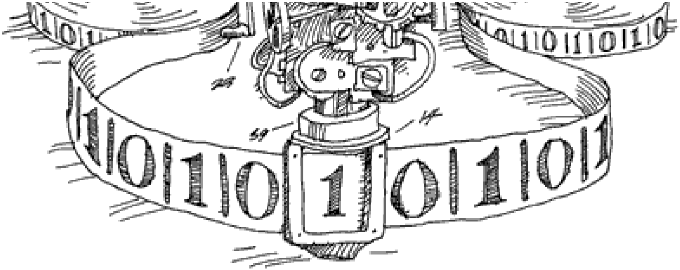
Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik

Tutorium 9

Institut für Kryptographie und Sicherheit



$\mathcal{P}, \mathcal{NP}$

$\mathcal{P}$ ist die Klasse aller Sprachen, die von einer deterministischen Turingmaschine in Polynomialzeit erkannt werden.

Formal

$\mathcal{P} = \bigcup_{k} \mathit{TIME}(n^k)$

$\mathcal{NP}$ ist die Klasse aller Sprachen, die von einer **nicht**deterministischen Turingmaschine in Polynomialzeit erkannt werden.

Formal

$\mathcal{NP} = \bigcup_{k} \mathit{NTIME}(n^k)$

$\mathcal{NP}$-schwer, $\mathcal{NP}$-vollständig

Ein Problem liegt in $\mathcal{NP}$**-schwer** (Englisch: $\mathcal{NP}$-hard) falls es **mindestens** so schwer ist wie jedes Problem in $\mathcal{NP}$.
Also: Ist $L \in \mathcal{NP}$-schwer, dann ist jedes $L' \in \mathcal{NP}$ polynomiell reduzierbar auf L.

Formal

$L \in \mathcal{NP}\text{-schwer} \Leftrightarrow \forall L' \in \mathcal{NP} : L' \preceq_p L$

Nach dieser Definition kann L also auch schwerer sein als alle Probleme in $\mathcal{NP}$. Liegt L zusätzlich auch noch selbst in $\mathcal{NP}$, so nennt man L $\mathcal{NP}$**-vollständig**. (Englisch: $\mathcal{NP}$-complete)

Aufgabe B9 A3

Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist unter Schnittbildung abgeschlossen.
2. Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist unter Vereinigung abgeschlossen.

Dabei nehmen wir an, dass alle Sprachen über dem binären Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ definiert sind.

CLIQUE

Kurzdefinition

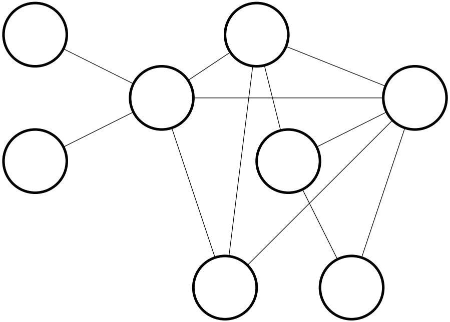
Enthält der Graph einen Teilgraph von mindestens n Knoten, bei der jeder Knoten eine Kante zu jedem anderen Knoten des Teilgraphs hat?

Formal

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knoten $v \in V$ und Kanten $e = (v_1, v_2) \in E$ mit $v_1, v_2 \in V$ und ein $n \in \mathbb{N}$.
Gesucht: Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ mit $|V'| \geq n$ und $\forall v_1', v_2' \in V' : \exists e' \in E' : e' = (v_1, v_2)$.

Beispiel

Gibt es eine Clique der Größe 4 in diesem Graphen?



Aufgabe B9 A2

Gehen Sie bei dieser Aufgabe durchweg von der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ aus.

Problem: 4-COLOR
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Gibt es eine Färbung der Knoten V, sodass je zwei durch eine Kante aus E miteinander verbundene Knoten unterschiedlich gefärbt sind, wenn nur vier unterschiedliche Farben zur Verfügung stehen?

Zeigen Sie, dass 4-COLOR $\mathcal{NP}$-vollständig ist!
Hinweis: Es kann hilfreich sein, wenn Sie die $\mathcal{NP}$- Vollständigkeit des Dreifärbbarkeitsproblems 3-COLOR verwenden.

Aufgabe B9 A2

Gehen Sie bei dieser Aufgabe durchweg von der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ aus.
Es ist bekannt, dass sowohl das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik SAT als auch 3-SAT, das Erfüllbarkeitsproblem mit Beschränkung auf Klauseln mit nur 3 Literalen, $\mathcal{NP}$-vollständig sind.
Das Problem 3-CLIQUE ist wie folgt definiert:

Problem: 3-CLIQUE
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Gibt es eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe 3 in G?

Zeigen Sie, dass 3-CLIQUE **nicht** $\mathcal{NP}$-vollständig ist!

PARTITION

Kurzdefinition

Teile eine Menge natürlicher Zahlen in zwei Teilmengen, sodass die Summen der Elemente der Teilmengen gleichgroß sind.

Formal

Gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ $(n \in \mathbb{N})$
Gesucht: Gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \{1, ..., n\}$ mit

$$\sum_{1 \leq i \leq n, i \in J} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n, i \notin J} a_i?$$

Beispiele

Welche dieser Mengen ist partitionierbar?

$$\{16, 8, 4, 3, 1, 1, 1\}$$

$$\{7, 4, 8, 2, 12, 8, 9, 3, 6\}$$

$$\{5, 8, 9, 2, 6, 4\}$$

BIN PACKING

Kurzdefinition

Teile eine Menge von Objekten mit Gewichten auf eine Menge von Behältern mit Maximallast, sodass jedes Objekt in einem Behälter ist und kein Behälter überladen ist.

Formal

Gegeben: Eine Behältergröße $b \in \mathbb{N}$, die Anzahl der Behälter $k \in \mathbb{N}$ und Objekte $a_1, ..., a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ mit
$a_i \in \mathbb{N}, a_i \leq b$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$

Gesucht: Können die n Objekte so auf die k Behälter verteilt werden, dass kein Behälter überbeladen ist?

Beispiel

Karlsruher Institut für Technologie

Seien die Gewichte der Objekte $\{3, 1, 4, 5, 1, 1\}$
und es existieren 3 Behälter mit Maximalgröße 5

Gibt es eine Verteilung ohne Überlastung?

Seien die Gewichte der Objekte $\{5, 4, 3, 3\}$
und es existieren 3 Behälter mit Maximalgröße 5

Gibt es eine Verteilung ohne Überlastung?

Aufgabe B9 A1

Gegeben sind die folgenden Probleme:

PARTITION:
Gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ $(n \in \mathbb{N})$
Gesucht: Gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \{1, ..., n\}$ mit

$$\sum_{1 \leq i \leq n, i \in J} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n, i \notin J} a_i?$$

BIN PACKING:
Gegeben: Eine Behältergröße $b \in \mathbb{N}$, die Anzahl der Behälter $k \in \mathbb{N}$ und Objekte $a_1, ..., a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $a_i \in \mathbb{N}, a_i \leq b$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$
Gesucht: Können die n Objekte so auf die k Behälter verteilt werden, dass kein Behälter überbeladen ist?

Zeigen Sie, dass BIN PACKING $\mathcal{NP}$-hart ist, wobei PARTITION als $\mathcal{NP}$-vollständig vorausgesetzt werden darf!

Aufgabe B9 A1

Gegeben sind die folgenden Probleme:

PARTITION:

Gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ $(n \in \mathbb{N})$

Gesucht: Gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \{1, ..., n\}$ mit

$$\sum_{1 \leq i \leq n, i \in J} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n, i \notin J} a_i?$$

BIN PACKING:

Gegeben: Eine Behältergröße $b \in \mathbb{N}$, die Anzahl der Behälter $k \in \mathbb{N}$ und Objekte $a_1, ..., a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $a_i \in \mathbb{N}, a_i \leq b$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$

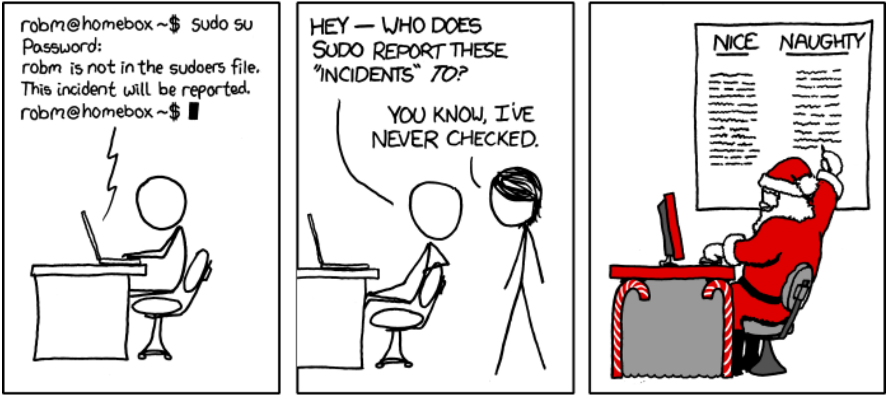
Gesucht: Können die n Objekte so auf die k Behälter verteilt werden, dass kein Behälter überbeladen ist?

Gegeben seien die Objekte der PARTITION-Probleminstanz $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (1, 1, 2, 3, 4, 5)$. Zeigen oder widerlegen Sie, ob das transformierte und das ursprüngliche Problem eine Lösung besitzen!

Immer hilfreich: Mehr Probleme

- NP-Probleme
  - Sat
  - n-Sat ($n \geq 3$)
  - n-Color ($n \geq 3$)
  - Partition
  - Clique
  - Bin-Packing
  - Traveling Salesman (TSP)
  - Knapsack
  - Vertex Cover
  - Dominating Set
  - Independent Set
  - Hamilton Kreis
  - Super Mario Bros.

Bis zum nächsten Mal!



Lizenzen