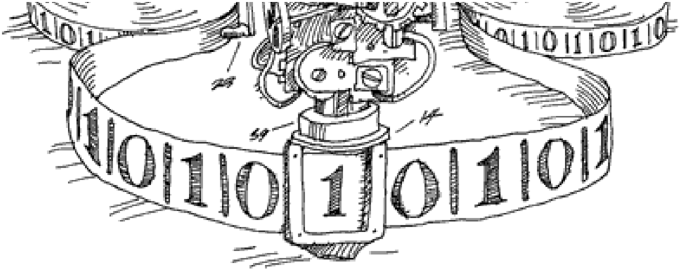
Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik

Tutorium 1

Institut für Theoretische Informatik



Über mich

- **Michael Fürst**
  mail@michaelfuerst.de
  Mittwoch 15:45, SR -109

Organisatorisches – Zum Übungsbetrieb

- **Abgabe:** *Handschriftlich* in Zweiergruppen
- **Schein:**
  - Klausurbonus (1 Notenschritt)
  - Ab 50% der erreichbaren Punkte
- Tutoriumsmaterial auf GitHub
  - `http://tinyurl.com/tgi1415`
  - E-Mail-Liste über Ilias

Organisatorisches – Zum Tutorium

- Stoff soll wiederholt werden
- Dabei Fokus auf Übungsbetrieb
- Fragen/Vorschläge/Anmerkungen willkommen!
- Credits to: Joachim Priesner, Sebastian Ullrich, Max Wagner

Kurze Wiederholung: Formale Sprachen

Eine *formale Sprache L* ist eine Teilmenge aller Wörter über einem endlichen Alphabet Σ. Also $L \subseteq \Sigma^*$.

Beispiele:

- $\Sigma = \{0, 1\}, L = \{w11z \mid w, z \in \Sigma^*\}$
  - Die Menge aller Wörter über $\{0, 1\}^*$, die "11" enthalten.

Im Allgemeinen kann man formale Sprachen sehr frei angeben:

- $\Sigma = \{0, 1\}, L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ hat eine gerade Anzahl an 1en}\}$
  - Die Menge aller Wörter über $\{0, 1\}^*$, die eine gerade Anzahl an Einsen enthalten.

Kurze Wiederholung: Reguläre Sprachen

Karlsruher Institut für Technologie

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt regulär, wenn für sie einer der folgenden Punkte gilt:

- Verankerung
  - $L = \{a\}$ mit $a \in \Sigma^*$ oder
  - $L = \emptyset$
- Induktion: Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen.
  - $L = L_1 \cdot L_2$ oder
  - $L = L_1 \cup L_2$ oder
  - $L = L_1^*$

Beispiel ($\Sigma = \{a, b\}$):

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ besteht aus einer geraden Anzahl } a\}$
- $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält gleich viele } a \text{ und } b\}$

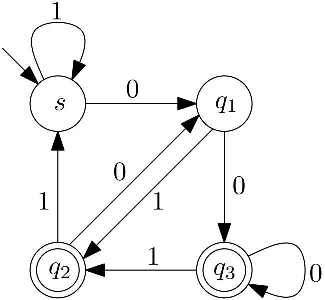
L_1 ist regulär, L_2 nicht.

Deterministische endliche Automaten

Ein deterministischer endlicher Automat M ist ein 5-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F).$$

- Q: endliche Zustandsmenge
- Σ: endliches Alphabet
- δ: Zustandsübergangsfunktion $Q \times \Sigma \to Q$
- s: Startzustand $\in Q$
- F: Endzustandsmenge $\subseteq Q$

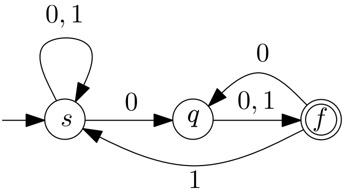


Nichtdeterministische endliche Automaten

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat M ist ein 5-Tupel

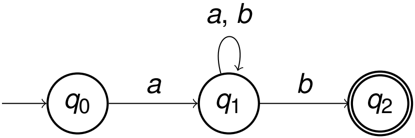
$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F).$$

- Q: endliche Zustandsmenge
- Σ: endliches Alphabet
- δ: Zustandsübergangsfunktion
  $Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \to \mathcal{P}(Q)$
- s: Startzustand $\in Q$
- F: Endzustandsmenge $\subseteq Q$



Damit der NEA ein Wort akzeptiert, muss es *einen* akzeptierenden Weg geben.

NEA: Beispiel

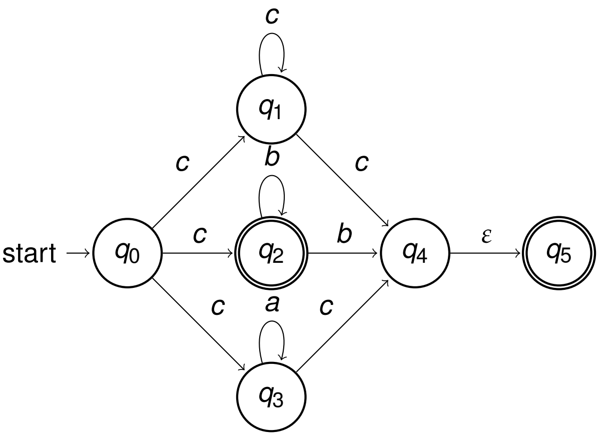


Bei Eingabe von b im Zustand q_1 gibt es mehrere Möglichkeiten.

(siehe Berechnungsbaum an der Tafel).

NEA: Aufgabe

Welche Sprache akzeptiert der nichtdeterministische endliche Automat zu dem folgenden Zustandsgraphen?



NEA: Aufgabe

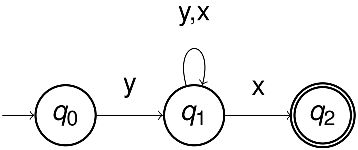
Über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sei der reguläre Ausdruck

$$r := (a \cup (ab(b)^* ba))^*$$

gegeben.
Gib einen NEA an, der $L(r)$ erkennt. Begründe kurz die Korrektheit deines Automaten, ein formaler Korrektheitsbeweis ist jedoch nicht erforderlich.
(Hinweis: Es gibt einen NEA mit 3 Zuständen.)

Potenzmengenkonstruktion

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten existiert ein äquivalenter deterministischer endlicher Automat.



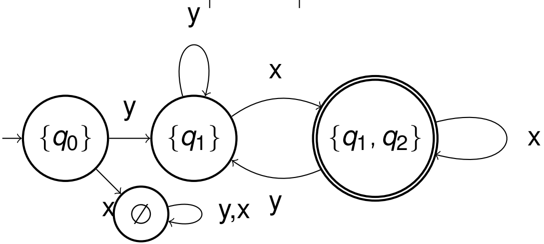
In eine Tabelle werden die Automatenzustände und ihre Folgezustände bei jeweiliger Eingabe eingetragen.

	y	x
$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q2\}$

Potenzmengenkonstruktion

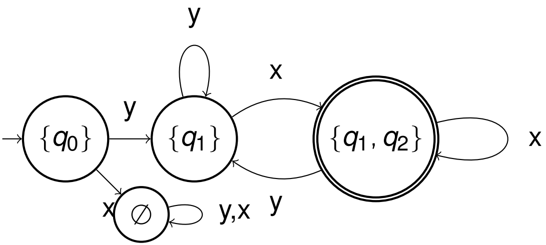
Ein neuer Zustand entsteht, wenn man von einem alten Zustand durch eine Eingabe in mehrere Zustände kommt.

	y	x
$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



Potenzmengenkonstruktion

Die Einträge der ersten Spalte sind die neuen Zustände. Alle Mengen, die einen Endzustand enthalten, sind wiederum im neuen Automaten Endzustände.



Eliminierung von ε-Übergängen

Satz 2.13 (Skript)

- Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten mit ε-Übergängen gibt es einen äquivalenten nichtdeterministischen endlichen Automaten ohne ε-Übergänge, der nicht mehr Zustände hat.
- äquivalent = akzeptiert dieselbe Sprache.

Erinnerung

Der ε-Abschluss $E(q)$ eines Zustandes q ist definiert als die Menge aller Zustände, die von q aus durch lediglich ε-Übergänge erreichbar sind (q selbst zählt auch dazu).

Eliminierung von ε-Übergängen

Konstruktion

Zu einem NEA $A := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit ε-Übergängen konstruieren wir einen äquivalenten NEA $\tilde{A} := (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ mit

- gleicher Zustandsmenge $\tilde{Q} := Q$
- gleichem Startzustand $\tilde{s} := s$
- neuer Endzustandsmenge $\tilde{F} := \{q \in Q \mid E(q) \cap F \neq \emptyset\}$
  - “alle Zustände, in deren ε-Abschluss ein Endzustand liegt”
- neuer Übergangsfunktion $\tilde{\delta}(q, a) := \begin{cases} \{q\} & \text{falls } a = \varepsilon \\ \delta(E(q), a) & \text{sonst} \end{cases}$

Eigenschaften von $\tilde{A}$

$L(\tilde{A}) = L(A)$ und $|\tilde{Q}| = |Q|$.

NEA2DEA: Aufgabe

Gegeben sei der NEA $\mathcal{A} = (\{s, q, f\}, \{a, b, c\}, \delta, s, \{f\})$, wobei die Übergangsfunktion δ gegeben ist durch:

	ε	a	b	c
s	$\{q, f\}$	$\emptyset$	$\{q\}$	$\{f\}$
q	$\emptyset$	$\{s\}$	$\{f\}$	$\{s, q\}$
f	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

1. Geben Sie zu dem Automaten $\mathcal{A}$ den Übergangsgraphen an und eliminieren Sie die ε-Übergänge.
2. Ermitteln Sie mittels Potenzmengenkonstruktion den zu $\mathcal{A}$ äquivalenten DEA. Geben Sie hierbei die Übergangsfunktion tabellarisch an.

Bis zum nächsten Mal!

Some people, when confronted with a problem, think 'I know, I'll use regular expressions.' Now they have two problems. – Jamie Zawinski

Some people, when confronted with a problem, think 'I know, I'll quote Jamie Zawinski.' Now they have two problems. – Mark Pilgrim

Lizenzen