Ploskve v $\mathbb{R}^3$

<u>Ploskev</u> v $\mathbb{R}^3$ je podana s parametrizacijo $\vec{r} = \vec{r}(u, v): D \to \mathbb{R}^3$, kjer je D neko obmocje v $\mathbb{R}^2$ in $\vec{r} = (X, Y, Z)$ neka preslikava razreda (vsaj) C^1. Zahtevamo, da je:

$$\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v} \neq 0; \qquad \overrightarrow{r_u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$$

tedaj pravimo, da je **parametrizacija regularna**. Pravimo, da sta u, v krivocrtni koordinati na ploskvi:

$$M = \{\vec{r}(u, v); (u, v) \in D\}$$

Ploskev lahko lokalno gledamo kot graf funkcije (npr. sfera ni graf funkcije zato lokalno) $(X, Y, Z(X, Y))$

Implicitno podane ploskve

Za dano funkcijo $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiramo ploskev kot nivojnico $\{F = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, z) = 0\}$
Pogoj je $\nabla F = \left(F_x, F_y, F_z\right) \neq 0$

Tangentna ravnina

V območju D imejmo krivuljo $\gamma(t) = \left(\alpha(t), \beta(t)\right); \quad t \in I, \ u = \alpha(t), \ v = \beta(t)$
Slikamo γ na ploskev: $\vec{r} \circ \gamma(t) = \vec{r}\left(\alpha(t), \beta(t)\right)$
Velja: $\dot{\vec{R}}(t) = \overrightarrow{r_u}\left(\alpha(t), \beta(t)\right) \cdot \dot{\alpha}(t) + \overrightarrow{r_v}\left(\alpha(t), \beta(t)\right) \cdot \dot{\beta}(t)$

To pomeni, da so tangentni vektorji na **vse** krivulje v M, ki gredo skozi točko $\vec{r}(u, v) \in M$ oblike:

$$a \cdot \overrightarrow{r_u}(u, v) + b \cdot \overrightarrow{r_v}(u, v); \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Ce torej **<u>tangentno ravnino</u>** na ploskev M v točki $m \in M$ definiramo kot unijo vseh tangentnih vektorjev na M skozi tocko m, premaknjeno za m je ta ravnina enaka:

$$m + Span\{\overrightarrow{r_u}(u, v), \overrightarrow{r_v}(u, v)\}$$

Torej je normala tangentne ravnine: $(\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u, v)$ in smo dobili enačbo tangentne ravnine kot:

$$\langle (x, y, z) - \vec{r}(u, v), (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u, v) \rangle = 0$$

Tangentna ravnina implicitno podane ploskve

Normala na tangentno ravnino je $(\nabla F)\left(\vec{r}(t_0)\right)$. Enačba tangentne ravnine na M v točki $m = \vec{r}(t_0)$:

$$\left\langle (x, y, z) - \vec{r}(t_0), (\nabla F)\left(\vec{r}(t_0)\right) \right\rangle = 0$$

Rotacijsko invariantne ploskve (Plašč valja, stožec, sfera, torus)

To so ploskve, ki jih dobimo z rotacijo krivulje okoli neke osi. Recimo da imamo krivuljo $\Gamma = \left(x(t), 0, z(t)\right); t \in I$. Z rotacijo okoli z osi za kot ϕ dobimo parametrizacijo ploskve:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t)\cos\phi \\ x(t)\sin\phi \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Za $(t, \phi) \in I \times [0, 2\pi) = D$ je podana parametrizacija tako dobljene ploskve M

Površina ploskve in koeficienti prve fundamentalne forme

Površino ploskve M, podane s parametrizacijo $\vec{r} = \vec{r}(u,v);\ \ (u,v) \in D$ definiramo kot:

$$P(\vec{r}(D)) = \iint_D |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| du\, dv$$

Velja: $|\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = \sqrt{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}| - \langle \vec{r_u}, \vec{r_v} \rangle^2} = \sqrt{EG - F^2};\ \ E = \langle \vec{r_u}, \vec{r_u} \rangle\ \ G = \langle \vec{r_v}, \vec{r_v} \rangle\ \ F = \langle \vec{r_u}, \vec{r_v} \rangle$
Kjer so E,G,F koeficienti prve fundamentalne forme.
Ta definicija je dobra, v smislu, da je neodvisna od izbire parametrizacije.

Navdih za izpeljavo

Ploščino majhnega pravokotnika na ploskvi s stranicama $\Delta u, \Delta v$ aproksimiramo z paralelogramom.
Lahko napišemo po Lagrangeevem izreku:

$$stranica \approx \vec{r}_u(u + \xi \Delta u, v) \cdot \Delta u$$

za neki $\xi \in (0,1)$. Torej lahko zapišemo kot paralelogram:

$$\left|\left(\Delta u \vec{r_u}(u,v)\right) \times \left(\Delta v \vec{r_v}(u,v)\right)\right| = |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| \Delta u\, \Delta v = |\vec{r}(P)|$$

Ce naredimo vsoto vseh teh pravokotnikov, dobimo Riemannovo vsoto in pravo definicijo.

Dokaz neodvisnosti od parametrizacije

Imejmo parametrizaciji $\vec{r}, \vec{\rho}$ in bijekcijo ϕ med njunima domenama.
Pišimo:

$$\phi = (U, V);\ \ U = U(x,y), V = V(x,y)$$

kjer sta U, V funkciji na domeni $\vec{\rho}$ recimo ji Δ.
Imamo:

$$\vec{\rho} = \vec{r}(u,v)$$

zato iz verižnega pravila sledi:

$$\vec{\rho_x} = \vec{r_u}(U,V) U_x + \vec{r_v}(U,V) V_x$$
$$\vec{\rho_y} = \vec{r_u}(U,V) U_y + \vec{r_v}(U,V) V_y$$

$$\Rightarrow \vec{\rho_x} \times \vec{\rho_y} = \left(U_x V_y - U_y V_X\right)(\vec{r_u} \times \vec{r_v})(U,V) = |\det J\phi| (\vec{r_u} \times \vec{r_v}) \circ \phi$$

Torej, če uporabimo izrek o zamenjavi koordinat v integralu za $(u,v) = \phi(x,y)$:

$$\Rightarrow \iint_D |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| du\, dv = \iint_\Delta |(\vec{r_u} \times \vec{r_v}) \circ \phi|\ |\det J\phi|\, dx\, dy = \iint_\Delta \left|\vec{\rho_x} \times \vec{\rho_y}\right| dx\, dy$$

Orientacija ploskev

Lokalna orientacija (gladke, regularne) ploskve M v tocki $m \in M$ je izbira enotske normale na M v točki m.

Globalna orientacija ploskve M je zvezna izbira lokalnih orientacij, to je, zvezna izbira enotskih normal po vseh $m \in M$

NI vsaka ploskev orientabilna (Npr. Möbiusov trak). Ce pa ploskev ima orientacijo, je le-ta ena od dveh obstoječih.

Inducirana orientacija

Naj bo M **orientabilna** ploskev z robom ∂M. Za $\forall m \in \partial M$ naj bo μ enotski vektor iz tangentne ravnine $T_m M$, pravokoten na tangentno premico na ∂M v tocki m ($T_m \partial M$) in usmerjen ven iz M.
Ce je ν izbrana zvezna druzina enotskih normal na M, tedaj:

$$\nu \times \mu : \partial M \to S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |\vec{r}| = 1\}$$

doloca orientacijo ∂M, ki je skladna z orientacijo ν. (Vrstni red vektorskega produkta **je** pomemben)

Pomen: *Rob orientiramo tako, da je ploskev na levi, če normala kaze gor.*