Sledenje konstantni skalarni količini

Označimo z $\hat{x}$ oceno k x. Zanima nas kako dotok novih informacij preko meritev $z_i = x + r_i$ sinhronizira modelski sistem z realnim. Lastnosti našega merilnega šuma so:

$$r_i = \mathcal{N}(0, \sigma)$$

$$\langle r_i \rangle = 0$$

$$\langle r_i^2 \rangle = \sigma^2 \langle r_i r_j \rangle = \delta_{ij} \sigma^2$$

Tu je pomembna zadnja lastnost; to da je merilni šum nekoreliran. Torej šum v vsakem trenutku je popolnoma nepovezan s šumom v prejšnjih trenutkih.

Shema za sledenje

Predstavili bomo shemo, s katero lahko iteracijsko sledimo skalarni količini.

Korak n

Recimo, da imamo že n-to meritev oz. smo v n-tem koraku iteracije oz. je minilo $(n \cdot T)$ časa, kjer je T naša perioda merjenja. Takrat je:

$$\hat{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} z_i \qquad \hat{\sigma^2}_n = \frac{\sigma^2}{n}$$

Korak $n+1$

Dobili smo še dodatno meritev $n+1$:

$$\hat{x}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i}^{n+1} z_i = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^{N} z_i + z_{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} \hat{x}_n + \frac{1}{n+1} z_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}_{n+1} + \frac{1}{n+1}(z_{n+1} - \hat{x}) = \hat{x}_{n+1} + \frac{\hat{\sigma^2}_{n+1}}{\sigma^2}(z_{n+1} - \hat{x}_n)$$

$$\sigma_{n+1}^{-2} = \sigma_n^{-2} + \sigma^{-2}$$

Tu razlika v zadnjem členu imenuje **inovacija**, ki je pravzaprav primer povratne zanke. Faktor z variancami pa se imenuje **utež**.

Ocena konvergence za $\hat{x} \to x$

Vzemimo čas vzorčenja $T \to 0$. V tej limiti postanejo naše diskretne spremenljivke zvezne.

$$\hat{x}_n \to \hat{x}(t) \quad \hat{\sigma^2}_n \to \hat{\sigma^2}_x(t) \quad z_n \to z(t)$$

Poglejmo si potem slednjo limito:

$$\lim_{T \to 0} \frac{\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n}{T} = \dot{\hat{x}}(t) = \frac{\hat{\sigma^2}_{n+1}}{\sigma^2 \, T}(z_n - \hat{x}_n)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\hat{x}}(t) = \frac{\hat{\sigma^2}_x}{\sigma^2 T}\big(z(t) - \hat{x}(t)\big)$$

Sedaj pa zahtevajmo, da naj velja:

$$\lim_{\sigma^2 \, T} = R(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{x}}(t) = \frac{\hat{\sigma^2}}{R(t)}\big(z - \hat{x}\big)$$

Tu je zdaj koristno, da si bralec pregleda skice na str. 17. Zanima nas kako je s koreliranostjo. Naj bo τ **čas minimalnih fluktuacij**. Če velja $T \gg \tau$ so mo meritve nekorelirane, če pa velja $T \ll \tau$ so pa korelirane.

Da zagotavljamo zgornjo limito, ko gre $T \to 0$ se mora σ^2 večati, tako, da je njun produkt konstanten. Če večkrat vzorčimo znotraj ene fluktuacije se nam σ poveča.

Konvergenca disperzije združene meritve (v kontinumskih slikah)

Poglejmo si:

$$\frac{1}{T}\hat{\sigma^2}_{n+1} - \hat{\sigma^2}_n = \frac{1}{T}\left(\frac{\hat{\sigma^2_n \sigma^2}}{\hat{\sigma^2}_n - \sigma^2} - \hat{\sigma^2}_n\right) =$$

$$= \frac{-(\hat{\sigma^2}_n)^2}{(\hat{\sigma^2}_n T + \sigma^2 T)} = \dot{\hat{\sigma^2}}_x$$

in tu sedaj limitiramo $T \to 0$:

$$\dot{\hat{\sigma^2}}_x = -\frac{(\hat{\sigma^2}_x)}{R}$$

$$\hat{\sigma^2}_x \to 0 = \langle(\hat{x} - x)^2\rangle$$

Ocena konvergira k pravi vrednosti, ko dotakamo informacije. Na koncu dobimo točno sinhronizacijo med realnim in modelskim sistemom.

Merjenje skalarne spremenljivke

Če ne poznamo dinamike za $x(t)$ v realnem sistemu S

V vsakem trenutku je meritev edina ocena, ki jo imamo. To je tako, kot da bi na starejše/prehodne meritve pozabili.

$$\hat{x} = Z(t) \qquad \hat{\sigma^2} = R(t)$$

Manjši časovni intervali

Na dovolj majhnih opazovalnih oknih lahko rečemo, da je dinamika približno linearna. Tu manj pozabljamo na prejšnje meritve.

Kako opišemo dinamiko v S

Dinamiko opišemo z **linearno diferencialno enačbo 1. reda**:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + C(t)$$

Diskretno jo lahko zapišemo tudi kot:

$$\dot{x} = \frac{x_{n+1} - x_n}{T}$$

oz. kot:

$$x_{n+1} = (1 + A(t_n)T)x_n + C(t_n)T$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \phi_n x_n + C_n \qquad \phi_n = 1 + A(t_n)T \qquad C_n = C(t_n)T$$

Postopek optimalne sinhronizacije

Imejmo v nekem trenutku $\hat{x}_n$, $\hat{\sigma^2}_n$. Za $(n+1)$ korak bo **napovedna ocena:**

$$\bar{x}_{n+1} = \phi_n \hat{x}_n + C_n$$

in **napoved disperzije**:

$$\bar{\sigma^2}_{n+1} = \phi_n^2 \hat{\sigma_n^2}$$

kjer je $\bar{\sigma^2}_n$ definirana kot:

$$\bar{\sigma^2}_n = \langle(\bar{x}_{n+1} - x_{n+1})^2\rangle = \langle(\phi_n\hat{x} + C_n - \phi_n x_n - C_n)^2\rangle =$$

$$= \phi_n^2\langle(\hat{x}_n - x_n)^2\rangle = \phi_n^2\hat{\sigma^2}_n$$

No sedaj pa dobimo nov izmerek v času $n+1: z_{n+1}$, σ. Naredimo izostreno oceno po znanem postopku:

$$\hat{x}_{n+1} = \bar{x}_{n+1} + \frac{\hat{\sigma^2}_{n+1}}{\sigma^2}(z_{n+1} - \bar{x}_{n+1})$$

$$\hat{\sigma^{-2}}_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1}^{-2} + \sigma^{-2}$$

Uvedimo nove oznake! Naj gre $\hat{\sigma^2}_{n+1} \to P_{n+1}$, ki jo imenujemo **kovariančna matrika izostrene ocene**. Recimo $\bar{\sigma}_{n+1}^2 \to M_{n+1}$, ki predstavlja **kovariančno matriko napovedi** in proglasimo $K_{n+1} = \frac{\hat{\sigma^2}_{n+1}}{\sigma^2} = \frac{P_{n+1}}{\sigma^2}$ za **ojačevalni faktor inovacije**. Definicije so slednje:

$$M_{n+1} = \sigma_n^2 P_n$$

$$P_{n+1} = \frac{M_{n+1}\sigma^2}{M_{n+1} + \sigma^2} = M_{n+1} - \frac{M_{n+1}^2}{M_{n+1} - \sigma^2}$$

$$\bar{x}_{n+1} = \psi_n\hat{x}_n + C_n$$

Dinamični šum

ϕ_n in C_n sta v diferenčni sliki nepopolna. Dodati moramo še nekaj..

$$x_{n+1} = \phi_n x_n + C_n + \Gamma_n w_n$$

kjer je w_n **dinamični šum**, Γ_n pa je nek multiplikativni faktor. Tisto kar ne poznamo o dinamiki skrijemo v dinamični šum, ki je isto kot merilni šum **Gaussovsko porzdeljen (bel) šum**.

$$\langle w_n w_n'\rangle = \delta_{nn'}Q_n$$

Če je $Q = 0$ potem natančno poznamo dinamiko. To kar smo sedaj napisali ne vpliva na našo oceno za $\hat{x}_{n+1}$, vpliva pa na kovariance. Poglejmo:

$$M_{n+1} = \langle(\bar{x}_{n+1} - x_{n+1}^2)\rangle = \langle(\phi_n\hat{x}_n + C_n - \phi_n x_n - C_n - \Gamma_n w_n)^2\rangle =$$

$$= \langle(\phi_n(\hat{x}_n - x_n) - \Gamma_n w_n)^2\rangle =$$

$$= \phi_n^2\langle(\hat{x}_n - x_n)^2\rangle + \Gamma_n^2\langle w_n^2\rangle - 2\Gamma_n\phi_n\langle(\hat{x}_n - x_n)w_n\rangle = \phi_n^2 P_n + \Gamma_n^2 Q_n$$

$$\Rightarrow \quad M_{n+1} = \phi_n^2 P_n + \Gamma_n^2 Q_n$$

Pomembno: Zaradi nepoznane dinamike se nam kovarianca lahko le povečuje.

Prehod v kontinuumsko sliko

V sistemu M smo rekli, da naj bo izostrena ocena:

$$\hat{x}_{n+1} = \bar{x}_{n+1} + K_{n+1}(z_{n+1} - \bar{x}_{n+1})$$

Poglejmo sedaj limito, ko čas vzorčenja pošljemo proti nič. Označimo:

$$A(t) = \frac{\phi_n - 1}{T} \qquad C(t) = \frac{C_n}{T}$$

in sedaj limita:

$$\lim_{T\to 0}\frac{\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n}{T} = \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + C(t) + \frac{P(t)}{R}(Z(t) - \hat{x}(t))$$

Poglejmo prehod še za kovarianco. Kako dobimo izostreno iz napovedi:

$$P_{n+1} = M_{n+1} - \frac{M_{n+1}^2}{M_{n+1} + \sigma^2}$$

$$= \phi_n^2 P_n + \Gamma_n^2 Q_n - \frac{(\phi_n^2 P_n + \Gamma_n^2 Q_n)^2}{M_{n+1} + \sigma^2}$$

Spet si poglejmo limito časa vzorčenja:

$$\lim_{T \to 0} \frac{P_{n+1} - P_n}{T} = \frac{(\phi_n^2 - 1) P_n}{T} + \frac{\Gamma^2 Q_n}{T} - \frac{\phi_n^4 P_n^2 + \Gamma_n^4 Q_n^2 + 2\Gamma_n^2 Q_n \phi_n^2 P_n}{M_{n+1} T + \sigma^2 T} =$$

V zadnjem členu vidimo, da imamo neko zmešnjavo, tam v ulomku 2. in 3. člen odpadeta. Pa še ko limitiramo $\frac{\Gamma^2 (Q_n \cdot T)}{T^2}$:

$$\lim (Q_n \cdot T) \to Q(t)$$

$$\left(\frac{\Gamma}{T} \right)^2 \to \Gamma^2(t)$$

to naredimo tako, da so te stvari končne. **TODO: Razlage za te limite.** Skupaj je njun produkt $\Gamma^2 Q$ končen. Končen rezultat pa je:

$$\Rightarrow \quad \dot{P}(t) = 2AP + \Gamma^2 Q - \frac{P^2}{R}$$

Tu prvi člen predstavlja sprememba kovariance zaradi znane dinamike, drugi predstavlja povečanje zaradi dinamičnega šuma in zadnji ostrenje zaradi dotoka novih meritev.