Naključna števila → Pseudonaključna

res naključno: npr. jedrski razpad

fourmilab.ch/hotbits

Toda ko generiramo tako št.

→ res naključno?

→ kako so porazdeljena?

→ Uporabljamo algoritme, ki so 100% deterministični

Običajni generatorji oblike:

$$X_{i+1} = f(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k+1})$$

- Vsako tako zaporedje se ~~ponavlja~~ čez čas ponovi → perioda generatorja (običajno to ni problem)
- množica začetnih vrednosti seme/seed

Prototip vseh gen.: Linearni kongruenčni (LCG)

$$X_{i+1} = (a X_i + b) \bmod m$$

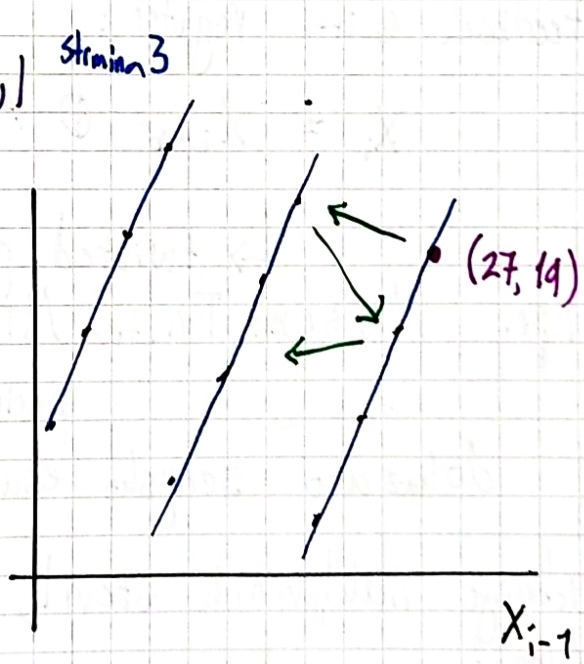
koeficient (a), inkrement (b), ↳ modul (m)

$$u_i = \frac{X_i}{m} \qquad u_i \sim U(0,1) \qquad u_i \in [0,1)$$

Recimo seme $X_0 = 27$ ← izberemo

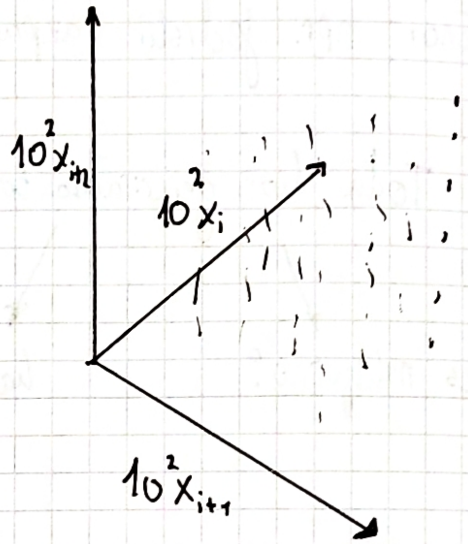
$$X_i = 3X_{i-1} \bmod 31$$

Perioda je 15 števil



Na listu kocka z mrežo; Bila narisana z LCG z parametri:

$$X_0 = 12345$$
$$a = 1103515245$$
$$b = 123454$$
$$m = 2^{32}$$



Od dobrega generatorja bi radi:

Standardni generator v libc

→ nekorelirana zaporedja
$(x_i, x_{i+1}, \dots)$ neodvisni "čim dlje"

→ čim bolj enakomerno polnjenje hiperravnin v hiperkockah (Serijska enakomernost zap.)
To je običajno pomembnejše od velike periode.

Feedback shift register:

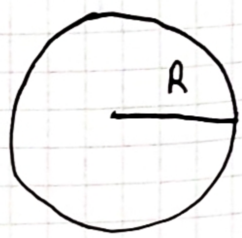
$$X_i = X_{i-p} \oplus A X_{i-p+q}$$

↳ twisted general feedback shift register

npr. Mersenne Twister MT19937
perioda $= 2^{19937} - 1$
dokazano serijsko enakomeren do $k = 623$.

Žrebanje naključnih števil, homogeno porazdeljenih po krogu:

$$\frac{dP}{dS} = \frac{1}{\pi R^2} \rightarrow \frac{1}{\pi} = \frac{dP}{r\,dr\,d\phi} = \frac{dP}{\frac{1}{2} d(r^2)\, d(\frac{\phi}{\pi})}$$
$$= \frac{dP}{d(r^2)\, d(\phi/2\pi)}$$



Potem:

$\xi_i \sim U(0,1)$

$r_i = \sqrt{\xi_i}$ ← ta koren ljudje pozabijo

$\phi_i = 2\pi \xi_i$

Po notraj krogli:

$$dV = \underbrace{r^2 dr}_{\frac{1}{3} d(r^3)} \, d(\cos\theta)\, d\phi$$

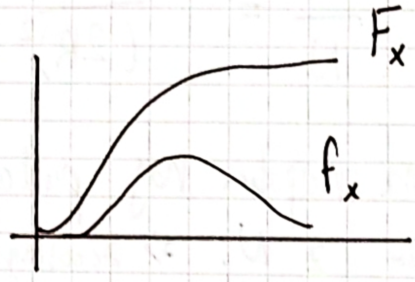
$r_i = \sqrt[3]{\xi_i}$ $\quad \uparrow \in [0,1]$

$\theta_i = \arccos(2\xi_i - 1)$

$\phi_i = 2\pi \xi_i$

Žrebanje po poljubnih porazdelitvah

i) Metoda z inverzom



žrebali bi radi po f_x (= gostoti)

$$y = F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt$$

Vzamemo inverzno funkcijo:

$$x = F_X^{-1}(y)$$

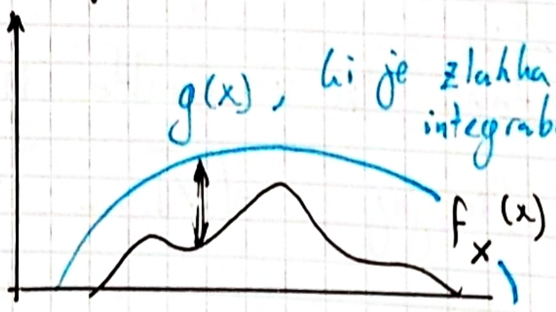
$\uparrow \sim U(0,1)$

Npr. $e^{-\lambda x}$

$\downarrow$

$-\frac{1}{\lambda}\log(1-U) \rightarrow \frac{1}{\lambda}\log U$

ii) Z zavračanjem (Verjetnost knjiga dodatek c2 / rejection method)



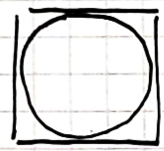
Buffon

$$P(\text{sekamo črto}) = \frac{2L}{\pi D} = \frac{n}{N}$$

seka

\# vseh metov

$$\hat{\theta} = \frac{2LN}{Dn} \simeq \pi \quad \text{za} \quad n \gg 1$$



$x_i^2 + x_i^2 \leq 1$ pogoj za preživetje

$$\frac{n}{N} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{4n}{N}$$

Relativna napaka naj pada korensko z N. $\Rightarrow$ Scaling

d-dim. hiperkocka $V_d^{\square} = (2R)^d$

žrebaj 100 dim

d-dim. hiperkrogla $V_d^{\circ} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} R^d$

Preverjamo:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_d^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{N} V_d^{\square} \to V_d^{\circ} \quad \text{za} \quad n \gg 1$$

Naredi 1. nalogo v N dim.

1.

Zapri lik v škatlo in žrebaj po njej.

Preverjaj $\sqrt{|x|} \ldots \leq 1 \Rightarrow n{+}{+},\ N{+}{+}$

$> 1 \Rightarrow N{+}{+}$

To je samo 3d posplošitev integracije tipa:

$$\Theta = \int \underbrace{g(x)}_{\text{integrand}} \underbrace{f(x)\,dx}_{\text{verj. gost.}}$$

če hočemo to žrebati, moramo žrebati po tej porazdelitvi

verj. gost. (npr. enakomerna)

Maybe do .rs comparison if time allows

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g(x_i) \qquad x_i \sim U(a,b)$$

Ocena za pravo vrednost integrala Θ se izboljšuje korensko:

$$\Theta = \hat{\theta} \pm \frac{\hat{\sigma}_\theta}{\sqrt{N}}$$

$$\hat{\sigma}_\Theta = \sqrt{\overline{\hat{\theta}^2} - (\overline{\hat{\theta}})^2}$$

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{N} \sum_i g(x_i)$$

$$\hat{\Theta}^2 = \frac{1}{N} \sum_i g^2(x_i)$$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx = (b-a)\bar{g} \pm \frac{b-a}{\sqrt{N}} \sqrt{\overline{g^2} - \bar{g}^2}$$

ene funkcije niso dobre za MC ker tole preveč niha.

Isto za volumne:

$$\int g\,dV = V\bar{g} \pm \frac{V}{\sqrt{N}} \sqrt{\overline{g^2} - \bar{g}^2}$$

Ali bi $\underbrace{\int\int\ldots\int}_{d\text{-dim}}$ lahko s kvadratnimi formami z vedno večjimi redi?

$$\frac{T_{MC}}{T_{kvadrature}} = \frac{\varepsilon^{d/k}}{\varepsilon^2}$$

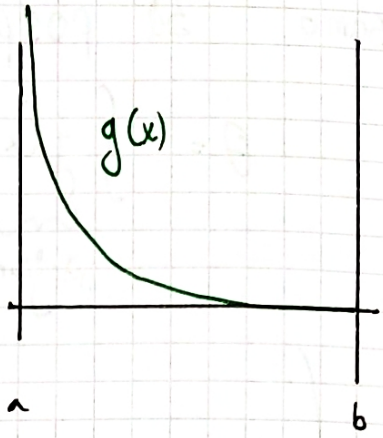
pri izbrani napaki ε. (k = red)

časi za izračun

MC zmaga.

Pomembnostno vzorčenje

$$\int_a^b \frac{g(x)\, f(x)}{p(x)}\, p(x)\, dx$$



$p(x)$ zelo podoben $g(x)$

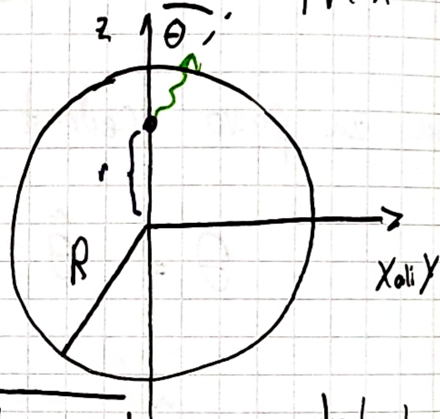
$\frac{g(x)}{p(x)}$ in žrebamo po $f(x)\, p(x)$

npr. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

$p(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{1-x}}$

2. Žarki gamma (Pobeg)

R, preprosta pot



Iz trigonometrije dobimo:

$$d(r,\theta) = -r\cos\theta + \sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2(1-\cos^2\theta)}$$

dvakrat žrebaj

$\xi_1^{(1)} \neq \xi_1^{(2)}$

algoritem:

0) OK = 0 (= Pobeg)

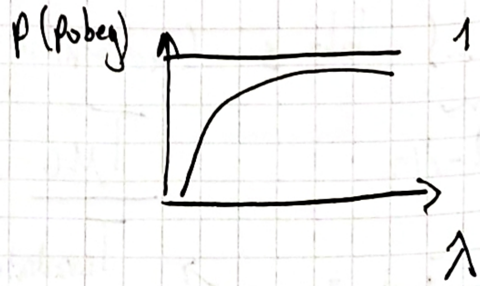
i) žrebamo emisijski kot $\theta_i = \arccos(2\xi_i^{(1)}-1)$
in radij $r_i = \sqrt[3]{\xi_i^{(2)}}$

ii) žrebaj dolžino poti po eksponentni porazdelitvi

$$f_s(s) = \frac{1}{\lambda} e^{-s/\lambda}, \quad \rightarrow \text{dobimo } s_i$$

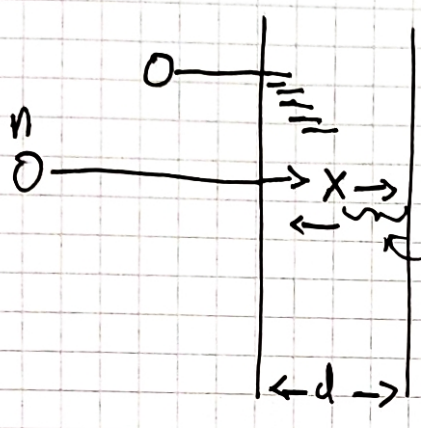
iii) Preveri ali je $s_i \geq d(r_i, \theta_i)$

če je OK++



3. Zelo podobno le planarna geometrija

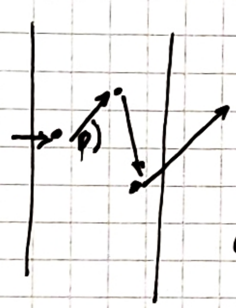
λ pp pot.



ali lahko to prepotuje pri dani λ

Zanima nas prepustnost pa odbojnost.

Zaplet pa je še razpršiter po kotu.



ϕ • žrebamo.

dovolj planarno