Vektorske spremenljivke

(Tu zna biti kje tekst na začetku zaradi moje odsotnosti pri predavanjih nekoliko slabši ali v celoti gone.. Sorry)

Predstavljajmo si naslednjo situacijo. Merimo lego x po znani periodi in dobimo v modelskem sistemu $z = x + r$. Ta meritev izostri vektor spremenljivk, ki nas zanimajo:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$

Izostri pa se tudi $\bar{v}$ zato ker sta x in v korelirana:

$$\bar{x} = x + m_x \qquad \bar{v} = v + m_v \qquad \langle m_x m_v \rangle \neq 0$$

Zapišimo za ostritev:

$$\hat{x} = x + p_x = a_{xx}\bar{x} + a_{xv}\bar{v} + b_x z$$

$$\hat{v} = v + p_v = a_{vx}\bar{x} + a_{vv}\bar{v} + b_v z$$

Iščemo koeficiente a_{ij} in b_i. Vstavimo:

$$\hat{x} = a_{xx}(x + m_x) + a_{xv}(v + m_v) + b_x(x + r) =$$

$$= (a_{xx} + b_x)x + a_{xv}v + a_{xx}m_x + a_{xv}m_v + b_x r = x + p_x$$

$$\Rightarrow \quad a_{xv} = 0 \qquad a_{xx} + b_x = 1$$

$$p_x = a_{xx}m_x + (1 - a_{xx})r$$

$$\langle p_x \rangle = 0$$

$$\langle p_x^2 \rangle = \langle a_{xx}^2 m_x^2 + (1 - a_{xx})^2 r^2 + 2a_{xx}(1 - a_{xx})m_x r \rangle =$$

$$= a_{xx}^2 \sigma_x^2 + (1 - a_{xx})^2 \sigma_r^2 + 0$$

Radi bi to minimizirali glede na a_{xx} tako da zahtevamo $\frac{d}{da_{xx}}\langle p_x^2 \rangle = 0$

$$2a_{xx}\sigma_x^2 - 2(1 - a_{xx})\sigma_r^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{xx} = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_x^2 + \sigma_r^2} \qquad b_x = 1 - a_{xx} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_r^2}$$

In še za hitrost:

$$\hat{v} = a_{vx}(x + m_x) + a_{vv}(v + m_v) + b_v(x + r) =$$

$$= (a_{vx} + b_v)x + a_{vv}v + a_{vx}m_x + a_{vv}m_v + b_v r = v + p_v$$

$$\Rightarrow \quad a_{vv} = 1 \qquad a_{vx} + b_v = 0$$

$$p_v = m_v + a_{vx}(m_x - r)$$

$$\langle p_v \rangle = 0$$

$$\langle p_v^2 \rangle = \langle m_v^2 + a_{vx}^2(m_x^2 + r^2 - 2m_x r) + 2m_v a_{vx}(m_x - r) \rangle =$$

$$= \sigma_v^2 + a_{vx}^2(\sigma_x^2 + \sigma_r^2 - 0) + 2a_{vx}\langle m_x m_y \rangle$$

Zopet zahtevamo $\frac{d}{da_{vx}}\langle p_v^2 \rangle = 0$

$$\Rightarrow \quad = a_{vx} = \frac{\langle m_x m_v \rangle}{\sigma_x^2 + \sigma_r^2}$$

Tako sta ostreni oceni:

$$\hat{x} = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_x^2 + \sigma_r^2} \bar{x} + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_r^2} z = \bar{x} + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_r^2} (z - \bar{x})$$

$$\hat{v} = \bar{v} - \frac{\langle m_x m_v \rangle}{\sigma_x^2 + \sigma_r^2} \bar{x} + \frac{\langle m_x m_v \rangle}{\sigma_x^2 + \sigma_r^2} z = \bar{v} + \frac{\langle m_x m_v \rangle}{\sigma_x^2 + \sigma_r^2} (z - \bar{x})$$

Kovariančna matrika

Označimo kovariančno matriko ocen s P in napovedi s M. Matriki sta definirani kot:

$$M_{ij} = \langle (\bar{x}_i - x_i)(\bar{x}_j - x_j) \rangle = M_{ji}$$

$$P_{ij} = \langle (\hat{x}_i - x_i)(\hat{x}_j - x_j) \rangle = P_{ji}$$

Poglejmo eno od teh matrik in izračunajmo determinanto in inverz:

$$M = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho \sigma_x \sigma_y \\ \rho \sigma_x \sigma_z & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

$$\det M = \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - \rho^2)$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - \rho^2)} \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -\rho \sigma_x \sigma_y \\ -\rho \sigma_x \sigma_y & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$$

Več razsežna normalna porazdelitev:

$$p(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det M}} e^{-\frac{1}{2}(x - \bar{x})^\intercal M^{-1} (x - \bar{x})}$$

Primer za prejšnjo nalogo:

$$p\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - \rho^2)}} \exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(\frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - \bar{y})^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sigma_{xy}}\right)\right]$$

Senzor več spremenljivk

Imejmo s senzorjev in n dimenzionalen vektor $\vec{x}$. Takrat lahko zapišemo **matriko senzorjev** $H \in \R^{s \times n}$:

$$\vec{z} = H \vec{x} + \vec{r}$$

kjer se za $\vec{r}$ da zapisati **kovariančno matriko senzorskega šuma**:

$$\langle \vec{r} \vec{r}^\intercal \rangle = R \in \R^{s \times s}$$

Ostrenje z vektorsko meritvijo

Izpeljimo Kalmanov filter za več spremenljivk. Zapišemo oceno $\hat{x}$ kot linearno kombinacijo napovedi $\bar{x}$ in meritve z in upoštevajmo, da ima vsaka svoj šum.

$$\hat{x} = A\bar{x} + Bz = x + \hat{p}\,; \qquad \bar{x} = x + m \quad z = Hx + r$$

$$\langle m m^\intercal \rangle = M \qquad \langle r r^\intercal \rangle = R \qquad \langle p p^\intercal \rangle = P$$

Skupaj tvorimo vektor šuma $\hat{p}$, ki sestaja iz vseh ostalih šumov. Vstavimo predpise za meritev in napoved:

$$\hat{x} = A(x+m) + B(Hx+r) =$$

$$= (A+BH)x + Am + Br = Ix + \hat{p}$$

Cilj tu je, da šum minimiziramo, torej:

$$\hat{p} = Am + Br \qquad \langle \hat{p} \rangle = 0$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \langle \hat{p}\hat{p}^\intercal \rangle = \langle (Am+Br)(Am+Br)^\intercal \rangle =$$

$$= \langle (Am+Br)(m^\intercal A^\intercal + r^\intercal B^\intercal) \rangle =$$

$$= \langle Amm^\intercal A^\intercal + Brr^\intercal B^\intercal + Amr^\intercal B^\intercal + Brm^\intercal A^\intercal \rangle = AMA^\intercal + BRB^\intercal + 0 + 0$$

$$P = AMA^\intercal + BRB^\intercal$$

Uporabimo metodo Lagrangeovih multiplikatorjev, da rešimo ekstremalen problem ob neki vezi:

$$P = AMA^\intercal + BRB^\intercal \to \tilde{P} = AMA^\intercal + BRB^\intercal - \lambda(A + BH - I)$$

Pravzaprav minimiziramo $\mathrm{tr}\tilde{P}$ glede na A,B in λ:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial A} \equiv \frac{\partial \mathrm{tr}\,(\tilde{P})}{\partial A}$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial A} = 2MA^\intercal - \lambda = 0 \to MA^\intercal = \frac{\lambda}{2} \to A^\intercal = M^{-1}\frac{\lambda}{2} \to A = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^\intercal M^{-1}$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial B} = 2RB^\intercal - H\lambda = 0 \to B^\intercal = R^{-1}H\frac{\lambda}{2} \to B = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^\intercal H^\intercal R^{-1}$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \lambda} = A^\intercal + (BH)^\intercal - I^\intercal = 0 \to A + BH - I = 0$$

V zadnji vrstici smo dobili nazaj vez kar je dober znak! Sedaj pa zapišimo identiteto:

$$I = A^\intercal + (BH)^\intercal = A^\intercal + H^\intercal B^\intercal = M^{-1}\frac{\lambda}{2} + H^\intercal R^{-1} H\frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2} = (M^{-1} + H^\intercal R^{-1} H)^{-1}$$

Sedaj pa zapišimo dejansko našo kovariančno matriko po prej izpeljanem predpisu:

$$P = AMA^\intercal + BRB^\intercal = \frac{\lambda^\intercal}{2} M^{-1} M M^{-1} \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^\intercal}{2} H^\intercal R^{-1} R R^{-1} H \frac{\lambda}{2} =$$

$$= \frac{\lambda^\intercal}{2}(M^{-1} + H^\intercal R^{-1} H)\frac{\lambda}{2} =$$

Tu vstavimo še kar smo izpeljali za $\frac{\lambda}{2}$:

$$((M^{-1} + H^\intercal R^{-1} H))$$

$$\Rightarrow P^{-1} = M^{-1} + H^\intercal R^{-1} H$$

Sedaj pa lahko tudi zapišemo oceno!

$$\hat{x} = A\bar{x} + Bz = \frac{\lambda^\intercal}{2} M^{-1}\bar{x} + \frac{\lambda^\intercal}{2} H^\intercal R^{-1} z = \frac{\lambda^\intercal}{2}(M^{-1}\bar{x} + H^\intercal R^{-1} z) =$$

$$= \frac{\lambda^\intercal}{2}(M^{-1}\bar{x} + H^\intercal R^{-1}H\bar{x} - H^\intercal R^{-1}H\bar{x} + H^\intercal R^{-1}z) =$$

$$= P[(M^{-1} + H^\intercal R^{-1}H)\bar{x} + H^\intercal R^{-1}(z - H\bar{x})]$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \bar{x} + PH^\intercal R^{-1}(z - H\bar{x})$$

Zdaj bi pa radi imeli še kar samo P. Zapišimo spet identiteto:

$$I = PP^{-1} = PM^{-1} + PH^\intercal R^{-1}H$$

kjer smo upoštevali $M = P + PH^\intercal R^{-1}HM$. Nadaljujemo ubistvu iz tega (?):

$$M = P + PH^\intercal R^{-1}HM$$

$$MH^\intercal = P(H^\intercal + H^\intercal R^{-1}HMH^\intercal)$$

$$MH^\intercal = PH^\intercal(I + R^{-1}HMH^\intercal)$$

in zdaj iz identitete tvorimo RR^{-1} in dobimo:

$$MH^\intercal = PH^\intercal R^{-1}(R + HMH^\intercal)$$

$$PH^\intercal R^{-1} = MH^\intercal(R + HMH^\intercal)^{-1}$$

Torej če se spomnimo vrstice kjer je samo M lahko naredimo zdaj:

$$P = M - PH^\intercal R^{-1}HM$$

$$\Rightarrow P = M - MH^\intercal(T + HMH^\intercal)^{-1}HM$$

Kalmanov optimalen filter (Dinamika in dinamični šum)

Diskreten primer

Gledamo korak iz $(n \cdot T) \to ((n+1) \cdot T)$ kjer je T čas vzorčenja. Tu je profesor (in jaz ga bom posnemal) izpustil vse znake za vektorje, ker je očitno, da delamo z vektorji in matrikami.

V realnem sistemu S imamo:

$$x_{n+1} = \phi_n x_n + C_n + \Gamma_n w_n$$

kjer, kot smo se prej naučili, zadnji člen predstavlja dinamični šum. V našem modelskem sistemu M pa imamo:

$$\bar{x}_{n+1} = \phi_n \hat{x}_n + C_n$$

$$M_{n+1} = \langle (\bar{x}_{n+1} - x_{n+1})(\bar{x}_{n+1} - x_{n+1})^\intercal \rangle$$

Vstavimo v enačbo za M_{n+1} naše predpise:

$$= \langle (\phi_n \hat{x}_n C_n - \phi_n x_n - C_n - \Gamma_n w_n)(\phi_n(\hat{x}_n - x_n) - \Gamma w_n)^\intercal \rangle =$$

$$= \langle (\phi(\hat{x}_n - x_n) - \Gamma_n w_n)((\hat{x}_n - x_n)^\intercal \phi_n^\intercal - w_n^\intercal \Gamma_n^\intercal) \rangle =$$

$$= \langle (\phi_n(\hat{x}_n - x_n) - \Gamma_n w_n)((\hat{x}_n - x_n)^\intercal \phi_n^\intercal - w_n^\intercal \Gamma_n^\intercal) \rangle =$$

$$= \phi_n \langle (\hat{x}_n - x_n)(\hat{x}_n - x_n)^\intercal \rangle \phi_n^\intercal + \Gamma_n \langle w_n w_n^\intercal \rangle \Gamma_n^\intercal + \phi_n \langle (\hat{x} - x_n) w_n w_n^\intercal \rangle \phi_n^\intercal + \langle \dots \rangle$$

kjer sta zadnja dva člena enaka 0. V prvem prepoznamo predpis za matriko P_n v drugem pa predpis za Q_n. In tako dobimo:

$$\Rightarrow \quad M_{n+1} = \phi_n P_n \phi_n^\intercal + \Gamma_n Q_n \Gamma_n^T$$

Od prej pa imamo še:

$$P_{n+1}^{-1} = M_{n+1}^{-1} + H^\intercal R^{-1} H$$

$$P_{n+1} = M_{n+1} - M_{n+1} H^\intercal (R + H M_{n+1} H^\intercal)^{-1} H M_{n+1}$$

To je Kalmanov optimalen filter za diskretno vektorsko spremenljivko.

Prehod v zvezno sliko

Imamo sedaj **dinamičen šum** w in **merilni šum** r, ki ju obravnavamo kot nekorelirana. Zapišemo odvod kot prej, z limito časa vzorčenja:

$$\dot{\hat{x}} = \frac{\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n}{T} = \frac{\phi_n \hat{x_n} + C_n - \hat{x}_n}{T} + K_{n+1}(z_{n+1} - H\bar{x}_{n+1}) \cdot \frac{1}{T} =$$

$$= \frac{(\phi - I)}{T}\hat{x} + \frac{C_n}{T} + \frac{P_{n+1} H^\intercal R_{n+1}^{-1}}{T}(z_{n+1} - H\bar{x}_{n+1}) =$$

Sedaj pa limitiramo iz diskretne v zvezno sliko $T \to 0$, spremenijo se:

$$\hat{x}_{n+1} \to \hat{x} \quad \bar{x}_{n+1} \to \bar{x} \quad TR_n \to R(z)$$

$$Z_n \to Z \quad P_n \to P \quad M_n \to P$$

kjer so vse dobljene količine funkcije časa. Ob upoštevanju, da je $\phi_n = I + AT$ in $\dot{x} = Ax + r$ dobimo:

$$\Rightarrow \quad \dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x}(t) + C(t) + PH^\intercal R^{-1}(t)(Z(t) - H\hat{x}(t))$$

Čemu je pa P enak? Poglejmo si razliko:

$$P_{n+1} - P_n = \phi_n P_n \phi_n^\intercal + \Gamma Q_n \gamma_n^\intercal - M_{n+1} H^\intercal (H M_{n+1} H^\intercal + R_{n+1})^{-1} H M_{n+1} - P_n =$$

$$= (I + AT) P_n (I + AT)^\intercal + \Gamma_n Q_n \Gamma_n^\intercal - M_{n+1} H^\intercal (H M_{n+1} H^\intercal + R_{n+1})^{-1} H M_{n+1} - P_n =$$

$$= P_n + ATP_n + P_n T A^{-1} + A P_n A^\intercal T^2 + \Gamma_n Q_n \Gamma_n^\intercal - M_{n+1} H^\intercal (H M_{n+1} H^\intercal + R_{m+1})^{-1} H M_{n+1} - P_k$$

To sedaj seveda delimo s časom vzorčenja in pošljemo $T \to 0$:

$$\Rightarrow \quad \dot{P} = AP + PA^\intercal + \Gamma Q \Gamma^\intercal - PH^\intercal R{-}1HP$$

Ta enačba se imenuje **Ricattijeva enačba** in nam poadja kovariančno matriko v zveznem primeru. Prva dva člena sta odvisna samo od primera do primera (npr. za upor ima ta stvar negativen predznak). Drugi člen podaja dinamični šum, ki čum vedno več. Na koncu b zadnjem 3. členu pa stoji meritev.

[Zgled: Brownovo gibanje koloidnega delca v raztopini]

Upoštevali bomo gibanje samo v eni dimenziji. Naša dinamika bo Stokesov linearni zakon upora, ki mu pa bomo še dodali **naključne sile zaradi diskretnih trkov**. Newtonov zakon lahko zapišemo takole:

$$m\ddot{x} = -6\pi r \eta \dot{x} + F_x(t)$$

To naključno silo (oz. bolj natančno njeno masno gostoto) opišemo z dinamičnim šumom:

$$\left\langle \frac{F_x(t)}{m} \frac{F_x(t')}{m} \right\rangle = Q\delta(t - t')$$

Napisali bomo Kalmanov filter za sledenje delca, torej za vektor:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

Ob začetku $(t = 0)$ postavimo delec v izhodišče in kovariančno matriko na neko začetno:

$$P(0) = P_0 \qquad \bar{x}(0) = 0$$

Sedaj pa za vse $t > 0$ zapišemo dinamiko sistema, kot sistem diferencialnih enačb prvega reda:

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau} + \frac{F_x(t)}{m} \qquad \frac{1}{\tau} = 6\pi r\eta$$

Vidimo, da imamo dinamični pum na 2. komponenti vektorja $\vec{x}$. Sedaj pa po prej izpeljanem predpisu to matrično zapišimo:

$$\displaylines{ \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{C} + \Gamma w\[3mm]

\frac{d}{dt}

$$[xv]$$

=

$$[0 \quad 10 \quad -1/\tau]$$

$$[xv]$$

- 0 +

$$[01]$$

  \frac{F_x(t)}{m} }$$ Kaj pa P? Poglejmo si njegov odvod:

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} \dot{p}_{xx} & \dot{p}_{xv} \\ \dot{p}_{vx} & \dot{p}_{vv} \end{bmatrix} = AP + PA^\intercal + \Gamma Q \Gamma^\intercal =$$

kjer smo upoštevali, da velja $PA^\intercal = (AP)^\intercal$. Množimo kar po formuli naprej:

$$\displaylines{

$$[0 \quad 10 \quad -1/\tau]$$

$$[\langle x^2 \rangle \quad \langle xv \rangle \langle vx \rangle \quad \langle v^2 \rangle]$$

- PA^\intercal +

$$[01]$$

  Q

$$[0 \quad 1]$$

  = \[3mm]

=

$$\left[\langle xv \rangle \quad \langle v^2 \rangle - \frac{1}{\tau}\langle vx \rangle \quad -\frac{1}{\tau}\langle v^2 \rangle\right]$$

+

$$\left[\langle xv \rangle \quad -\frac{1}{\tau}\langle xv \rangle \langle v^2 \rangle \quad -\frac{1}{\tau}\langle v^2 \rangle\right]$$

+

$$[0 \quad 00 \quad Q]$$

}$$ Tako dobimo na koncu:

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\langle x^2\rangle & \langle xv\rangle \\ \langle xv\rangle & \langle v^2\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\langle xv\rangle & \langle v^2\rangle - \frac{1}{\tau}\langle xv\rangle \\ 2\langle xv\rangle & -\frac{2}{\tau}\langle v^2\rangle + Q\end{bmatrix}$$

Zanima nas, če se nedoločenost hitrosti kje ustali. Torej iščemo stacionarne rešitve:

$$\frac{d}{dt}\langle v^2\rangle = -\frac{2}{\tau}\langle v^2\rangle + Q$$

$$\frac{d}{dt}\langle v^2\rangle = 0 \quad \text{ko} \quad t \to \infty$$

$$\Rightarrow \langle v^2\rangle_\infty = \frac{Q\tau}{2}$$

Pravzaprav iščemo termodinamično ravnovesje:

$$\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \langle W_k\rangle = \frac{1}{2}k_BT$$

$$\Rightarrow \langle v^2\rangle_\infty = \frac{kT}{m}$$

Torej če to dvoje zdaj združimo skupaj, lahko izrazimo **dinamični šum**:

$$Q = \frac{2kT}{\tau m}$$

Kaj pa korelacijski člen? Poglejmo si:

$$\frac{d}{dt}\langle xv\rangle = \langle v^2\rangle = \frac{1}{\tau}\langle xv\rangle$$

$$\langle v^2\rangle_\infty = \frac{1}{\tau}\langle xv\rangle$$

$$\Rightarrow \langle xv\rangle_\infty = \frac{\tau kT}{m}$$

Sedaj pa še za tretjo komponento, ki nastopa:

$$\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = 2\langle xv\rangle$$

To integriramo po času in vstavimo vrednost za $\langle xv\rangle_\infty$ in sledi:

$$\langle x^2(t)\rangle - \langle x^2(0)\rangle = \frac{2\tau kT}{m}T$$

$$\Rightarrow x^2 - x_0^2 = 2Dt$$

kjer smo uvedli $D = \frac{\tau kT}{m}$ kot **difuzijsko konstanto.** Dobili smo difuzijski zakon.

Sedaj pa vključimo še meritev lege $(R < \infty)$

Torej se k našemu odvodu kovariančne matrike doda še en člen, kar bomo ponazorili z:

$$\dot{P} = \ldots - PH^\intercal R^{-1}HP$$

kjer je mogoče vredno komentarja, da smo tu uvedli tudi zapis za $\langle rr^\intercal\rangle = R$, ki je skalar σ^2 in za z:

$$z = Hx + r$$

$$H = \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$$

Torej če si pogledamo samo ta dodaten člen:

$$-PH^{\intercal}R^{-1}HP = -\begin{bmatrix}\langle x^2\rangle & \langle xv\rangle \\ \langle vx\rangle & \langle v^2\rangle\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\frac{1}{R}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\langle x^2\rangle & \langle xv\rangle \\ \langle vx\rangle & \langle v^2\rangle\end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{R}\begin{bmatrix}\langle x^2\rangle \\ \langle xv\rangle\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\langle x^2\rangle & \langle xv\rangle\end{bmatrix} = -\frac{1}{R}\begin{bmatrix}\langle x^2\rangle^2 & \langle x^2\rangle\langle xv\rangle \\ \langle xv\rangle\langle x^2\rangle & \langle xv\rangle^2\end{bmatrix}$$

To moramo dodati še k prejšnjemu odvodu $\dot{P}$. Iščemo zopet stacionarne rešitve. Dobimo 3 enačbe:

$$2\langle xv\rangle - \frac{1}{R}\langle x^2\rangle^2 = 0$$

$$\langle v^2\rangle - \frac{1}{2}\langle xv\rangle - \frac{1}{R}\langle x^2\rangle\langle xv\rangle = 0$$

$$-\frac{2}{\tau}\langle v^2\rangle - \frac{1}{R}\langle xv\rangle^2 + Q = 0$$

Sedaj pa, tole je malenkost sitno ampak se je rešljivo. Izrazimo iz 3. enačbe:

$$\langle v^2\rangle = \frac{\tau Q}{2} - \frac{\tau}{2R}\langle xv\rangle^2$$

in to vstavimo v 2. enačbo, tako da dobimo:

$$\frac{\tau Q}{2} - \frac{\tau}{2R}\langle xv\rangle^2 - \frac{1}{\tau}\langle xv\rangle - \frac{1}{R}\langle x^2\rangle\langle xv\rangle = 0$$

Sedaj pa iz prve enačbe izpostavimo:

$$\langle xv\rangle = \frac{1}{2R}\langle x^2\rangle^2$$

in tudi to vstavimo v enačbo, ki jo predelujemo:

$$\frac{\tau Q}{2} - \frac{\tau}{2R}\langle x^2\rangle^2\frac{1}{4R^2} - \frac{1}{\tau}\frac{1}{2R}\langle x^2\rangle^2 - \frac{1}{R}\langle x^2\rangle\frac{1}{2R}\langle x^2\rangle^2$$

in za konec uvedimo še oznako:

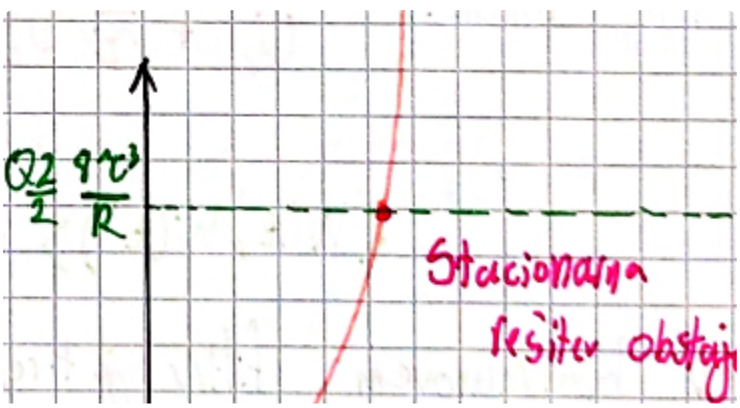
$$y = \langle x^2\rangle\frac{\tau}{R}$$

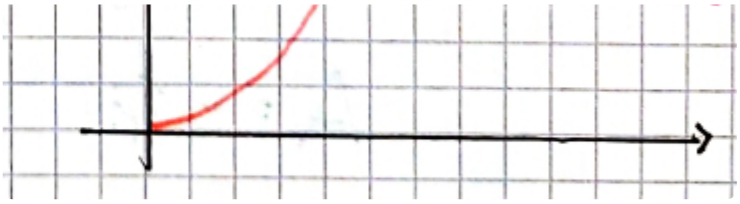
in tudi to seveda damo ravno tam, kamor pričakujete:

$$\frac{\tau Q}{2} - \frac{y^4 R}{8\tau^3} - \frac{4y^2 R}{8\tau^3} - \frac{4y^3 R}{8\tau^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau Q}{2}\frac{8\tau^3}{R} = y^4 + 4y^3 + 4y^3$$

To pa pomeni, da **rešitev obstaja** in da kakršnakoli meritev vodi do omejevanja v prostoru. Spodnja skica je relevantna:





Primer “grobe meritve”

Vzemimo kot primer, da je R velik, kar posledično pomeni, da je y majhen. Od tod sledi:

$$y \gg y^2 \gg y^3 \gg y^4$$

Kar pomeni, da lahko zapisali nekaj takega:

$$\frac{\tau Q}{2}\frac{8\tau^3}{R} = 4y^2 = \frac{4Q\tau^4}{R}$$

$$y = \sqrt{\frac{Q}{R}}\tau^2 = \langle x^2 \rangle \frac{\tau}{R}$$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle_\infty = \sqrt{\frac{Q}{R}}\tau R = \sqrt{QR}\cdot\tau$$

[Zgled: Merjenje napetosti na RC členu]

Imejmo kondenzator C in upor R. Na kondenzatorju je napetost U_C, na uporu pa U_R. Izhajamo iz Kirchoffovega zakona:

$$\sum u_i = 0$$

$$U_R + U_C = 0$$

$$-IR - \frac{e}{C} = 0$$

$$-\frac{e}{C} = U_C = -U_R = IR$$

$$\dot{U}_C = -\frac{I}{C} = \frac{U_R}{RC} = -\frac{U_C}{\tau} \qquad \tau = RC$$

Torej imamo takole dinamiko:

$$\dot{U}_C = -\left(-\frac{1}{\tau}\right)U_C + W(t)$$

kjer je $W(t)$ dinamični šum in velja:

$$\langle W(t)W(t')\rangle = Q\delta(t-t')$$

V Kalmanovem filtru imamo torej:

$$A = -\frac{1}{\tau} \qquad \Gamma = 1$$

Oh, pa dajmo preimenovati $U_C \to U$ za lažje pisanje. Sedaj merimo napetost na C:

$$z = u + r \qquad \langle r(t)r(t')\rangle = R\delta(t-t')$$

Pazi tu je profesor na predavanjih mogoče uporabljal nekoliko smešne oznake, saj imamo dva R. Tale tu ni mišljen kot upor. V našem modelskem sistemu M je $\hat{u}$ ocena za U v sistemu S. Zapišimo še kovarianco ocene:

$$\langle(\hat{u}-u)^2\rangle = P$$

in sedaj lahko definiramo Kalmanov filter (oz. zapišemo odvod kovariance):

$$\dot{P}(t) = 2AP + \Gamma^2 Q - \frac{P^2}{R}$$

Stacionarna rešitev

Poiščimo prvo stacionarno rešitev ko gre $t \to \infty$. Torej nas zanima, kakšen je $P(t \to \infty) = P_\infty$. To dobimo tako, da seveda zahtevamo, da je odvod ničelen:

$$2AP + \Gamma^2 Q - \frac{P^2}{R} = 0$$

No sedaj pa lahko vstavimo A in Γ:

$$-\frac{2}{\tau}P + Q - \frac{P^2}{R} = 0$$

$$\frac{1}{R}(P - P_{1_\infty})(P - P_{2_\infty}) = 0$$

$$P_{1,2_\infty} = -\frac{2R}{\tau}\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2R}{\tau}\right)^2 + 4QR} = -\frac{R}{\tau} \pm \alpha \qquad \alpha = \frac{R}{\tau}\sqrt{1 + \frac{QR\tau^2}{R^2}}$$

Splošna rešitev

Poglejmo še splošno rešitev za vse t:

$$\frac{dP}{\frac{P^2}{R} + \frac{2P}{\tau} - Q} = -dt$$

$$\frac{dP \cdot R}{(P + \frac{R}{\tau} - \alpha)(P + \frac{R}{\tau} + \alpha)} = -dt$$

To pa sedaj razbijemo na **parcialne ulomke**:

$$-dt = R\left[\frac{dP\;B}{(P + \frac{R}{\tau} - \alpha)} + \frac{dP\;D}{(P + \frac{R}{\tau} - \alpha)}\right]$$

Določimo sedaj B in D:

$$Bp + B\frac{R}{\tau} - \alpha B + pD + D\frac{R}{\tau} + \alpha D = 1$$

$$P(B + D) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -D$$

$$B\frac{R}{\tau} - \alpha B + \frac{R}{\tau}D + \alpha D = 1$$

$$\alpha(-B + D) = 1$$

$$2D\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1}{2\alpha} \quad B = -\frac{1}{2\alpha}$$

Tako imamo enačbo:

$$-dt = \frac{R}{2\alpha}\left[\frac{dP}{(P + \frac{R}{\tau} - \alpha)} - \frac{dP}{(P + \frac{R}{\tau} + \alpha)}\right]$$

Sedaj pa to integriramo:

$$-\frac{2\alpha t}{R}\Big|_0^t = \ln\frac{P+\frac{R}{\tau}-\alpha}{P+\frac{R}{\tau}+\alpha}\Bigg|_{P_0}^{P(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{P+\frac{R}{\tau}-\alpha}{P+\frac{R}{\tau}+\alpha} = \left(\frac{P_0+\frac{R}{\tau}-\alpha}{P_0+\frac{R}{\tau}+\alpha}\right)e^{-\frac{2\alpha t}{R}}$$

Tu številski predfaktor pred eksponentno funkcijo pravzaprav gre proti 1 saj velja, da gre $P_0 \to \infty$ ko gre $t \to 0$. To je zato ker še nič ne vemo o sistemu. Skratka, malo z mahanjem rok, ampak ostane:

$$P+\frac{R}{\tau}-\alpha = \left(P+\frac{R}{\tau}+\alpha\right)e^{-2\alpha t/R}$$

$$P(1-e^{-2\alpha t/R}) = -\frac{R}{\tau}(1-e^{-2\alpha t/R}) + \alpha(1+e^{-2\alpha t/R})$$

In tako dobimo končno rešitev:

$$P(t) = -\frac{R}{\tau} + \alpha\left(\frac{1+e^{-2\alpha t/R}}{1-e^{-2\alpha t/R}}\right)$$

Da naredimo “Sanity Check” lahko limitiramo $t \to \infty$, da vidimo če se prej dobljena rešitev ujema:

$$P_\infty = -\frac{R}{\tau} + \alpha = -\frac{R}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{R}{\tau}\right)^2 + QR}$$

$$P_\infty = -\frac{R}{\tau} + \frac{R}{\tau}\sqrt{1+\frac{Q\tau^2}{R}} \approx$$

$$\approx -\frac{R}{\tau}\left(1-\left(1+\frac{1}{2}\frac{Q\tau^2}{R}\right)\right)$$

Tu smo razvili koren za majhne Q in tako po dolgem času:

$$\Rightarrow P_\infty = \frac{R}{\tau}\frac{Q\tau^2}{2R} = \frac{\tau Q}{2}$$

V modelskem sistemu M imamo tako oceno:

$$\dot{\hat{u}} = \frac{1}{\tau}\hat{u} + K(t)[z-\hat{u}] \qquad K(t) = \frac{P_\infty}{R} = \frac{Q\tau}{2R}$$

Oz. zapisano drugače:

$$\dot{\hat{u}} = -\frac{1}{\tau}\hat{u} + \frac{Q\tau}{2R}(z-\hat{u}) = \left(-\frac{1}{\tau} - \frac{Q\tau}{2R}\right)\hat{u} + \frac{Q\tau}{2R}z$$

kjer tu označimo τ_{eff}:

$$\frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{1}{\tau} + \frac{Q\tau}{2R}$$

$$Q = 0 \qquad \tau_{\text{eff}} = \tau$$

$$Q \to \infty \qquad \tau_{\text{eff}} \to 0$$

Primer eksponentno padajočega sunka

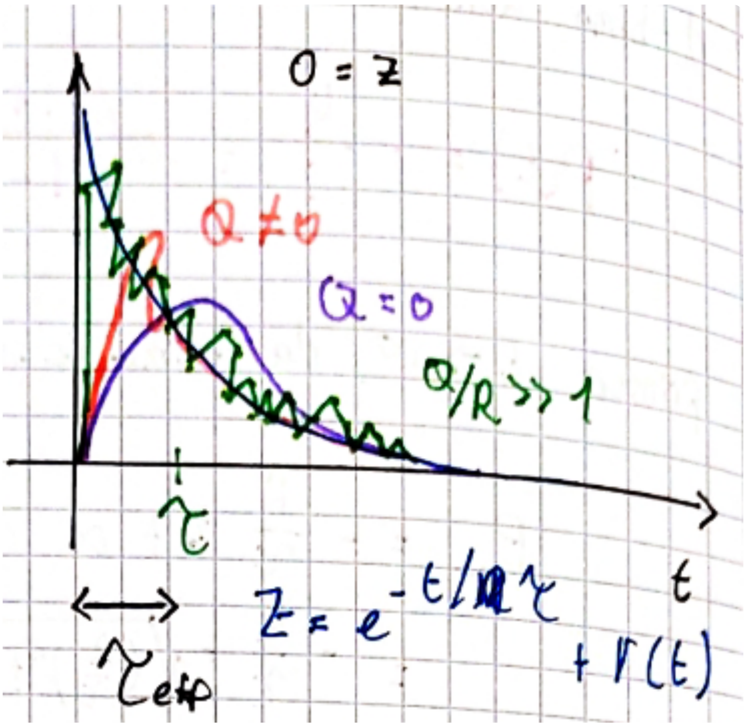
Recimo da eksponentnemu padcu napetosti sledimo diskretno. Pomeni, da imamo:

$$x = Ax + C$$

$$-\frac{1}{\tau}x = Ax + C \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{\tau}$$

Tu imam sedaj glede na izpeljano tri možnosti:

1. $Q = 0 \quad K_\infty = \frac{Q}{R}$
2. $Q \neq 0 \quad \tau_{\text{eff}} < \tau$
3. $Q/R \gg 1 \quad Q \neq 0$



Izkaže se, da je K_∞ dober za to če hočemo končen rezultat in nas sledenje začetnim tranzientom ne zanima.

Spomni se: To je tako kot merjenje temperature vode s termometrom, ki rabi nekaj časa, da se ustali. Samo ustaljeno nas zanima.