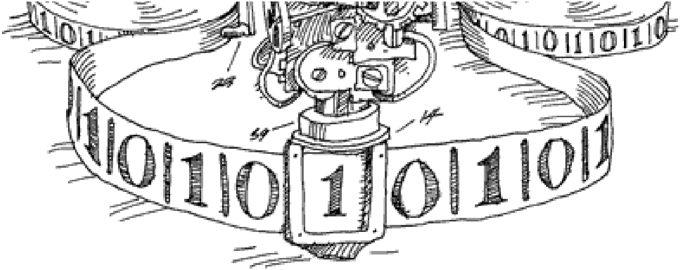
Theoretische Grundlagen der Informatik

Tutorium 3

Institut für Theoretische Informatik



Nerode-Relation

Definition 2.25

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist die *Nerode-Relation* R_L definiert durch:
Für alle $x, y \in \Sigma^*$ ist

$$x \; R_L \; y \iff \text{für alle } z \in \Sigma^* \text{ gilt } (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

Erinnerung

Die minimale Anzahl an Zuständen eines endlichen Automaten einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ entspricht dem Index der Nerode-Relation.

Aufgabe zur Nerode-Relation

Gib für die folgenden Sprachen jeweils die Äquivalenzklassen bezüglich der Nerode-Relation R_L an. Welche der Sprachen sind regulär? Begründe deine Antwort. Konstruiere für diese Sprachen jeweils den Minimalautomaten.

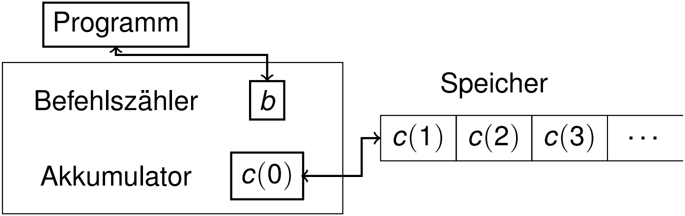
- $L_1 = \{a^{2i} \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 1\}, \Sigma = \{a\}$
- $L_2 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}, \Sigma = \{0,1\}$

Registermaschine

Annähernd realistisches Rechnermodell. Bestehend aus:

- Befehlszähler (b)
- Akkumulator
- Register (= Speicher)
- Programm

Der Speicher der Registermaschine ist unendlich und eindeutig adressierbar.



Turingmaschine

Eine Registermaschine ist zwar physikalischen Rechnern ähnlich, aber unhandlich, um Beweise zu führen. Daher ist ein abstrakteres Modell hilfreich.
$\rightarrow$ Turingmaschine

Turingmaschine

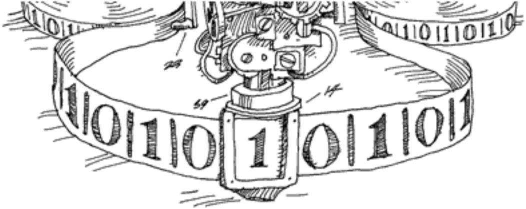
Die Turingmaschine besteht aus einem beidseitig *unendlichen* Eingabe- und Rechenband mit einem frei beweglichen Lese-/Schreibkopf, der von einer *endlichen* Kontrolle gesteuert wird.

Turingmaschine

Eine Registermaschine ist zwar physikalischen Rechnern ähnlich, aber unhandlich, um Beweise zu führen. Daher ist ein abstrakteres Modell hilfreich.
$\rightarrow$ Turingmaschine

Turingmaschine

Die Turingmaschine besteht aus einem beidseitig *unendlichen* Eingabe- und Rechenband mit einem frei beweglichen Lese-/Schreibkopf, der von einer *endlichen* Kontrolle gesteuert wird.



Turingmaschine

Definiton

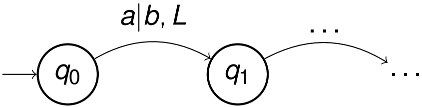
Eine Turingmaschine wird definiert als ein 7-Tupel bestehend aus:

- Q, einer endlichen Zustandsmenge
- Σ, einem endlichen Eingabealphabet
- $\sqcup$, einem Blanksymbol mit $\sqcup \notin \Sigma$
- Γ, einem endlichen Bandalphabet mit $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
- $s \in Q$, einem Startzustand
- δ, einer Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$
- $F \subseteq Q$, einer Menge an Endzuständen

Bemerkung

Für $q \in F$ gilt: $\forall a \in \Gamma : \delta(q, a) = (q, a, N)$, d.h. die Berechnung der Turingmaschine stoppt.

Graph einer Turingmaschine

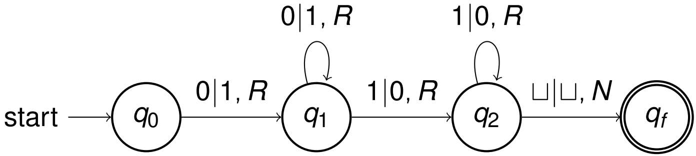


Dabei steht die Kantenbeschriftung „$a|b, L$“ für den Übergang $\delta(q_0, a) = (q_1, b, L)$.

Falls es für einen gegebenen Zustand und ein gegebenes Symbol keinen Zustandsübergang gibt, bricht die Maschine die Berechnung ab.

Turingmaschine: Beispiel

Seien $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$ und die Turingmaschine $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \Sigma, \sqcup, \Gamma, \delta, q_0, \{q_f\})$ mit folgender Überführungsfunktion gegeben:



- Welche Wörter akzeptiert $\mathcal{M}$?
- Wie verändert $\mathcal{M}$ die Eingabe?

Konfigurationen

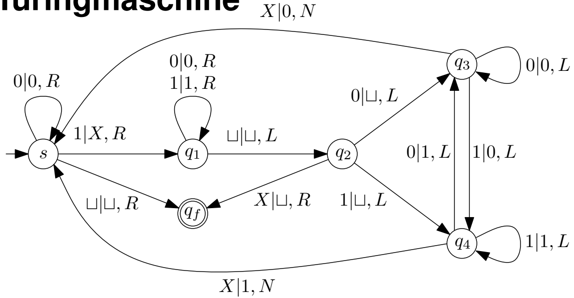
Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \sqcup, \Gamma, \delta, s, F)$ eine Turingmaschine.
Angabe des aktuellen Berechnungszustandes: *Konfiguration*

$$w(q)av$$

wobei $w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$.
Dies bedeutet:

- $\mathcal{M}$ befindet sich im Zustand q.
- Der Lesekopf steht auf dem Zeichen a.
- Links vom Lesekopf steht das Wort w und rechts davon das Wort v auf dem Rechenband.

Aufgabe: Turingmaschine



1. Welche Konfigurationen durchläuft die Maschine bei Eingabe des Wortes 01010?
2. Welche Aufgabe haben die Zustände q_2, q_3 und q_4? (Hinweis: Überlege dir dazu, was passiert, wenn $\mathcal{M}$ sich im Zustand q_2 befindet und der Lesekopf auf dem letzten Zeichen der Eingabe steht, bis zu dem Zeitpunkt, zu dem das erste Mal X gelesen wird.)
3. Wie verändert $\mathcal{M}$ die Eingabe?

Aufgabe: Turingmaschine

Entwirf eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$, die genau die folgende Sprache akzeptiert:

$$L := \left\{ ww^R \,\middle|\, w \in \{a, b\}^* \right\}$$

wobei w^R das „Spiegelwort“ zu w ist. Dies ist die Sprache der Palindrome gerader Länge.

1. Beschreibe kurz in Worten, wie deine Turing-Maschine arbeitet.
2. Spezifiziere $\mathcal{M}$ explizit durch Angabe eines Zustandsdiagramms oder einer formalen Spezifikation.

Aufgabe: Turingmaschine

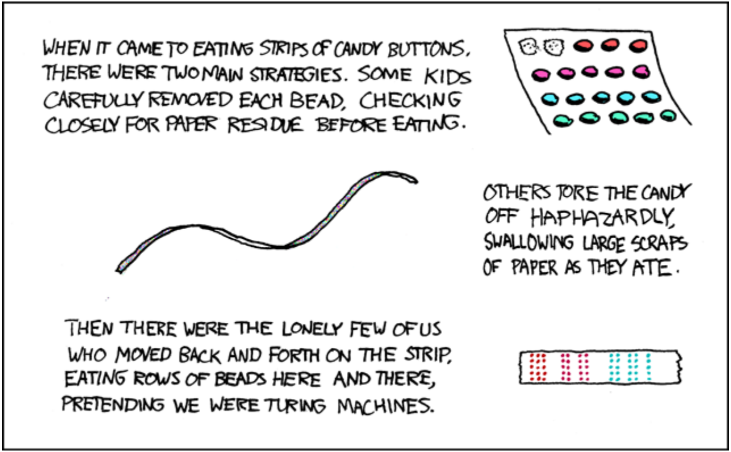
Entwirf eine Turingmaschine, die aus drei Zuständen (plus einem weiteren Haltezustand q_f) besteht und folgendes Verhalten hat:

> *Angesetzt auf ein leeres Band schreibt sie möglichst viele* `1` *hintereinander und* ***hält*** *nach endlich vielen Schritten.*

Die Turingmaschine soll folgende Alphabete verwenden:
$\Sigma = \{\mathtt{1}\}, \Gamma = \Sigma \cup \{\mathtt{0}\}$. Insbesondere ist also `0` das Blanksymbol.

1. Welche Konfigurationen durchläuft die Maschine, wenn sie auf dem leeren Band gestartet wird?
2. Welche Konfigurationen durchläuft die Maschine bei Eingabe des Wortes `101`?

Bis zum nächsten Mal!



Nonrewritable tape?

Lizenzen