I. Elektrostatika

3.1. Coulombova sila med naboji

Elektrostatika opisuje sile med mirujočimi naboji, ki so konstantni (to je časovno nespremenljivi). Točkasti nabiti delci med seboj delujejo s silo:

$$\vec{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}; \qquad \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

Ta formula je empirična. To smo jo tako izmerili, ker je taka narava. Torej tega se ne da ravno izpeljati.

3.2. Velikost in enota električnega naboja

Naboj merimo v **Coulombih** oz. **Ampersekundah**. Naboji je praviloma (izjema so kvarki) mnogokratnik osnovnega naboja $e_0 = 1.6 \cdot 10^{-19}\mathrm{As}$.

Naboj kvarka	$\mathbf{1/3\ e_0}$
Naboj elektrona	e_0
Naboj na kondenzatorju	$10^{-7}\mathrm{As}$
Naboj pri blisku	$1 - 100\ \mathrm{As}$
Naboj v akumulatorju	$0.2 \cdot 10^6\ \mathrm{As}$
Naboj Zemlje brez atmosfere	$5 \cdot 10^5\ \mathrm{As}$
Naboj Zemlje z atmosfero	$1\ \mathrm{As}$
Naboj, ki ga v letu proizvede elektrarna	$3 \cdot 10^{11}\mathrm{As}$

3.3. Jakost električnega polja

V Faradayevi oz. Maxwellovi sliki se interakcije med nabitimi delci opiše z delovanjem električnega polja. **Električno polje je posrednik interakcije med naboji**. Električno silo prvega naboja na drugega izračunamo kot:

$$\vec{F}_{21} = e_2\vec{E}_1$$

Vidimo, da je smer $\vec{E}$ vedno določena s smerjo sile, ki bi delovala na točkasti naboj.

Transformacijske lastnosti $\vec{E}$

$\vec{E}$ je vektor, torej se po ortogonalnih transformacijah transformira kot vektor. Ortogonalne transformacije so tiste, ki ohranjajo skalarni produkt oz. kot. To so rotacije in zrcaljenja.

$$\vec{E}' = \underline{\underline{a}}\vec{E} \qquad E_i' = a_{ik}E_k$$

Intenziteta polja $\left|\vec{E}\right|^2$ je skalar, ki se ohranja pri ortogonalnih transformacijah.

Polje kozmičnega sevanja	$\mathbf{10\ \mu V/m}$
Polje znotraj žice	$0.5\ \mathrm{mV/m}$
Polje v Zemeljski atmosferi	$100 - 300\ \mathrm{V/m}$
Prebojna jakost v atmosferi	$1 - 3\ \mathrm{MV/m}$
Polje preko biološke membrane (recimo celice)	$10\ \mathrm{MV/m}$
Polje v močnem laserskem snopu	$100\ \mathrm{TV/m}$

3.4. Električne silnice

Električne silnice kažejo v smeri električnega polja. Uvedemo jih kot krivuljo:

$$\dot{\vec{r}}(s) = \frac{d\vec{r}}{dS} = \frac{\vec{E}(\vec{r}(s))}{|\vec{E}(\vec{r}(s))|}$$

Faradayeva konstrukcija

i) Silnice kažejo v smeri $\vec{E}$ in se ne sekajo
ii) Gostota silnic ustreza jakosti polja
iii) Silnice se začnejo v $+$ in končajo v –
iv) Silnice električnega polja **niso** zaključene

3.5. Električna cirkulacija

Električno cirkulacijo se uvede kot integral:

$$\Gamma_e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

kjer je C neka zaključena zanka. **Za vsa statična polja velja $\boldsymbol{\Gamma_e = 0}$.** Če uporabimo Stokesov izrek lahko pridemo do rotorja električnega polja:

$$0 = \oint_C \vec{E} d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{E}\, d\vec{s} \quad \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$$

To pomeni, da je **statično električno polje brezvrtinčno.** To je že prvi zametek Maxwellove enačbe.

3.6. Električni pretok

Električni pretok je definiran kot:

$$\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Ploskev $\boldsymbol{S}$ je tu poljubna! Če pa sklenemo ploskev, da imam zaključeno ploskev, pa dobimo Gaussov izrek.

3.7. Električni potencial

Elektrostatski oz. električni potencial uvedemo kot skalarno polje kot:

$$\vec{E}(r) = -\nabla\varphi(\vec{r})$$

To naredimo, ker je φ skalarna količina za razliko od polja, ki je vektorska, in se zato z njo lažje računa.

Reminder o operatorju ∇

∇ je vektorski operator, ki v osnovni obliki deluje na skalar in iz njega naredi vektor.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right); \qquad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Hiter primer:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\left(-\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^3},\dots,\dots\right)=\left(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Operatorju $\nabla^2=\Delta$ pa pravimo Laplaceov operator:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Električni potencial točkastega naboja:

$$\vec{E}=-\nabla\varphi=-\nabla\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}+\varphi_0\right)$$

Torej je potencial

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}+\varphi_0$$

Električni potencial je torej določen do konstante natančno. Temu se reče **umeritve (gague)**. V tem primeru je konstanta. Sicer je pa na splošno lahko tudi funkcija.

3.10. Princip superpozicije [Glej slike]

V sistemu z večimi točkastimi naboji lahko silo na naboj e zapišemo kot:

$$\vec{F}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{e_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}$$

Celotna sila je **vsota posameznih parskih prispevkov.** To je princip superpozicije. Tak princip recimo ne velja pri hidrodinamiki (npr. hitrostno polje pri večih izvorih). Princip superpozicije velja tudi za električno polje in električni potencial.

$$\vec{E}(\vec{r})=\sum_i\frac{e_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

$$\varphi(\vec{r})=\sum_i\frac{e_i}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Električno polje in potencial sta **aditivna**, kar pogosto ne velja za druga fizikalna polja.

3.11. Gostota električnega naboja

Električen naboj je pogosto porazdeljen. Zato se uvede količina, ki ji pravimo **volumska gostota naboja**. Diskretno to zapišemo kot

$$\rho(\vec{r})=\sum_i e_i\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Zvezno pa kot:

$$\rho(\vec{r})=\frac{de}{dV}$$

Tako lahko zapise za $\vec{F}, \vec{E}, \varphi$ prevedemo v jezik gostote naboja.

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}\,')\vec{E}(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}d^3\vec{r}\,'$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3\vec{r}\,'$$

3.12. Primeri gostote naboja

Točkast naboj

Naboj se nahaja na mestu $\vec{r}\,'$. Tako je $\rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

Točkasti dipol [Slika pomaga]

$$\rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r}-\vec{r}_1) - e\delta(\vec{r}-\vec{r}_2) = e\delta\left(\vec{r}-(\vec{r}_0+\vec{d}_r)\right) - e\delta\left(\vec{r}-(\vec{r}_0-\vec{d}_r)\right) =$$

Tu predpostavimo, da je $\vec{d}_r$ majhen in naredimo razvoj $f(\vec{r}+\vec{h}) = f(\vec{r}) + \vec{h}\cdot\nabla\vec{f}(\vec{r})$

$$= -e\vec{d}_r\cdot\nabla\big(\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\big) - e\vec{d}_r\cdot\nabla\big(\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\big) = -2e\vec{d}_r\cdot\nabla\big(\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\big) = (*)$$

Tu uvedemo **dipolni moment** $\boldsymbol{\vec{p} = 2e\vec{d}_r}$ in še prej poračunamo:

$$\nabla\cdot\big(\vec{p}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\big) = (\nabla\cdot\vec{p})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) + \vec{p}\cdot\nabla\big(\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\big) = \vec{p}\cdot\nabla\big(\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\big)$$

Nadaljujemo

$$(*) = -\nabla\cdot\big(\vec{p}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\big)$$

V tem pa prepoznamo **Polarizacijo** $\boldsymbol{\vec{P}}$, ki predstavlja gostoto dipolnega momenta na enoto volumna (3D delta ima enote $1/\mathrm{m}^3$) . Tako sta v sistemih električnih dipolov gostota naboja in polarizacija neposredno povezani preko enačbe

$$\rho(\vec{r}) = -\nabla\cdot\vec{P}$$

Površinsko porazdeljen naboj

Naboj je porazdeljen po neki tanki plasti – površini. Vpeljemo površinsko gostoto naboja $\sigma(\vec{\rho})$

$$\rho(\vec{r}) = \sigma(\vec{\rho})\delta(z-z_0)$$

kjer σ teče po površini, z_0 pa je plast kjer imamo naboj.

Volumsko porazdeljen naboj

Naboj porazdeljen enakomerno po volumnu krogle z radijem a

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases}\rho_0; & r<a\\ 0; & \text{sicer}\end{cases} = \rho_0 H(a-r)$$

kjer je H Heavisidova/stopničasta funkcija.

Volumsko porazdeljeni dipoli

Dipoli enakomerno razporejeni po volumnu krogle z radijem a

$$\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{P}_0; & r < a \\ 0; & \text{sicer} \end{cases} = \vec{P}_0 H(a - r)$$

Kaj se zgodi z gostoto nabojev?

$$\rho(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot \left(\vec{P}_0 H(a - r)\right) = -(\nabla \cdot \vec{P}_0) H(a - r) - \vec{P}_0 \cdot \nabla H(a - r) = -\vec{P}_0 \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(H(a - r)\right) =$$

$$= -\vec{P}_0 \delta(a - r) \nabla(-r) = P_0 \delta(a - r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Dobili smo, da je gostota naboja **samo na robu**. To si lahko predstavljamo, da se edino na robu dipoli ne uspejo izničiti med sabo.

3.13. Integralna oblika Gaussovega izreka [Glej sliko]

Obravnavamo (diskretna slika) sklenjeno površino, ki zaobjame naboje. Zanima nas električni pretok skozi tako sklenjeno površino, ki zaobjema naboje e_i

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \, dS \cos\theta(\vec{r}) = \oint_S \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cos\theta_i \, dS$$

kjer je $\theta(\vec{r})$ kot med lokalno normalno ploskve in poljem $\vec{E}$. Poglejmo kakšni so členi, ki jih računamo

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\cos\theta_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} dS + \frac{e_2}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\cos\theta_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} dS + \cdots$$

Dajmo si najprej izbrati $\vec{r}_1 = 0$. Takrat kaže smer polja radialno in je $\theta_1 = 0$

$$\frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\cos\theta_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} dS = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi = \frac{e_1}{\varepsilon_0}$$

Gauss je tudi za ostale člene, ki so izven središča pokazal, da velja tako. Torej imamo v resnici

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi + \frac{e_2}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi + \cdots = \frac{\sum_i e_i}{\varepsilon_0}$$

Tako torej velja **Gaussov izrek:**

$$\boldsymbol{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = \frac{e}{\varepsilon_0}}$$

To velja v primeru, da ni naboja na robu ploskve, kjer bi delili z 0 in bi eden od teh integralov v vsoti divergiral. Torej moramo zares zajeti vse naboje. Ne smejo biti na robu ploskve.

Primer uporabe [El. polje enakomerno nabite krogle]

Raje glej zvezek

3.14. Diferencialna oblika Gaussovega izreka

Uporabimo izrek Gauss-Ostrogradskega:

$$\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV$$

Torej

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E}\, d^3\vec{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

Iz tega sledi, da je diferencialna oblika Gaussovega izreka

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

3.17. Poissonova in Laplaceova enačba

Poissonova enačba je osnovna enačba elektrostatike, ki določa elektrostatski potencial in sicer sledi iz Gaussovega izreka in definicije polja z potencialom:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi$$

Tako dobimo **Poissonovo enačbo**

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

in če v prostoru ni naboja dobimo **Laplaceovo enačbo**

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = 0$$

3.17.1 Greenova funkcija Poissonove enačbe

Metoda Greenove funkcije **splošne** rešitve v našem primeru Poissonove enačbe

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Rešitve iščemo z konvolucijo. Predpostavimo, da je rešitev oblike

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}')\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'$$

Uporabimo ta nastavek v Poissonovi enačbi. Spomni se, da nabla enačbe deluje samo na $\vec{r}$ in ne $\vec{r}'$.

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = \nabla^2\left(\int G(\vec{r} - \vec{r}')\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'\right) = \int \nabla^2 G(\vec{r} - \vec{r}')\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}' = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Če naj to velja potem je:

$$\nabla^2 G(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\varepsilon_0}$$

Torej: **Greenova funkcija je rešitev Poissonove enačbe za točkast naboj, ki se nahaja v $\vec{r}'$ (brez konstante e).**

Zanima nas, kakšna je ta Greenova funkcija. Pojdimo v Fourierev prostor:

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}G(\vec{k})d^3\vec{k}$$

Uporabimo integralsko definicijo delta funkcije

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{k}$$

in to sedaj vstavimo v Poissonovo enačbo.

$$\nabla^2\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}G(\vec{k})d^3\vec{k}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}d^3\vec{k} = 0$$

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[\nabla^2\left(e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}G(\vec{k})\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\prime)}\right] = 0$$

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[-k^2G(k) + \frac{1}{\varepsilon_0}\right]e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\prime)} = 0$$

Tu pa vidimo, da smo s Fourerovo transformacijo reševanje diferencialne enačbe prevedli na reševanje algebrajske enačbe (znotraj kvadratnih oklepajev mora biti 0). Tako smo dobili Greenovo funkcijo v Fourierovem prostoru.

$$G(\vec{k}) = \frac{1}{\varepsilon_0 k^2}$$

To pa samo še transformiramo nazaj

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}\frac{1}{\varepsilon_0 k^2}d^3\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta\, d\theta k^2\, dk\frac{1}{\varepsilon_0 k^2}e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\int_{-1}^1 d(\cos\theta)dk\frac{1}{\varepsilon_0}e^{i\vec{k}|\vec{r}-\vec{r}'|cos\theta} = \cdots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

To pomeni, da je **splošna rešitev Poissonove enačbe**

$$\varphi(\vec{r}) = \int\frac{\rho(\vec{r}')\,d^3\vec{r}'}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Oz. ustrezajoče polje (delujemo z minus gradient, ki deluje samo na $\vec{r}$)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int\frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,d^3\vec{r}'$$

3.19. Earnshawjev teorem (19. stol)

»Nabor točkastih nabojev ne more biti v stabilnem ravnovesju, samo kot posledica elektrostatskih interakcij med naboji«

To pomeni, da elektrostatski potencial v praznem prostoru nima minimumov ali maksimumov, ampak kvečjemu le **sedla**. Za stabilen minimum bi morale vse silnice kazati v tisto točko, kar bi povzročilo polje, ki ima divergenco. Vemo pa da je v elektrostatiki električno polje brezizvirno.

Zakaj pa je snov stabilna, če jo veže elektrostatska interakcija?
Obstaja nekaj več -> Kvantna mehanika (Paulijevo izključitveno načelo).

3.20. Thomsonov problem

Elektrostatika ima lahko minimume, če naboje ogradimo recimo na neko površino. Poglej v zvezek za skice.

3.21. Elektrostatska energija

3.21.1 Elektrostatska energija v **zunanjem** polju

Gledamo naboj v zunanjem polju (ki ga seveda ustvarjajo drugi naboji, ampak ne ta naš konkreten naboj). Na naboj deluje sila $\vec{F} = e\vec{E}$. Izračunajmo energijo, kot potencial, ki je potreben, da ta naboj e »drži« na mestu (isto kot če bi ga iz neskončnosti pripeljali sem).

$$dA = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -e\vec{E} \cdot d\vec{r} = e\nabla\varphi \cdot d\vec{r}$$

Uporabimo energijski zakon

$$A = \int_{(1)}^{(2)} dA = \int_{(1)}^{(2)} e\nabla\varphi \cdot d\vec{r} = e\varphi(2) - e\varphi(1)$$

Torej je energija naboja v zunanjem polju (potencialu)

$$W = e\varphi = \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d^3\vec{r}$$

3.21.2 Celotna elektrostatska energija

Sedaj pa nas zanima energija **polja vseh nabojev**. Torej $\rho(\vec{r})$ ustvari nek okoliški $\varphi(\vec{r})$. Zanima nas energija, ki je potrebna, da to naredimo (da ustvarimo oz. nabijemo to gostoto $\rho(\vec{r})$.

Izračunajmo spremembo energije, če dodamo $d\rho$ naboja

$$dW = \int_V d\rho(\vec{r})\hat{\varphi}(\vec{r})d^3\vec{r}$$

Predpostavimo, da lahko gostoto vključimo z »gumbom«/parametrom $\alpha \in [0,1]$, ki potem nastavi gostoto naboja med 0 in $\rho(\vec{r})$. To pomeni, da je $d\rho = \rho d\alpha$ in $\nabla^2\alpha\varphi = -\frac{\alpha\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \Rightarrow \hat{\varphi} = \alpha\varphi(\vec{r})$.

$$dW = \int \rho d\alpha\alpha\varphi d^3\vec{r} = \int_0^1 \alpha d\alpha \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d^3\vec{r}$$

Tako dobimo elektrostatsko energijo polja (kjer φ ustvarja prav ta isti ρ) kot

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d^3\vec{r}$$

3.21.3 Elektrostatska energija kot funkcional gostote naboja

Uporabimo Greenovo reprezentacijo električnega potenciala

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3\vec{r}'$$

In to vstavimo v izraz za energijo. Dobimo, kot vsak z vsakim:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3\vec{r}\,d^3\vec{r}'$$

3.22 Gostota elektrostatske energije polja v $\vec{E}$

Elektrostatsko energijo lahko zapišemo z uporabo električnega polja. Uporabili bomo pravilo $\nabla\cdot(f\vec{g}) = \nabla f\cdot\vec{g} + f\nabla\cdot\vec{g}$.

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int_V (\nabla\cdot\vec{E})\varepsilon_0\varphi(\vec{r})\,d^3\vec{r} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V [\nabla\cdot(\vec{E}(\vec{r})\varphi(\vec{r}) - \nabla\varphi\cdot\vec{E}]d^3\vec{r}$$

Sedaj uporabimo Gaussov izrek

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\partial V}\vec{E}(\vec{r})\varphi(\vec{r})\cdot d\vec{S} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d^3\vec{r}$$

V približku lahko rečemo, da je $\vec{E}\propto 1/r^2$ in $\varphi\propto 1/r$ in ločni element $d\vec{S}\propto r^2$. To nam da skupno sorazmernost $\propto 1/r$. Predstavljamo si, da ko gre rob volumna neskončno daleč stran, gre to proti nič. **TO NE VELJA NUJNO SPLOŠNO.** Tako lahko energijo polja v približku zapišemo kot

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2 d^3\vec{r}$$

3.24 Sila kot funkcional električnega polja

Zanima nas sila, ki deluje na telo, ki se nagaja v električnem polju $\vec{E}(\vec{r})$. To je **<u>celotno polje</u>** (lastno, ki ga ustvari telo z ρ in zunanje brez katerega je sila 0). Integriramo povsod kjer je $\rho(\vec{r})\neq 0$.

$$\vec{F} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})d^3\vec{r} = \varepsilon_0\int_V (\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}d^3\vec{r} =$$

Uporabimo identiteto $\nabla\cdot(\vec{E}\otimes\vec{E}) = \vec{E}(\nabla\cdot\vec{E}) + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}$

$$= \varepsilon_0\int_V (\nabla\cdot(\vec{E}\otimes\vec{E}) - (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E})d^3\vec{r} = \varepsilon_0 = \int_{\partial V}(\vec{E}\otimes\vec{E})d\vec{S} - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \nabla(E^2)d^3\vec{r} =$$

Uporabimo identiteto $\frac{1}{2}\nabla(E^2) = (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} + \vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})$. V elektrostatiki velja $\nabla\times\vec{E} = 0$.

$$= \varepsilon_0\int_{\partial V}(\vec{E}\otimes\vec{E})d\vec{S} - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\partial V} E^2 d\vec{S}$$

Torej je celotna sila

$$\vec{F} = \varepsilon \int_{\partial V} \left[\vec{E}\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right) - \frac{1}{2}E^2\vec{n}\right] dS$$

kjer je $\vec{E}$ **celotno** električno polje in je $\vec{n}$ normala na površino. Ta integral teče po zaključeni površini telesa. V tem se skriva ρ. Integriramo ∂V kjer je $\rho \neq 0$.

3.25. Napetostni tenzor električnega polja

Dobljen zapis sile naboja v električnem polju se zapiše z uvedbo **napetostnega tenzorja**.

$$F_i = \oint_{\partial V} T_{ik} n_k dS$$

$$T_{ik} = \varepsilon_0 \left(E_i E_k - \frac{1}{2}E^2 \delta_{ik}\right)$$

Velja tudi Gaussov izrek

$$F_i = \oint_{\partial V} T_{ik} n_k dS = \int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} dV$$

Iz tega zapisa lahko uvedemo gostoto sile kot

$$f_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$$

Zapis gostote sile kot divergence napetostnega tenzorja je splošen in se uporablja tudi za druga polja.

3.27. Multipolni razvoj električnega potenciala [Glej slike]

Zanima nas električno polje/potencial **daleč** stran od same gostote naboja in to po **vodilnih prispevkih** (multipolih). Velja

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|} d^3\vec{s}$$

ko je $|\vec{r}| \gg |\vec{s}|$. To pomeni, da lahko ulomek razvijemo. Za vektorske funkcije velja Taylorjev razvoj

$$f\left(\vec{r} + \vec{h}\right) = f(\vec{r}) + \vec{h}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{2!}\vec{h}^T \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{r}\partial \vec{r}'}\vec{h} + \cdots$$

kjer je $\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{r}\partial \vec{r}'} = \underline{\underline{H}}$ **Hessova matrika**. Torej

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{s}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right) + \frac{1}{2}\vec{s}^T \underline{\underline{H}}\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right)\vec{s} + \cdots = \frac{1}{|\vec{r}|} + \vec{s}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} + \cdots$$

Torej je na[razvoj

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \rho(\vec{s}) d^3\,\vec{s} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\int \vec{s}\rho(\vec{s}) d^3\vec{s} + \cdots$$

Tu prepoznamo celotni naboj (monopol) in dipolni moment:

$$e = \int_V \rho(\vec{s}) d^3\vec{s} \qquad \vec{p} = \int_V \vec{s}\rho(\vec{s}) d^3\vec{s}$$

Tako smo dobili

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \cdots$$

Ko smo daleč stran vidimo monopol (točkasti naboj) in bližje kor pridemo več multipolov »vidimo«. V splošnem pa se **multipolni razvoj** zapiše kot

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta,\phi)$$

kjer so Y_{lm} sferični harmoniki in so q_{lm} multipolni koeficienti

$$q_{lm} = \int_V \rho(\vec{s}) s^l Y_{lm}(\theta',\phi') d^3\vec{S}$$

3.28. Polje in potencial točkastega dipola

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0} + \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

3.29. Multipolni razvoj elektrostatske energije

Zanimajo nas prispevki k energiji če lahko $\rho_0(\vec{r})$ opišemo z multipoli. Spomnimo se, da velja

$$W = \int_V \rho_0(\vec{r})\varphi(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

Predpostavimo, da je večina energije zbrana blizu točke $\vec{r}_0$ (blizu tam so multipoli), ki se nahaja znotraj V. Potem lahko razvijemo

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + (\vec{r}-\vec{r}_0)\nabla\varphi(\vec{r}_0) + \cdots$$

Potem je energija

$$W = \int_V \rho_0(\vec{r})\varphi(\vec{r}_0) d^3\vec{r} + \int_V \rho_0(\vec{r})(\vec{r}-\vec{r}_0) d^3\vec{r}\nabla\varphi(\vec{r}_0) + \cdots =$$

V zadnjem členu prepoznamo integralski zapis za $\vec{p}$ in zapis za $\vec{E}$.

$$= e\varphi(\vec{r}_0) - \vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}_0) + \cdots$$

Prvi člen predstavlja energijo monopola v **zunanjem polju**, drugi energijo dipola v **zunanjem polju** ipd.

3.30. Sila in navor (na multipole) v zunanjem električnem polju

Sila

Zanima nas sila na $\rho_0(\vec{r})$. Velja $\vec{F} = -\nabla W \leftrightarrow dW = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$\vec{F} = -\nabla W = -\nabla\left(e\varphi(\vec{r}_0) - \vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}_0)\right) = -e\nabla\varphi(\vec{r}_0) + \nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}_0)\right) =$$

$$= e\vec{E}(\vec{r}_0) + p \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) + (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}$$

Torej je:

$$\vec{F} = e\vec{E} + (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}$$

Navor

Spet gledamo spremembo energije

$$dW = -\vec{M}\cdot d\vec{\phi}$$

kjer je $d\vec{\phi}$ smer osi. Velja $d\vec{p} = d\vec{\phi} \times \vec{p}$. Vstavimo prejšnji izraz za W in diferenciramo

$$dW = 0 - d\vec{p}\cdot\vec{E} = -\left(d\vec{\phi}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{E} = -d\vec{\phi}\cdot\left(p\times\vec{E}\right)$$

Tako dobimo:

$$\vec{M} = \vec{p}(\vec{r}_0) \times \vec{E}(\vec{r}_0)$$

Dipol se torej poskuša zavrteti tako, da bo vzporeden z električnim poljem.