

Theoretische Grundlagen der Informatik

Tutorium 3

Institut für Theoretische Informatik



Definition 2.25

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist die *Nerode-Relation* R_L definiert durch:

Für alle $x, y \in \Sigma^*$ ist

$$x R_L y \iff \text{für alle } z \in \Sigma^* \text{ gilt } (xz \in L \iff yz \in L)$$

Erinnerung

Die minimale Anzahl an Zuständen eines endlichen Automaten einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ entspricht dem Index der Nerode-Relation.

Aufgabe zur Nerode-Relation

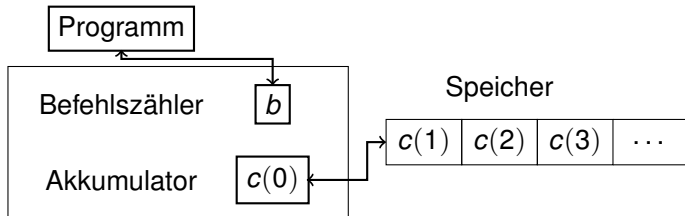
Gib für die folgenden Sprachen jeweils die Äquivalenzklassen bezüglich der Nerode-Relation R_L an. Welche der Sprachen sind regulär? Begründe deine Antwort. Konstruiere für diese Sprachen jeweils den Minimalautomaten.

- $L_1 = \{a^{2i} \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 1\}, \Sigma = \{a\}$
- $L_2 = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}, \Sigma = \{0, 1\}$

Annähernd realistisches Rechnermodell. Bestehend aus:

- Befehlszähler (b)
- Akkumulator
- Register (= Speicher)
- Programm

Der Speicher der Registermaschine ist unendlich und eindeutig adressierbar.



Eine Registermaschine ist zwar physikalischen Rechnern ähnlich, aber unhandlich, um Beweise zu führen. Daher ist ein abstrakteres Modell hilfreich.

→ Turingmaschine

Turingmaschine

Die Turingmaschine besteht aus einem beidseitig *unendlichen* Eingabe- und Rechenband mit einem frei beweglichen Lese-/Schreibkopf, der von einer *endlichen* Kontrolle gesteuert wird.

Eine Registermaschine ist zwar physikalischen Rechnern ähnlich, aber unhandlich, um Beweise zu führen. Daher ist ein abstrakteres Modell hilfreich.

→ Turingmaschine

Turingmaschine

Die Turingmaschine besteht aus einem beidseitig *unendlichen* Eingabe- und Rechenband mit einem frei beweglichen Lese-/Schreibkopf, der von einer *endlichen* Kontrolle gesteuert wird.



Definition

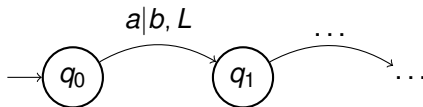
Eine Turingmaschine wird definiert als ein 7-Tupel bestehend aus:

- Q , einer endlichen Zustandsmenge
- Σ , einem endlichen Eingabealphabet
- \sqcup , einem Blanksymbol mit $\sqcup \notin \Sigma$
- Γ , einem endlichen Bandalphabet mit $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
- $s \in Q$, einem Startzustand
- δ , einer Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$
- $F \subseteq Q$, einer Menge an Endzuständen

Bemerkung

Für $q \in F$ gilt: $\forall a \in \Gamma : \delta(q, a) = (q, a, N)$, d.h. die Berechnung der Turingmaschine stoppt.

Graph einer Turingmaschine

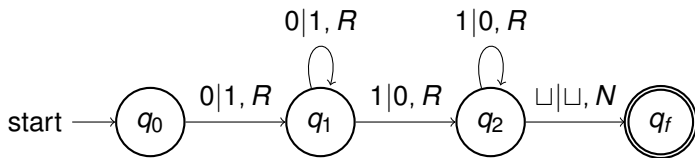


Dabei steht die Kantenbeschriftung „ $a|b, L$ “ für den Übergang $\delta(q_0, a) = (q_1, b, L)$.

Falls es für einen gegebenen Zustand und ein gegebenes Symbol keinen Zustandsübergang gibt, bricht die Maschine die Berechnung ab.

Turingmaschine: Beispiel

Seien $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$ und die Turingmaschine $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \Sigma, \sqcup, \Gamma, \delta, q_0, \{q_f\})$ mit folgender Überföhrungsfunktion gegeben:



- Welche Wörter akzeptiert \mathcal{M} ?
- Wie verändert \mathcal{M} die Eingabe?

Sei $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \sqcup, \Gamma, \delta, s, F)$ eine Turingmaschine.

Angabe des aktuellen Berechnungszustandes: *Konfiguration*

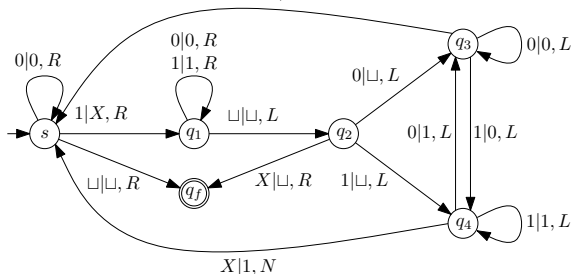
$$w(q)av$$

wobei $w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$.

Dies bedeutet:

- \mathcal{M} befindet sich im Zustand q .
- Der Lesekopf steht auf dem Zeichen a .
- Links vom Lesekopf steht das Wort w und rechts davon das Wort v auf dem Rechenband.

Aufgabe: Turingmaschine $X|0, N$



1. Welche Konfigurationen durchläuft die Maschine bei Eingabe des Wortes 01010?
2. Welche Aufgabe haben die Zustände q_2 , q_3 und q_4 ? (Hinweis: Überlege dir dazu, was passiert, wenn \mathcal{M} sich im Zustand q_2 befindet und der Lesekopf auf dem letzten Zeichen der Eingabe steht, bis zu dem Zeitpunkt, zu dem das erste Mal X gelesen wird.)
3. Wie verändert \mathcal{M} die Eingabe?

Aufgabe: Turingmaschine

Entwirf eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$, die genau die folgende Sprache akzeptiert:

$$L := \left\{ ww^R \mid w \in \{a, b\}^* \right\}$$

wobei w^R das „Spiegelwort“ zu w ist. Dies ist die Sprache der Palindrome gerader Länge.

1. Beschreibe kurz in Worten, wie deine Turing-Maschine arbeitet.
2. Spezifiziere \mathcal{M} explizit durch Angabe eines Zustandsdiagramms oder einer formalen Spezifikation.

Aufgabe: Turingmaschine

Entwirf eine Turingmaschine, die aus drei Zuständen (plus einem weiteren Haltezustand q_f) besteht und folgendes Verhalten hat:

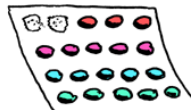
*Angesetzt auf ein leeres Band schreibt sie möglichst viele 1 hintereinander und **hält** nach endlich vielen Schritten.*

Die Turingmaschine soll folgende Alphabete verwenden:

$\Sigma = \{1\}, \Gamma = \Sigma \cup \{0\}$. Insbesondere ist also 0 das Blanksymbol.

1. Welche Konfigurationen durchläuft die Maschine, wenn sie auf dem leeren Band gestartet wird?
2. Welche Konfigurationen durchläuft die Maschine bei Eingabe des Wortes 101?

WHEN IT CAME TO EATING STRIPS OF CANDY BUTTONS, THERE WERE TWO MAIN STRATEGIES. SOME KIDS CAREFULLY REMOVED EACH BEAD, CHECKING CLOSELY FOR PAPER RESIDUE BEFORE EATING.



OTHERS TORE THE CANDY OFF HAPHAZARDLY, SWALLOWING LARGE SCRAPS OF PAPER AS THEY ATE.

THEN THERE WERE THE LONELY FEW OF US WHO MOVED BACK AND FORTH ON THE STRIP, EATING ROWS OF BEADS HERE AND THERE, PRETENDING WE WERE TURING MACHINES.



Nonrewritable tape?



Dieses Werk ist unter einem "Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland"-Lizenzvertrag lizenziert. Um eine Kopie der Lizenz zu erhalten, gehen Sie bitte zu <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder schreiben Sie an Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

Davon ausgenommen sind das Titelbild, welches aus der März-April 2002 Ausgabe von American Scientist erschienen ist und ohne Erlaubnis verwendet wird, sowie das KIT Beamer Theme. Hierfür gelten die Bestimmungen der jeweiligen Urheber.