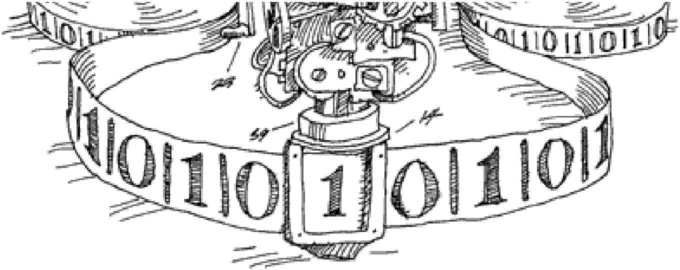
Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik

Tutorium 1

Institut für Theoretische Informatik



Über mich

Karlsruher Institut für Technologie

- **Michael Fürst**
  mail@michaelfuerst.de
  Mittwoch 15:45, SR -109

Organisatorisches – Zum Übungsbetrieb

- **Abgabe:** *Handschriftlich* in Zweiergruppen
- **Schein:**
  - Klausurbonus (1 Notenschritt)
  - Ab 50% der erreichbaren Punkte
- Tutoriumsmaterial auf GitHub
  - `http://tinyurl.com/tgi1415`
  - E-Mail-Liste über Ilias

Organisatorisches – Zum Tutorium

- Stoff soll wiederholt werden
- Dabei Fokus auf Übungsbetrieb
- Fragen/Vorschläge/Anmerkungen willkommen!
- Credits to: Joachim Priesner, Sebastian Ullrich, Max Wagner

Kurze Wiederholung: Formale Sprachen

Eine *formale Sprache* L ist eine Teilmenge aller Wörter über einem endlichen Alphabet Σ. Also $L \subseteq \Sigma^*$.

Beispiele:

- $\Sigma = \{0, 1\}, L = \{w11z \mid w, z \in \Sigma^*\}$
  - Die Menge aller Wörter über $\{0, 1\}^*$, die "11" enthalten.

Im Allgemeinen kann man formale Sprachen sehr frei angeben:

- $\Sigma = \{0, 1\}, L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ hat eine gerade Anzahl an 1en}\}$
  - Die Menge aller Wörter über $\{0, 1\}^*$, die eine gerade Anzahl an Einsen enthalten.

Kurze Wiederholung: Reguläre Sprachen

Karlsruher Institut für Technologie

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt regulär, wenn für sie einer der folgenden Punkte gilt:

- Verankerung
  - $L = \{a\}$ mit $a \in \Sigma^*$ oder
  - $L = \emptyset$
- Induktion: Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen.
  - $L = L_1 \cdot L_2$ oder
  - $L = L_1 \cup L_2$ oder
  - $L = L_1^*$

Beispiel ($\Sigma = \{a, b\}$):

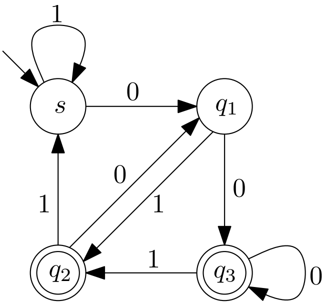
- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ besteht aus einer geraden Anzahl } a\}$
- $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält gleich viele } a \text{ und } b\}$

L_1 ist regulär, L_2 nicht.

Deterministische endliche Automaten

Ein deterministischer endlicher Automat M ist ein 5-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F).$$



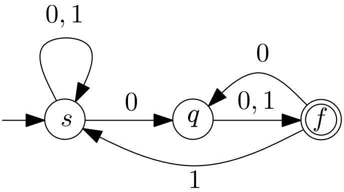
- Q: endliche Zustandsmenge
- Σ: endliches Alphabet
- δ: Zustandsübergangsfunktion $Q \times \Sigma \to Q$
- s: Startzustand $\in Q$
- F: Endzustandsmenge $\subseteq Q$

Nichtdeterministische endliche Automaten

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat M ist ein 5-Tupel

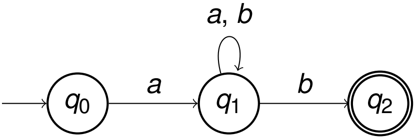
$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F).$$

- Q: endliche Zustandsmenge
- Σ: endliches Alphabet
- δ: Zustandsübergangsfunktion
  $Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \to \mathcal{P}(Q)$
- s: Startzustand $\in Q$
- F: Endzustandsmenge $\subseteq Q$



Damit der NEA ein Wort akzeptiert, muss es *einen* akzeptierenden Weg geben.

NEA: Beispiel

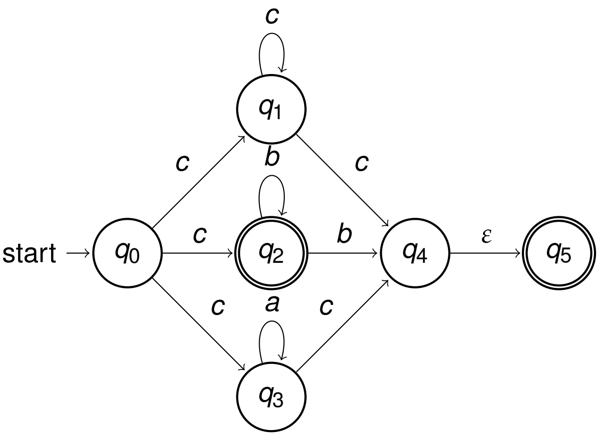


Bei Eingabe von b im Zustand q_1 gibt es mehrere Möglichkeiten.

(siehe Berechnungsbaum an der Tafel).

NEA: Aufgabe

Welche Sprache akzeptiert der nichtdeterministische endliche Automat zu dem folgenden Zustandsgraphen?



NEA: Aufgabe

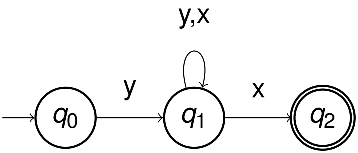
Über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sei der reguläre Ausdruck

$$r := (a \cup (ab(b)^* ba))^*$$

gegeben.
Gib einen NEA an, der $L(r)$ erkennt. Begründe kurz die Korrektheit deines Automaten, ein formaler Korrektheitsbeweis ist jedoch nicht erforderlich.
(Hinweis: Es gibt einen NEA mit 3 Zuständen.)

Potenzmengenkonstruktion

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten existiert ein äquivalenter deterministischer endlicher Automat.



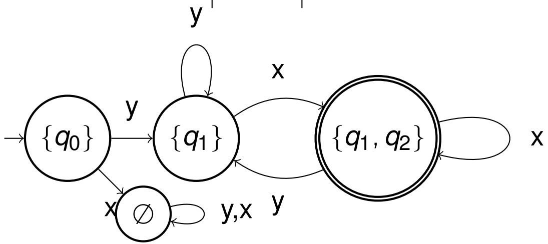
In eine Tabelle werden die Automatenzustände und ihre Folgezustände bei jeweiliger Eingabe eingetragen.

	y	x
$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q2\}$

Potenzmengenkonstruktion

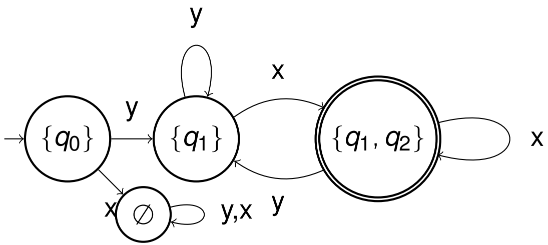
Ein neuer Zustand entsteht, wenn man von einem alten Zustand durch eine Eingabe in mehrere Zustände kommt.

	y	x
$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



Potenzmengenkonstruktion

Die Einträge der ersten Spalte sind die neuen Zustände. Alle Mengen, die einen Endzustand enthalten, sind wiederum im neuen Automaten Endzustände.



Eliminierung von ε-Übergängen

Karlsruher Institut für Technologie

Satz 2.13 (Skript)

- Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten mit ε-Übergängen gibt es einen äquivalenten nichtdeterministischen endlichen Automaten ohne ε-Übergänge, der nicht mehr Zustände hat.
- äquivalent = akzeptiert dieselbe Sprache.

Erinnerung

Der ε-Abschluss $E(q)$ eines Zustandes q ist definiert als die Menge aller Zustände, die von q aus durch lediglich ε-Übergänge erreichbar sind (q selbst zählt auch dazu).

Eliminierung von ε-Übergängen

Karlsruher Institut für Technologie

Konstruktion

Zu einem NEA $A := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ mit ε-Übergängen konstruieren wir einen äquivalenten NEA $\tilde{A} := (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ mit

- gleicher Zustandsmenge $\tilde{Q} := Q$
- gleichem Startzustand $\tilde{s} := s$
- neuer Endzustandsmenge $\tilde{F} := \{q \in Q \mid E(q) \cap F \neq \emptyset\}$
  - “alle Zustände, in deren ε-Abschluss ein Endzustand liegt”
- neuer Übergangsfunktion $\tilde{\delta}(q, a) := \begin{cases} \{q\} & \text{falls } a = \varepsilon \\ \delta(E(q), a) & \text{sonst} \end{cases}$

Eigenschaften von $\tilde{A}$

$L(\tilde{A}) = L(A)$ und $|\tilde{Q}| = |Q|$.

NEA2DEA: Aufgabe

Gegeben sei der NEA $\mathcal{A} = (\{s, q, f\}, \{a, b, c\}, \delta, s, \{f\})$, wobei die Übergangsfunktion δ gegeben ist durch:

	ε	a	b	c
s	$\{q, f\}$	$\emptyset$	$\{q\}$	$\{f\}$
q	$\emptyset$	$\{s\}$	$\{f\}$	$\{s, q\}$
f	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

1. Geben Sie zu dem Automaten $\mathcal{A}$ den Übergangsgraphen an und eliminieren Sie die ε-Übergänge.
2. Ermitteln Sie mittels Potenzmengenkonstruktion den zu $\mathcal{A}$ äquivalenten DEA. Geben Sie hierbei die Übergangsfunktion tabellarisch an.

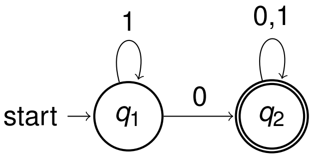
Konstruktion eines RA aus einem DEA

Wir wissen: Zu jedem DEA gibt es einen regulären Ausdruck, der genau die Sprache beschreibt, die der Automat akzeptiert. Wie konstruiert man nun diesen RA aus dem DEA?

Idee: Betrachte die Sprachen L_{q_r,i,q_t}, definiert als $w \in \Sigma^*$ mit w überführt q_r in q_t unter Benutzung der Zwischenzustände $\{q_1, \ldots, q_i\}$

- Es ist $L = \cup_{f \in F} L_{s,n,f}$
- Es ist weiterhin $L_{q_r,i+1,q_t} = L_{q_r,i,q_t} \cup (L_{q_r,i,q_{i+1}} (L_{q_{i+1},i,q_{i+1}})^* L_{q_{i+1},i,q_t})$
- Letztlich ist $L_{q_r,0,q_t}$ immer regulär, denn das sind die Zeichen, mit denen man von q_r nach q_t kommt, ohne weitere Zustände zu verwenden (sowie ε, falls $r = t$).
- Unter Benutzung dieser Punkte kann man nun zu einem DEA einen regulären Ausdruck konstruieren.

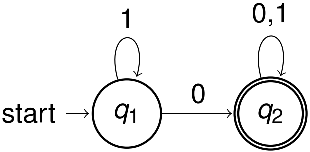
Beispiele zum Verständnis



Was sind hier jeweils:

- $L_{q_1,0,q_1}$

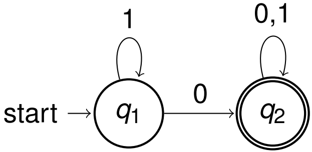
Beispiele zum Verständnis



Was sind hier jeweils:

- $L_{q_1,0,q_1} = (1 \cup \varepsilon)$
- $L_{q_1,0,q_2}$

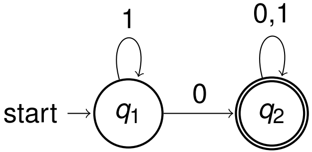
Beispiele zum Verständnis



Was sind hier jeweils:

- $L_{q_1,0,q_1} = (1 \cup \varepsilon)$
- $L_{q_1,0,q_2} = (0)$
- $L_{q_1,1,q_1}$

Beispiele zum Verständnis



Was sind hier jeweils:

- $L_{q_1,0,q_1} = (1 \cup \varepsilon)$
- $L_{q_1,0,q_2} = (0)$
- $L_{q_1,1,q_1} = (1^*)$
- $L_{q_2,1,q_2}$

Beispiele zum Verständnis

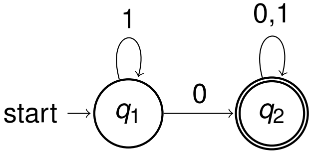
```tikzcd
\text{start} \arrow[r] & q_1 \arrow[loop above, "1"] \arrow[r, "0"] & q_2 \arrow[loop above, "0,1"]
```

Was sind hier jeweils:

- $L_{q_1,0,q_1} = (1 \cup \varepsilon)$
- $L_{q_1,0,q_2} = (0)$
- $L_{q_1,1,q_1} = (1^*)$
- $L_{q_2,1,q_2} = (0 \cup 1 \cup \varepsilon)$
- $L_{q_2,2,q_2}$

Beispiele zum Verständnis

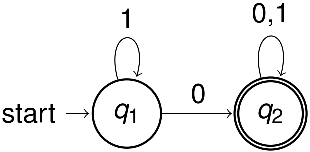
Karlsruher Institut für Technologie



Was sind hier jeweils:

- $L_{q_1,0,q_1} = (1 \cup \varepsilon)$
- $L_{q_1,0,q_2} = (0)$
- $L_{q_1,1,q_1} = (1^*)$
- $L_{q_2,1,q_2} = (0 \cup 1 \cup \varepsilon)$
- $L_{q_2,2,q_2} = (0 \cup 1)^*$
- $L_{q_1,2,q_2}$

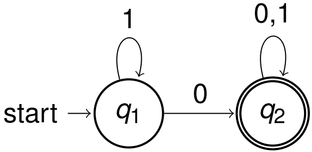
Beispiele zum Verständnis



Was sind hier jeweils:

- $L_{q_1,0,q_1} = (1 \cup \varepsilon)$
- $L_{q_1,0,q_2} = (0)$
- $L_{q_1,1,q_1} = (1^*)$
- $L_{q_2,1,q_2} = (0 \cup 1 \cup \varepsilon)$
- $L_{q_2,2,q_2} = (0 \cup 1)^*$
- $L_{q_1,2,q_2} = 1^*0(0 \cup 1)^*$

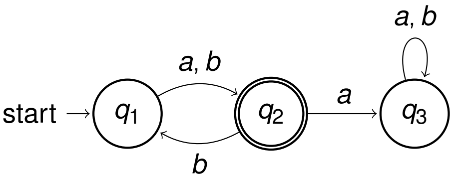
Ausführliche Konstruktion



1. $L_{q_1,2,q_2} = L_{q_1,1,q_2} \cup (L_{q_1,1,q_2}(L_{q_2,1,q_2})^* L_{q_2,1,q_2})$
2. $L_{q_1,1,q_2} = L_{q_1,0,q_2} \cup (L_{q_1,0,q_1}(L_{q_1,0,q_1})^* L_{q_1,0,q_2}) = 0 \cup ((1 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon)^* 0)$
3. $L_{q_2,1,q_2} = L_{q_2,0,q_2} \cup (L_{q_2,0,q_1}(L_{q_1,0,q_1})^* L_{q_1,0,q_2}) = (0 \cup 1 \cup \varepsilon)$
4. Also: $L_{q_1,2,q_2} =$
   $0 \cup (1 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon)^* 0 \cup ((0 \cup ((1 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon)^* 0))(0 \cup 1 \cup \varepsilon)^*(0 \cup 1 \cup \varepsilon))$
5. Vereinfacht: $1^* 0 (0 \cup 1)^*$

Aufgabe

Bestimmen Sie nach der Methode aus der Vorlesung (Satz 2.14 im Skript zur Vorlesung) einen regulären Ausdruck für die von folgendem Automaten erkannte Sprache. Geben Sie dabei alle benötigten Zwischenergebnisse an und lesen Sie nur Sprachen der Form $L_{r,0,t}$ direkt ab.
Hinweis: Wenn Sie frühzeitig $L_{q_3,2,q_2}$ berechnen, können Sie sich einige Rechenschritte sparen.



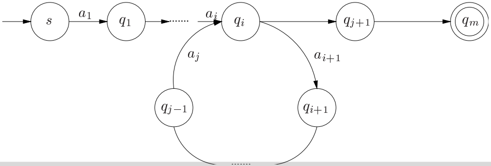
Pumping Lemma

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx$$

existiert, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $v \neq \varepsilon$
2. $|uv| \leq n$
3. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: $uv^i x \in L$



Pumping Lemma: Übersicht

Karlsruher Institut für Technologie

- Jede reguläre Sprache erfüllt das Pumping Lemma. Aber: Nicht jede Sprache, die das Pumping Lemma erfüllt, ist regulär!
- In der Übung wird üblicherweise die Kontraposition des Pumping-Lemmas verwendet: Man zeigt für eine Sprache, dass das Pumping-Lemma *nicht* erfüllt ist, woraus folgt, dass diese Sprache *nicht* regulär sein kann.
- $\neg\left[\exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L, |w| > n : \exists uvx = w : \ldots \forall i \in \mathbb{N} : uv^i x \in L\right]$
  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \exists w \in L, |w| > n : \forall uvx = w : \ldots \exists i \in \mathbb{N} : uv^i x \notin L$
  - Finden wir für *jedes n ein w* mit $|w| > n$, so dass für *jede* Darstellung $w = uvx$ mit $v \neq \varepsilon$ sowie $|uv| \leq n$ ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $uv^i x \notin L$, dann ist L nicht regulär.

Pumping Lemma: Übersicht

Karlsruher Institut für Technologie

- Jede reguläre Sprache erfüllt das Pumping Lemma. Aber: Nicht jede Sprache, die das Pumping Lemma erfüllt, ist regulär!
- In der Übung wird üblicherweise die Kontraposition des Pumping-Lemmas verwendet: Man zeigt für eine Sprache, dass das Pumping-Lemma *nicht* erfüllt ist, woraus folgt, dass diese Sprache *nicht* regulär sein kann.
- $\neg \left[\exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L, |w| > n : \exists uvx = w : \ldots \forall i \in \mathbb{N} : uv^i x \in L\right]$
  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \exists w \in L, |w| > n : \forall uvx = w : \ldots \exists i \in \mathbb{N} : uv^i x \notin L$
  - Finden wir für *jedes n ein w* mit $|w| > n$, so dass für *jede* Darstellung $w = uvx$ mit $v \neq \varepsilon$ sowie $|uv| \leq n$ ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $uv^i x \notin L$, dann ist L nicht regulär.

Pumping Lemma: Übersicht

- Jede reguläre Sprache erfüllt das Pumping Lemma. Aber: Nicht jede Sprache, die das Pumping Lemma erfüllt, ist regulär!
- In der Übung wird üblicherweise die Kontraposition des Pumping-Lemmas verwendet: Man zeigt für eine Sprache, dass das Pumping-Lemma *nicht* erfüllt ist, woraus folgt, dass diese Sprache *nicht* regulär sein kann.
- $\neg \left[\exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L, |w| > n : \exists uvx = w : \ldots \forall i \in \mathbb{N} : uv^i x \in L\right]$
  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \exists w \in L, |w| > n : \forall uvx = w : \ldots \exists i \in \mathbb{N} : uv^i x \notin L$
  - Finden wir für *jedes n ein w* mit $|w| > n$, so dass für *jede* Darstellung $w = uvx$ mit $v \neq \varepsilon$ sowie $|uv| \leq n$ ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $uv^i x \notin L$, dann ist L nicht regulär.

Beispiel

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. (Also $L = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$)

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.
2. Wähle $w = a^n b^n$.
3. Es ist also $|w| > n$.
4. Nun ist aber für *jede* Darstellung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$ $v = a^m$ mit $m \geq 1$. Demnach ist $uv^0x = a^l b^n \neq L$, da $l < n$.
5. Daher kann L nicht regulär sein.

Beispiel

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. (Also $L = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$)

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.
2. Wähle $w = a^n b^n$.
3. Es ist also $|w| > n$.
4. Nun ist aber für *jede* Darstellung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$ $v = a^m$ mit $m \geq 1$. Demnach ist $uv^0x = a^l b^n \neq L$, da $l < n$.
5. Daher kann L nicht regulär sein.

Beispiel

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. (Also $L = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$)

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.
2. Wähle $w = a^n b^n$.
3. Es ist also $|w| > n$.
4. Nun ist aber für *jede* Darstellung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$ $v = a^m$ mit $m \geq 1$. Demnach ist $uv^0x = a^l b^n \neq L$, da $l < n$.
5. Daher kann L nicht regulär sein.

Beispiel

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. (Also $L = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$)

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.
2. Wähle $w = a^n b^n$.
3. Es ist also $|w| > n$.
4. Nun ist aber für *jede* Darstellung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$ $v = a^m$ mit $m \geq 1$. Demnach ist $uv^0x = a^l b^n \neq L$, da $l < n$.
5. Daher kann L nicht regulär sein.

Beispiel

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. (Also $L = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$)

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.
2. Wähle $w = a^n b^n$.
3. Es ist also $|w| > n$.
4. Nun ist aber für *jede* Darstellung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$ $v = a^m$ mit $m \geq 1$. Demnach ist $uv^0 x = a^l b^n \neq L$, da $l < n$.
5. Daher kann L nicht regulär sein.

Pumping Lemma: Aufgaben

Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Die Menge aller Wörter über $\{0, 1\}$, sodass auf jede Null eine Eins folgt
2. $L_1 = \{ww^R | w \in \{a, b\}^*\}$, wobei w^R das 'Spiegelwort' zu w ist (Sprache der Palindrome gerader Länge)
3. $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$.

Bis zum nächsten Mal!

Some people, when confronted with a problem, think 'I know, I'll use regular expressions.' Now they have two problems. – Jamie Zawinski

Some people, when confronted with a problem, think 'I know, I'll quote Jamie Zawinski.' Now they have two problems. – Mark Pilgrim

Lizenzen