Elastično valovanje

Obravnavali bomo na hitro še elastično valovanje v **neomejenem izotropnem sredstvu**. Dinamična Navierova enačba je že skoraj valovna enačba. Nekoč smo na vajah napisali Navierovo enačbo z E in σ. To nam bo prav prišlo tu:

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\nabla^2\vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla\nabla\cdot\vec{u}\right]$$

Tu bomo upoštevali identiteto $\nabla\nabla\cdot\vec{u} = \nabla^2\vec{u} + \nabla\times\nabla\times\vec{u}$, da se znebimo “čudnega” operatorja. Ampak ker nam Laplace tudi ne paše kaj zelo, se ga bomo tudi znebili. Spomni se **Helmholtzovega dekompozicijskega izreka**. Tu bomo storili prav to, da bomo rešitev sestavili iz brezizvirnega in brezvrtinčnega dela. Za začetek bomo pa vzeli nastavek ravnih valov:

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Po Helmholtzovem izreku brez izgube splošnosti razdelimo rešitev na brezizvirni del in brezvrtinčni del. Indeksa zgledata tu malo “kar nekaj”, ampak verjemite, da imata sugestivni imeni.

$$\vec{u} = \vec{u}_T + \vec{u}_L \qquad \nabla\cdot\vec{u}_T = 0 \qquad \nabla\times\vec{u}_L$$

$$\vec{u}_T = \vec{u}_{T_0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_T t)} \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{u}_T = 0 = i\vec{k}\cdot\vec{u}_T$$

$$\vec{u}_L = \vec{u}_{L_0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_L t)} \quad \Rightarrow \quad \nabla\times\vec{u}_L = 0 = i\vec{k}\times\vec{u}_L$$

Vidimo, da je $\vec{u}_T$ pravokoten na $\vec{k}$, to je **transverzalni val**. Hkrati pa je $\vec{u}_L$ vzporeden s $\vec{k}$, to je pa torej **longitudinalni val**.

Sedaj ta nastavek vstavimo v Navierovo enačbo. Rotor preživi samo transverzalni val, divergenco pa le longitudinalni. Iz do znane vektorske identitete za “ta čuden” operator lahko dobimo ven zamenjavi:

$$-\nabla\times\nabla\times\vec{u}_T = \nabla^2\vec{u}_T \qquad \nabla\nabla\cdot\vec{u}_L = \nabla^2\vec{u}_L$$

Tako se predelana Navierova enačba glasi:

$$\rho(\ddot{\vec{u}}_T + \ddot{\vec{u}}_L) = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\nabla^2\vec{u}_T + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\nabla^2\vec{u}_L\right)$$

$$\rho(-\omega_T^2\vec{u}_T - \omega_L^2\vec{u}_L) = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(-k^2\vec{u}_T - \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}k^2\vec{u}_L\right)$$

Pri danem $\vec{k}$ sta $\vec{u}_T$ in $\vec{u}_L$ pravokotna, tako da lahko v vsakem primeru, tudi če bi bila časovna dela slučajno enaka, zapišemo ločeni enačbi:

$$-\rho\omega_T^2\vec{u}_{T_0} = -\frac{E}{2(1+\sigma)}k^2\vec{u}_{T_0} \quad \Rightarrow \quad \omega_T^2 = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}k^2 = c_T^2k^2$$

$$-\rho\omega_L^2\vec{u}_{L_0} = -\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}k^2\vec{u}_{L_0} \quad \Rightarrow \quad \omega_L^2 = \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}k^2 = c_L^2k^2$$

Poglejmo si razmerje:

$$\frac{c_T^2}{c_L^2} = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{c_T^2}{c_L^2} \leq \frac{1}{2}$$

Oz. alternativen “fun fact”:

$$c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \qquad c_L^2 = \frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}$$

Vidimo, da za tekočine (ki imajo $\mu = 0$) velja:

$$c_T^2 = 0 \qquad c_L^2 = \frac{K}{\rho} = \frac{1}{\rho\chi}$$

Pregled in končne enačbe

Zaradi preglednosti zapišimo še obe valovni enačbi.

$$\ddot{\vec{u}}_T - c_T^2\nabla^2\vec{u}_T = 0$$

$$\ddot{\vec{u}}_L - c_L^2\nabla^2\vec{u}_L = 0$$

Vidimo, da sta neodvisni. Zaradi kompletnosti pa zapišimo še Navierovo enačbo in Hookov zakon s c_T in c_L:

$$\ddot{\vec{u}} = -c_T^2(\nabla \times \nabla \times \vec{u}) + c_L^2(\nabla\nabla \cdot \vec{u})$$

$$\sigma_{ij} = 2\rho c_T^2 u_{ij} + \rho(c_L^2 - 2c_T^2)u_{kk}\delta_{ij}$$