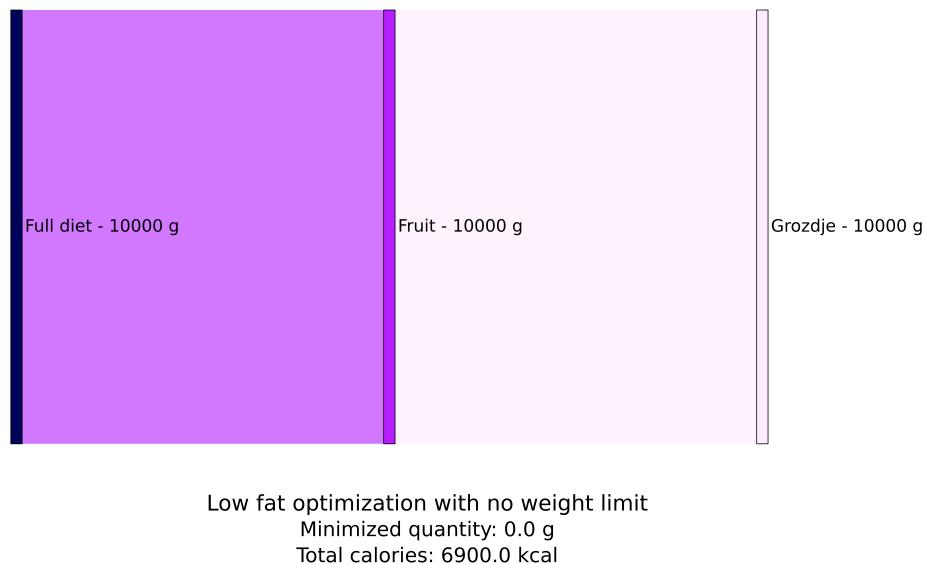
Opa, to pa je že nekaj kar bi lahko človek rekel, da je popolnoma passable. Dober liter radenske se ne zdi pretiravanje, če te mehurčki ne motijo. Potem pa malo solate, malo sadja in seveda (tukaj odpove heh..) pol kile kakava. Očitno sta kakav in radenska še vedno zelo kalorično učinkovita.

4.3 Dieta z manj maščobami

4.3.1 Dieta z manj maščobami in brez omejitvije mase

Zamaščena jetra? Ni problema! Naši eksperti (opice za računalnikom) so pravili dieto ki bo vaša jetra očistila v trenutku. Rezultati so prikazani na sliki (4).

Fatless with boring grapes



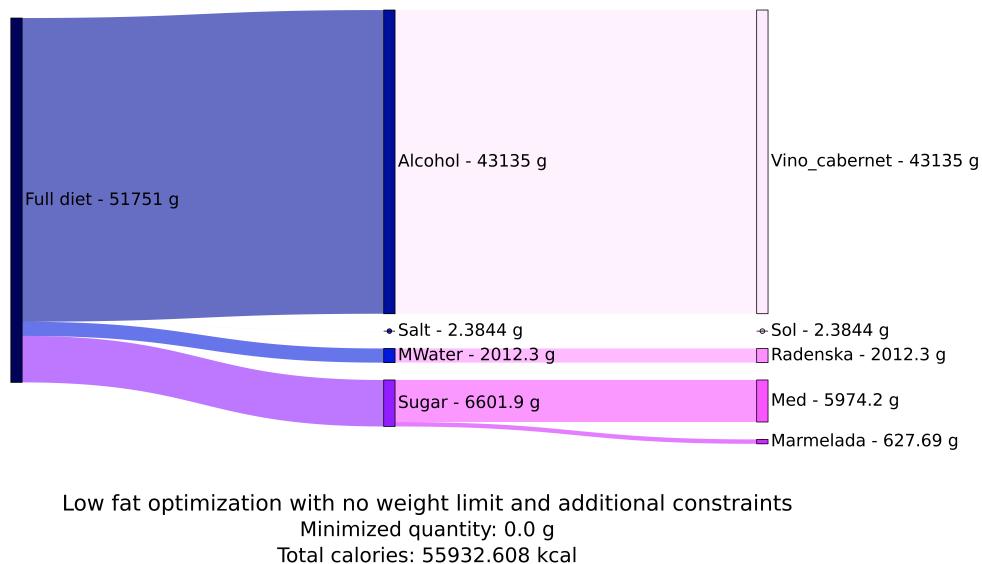
Slika 4: Dieta z manj maščobami in brez omejitvije mase

Enkratno. Ena gajba grozdja na dan in boste kot novi. Šalo na stran je zanimivo, da je za naše osnovne omejitve očitno grozdje dovolj hranilno v vseh kategorijah, če ga poješ dovolj. To je torej prava space-age hrana. Or rather nek koncentrat grozdja.

4.3.2 Dieta z manj maščobami z dodatnimi omejitvami

Ojoj zdravnik vam je rekel, da imate zamaščena jetra zaradi prekomernega pijača alkohola. Pa kolega, res ni problem. Naši pridni eksperti imajo tudi za to popolno dieto. Rezultati so prikazani na sliki (5).

Fatless with lots o' fun grapes: An alcoholics paradise



Slika 5: Dieta z manj maščobami z dodatnimi omejitvami

Saj vete kako pravijo eh? *Klin se s klinom zbijja, kaj ti škodi še liter vina?*. You heard correctly, efekte svoje crippling zasvojenosti z alkoholom lahko po naši briljantni dieti odpravite s tem, da pijete še več alkohola. Pri tej dieti nikoli ne bote lačni saj je kalorično zelo učinkovita in garantiramo vam, da se vam bo zdel svet takoj lepši. Zabavno mi je, da se spet pojavi grozdje, le v drgačni obliki. Očitno je, da je grozdje res superhrana.

4.3.3 Dieta z manj maščobami in omejitvijo mase

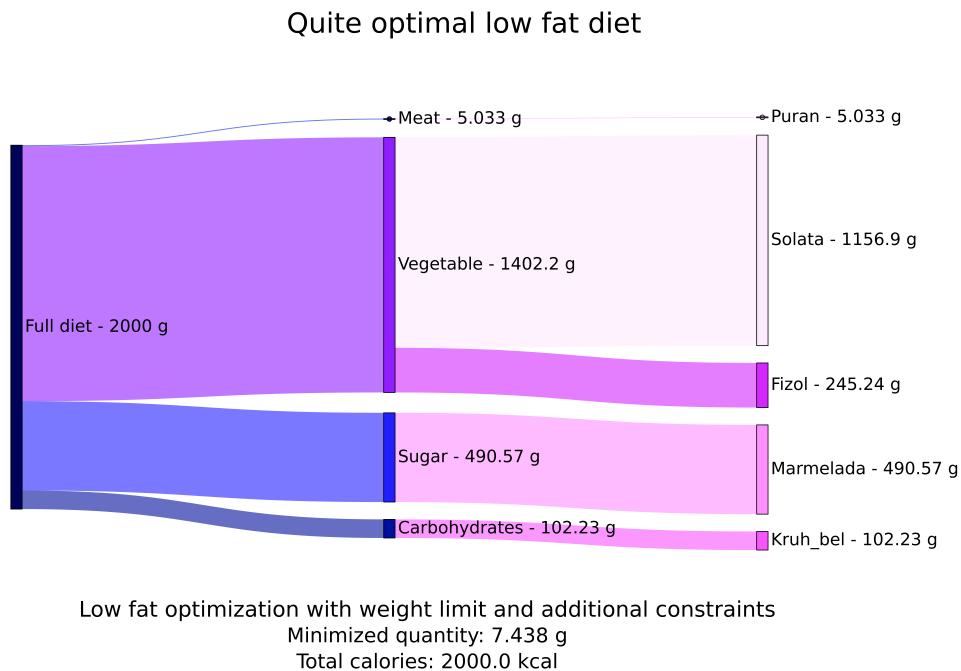
Zaradi več pritožb strank, da se počutijo, kot da se prenajedajo (in morebitno kakšne smrti zaradi zastrupitve z alkoholom) smo našim opicam.. ah mislim ekspertom razložili približno koliko banan lahko tipičen človek poje na dan. Skovali so dieto, ki je prikazana na sliki (??).

Ah ja, fantastično. Solata z marmelado je v nekaterih državah verjetno že tradicionalna jed in lepo je, da naši eksperti pustijo tudi nekaj lean mesa, kot je puran. Opazka tu je, da se grozdje sploh ne pojavi več. Očitno je super le za

neomejeno dieto, a v bolj realističnem primeru je gostota hranih snovi prenizka.

4.3.4 Dieta z manj maščobami, omejitvijo mase in dodatnimi omejitvami

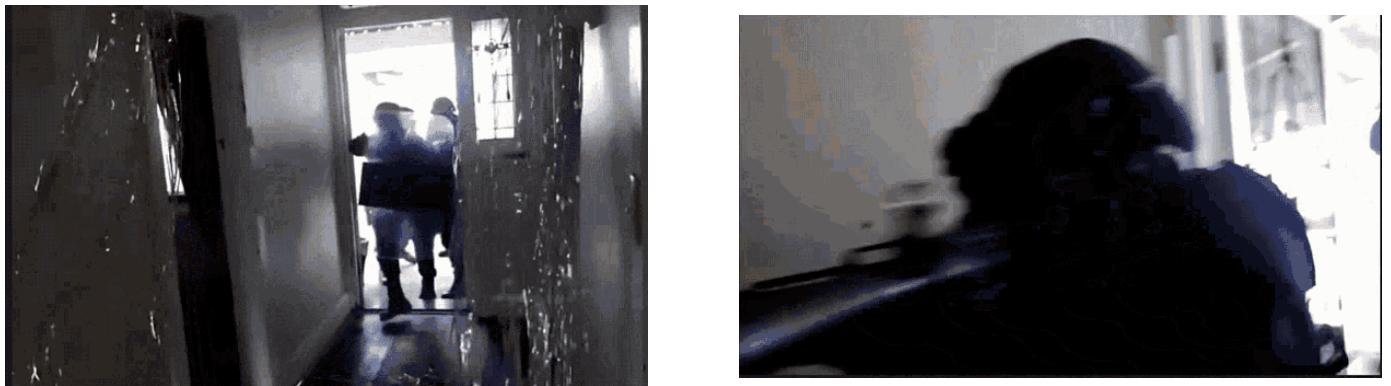
Za naše zveste stranke smo prejšno uspešnico diete z manj maščobami še malo izboljšali. Glavna pritožba je bila, da vsebuje bistveno preveč sladkorja. Zdaj inzulin se menda lahko vedno samo vbrizga v žilo, tako da to ni res problem, ampak vseeno. Rezultati so prikazani na sliki (6).



Slika 6: Dieta z manj maščobami, omejitvijo mase in dodatnimi omejitvami

S to izboljšavo boste jedli še bolj zdravo saj boste lahko zaužili še 75 g fižola več. Žal pa se bo treba odpovedati večini purana. Ampak ker so eksperti milostljivi so ga pustili za eno čajno žličko, da je za okus na koncu. Kakšnih drastičnih sprememb ni, le malo smo prerazporedili količine hrane..

Tok. Tok. Dum. FBI open up!



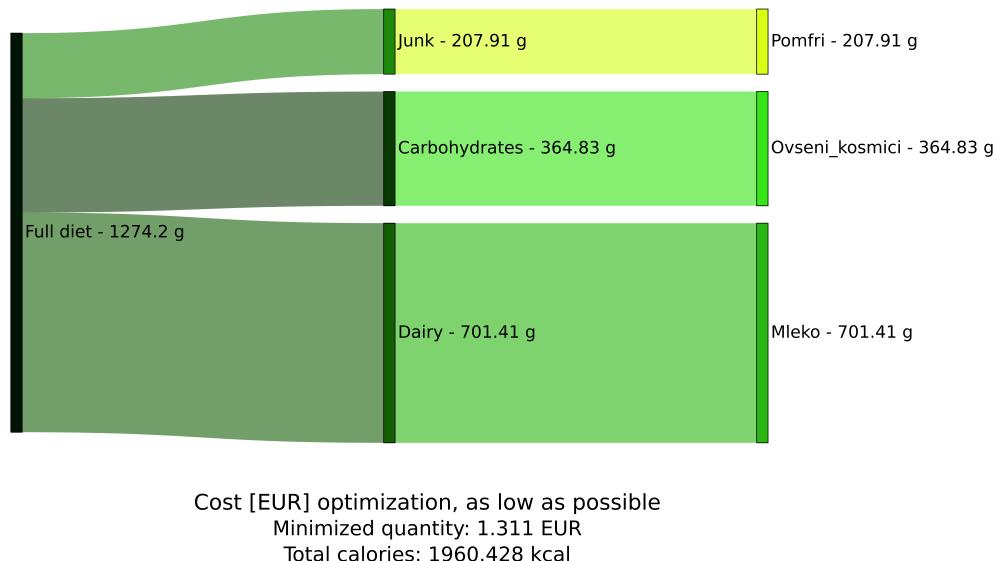
Oh shit aaaa hitro skrij opice. Beživa!

4.4 Opmizacija cene

4.4.1 Čim cenejša dieta, ki zadosti osnovnim potrebam

Poiskimo čim cenejšo dieto, ki zadostuje osnovnim potrebam kar se tiče hraničnih snovi. Rezultat je prikazan na sliki (7).

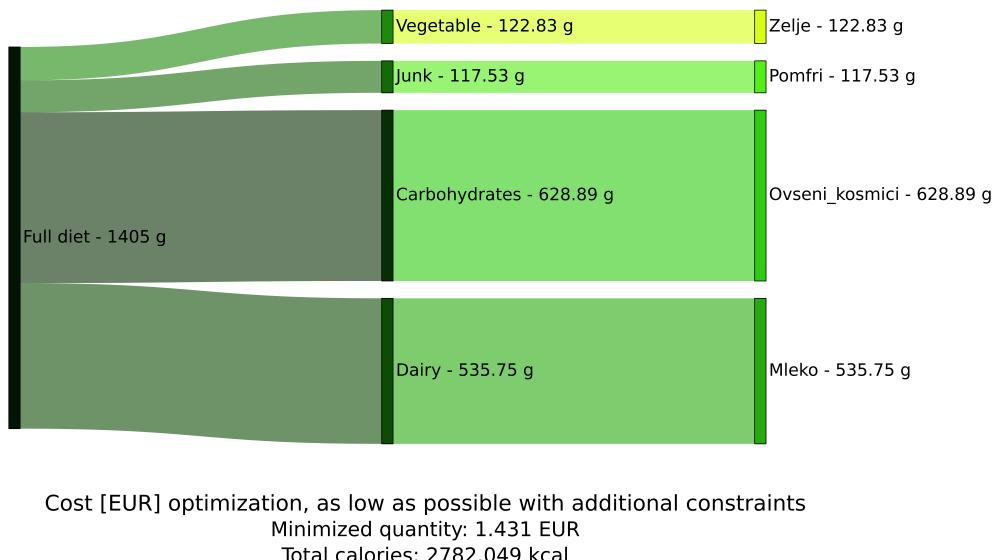
Mleko in ovseni kosmiči, a kalorije so višje



Slika 7: Čim cenejša dieta

Hja.. pravzaprav je kot nekako pričakovano. Ovseni kosmiči in mleko sta res med cenejšima izdelkoma in za zagotovitev soli še ena majhna porcija pomfrija, ki je tudi še kar cenjen. Kar je tudi vredno omembne je, da so kalorije za takšno

Kalorično prekomerna prehrana



Slika 8: Čim cenejša dieta z dodatnimi zahtevami

dieto takoj višje, kar je znan efekt v dandanašnjem svetu. Dejansko je ceneje jesti nezdravo hrano.

4.4.2 Čim cenejša dieta, z dodatnimi zahtevami

Poglejmo še kaj bi dobili, če bi zraven še upoštevali še naše dodatne zahteve. Rezultat je prikazan na sliki (8). Kar smo zdaj dobili je hranilno bolj popolno, a bi bilo na dolgi rok, vsaj za večino ljudi, škodljivo saj vsebuje preveč kalorij.

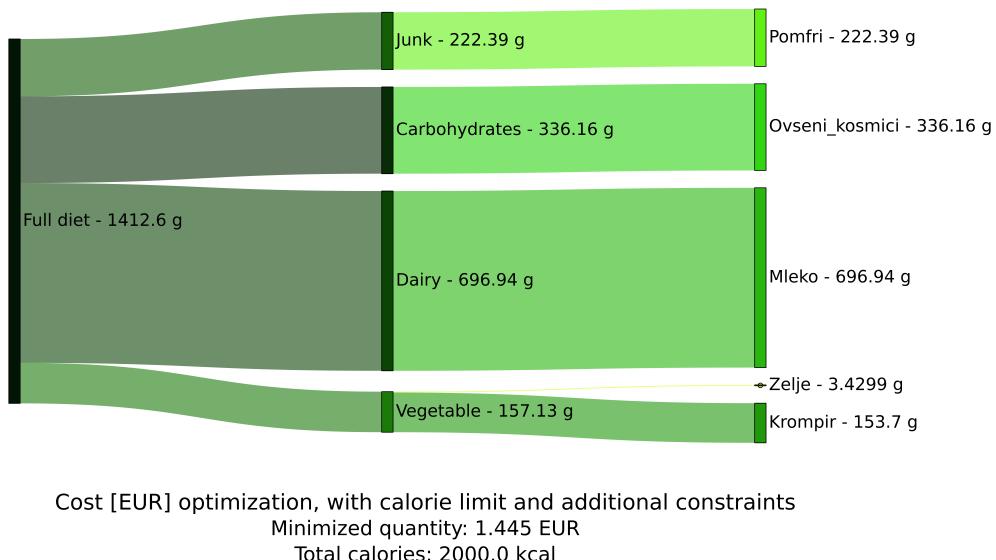
4.4.3 Čim cenejša dieta, z dodatnimi zahtevami in omejitvijo kalorij

Kot rečeno prejšnja dieta vsebuje preveč kalorij, torej lahko to poskusimo praviti, tako da omejimo kalorije. Rezultat je prikazan na sliki (9). In tu smo dobili nekaj kar je popolnoma uporabno. Vsaj meni se zdi upgrade no-brainer, ker z to dieto lahko jemo po omejitvi kalorij in to le za dober cent na dan več. Zdaj vprašanje je bolj če bi ta cent razlike se res ohranil, ker se običajno različne količine hrane v resnicni prodajajo po različnih cenah, torej če bi npr. kupili manj mleka, bi bilo to verjetno dražje.

4.4.4 Namenski bon za 15 EUR

Od šefa v službi smo prejeli namenski bon za 15 EUR v naši najljubši živilski trgovini. Kaj bi bilo najbolj optimalno, da kupimo. Rezultati osnovnih zahtev

Sprejemljiva poceni dieta



Slika 9: Čim cenejša dieta z dodatnimi zahtevami in omejitvijo kalorij

so prikazani na sliki (10).

Ah ja tu bi se zabavali. Tako dieto bi vam priporočal moj daljni stric iz devete vasi v Ameriki (za katerega sem slišal, da so ga ravno zaprli.. nekaj z nekimi opicami in reklamami). Kakorkoli, tu se spet pojavi grozdje, ker nisem dal omejitve na maso. Overall bi sicer bila to kar slaba dieta, ampak bi bil človek mogoče preveč pijan, da bi opazil.

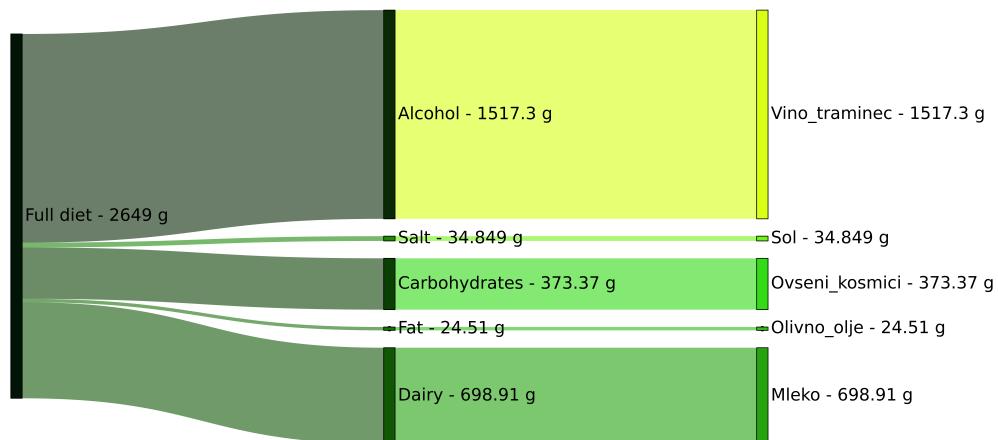
4.4.5 Namenski bon za 15 EUR z dodatnimi zahtevami in omejitvijo mase

Kaj pa če bi zraven še upoštevali naše dodatne zahteve in omejili maso. Rezultati so prikazani na sliki (11).

Ej takšno dieto bi pa tudi jaz z veseljem jedel. Losos je super, brokoli je mega in edamec je tudi fin. Zraven pa skuhaš kašo iz ovsenih kosmičev. To je verjetno najbolj kalorično učinkovita dieta, ki sem jo dobil thus far, saj je hrane vse skupaj manj kot kilogram, pa kljub temu presežemo 2000 kcal. Grozno kako hitro se kalorije naberejo.

5 Komentarji in izboljšave

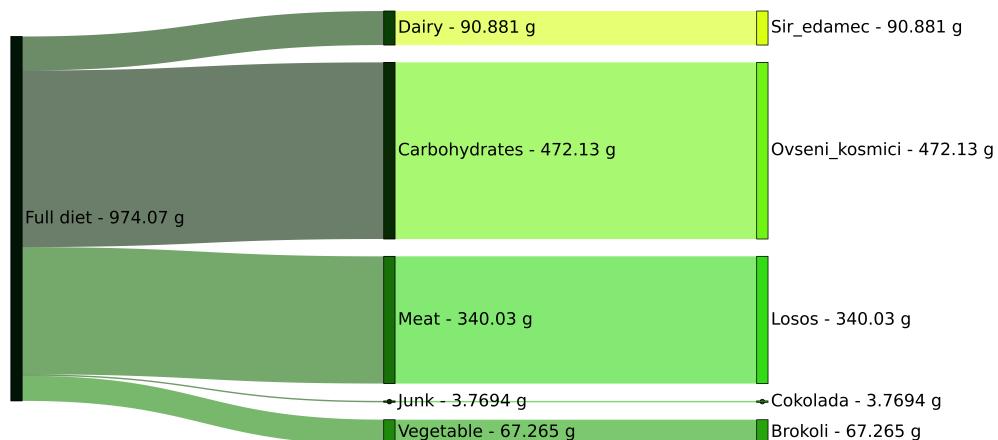
Vina in mleka naj teče reka



We're forced to spend at least 15 EUR on food
 Minimized quantity: 15.0 EUR
 Total calories: 3257.968 kcal

Slika 10: Namenski bon za 15 EUR

Kupil bi losos



We're forced to spend at least 15 EUR on nutritional food (additional constraints)
 Minimized quantity: 15.0 EUR
 Total calories: 2593.527 kcal

Slika 11: Namenski bon za 15 EUR z dodatnimi zahtevami in omejitvijo mase

Literatura