

基于模拟退火法的直杆影长定位定时问题

摘要

本文针对影子变化求解时间地点问题,建立了基于模拟退火算法的搜索匹配模型,对不同情况下的影长变化进行了分析,得到了未知时间地点时不同情况的相应求解结果,同时基于张正友平面标定法建立坐标变换模型对视频进行了处理,最终求得了视频拍摄地点。

为了方便模型的建立,我们首先对问题进行了分析,列出了太阳对物体投影时的相关概念,依据概念定义,我们将物体影长的影响因素进行了简并,得到了影响物体影长的三个根本影响因素:经度、纬度与日期。在此基础上,我们对相应概念的算法进行了选择,选用了误差最小的 **Spencer** 算法作为相关定义的主要计算方式。

在分析定时定点时的杆影长度变化时,我们基于 **Spencer** 算法建立了杆影变化函数模型,将影长转变为关于时间的变化函数。结合附件 1 中的数据,我们对位于北纬 $39^{\circ}54'26''$, 东经 $116^{\circ}23'29''$ 的 3 米直杆影长变化进行了具体分析,发现当北京时间为 12:15 时,影长最短,约为 3.4 米。依据所得结果,我们对经度、纬度与日期三个主要因素对影长的变化影响进行了分析,并得到了变化曲线平移图。

对于位置与日期未知情形,我们基于模拟退火算法,建立依据影长变化的日期地点确定模型,并设计相应搜索匹配算法。对于附件 1 时间确定、地点未知的情况,将经度、纬度两个因素作为未知变量进行区域内最优搜索匹配求解,得到太阳方位角误差较小的几组地点匹配结果,分别为 $(25.93N, 113.47E)$ 和 $(32.52N, 116.45E)$ 等。在分析附件 2 与附件 3 中时间地点均不确定的情形时,除了经度、纬度为两个不确定因素外,在模拟退火算法中还要加入日期因素的搜索匹配,最终得到太阳方位角误差较小时的几组解。附件 2 匹配的时间地点为 7 月 10 日 $(28.87N, 84.88E)$ 与 6 月 29 日 $(29.09N, 85.14E)$, 附件 3 匹配的时间地点为 1 月 18 日 $(19.13N, 116.55E)$ 与 1 月 21 日 $(33.14N, 117.25E)$ 等。

针对附件 4 中拍摄得到的影长变化视频,利用 **MATLAB** 进行帧数截取图片处理,将得到截图导入 **CAD** 中进行影长屏幕投影长度的测量,得到每分钟对应的影长屏幕投影长度。之后,为了确定影子顶点真实世界坐标中的坐标变化,我们基于张正友平面标定法建立了坐标映射模型,将所测得的图像中影子定点相机坐标变化映射到了真实世界坐标中,得到了实际标准坐标系中的影长坐标随时间变化数据,利用与模拟退火算法相同的原理,搜索匹配到了太阳高度角误差最小的一组地点,为 $(27.85N, 112.30E)$ 。

最后,我们对模型做了误差分析,发现附件 1、附件 2 与附件 3 中的结果与实际结果相似度极高,故我们认为,模型具有较高的可靠性。

关键词: 模拟退火算法 **Spencer** 算法 张正友平面标定法 太阳高度角 太阳方位角

一、问题重述

在视频拍摄日期与地点的分析中,往往依据太阳影子的变化来分析具体拍摄的地点与日期。

现依据太阳照射与影子的相关知识,分析一下4种情况,确定每种情况中的日期、地点或是影子变化情况。

1. 建立影子长度变化模型,并用模型分析2015年10月22日北京时间9点至15点之间天安门广场3米高的直杆太阳影子长度变化曲线。

2. 建立可以根据太阳影子顶点变化情况而确立所处地点的模型,并依据附件1中给出的数据,分析该杆所处的若干可能地方。

3. 建立相应模型,依据固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标变化,确定直杆所处地点和日期。依据附件2和3,分析两个附件中具体的日期与地点。

4. 根据附件4所给出的太阳影子变化视频,利用视频数据分析,建立相应模型,分析视频中2米直杆所拍摄地点。除此之外,若拍摄日期不知道,分析是否可以依据模型得出视频的拍摄日期。

二、问题分析

2.1 问题背景

由于太阳光线照射物体的角度与方位随着地球纬度与季节等规律变化,因此我们可以通过太阳光线照射物体后形成的影子变化情况来判断物体所处地域位置以及相应所处的季节日期。

太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化情况,通过测量影子方位及长度与杆实际长度、方位等参数,确定视频拍摄地点和日期的一种方法。在如今,不论是军事、航海还是地理研究中,太阳影子定位都成了必不可少的技术。

2.2 坐标系的选择

由于地球的自转与公转,太阳在天空中总是不断的移动。且由于地轴并不垂直于地球的轨道面,即地球的赤道面与黄道面形成大小为 $23^{\circ}26'$ 的黄赤交角,故太阳在天空中的移动轨迹随着地球的自转与公转呈现规律性变化。

除此之外,在研究太阳光线直射角度时,不能忽略地球相对太阳的大小,故不同纬度地区的太阳光线入射角度不同。

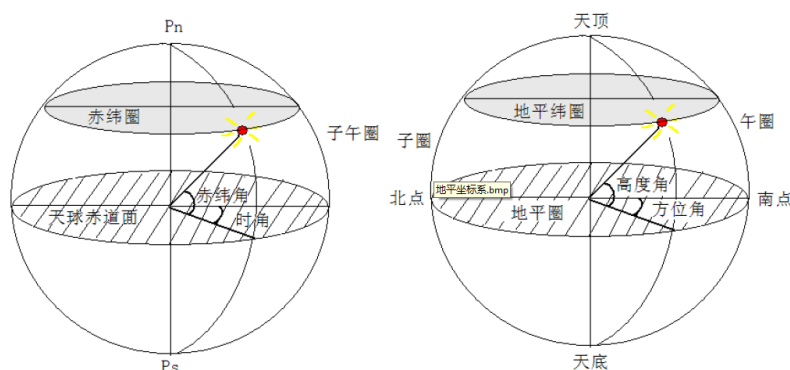


图2 赤道坐标与地平坐标示意图

为了方便对太阳的观测,研究不同日期不同地点太阳角度的变化,我们往往会采用两种坐标系进行研究:赤道坐标系和地平坐标系。

赤道坐标系是以赤道为基面，将太阳的方位按照赤道面为参照，以类似地球区域经纬度的表示方式，将太阳的方位表示为赤经角与赤纬角。

地平坐标系则是以观察者所处地平面无限延伸后与天球相交形成的平面为基面，用太阳相对该平面的高度角与相对南方向的方位角来描述太阳方位。

由于我们研究具体地点物体影子长度变化问题，故我们选用有利于物体影子分析的地平坐标系作为我们的坐标系进行研究。

由于在地平坐标系下研究具体位置太阳照射角度问题时，会关联经度与纬度等因素，故我们引用在赤道坐标系中赤纬角与赤经角等相关概念，进行分析。

2.3 地平坐标系下相关概念介绍

(1) 太阳赤纬角 δ

赤纬角是指地球赤道平面与太阳和地球中心的连线之间的夹角。由于太阳直射地球角度只在北回归线与南回归线之间移动，故赤纬角的变化区域为 $[-23^\circ26', 23^\circ26']$ 。当太阳直射南回归线时，赤纬角为 $-23^\circ26'$ ，当直射北回归线时，赤纬角为 $23^\circ26'$ 。

(2) 太阳高度角 α

太阳照射到地面的光线和它在地平面上投影线间的夹角就是高度角，其角度变化范围为 $[0^\circ, 90^\circ]$ 。

与太阳高度角互余的角为天顶角 θ ，即太阳照射到地面光线与和地平面垂直的发现间的夹角被称为天顶角。

(3) 太阳方位角 γ

太阳光线在地平面上投影线和地平面正南方向线之间的夹角称为方位角。以正南方向为起点，向西为正，角度变化为 $[0^\circ, 180^\circ]$ ，向东为负，角度变化为 $[0^\circ, -180^\circ]$ 。

(4) 太阳时角 ω

太阳时角是指日面中心的时角，从观测点天球子午圈沿天赤道量值太阳所在时圈的角距离。通常以正午为 0° 太阳时角，偏东为负，偏西为正。时间每过1小时，太阳时角变化 15° 。

(5) 真太阳时 T

中国时间按照北京时区时间统一作为标准时间，然而由于中国横跨维度较大，地区真实太阳时与北京时间有一定差距，故我们用真太阳时作为研究地区的时间。

在中国地区为：真太阳时=北京时间+时差，时差=（当地经度- 120° ）/15°。

2.4 太阳方位算法选择

在研究太阳影子进行时间与地点确定问题时，我们需要知道上述概念中参数的相应就算方法。因此，针对太阳中各参数的算法选取，我们比较了三种典型的算法即 Duffie 算法、Spencer 算法与 Stine 算法^[1]，并最终选取了误差最小的算法。

表 1 三种算法误差比较

算法	太阳位置	最大误差	误差均值	误差方差
Duffie 算法	方位角	0.3687	-0.0276	0.0398
	高度角	1.1392	0.3929	0.1233
Spencer 算法	方位角	0.3558	-0.0205	0.0218
	高度角	0.2166	0.013	0.0083
Stine 算法	方位角	0.2487	-0.0184	0.0107
	高度角	0.9345	0.3946	0.0794

由表 1 可以看出, Spencer 算法精度最高, 计算误差最小, 因此, 我们选用 Spencer 算法作为我们太阳各参数的具体计算方法。

2.4 影响影子长短的主要因素分析

通过对 2.3 中相关概念的分析, 我们将这几个概念变量的变化总归为三个基本影响因素的影响: 影子所在的经度、纬度与测量时所处的日期。

(1) 经度

由于地球时间划分按照经度进行划分, 以格林尼治为标准时间, 经度每变化 15° , 时间变化 1 小时, 故经度是真太阳时最根本的影响因素, 知道一个地区的经度往往就可以知道该地所对应的真太阳时。

(2) 纬度

由于太阳总是会直射位于北回归线与南回归线之间的某一点, 故测量点纬度的高低直接影响了该点太阳高度角的大小。一般, 纬度越低, 太阳高度角越大, 纬度越高太阳高度角越小。

(3) 日期

由于地球围绕太阳进行公转, 太阳高度角除了受纬度的影响, 往往还决定于太阳直射点的位置, 具体的日期可以得出太阳直射点具体位置, 结合纬度信息便可得到定量后的太阳高度角。除此之外, 日期也是决定赤纬角的唯一影响因素。

综上, 可知, 得知一个地点经度、纬度与日期三者的具体信息, 便可以得到一个地点具体一天各时刻的太阳位置信息。故我们将这三个影响因素作为基本影响因素。在之后的模型建立中, 以这三个影响因素作为根本变量, 进行模型的相应建立。

2.5 题目难点分析

由于在研究直杆影子变化时, 影子长度与角度随日期变化较为微小, 想要确定精确拍摄日期或地点, 即要对影子长度变化计算极其精确。同时, 在日期与地点均未确定时, 可能的地点与日期成一定定量关系, 加之太阳各参数与直杆投影参数之后, 关系较为复杂。所以如何有效处理数据并精确计算角度等等, 成为了本题模型的难点。

在直杆投影变化视频中, 由于标准坐标并未确定, 投影顶点坐标变化无法量化, 如何针对视频进行处理并有效找到视频中相应的地平坐标, 成为了视频数据处理与模型建立的难点。

三、问题假设

- 不考虑空气对太阳光线的折射与散射问题
- 在分析太阳直射地球点时不考虑地球自转造成的影响
- 不考虑具体地域坡度以及海拔的影响
- 所做实验均在中国区域内
- 不考虑地球形状与公转对地球区域时间造成的影响, 即为均以平太阳时进行考虑
- 直杆投影均为太阳直射所造成, 不考虑其他灯光与散射光线
- 忽略闰年对拍摄日期造成的微小差异

四、符号变量说明

δ	太阳赤纬角
α	太阳高度角
γ	太阳方位角
ω	太阳时角
T	真太阳时
φ	测量地所在纬度
L_{loc}	测量地点经度

五、模型求解与建立

5.1 定时定点杆影长度变化分析

5.1.1 基于 Spencer 算法的杆影变化函数模型

由 Spencer 算法可以得到赤纬角、方位角、高度角与真太阳时的相应计算公式^[2]:

高度角与纬度、赤纬度和时间角的关系为:

$$\sin \alpha = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega \quad (1)$$

其中, φ 为测量地所在纬度, 赤纬角 δ 由 Spencer 可知其具体计算公式为:

$$\begin{aligned} \delta = & 0.006918 - 0.399912 \cos \theta + 0.070257 \sin \theta - 0.006758 \cos 2\theta \\ & + 0.000907 \sin 2\theta - 0.002679 \cos 3\theta + 0.00148 \sin 3\theta \end{aligned} \quad (2)$$

其中, 赤纬角至于日角 θ 有关, 即与这一天处于一年中何时有关联, 与其他因素无关。则日角 θ 为:

$$\theta = \frac{2\pi(n-1)}{365} \quad (3)$$

其中, n 为日期在年内的顺序号, 1 月 1 日时 $n=1$, 12 月 31 日时 $n=365$ 。

想要得到高度角, 依据 (1) 式, 我们还需要知道时角 ω , 已知正午 12 点时, 时角为 0° , 上午偏东方向时时角为负, 下午偏西方向时时角为正, 且每过 1 小时, 时角变化 15° , 固有:

$$\omega = 15(T - 12) \quad (4)$$

其中, T 为当地真太阳时 (单位: 小时)。

由于所考虑测量地区均为中国境内, 故我们依据北京时间, 对真太阳时的计算做出了一下调整:

$$T = t_B - \frac{4}{60} \times (120 - L_{loc}) \quad (5)$$

其中 t_B 为北京时间, 也为北京真太阳时, L_{loc} 为测量地点经度。

依据上述 (1) ~ (5) 式, 可以得到太阳高度角 $\sin \alpha$ 。设杆长为 l , 则有影长 s 为:

$$s = \frac{l}{\tan \alpha} = \frac{l}{\sin \alpha / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad (6)$$

由 (6) 可得影长随着太阳高度角变化关系。

● 函数模型汇总

将上述公式转变为测量地点随本地真太阳时变化的函数有：

$$s(t_B) = \frac{l}{\sin \alpha(t_B) / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha(t_B)}}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha(t_B) = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega(t_B) \\ \theta = \frac{2\pi(n-1)}{365} \\ \omega(t_B) = 15(T(t_B) - 12) \\ T(t_B) = t_B - \frac{4}{60} \times (120 - L_{loc}) \end{cases}$$

则可以得到 s 随北京时间 t_B 变化的影长函数 $s(t_B)$ 。

5.1.2 北京直杆影长模型求解

结合上述模型，我们对位于北纬 $39^\circ 54' 26''$ ，东经 $116^\circ 23' 29''$ 的北京天安门广场中 3 米高的直杆做了 9:00-15:00 时段太阳影长变化分析。

步骤一： 利用日期计算赤纬角

由于日期为 10 月 22 日即 $n=295$ ，利用（2）与（3）式可得：

$$\begin{cases} \theta = 5.061 \text{ rad} \\ \delta = -0.1881 \text{ rad} \end{cases}$$

步骤二： 真太阳时的修正计算与时角

已知 $L_{loc}=116.3914^\circ$ ，结合（4）、（5）与（6）式可得：

$$\begin{cases} T(t_B) = t_B + 0.020383 \\ \omega(t_B) = 15t_B - 183.69426 \end{cases}$$

步骤三：

已知纬度 $\varphi=39.9072$ ，利用上述结果结合（1）式，可以得到太阳高度角正弦函数为：

$$\sin \alpha(t_B) = -0.1200 + 0.7536 \cos \omega(t_B)$$

影长随北京时间变化函数为：

$$s(t_B) = \frac{l}{\sin \alpha(t_B) / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha(t_B)}}$$

其中 $l=3$ 。

基于 MATLAB，我们得到了在 10 月 22 日北京天安门前 3 米直杆在 9:00 至 15:00 期间的投影长度变化曲线，如图 3。

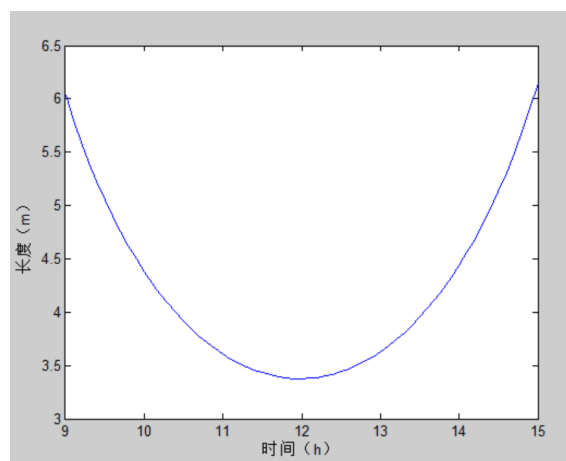


图3 北京天安门3米长杆影长变化曲线

一般，在中午，太阳高度角最大，也就是我们所说的太阳正午最高，影子最短。由图3可以看出，直杆影子在大约12点钟时达到最短。对真太阳时进行分析，可得在北京时间12点15分时，影子长度达到最短。

由于北京时间按照东经120°进行计算，而具体测量地点偏差约4°左右，故在太阳高度角最高时，时间滞后约15分钟，符合现实。

5.1.3 影长关于各影响参数变化规律分析

基于5.1.2中所得到的天安门前直杆影长变化曲线，我们针对纬度、经度与日期三个参数对影长的变化规律影响做了分析。

(1) 日期因素影响

当纬度、经度与杆长均不发生变化时，计算不同日期时影长在9点至15点变化曲线，观察不同时期对直杆影长变化的影响。

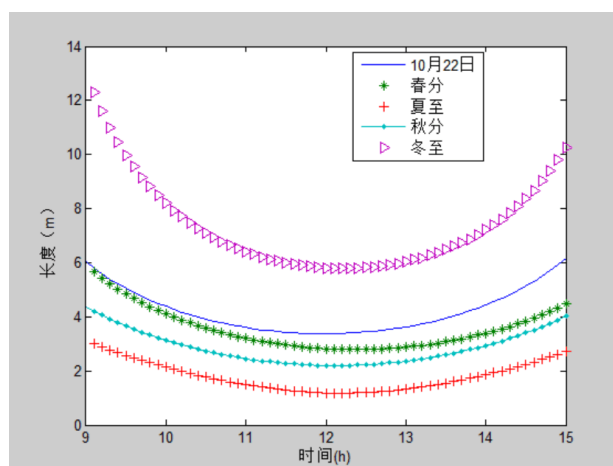


图4 不同日期影长变化曲线

从图4中可以看出，冬至时杆影长度最长，夏至时杆影长度最低，这是由于冬至时期太阳直射南回归线，北京位于北半球，故太阳高度角较低，所以影长较长，相反，当夏至时，太阳直射北回归线，太阳高度角较高，所以影长较短。至于同一日期不同时刻的曲线变化趋势则均相同，中午12点左右影长为一天所有时刻中最小值。

(2) 纬度因素影响

当日期为10月22日，经度为116°23'29''且杆长为3m均不变化时，改变测量所在地的纬度，观察不同纬度之间杆影在一天的变化趋势有何不同。

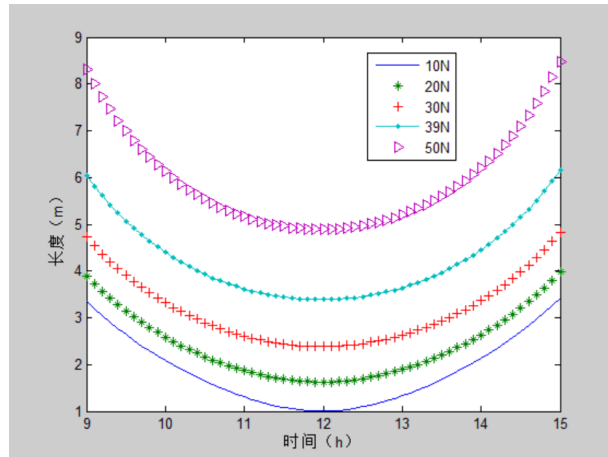


图 5 不同纬度影长变化曲线

从图 5 中可以看出，当纬度越低时影长相对越短，这是因为，当纬度越低时会离太阳直射点越近，故太阳高度角在同一时刻相较纬度较高的地方较大，所以纬度越低的地方直杆影长越短。

(3) 经度影响因素

当日期 10 月 22 日与纬度 $39^{\circ}54'26''N$ 均不发生变化时，改变测量时的经度，观察影长随时间变化曲线随着经度的改变的变化情况。

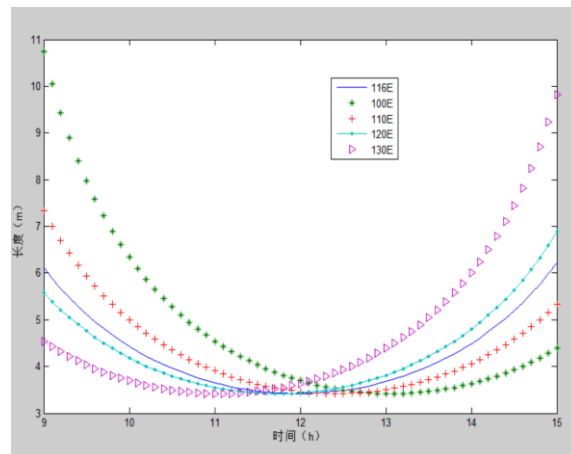


图 6 不同经度影长变化曲线

从图 6 中可以看出，影长最短与最长点只与纬度有关，并不会随着经度的改变而改变，经度的改变会引起影长最短值所对应时刻的平移，这是因为真太阳时由地区经度决定，不同的经度会造成真太阳时的不同，所以经度的改变会造成影长变化曲线的横向平移，且越偏向东面的经度地区，影长最短时刻越早。

5.2 基于模拟退火算法的日期地点确定模型

依据直杆影子长短变化确定地点与日期时，我们基于模拟退火算法对日期、经度与纬度三个未知量进行了搜索匹配，最终得到与数据相匹配的具体测量日期与测量地点。

利用题中数据计算每个时刻的太阳方位角，得到实际的太阳方位角测量值，再通过中国地域范围内进行日期与经纬度搜索计算，找出与数据计算所得各时刻方位角测量值最为匹配的日期与经纬度，便可最终求得测量时的准确日期与地点。

当拍摄日期已知时，将上述方法中的测量日期作为已知值，对其余两个未知量：经度、纬度进行模拟退火搜索匹配即可。

(1) 太阳方位角实际测量值

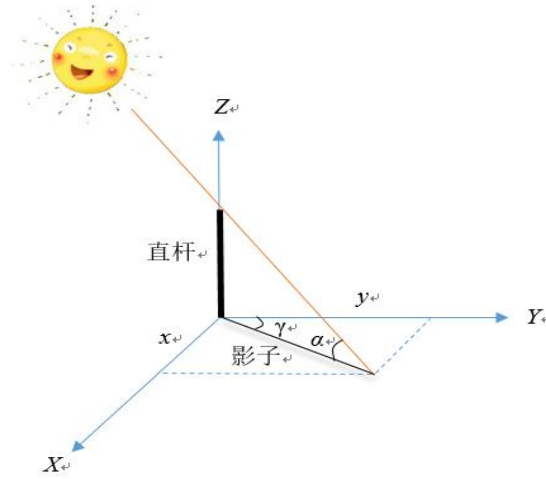


图 7 直杆影子示意图

设太阳方位角为 γ ，由图 7 可以看出，在直杆长度确定的情况下，影长由太阳高度角决定，同时，太阳方位角可由影子定点坐标求得。

依据附件 1 中的数据，直杆影长的变化坐标由横纵坐标 x, y 给出，由太阳方位角的定义可知，实际测量值每个时刻的相应方位角计算公式为：

$$\tan \gamma = \frac{x}{y} \quad (7)$$

由 (9) 式可以得到每个时刻相应测量的实际太阳方位角度。

(2) 太阳方位角理论值计算方法

已知太阳方位角为 γ ，则太阳方位角、赤纬角、时角与太阳高度角之间的关系为：

$$\sin \gamma = \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cos \alpha} \quad (8)$$

结合式 (1) ~ (5)，可知，在计算太阳方位角理论值时，其值的大小根本取决于测量地经度 L_{loc} 、纬度 φ 与日期 n 。

日期 n 可以确定日角 θ 进而确定赤纬角 δ ；经度 L_{loc} 可以确定真太阳时 T 进而确定时角 ω ；纬度 φ 结合时角 ω 与日角 θ 可以计算太阳高度角 α ；由时角 ω 、赤纬角 δ 与太阳高度角 α 便可得到太阳方位角。因此太阳方位角理论值计算中主要由测量地经度 L_{loc} 、纬度 φ 与日期 n 确定。（参考式 (1) ~ (5)）

(3) 基于模拟退火法搜索经度纬度

设由附件 1 中计算所得的太阳方位角测量值矩阵为：

$$A = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n]$$

其中 γ_i 表示第 i 时刻的方位角测量值。

设根据纬度，经度，日期所计算得到的太阳方位角矩阵为（式 (8)）：

$$B_{abc} = [\gamma'_{abc1}, \gamma'_{abc2}, \gamma'_{abc3}, \dots, \gamma'_{abcn}]$$

其中， γ'_{abci} 表示第 a 个纬度，第 b 个经度与第 c 个日期时所计算的第 i 时刻对应的太阳方位角理论值。

将测量值矩阵 A 与理论值 B_{abc} 相减，得到新的差值矩阵 C_{abc} 为：

$$C_{abc} = A - B_{abc} = [k_{abc1}, k_{abc2}, k_{abc3}, \dots, k_{abcn}]$$

$$k_{abci} = \gamma_i - \gamma'_{abci}$$

其中， k_{abci} 代表在第 a 个纬度，第 b 个经度，第 c 个日期时对应第 i 时刻太阳方位角测量值与理论值的差值。

为了求得测量时的地点（经度与纬度）与日期，就要求找到与太阳方位角测量值相匹配的理论值，有由于理论值决定于经度、纬度与日期，因此得到相匹配的理论值，也就得到了对应的经度、纬度和日期，从而得到了匹配之后测量值所对应的地点日期。

为了搜索并匹配测量值与理论值，要求 C_{abc} 中的每一项尽可能的小，于是有目标函数：

$$\min \sum_{i=1}^n |k_{abci}|$$

求解目标函数，可以得到对应的第 a 个纬度值 φ ，第 b 个经度值 L_{loc} 与第 c 个日期 n 。从而求解得到相应的拍摄地点与拍摄日期。

● 模型汇总

$$\min \sum_{i=1}^n |k_{abci}|$$

$$\begin{cases} A = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n] \\ B_{abc} = [\gamma'_{abc1}, \gamma'_{abc2}, \gamma'_{abc3}, \dots, \gamma'_{abcn}] \\ C_{abc} = A - B_{abc} = [k_{abc1}, k_{abc2}, k_{abc3}, \dots, k_{abcn}] \\ k_{abci} = \gamma_i - \gamma'_{abci} \\ \gamma_i = \tan^{-1} \frac{x_i}{y_i} \\ \gamma' = \sin^{-1} \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cos \alpha} \end{cases}$$

5.3 日期地点确定模型求解算法与结果

我们运用 5.2 中基于模拟退火算法的日期地点求解模型，针对已知日期确定地点和日期地点均不确定两种情形做了具体分析，并对每种情况设计了相应算法，得到了结合附件 1 与附件 2，3 中数据后的相应结果。

5.3.1 已知日期确定地点

分析附件 1，我们发现附件 1 中的数据是已知具体拍摄日期的，故基于上述 5.2 中的模型进行求解时，日期 n 为已知量，仅对地点纬度与经度两个未知量进行搜索匹配即可。

● 算法

Step1: 利用附件 1 中的信息进行计算得到太阳方位角测量值对应当天时刻的矩阵 A 。

Step2: 在研究范围内，随便给定一点，用该点纬度、经度计算出与附件 1 中时刻对应的太阳方位角理论值，得到矩阵 **B**。

Step3: 用测量值与该点理论值做差值，并计算所有时刻差值绝对值之和。

Step4: 不断更换研究范围内的给定点，利用模拟退火算法，得到最终一组差值最小的理论值，提取该理论值所对应的纬度与经度，即为拍摄地点经纬度求解结果。

● 求解结果

利用附件 1 中的数据计算所得的每个时刻对应方位角测量值为：

表 2 太阳方位角测量值

北京时间	14:42	14:45	14:48	...	15:36	15:39	15:42
太阳方位角(°)	64.37	64.82	65.27	...	70.87	71.16	71.44

按照步骤二与步骤三中模拟退火算法对区域进行搜索匹配，找到最优的匹配项，使每一项误差尽可能的最小，最终，在区域范围内找到了误差最小的几组经纬度值，如下表所示。

表 2 经纬度匹配结果

组别	纬度	经度	误差	地点名称
1	32.5296°N	116.4502°E	0.5093	安徽省阜阳市
2	29.6912°N	113.4719°E	0.5164	湖南省岳阳市
3	25.9316°N	108.9395°E	0.5489	广西柳州市
4	0.0001°N	92.6844°E	0.7437	印度洋靠近印尼

由于我们只研究中国领域，且第四个区域在海洋中，故我们对其进行去除，只将前三组作为最后的结果。

因此，附件 1 中 10 月 22 日所测量的数据有可能为三个地点测量值：安徽省阜阳市附近，河南省岳阳市附近与广西柳州市附近。其中，广西柳州附近匹配地区示意图如图 8 所示。

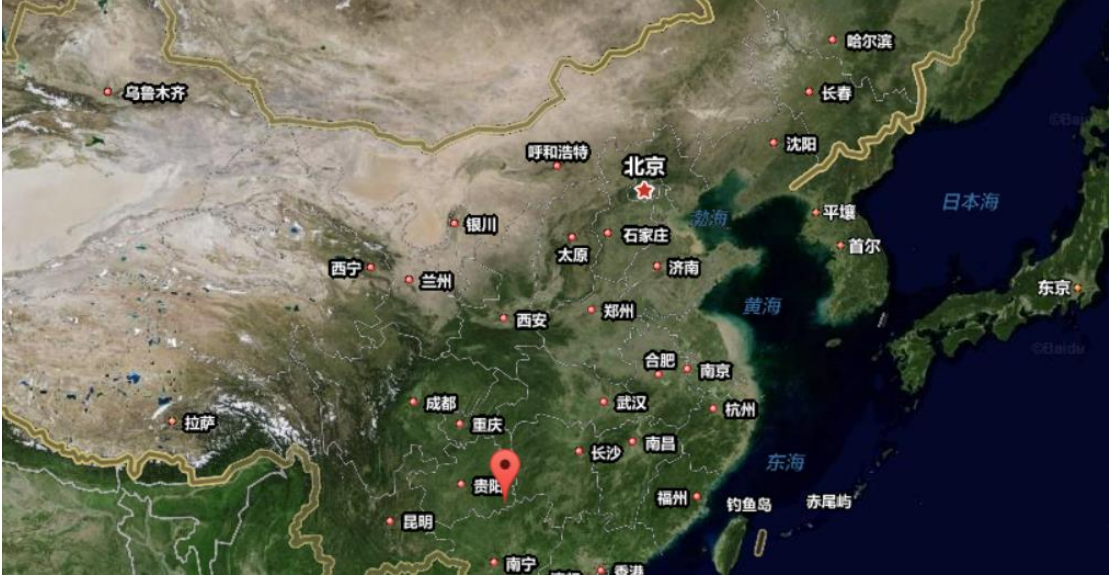


图 8 广西柳州市匹配地区示意图

5.3.2 日期地点均未知的求解结果

当针对附件 2 与附件 3 中地点与日期均未知时的情况进行分析时，我们将日期、纬度与经度三个未知量作为变量，在研究区域内利用 5.2 中的模型进行搜索

匹配。

由于进行搜索匹配时，日期、纬度与经度三者最为搜索目标时，搜索较为复杂，针对附件 2 与附件 3 中的数据，我们设计了相应的基于模拟退火搜索算法，对其进行分析^[5]。

Step1: 对附件中信息进行计算，得到实际测量后的太阳方位角测量值。

Step2: 对目标搜索区域进行经度纬度 100*100 网格划分，并设置相应随机步长参数，进行随机步长变化搜索，对日期同样进行网格划分，设置相应步长参数。

Step3: 随机给出网格中的一点，此点包括相应的日期、纬度与经度，带入计算公式进行计算，得到该点理论值。并计算理论值与测量实际值在一天各时刻的差值之和。

Step4: 进行步长随机调整，再次重复步骤三，并比较差值之和，进行最优解判断。

Step5: 为防止模拟退火调入局部最优解，加入新的辅助算法，设置相应几率及逆行最优解的重新计算定义。

利用上述算法，我们对附件 2 与附件 3 中的数据分别进行了搜索匹配分析，最终可以得到两个附件数据所对应的匹配结果。

(1) 附件 2 中数据求解结果

依据公式 (7)，利用杆影顶端的横纵坐标，我们可以得到相应时刻的太阳方位角实际测量度数，如表 3 所示。

表 3 附件 2 中太阳方位角测量实际值

北京时间	14:42	14:45	14:48	...	15:36	15:39	15:42
太阳方位角(°)	-82.03	-81.11	-80.16	...	-61.19	-59.70	-58.18

用得到的表 3 中的真实测量值，按照步骤二至步骤五，进行相应区域内的时间、经度与纬度匹配搜索，得到满足方差条件时的几组结果，如下表 4。

表 4 附件 2 最优匹配结果

组别	纬度	经度	日期	误差	地点名称
1	29.0999°N	85.1427°E	6 月 29 日	0.2505	西藏日喀则吉隆县
2	28.8727°N	84.8837°E	7 月 10 日	0.254	西藏日喀则吉隆县
3	20.4619°N	86.5570°E	8 月 20 日	0.3191	印度附近
4	21.8445°N	86.1541°E	5 月 13 日	0.3088	印度附近
5	0.0433°N	88.2565°E	4 月 9 日	0.5059	印度洋印尼附近

从表 4 中，我们得到了 5 组可能的拍摄日期与地点。

由于我们主要针对中国领域内的地区进行研究计算，故排除第三组与第四组匹配结果，由于第五组位置结果在海洋中，故也进行去除。故最后针对附件 2 中，相匹配结果为西藏日喀则吉隆县地区附近，有两组可能的值，具体坐标与日期为：6 月 29 日于(29.0999°N,85.1427°E)地点和 7 月 10 日于(28.8727°N,84.8837°E)地点。这两点地图示意图如图 9 所示。

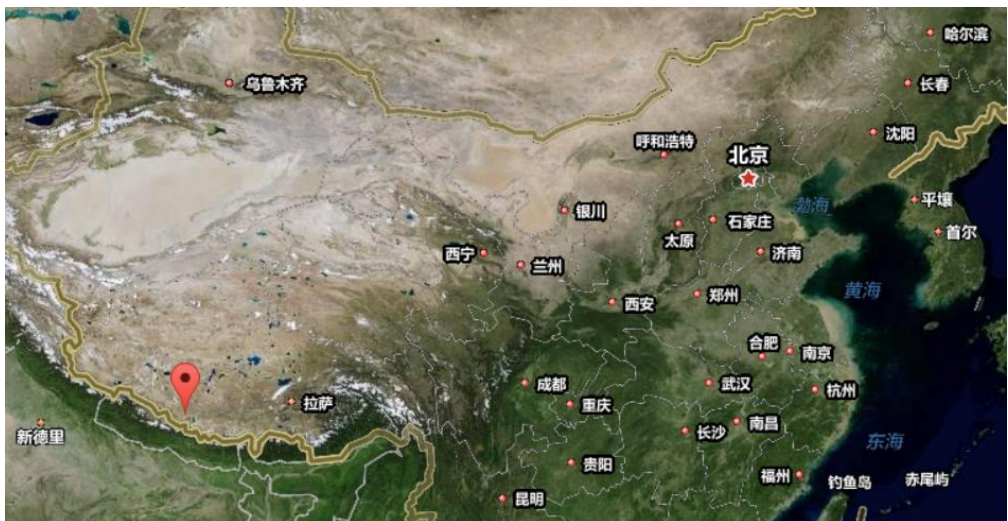


图 9 西藏地区匹配示意图

(2) 附件 3 数据求解结果

利用与计算附件 2 中数据相同的方法进行计算可以得到太阳方位角实际测量值与相对应的匹配结果。

表 5 附件 3 太阳方位角实际测量值

北京时间	13:09	13:12	13:15	...	14:03	14:06	14:09
太阳方位角	19.23	20.14	21.05	...	34.82	35.63	36.42

同理，利用表 5 中所得的真实测量值，利用步骤二至五的算法，对研究区域内进行匹配算法搜索得到最优结果如下表 6。

表 6 附件 3 最优匹配结果

组别	纬度	经度	日期	误差	地点名称
1	19.134°N	116.5545°E	1 月 18 日	0.0313	南海东沙群岛
2	43.5365°N	117.8948°E	10 月 18 日	0.0012	内蒙古赤峰市
3	33.1478°N	117.2593°E	1 月 21 日	0.0123	安徽省蚌埠市
4	47.2472°N	118.0813°E	3 月 18 日	0.0041	内蒙古呼伦贝尔
5	44.4493°N	121.7501°E	2 月 13 日	0.2285	内蒙古通辽市

由表 6 中，我们得到了 5 组可能的地点与相应日期。其中有三个位于内蒙古自治区中，一个为南海附近，一个为安徽省境内。



图 10 南海区域匹配地区示意图

图 10 中为靠近南海的海口地区匹配示意图。该地区与北回归线相距较近，故正午时直杆影长较短。该地对应的测量日期为 1 月 18 日。

5.4 基于张氏坐标映射法的视频拍摄地点确定模型

针对附件 4 中所给出的视频信息，我们需要对视频进行处理。由于视频进行拍摄时，仅仅知道拍摄日期与具体拍摄的时间，而具体拍摄时摄像机的方位与拍摄角度并不知道，故无法通过视频确定真实情况中的客观坐标系，由于在影长进行变化时，会有角度变化，而照相机在进行拍摄时，正对于直杆，故测得的影长只是真实影长相对于屏幕方向的投影长度，要想知道真正的影子长度及坐标变化，就必须得知此时影子在坐标中的旋转角度。

因此，我们在进行视频分析时，首先需要建立模型对视频二维平面进行分析，建立出相应的真实当地坐标系。

5.4.1 视频处理中的参考坐标系

在计算出当地真实坐标系之前，为了后期的具体使用与模型建立，必须清楚的知道在建立模型中会使用到的各坐标系之间的相关定义与联系。

为了描述相机与三维物体间的几何关系，涉及到的坐标系有世界坐标系、图像像素坐标系、图像物理坐标系与相机坐标系^[3]，如图 11。

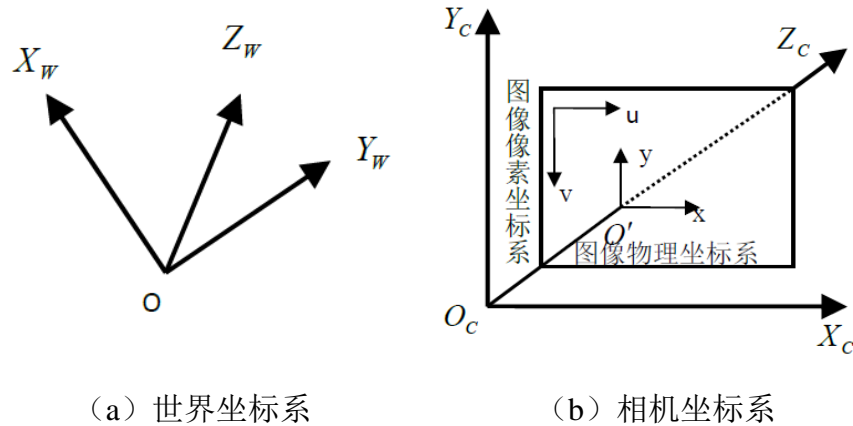


图 11 参考坐标系

(1) 世界坐标系

世界坐标系是以任意安放的相机和三维物体在空间环境中的相互关系而建立的一种坐标系。它的建立是为了确定相机与物体之间的位置以及相对应的关系，因此在空间中依据物体构造一个基准坐标系 $O-X_wY_wZ_w$ ，用它作为参考来明确空间中物体位置。

(2) 图像像素坐标系

摄像机采集道德图像是以数组形式春芳，数组每一个元素值就代表这图像点亮度，在图像中每一个点的像素的亮度也是由 RGB 三色进行配比形成。通过建立图像像素坐标系，如图 11 中 (b) 所示，每一个像素均可用相对应的所在列数与行数进行表示。

(3) 图像物理坐标系

实际中看到的像素位置是用物理单位来表示的，因此还需建立以物理单位表示的坐标系 $O'-xy$ ，这样的坐标系称之为图像物理坐标系，如图 11 中 (b) 图所示。原点 O' 是图像面和光轴的焦点。 dx, dy 分别代表每个单位像素在 x 轴和 y 轴上所占的物理尺寸，设 O' 的像素坐标为 (u_0, v_0) 。

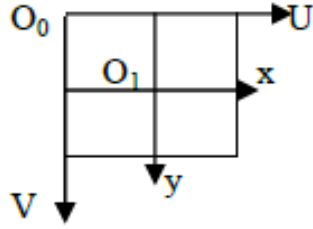


图 12 图像坐标系示意图

由图 12 关系可以得到像素坐标系和物理坐标系间的关系可以表示为：

$$\begin{cases} u = \frac{x}{dx} + u_0 \\ v = \frac{y}{dy} + v_0 \end{cases} \quad (9)$$

将（9）式改写成矩阵形式可得：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

（4） 相机坐标系

为了更方便的分析成像的各项几何关系，我们在相机本身的基础上建议了一个相机坐标系，相机坐标系原点为相机底片的光心， X_C 轴与 Y_C 轴分别与 x 轴和 y 轴平行， Z_C 是相机的光轴，空间中一点 p 在世界坐标系与相机坐标系下的齐次坐标系分别是 $(X_w, Y_w, Z_w, 1)^T$ 和 $(X_c, Y_c, Z_c, 1)^T$ ，其相互关系为：

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中 R 是一个 3×3 正交单位矩阵， T 是 3×1 的平移向量。

5.4.2 相机成像模型的建立

为了描述视频中的影长与实际测定杆的影长之间的几何关系，我们之前建立介绍了世界坐标系、图像像素坐标系、图像物理坐标系、相机坐标系，通常将相机看作是从欧氏空间变换到二维空间下的一个有用的设备，这种变换在理想透镜下是线性变换即小孔成像，光沿着直线传播，同时通过光心与物点的光线到达光心的另一边在像平面上产生像点，相机成像模型即利用小孔成像的原理对相机进行标定^[4]。

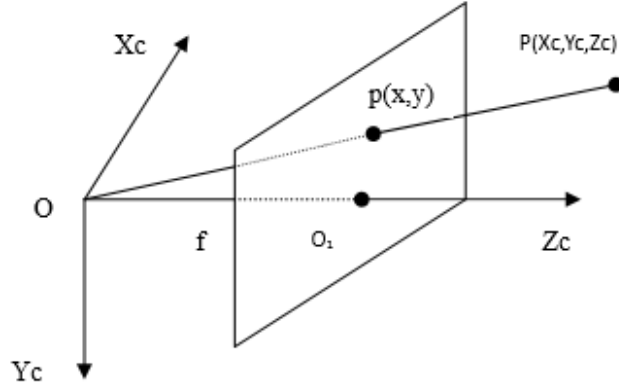


图 13 针孔相机成像几何图

相机成像模型主要由光心、像平面和相机的光轴构成如图 13 所示其中 $p(x, y)$ 为像点坐标， $P(X_c, Y_c, Z_c)$ 为物点坐标， f 为相机焦距，由几何透视投影关系可得：

$$\begin{cases} x = f \frac{X_c}{Z_c} \\ y = f \frac{Y_c}{Z_c} \end{cases} \quad (12)$$

将坐标转换为齐次坐标，公式 (12) 可以转换为矩阵形式：

$$Z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

再将之前建立的世界坐标系、图像像素坐标系、图像物理坐标系、相机坐标系之间的相互转化关系代入矩阵公式 (13) 中，可以得到世界坐标系中的 P 点坐标与投影点 p 的坐标 (u, v) 的相互转换公式 (14)。

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{dx} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{dy} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中 f 为摄像机透镜的焦距， dx 、 dy 分别代表每个单位像素在 x 轴和 y 轴上所 占的物理尺寸， u 、 v 分别为图像像素坐标系中像点的坐标， u_0 、 v_0 分别为图像物 理坐标系中的原点 O_1 在图像像素坐标系的坐标，这些参数为相机的内部参数； R 为 3×3 的正交单位矩阵，代表了从世界坐标系到相机坐标系的旋转变换， T 为 3×1 的向量，代表了从世界坐标系到相机坐标系的平移变换， X_w 、 Y_w 、 Z_w 分别

为物点在世界坐标系中坐标,这些参数全由相机的方向和位置对世界坐标系的方位来确定,这些参数为外参。

5.4.3 相机标定模型的建立

视频拍摄的图像为二维图像,二维图像上的每一个点的亮度在一定程度上代表了三维环境中所拍摄的物体表面某一点的光强,相机成像模型建立了物点与像点之间的几何关系,为了得到该几何对应关系,需要求解相机成像模型中的外参与内参,这里参考张正友平面标定法建立确定外参与内参的标定法^[4]。

设 $c = (u, v)$ 为图像像素坐标系中的一个二维图像点,其所对应的世界坐标系中的空间点坐标为 $C = (X, Y, Z)$, 将这些坐标用齐次坐标可以表示为 $\tilde{c} = (u, v, 1)^T$ 、 $\tilde{C} = (X, Y, Z, 1)^T$, 由相机成像模型可以得到公式 (15)。

$$\lambda \tilde{c} = K [R \quad T] \tilde{C} \quad (15)$$

其中 λ 是比例因子, $[R \quad T]$ 为外参矩阵, K 为内参矩阵, 将该公式转换为矩阵形式即公式 (16) 所示:

$$\lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = K [R \quad T] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

用参数矩阵 B 表示外参矩阵与内参矩阵的乘积, 即 $B = K [R \quad T]$, 则矩阵公式 (16) 可另外表示为公式 (17) 的形式:

$$\lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \\ B_9 & B_{10} & B_{11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中参数 B_1 到 B_{11} 和 λ 共 12 个为未知参数, 将这 12 个参数求解之后即可得到图像像素坐标系中每一个二维图像点与之所对应的三维世界坐标系中的空间点坐标, 即可得到视频中每一个影长顶点所对应的世界坐标系中的空间点坐标, 从而得到了实际世界坐标系中的影子实际长度。

这样就通过图像像素坐标系与世界坐标系的转换, 消除了直接测量视频中影长由图像透视及方位角所带来的长度畸变, 提高了测试的准确性。

由公式 (17) 的矩阵形式化为方程组的形式, 可以得到公式 (18) 的形式:

$$\begin{cases} \lambda u = B_1 X + B_2 Y + B_3 Z + B_4 \\ \lambda v = B_5 X + B_6 Y + B_7 Z + B_8 \\ \lambda = B_9 X + B_{10} Y + B_{11} Z + 1 \end{cases} \quad (18)$$

为了求解该线性方程组, 需要知道图像像素坐标系与世界坐标系中四个对应点的坐标对应关系, 如表 7。

表 7 四个对应点

(x, y, z)	(u, v)
(0, 0, 0)	(9.62, 9.76)
(0, 0, 2)	(9.86, 2.24)
(1.85, 0, 0)	(16.46, 9.75)
(2.33, 0.10, 0)	(18.53, 9.60)

5.4.4 视频影子真实坐标的求解确定

首先对视频进行数字化,将视频中的杆影对屏幕的投影长度转化为数字信息,得到从 8:54 到 9:24 时间段每分钟的镜头屏幕投影长度值。

我们将视频中时间以 1 分钟时长进行划分并截图,得到从 8:54 到 9:24 时间段内每一分钟的影长截图。将每一分钟的视频截图导入 CAD 软件中,利用 CAD 软件测量像素坐标下的影子坐标值,并计算相应影子投影到相机屏幕后的长度。之后,通过计算屏幕投影长度与直杆在屏幕投影长度,利用比值法,可以计算出直杆影子在屏幕投影的实际长度,如表 8

表 8 杆影屏幕投影长度

时间	视频杆长	视屏影长	实际杆长(m)	实际影长(m)
8:54	7.41	8.82	2.00	2.38
8:55	7.41	8.78	2.00	2.37
8:56	7.38	8.68	2.00	2.35
...
9:32	7.40	6.93	2.00	1.87
9:33	7.42	6.90	2.00	1.86
9:34	7.38	6.85	2.00	1.86

之后,为方便之后坐标值的映射,我们将表 8 中的数据转换为相机坐标中的像素坐标,得到随时间变化时的影长像素坐标变化情况,如表 9。

表 9 像素坐标下的影长变化情况

时间	u	v
8:54	18.5301	9.6077
8:55	18.5053	9.5976
8:56	18.5323	9.5836
...
9:32	16.5675	9.7784
9:33	16.5056	9.7632
9:34	16.4688	9.7525

利用像素坐标变化数据,通过 5.4.3 中相机标定模型,同时结合表 7 中对应的五个点,对公式 (18) 进行求解,可以得到相应的像素坐标与真实世界坐标间的相应关系:

$$\begin{cases} u = 3.6879X + 1.3338Y + 0.0873Z + 9.6224 \\ v = 0.0068X + 1.6861Y - 3.7612Z + 9.7653 \\ 1 = 0X + 0Y + 0Z + 1 \end{cases}$$

其中, λ 为比例参数, u 与 v 为相应像素坐标中的影长顶点坐标值, X 、 Y 与 Z 为真实世界坐标中影长顶点坐标值,由上述参数公式可以得到相应的像素坐标值与

真实世界坐标值之间的映射关系。

依据得到的映射关系方程，我们得到了图像中大致的像素坐标与真实世界坐标相互位置，如图 14 所示。

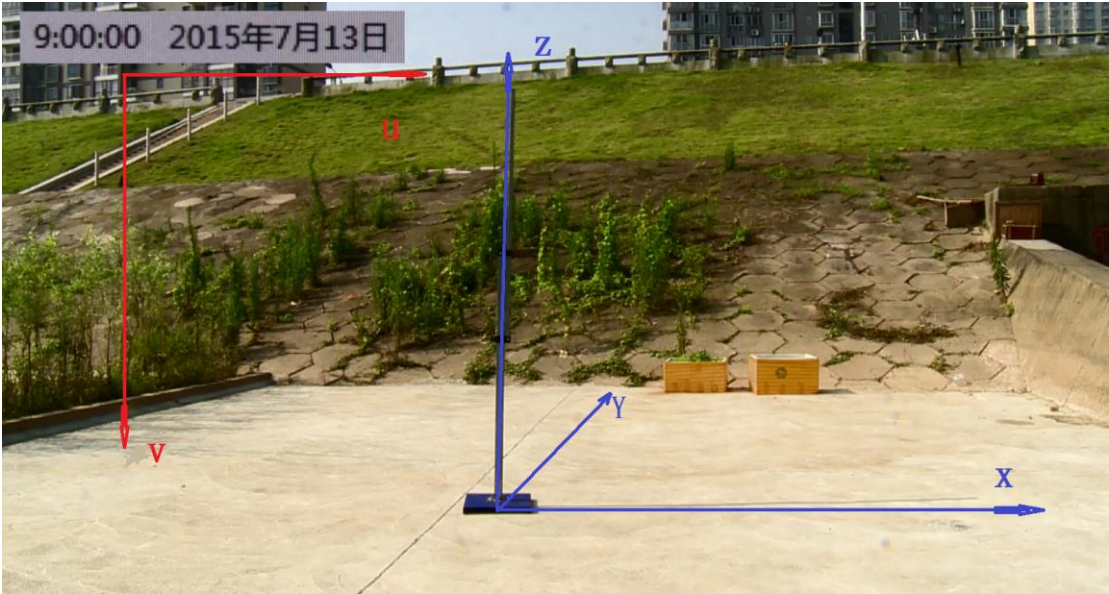


图 14 真实坐标与相机坐标对应关系示意图

依据对应关系方程，将表 9 中的像素坐标映射到真实世界坐标中，便得到了真实世界坐标中的每分钟影子顶点坐标值，如表 10。

表 10 真实世界坐标下的影子顶点坐标值

时间	x	y
8:54	2.4527	0.3002
8:55	2.4482	0.2472
8:56	2.4096	0.2403
...
9:32	1.8830	0.1801
9:33	1.8696	0.0870
9:34	1.8619	0.0150

5.4.5 拍摄具体地点的确定

用得到的真实世界坐标下的影子定点坐标值，可以计算得到不同时刻下的太阳高度角：

$$\tan \alpha = \frac{z}{x}$$

运用 5.3.2 中的模拟退火最优搜索匹配算法，对研究区域内的地点进行经度、纬度两个未知量的优化匹配搜索，可以得到最终满足匹配条件的最优地点结果，如表 11 所示。

表 11 视频拍摄地点最优匹配区域

组别	纬度	经度	误差	地点名称
1	33.4182°N	119.7435°E	0.0012	江苏省盐城市
2	35.3350°N	109.2655°E	0.0023	内蒙古赤峰市
3	27.8519°N	112.3063°E	0.0001	湖南省湘潭市

以第三组湖南省湘潭市附近为例，利用百度地图进行经纬度搜索，得到最终结果如下图 15 所示。

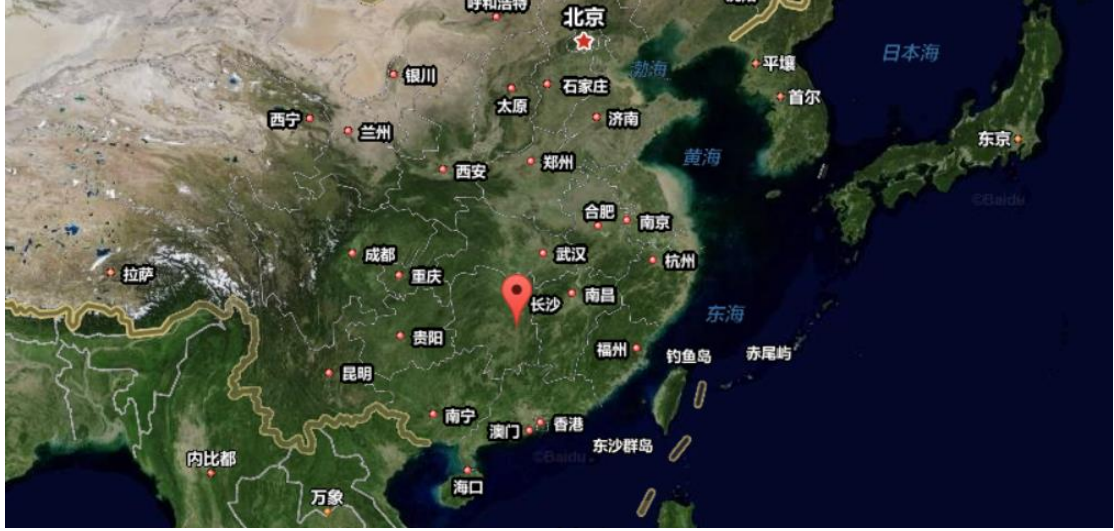


图 15 湖南湘潭市地图示意图

从图 15 中可以看出，第三组坐标位于湖南省湘潭市，靠近长沙市。

六、模型评价与改进

6.1 模型的评价

6.1.1 日期地点确定模型的评价

在基于模拟退火算法的日期地点确定模型中，我们通过搜索求解满足影子顶点坐标数据的日期、地点的经纬度作为最优解，在时角计算公式中在当地太阳时为 12 点时，固定直杆的影子将达到最短，因此求得固定直杆影子达到最短时的北京时间，可求得固定直杆所在地的经度。每过 1 小时，时角变化 15° ，

$$\text{故有： } \omega = 15(T - 12)$$

其中， T 为当地真太阳时（单位：小时）。由于所考虑测量地区均为中国境内，故我们依据北京时间，对真太阳时的计算做出了一下调整：

$$T = t_B - \frac{4}{60} \times (120 - L_{loc})$$

其中 t_B 为北京时间，也为北京真太阳时， L_{loc} 为测量地点经度。设 x_i 表示附件中的固定直杆的 x 坐标影子长度值， y_i 表示附件中的固定直杆的 y 坐标影子长度值，则固定直杆的实际影子长度可以由下式进行计算：

$$L_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

由得到的不同北京时间所对应的实际影子长度，可以做出影子长度随北京时间变化的散点图，对散点图进行最小二乘法的二次曲线拟合可以得到拟合的二次曲线函数形式，对该二次曲线函数求最小值即可得到固定直杆实际影子达到最大时所对应的北京时间 t_e ，通过求解下列的方程即可得到固定直杆所在地的经度。

$$12 = t_e - \frac{4}{60} \times (120 - L_{loc})$$

对附件 1 如此处理后可以得到拟合的二次曲线函数方程，方程的表达式如下所示：

$$s_1(t) = 0.1489t^2 - 3.752t + 24.13$$

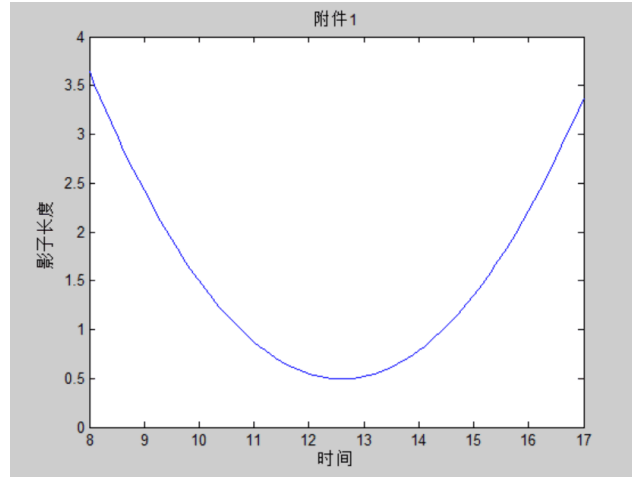


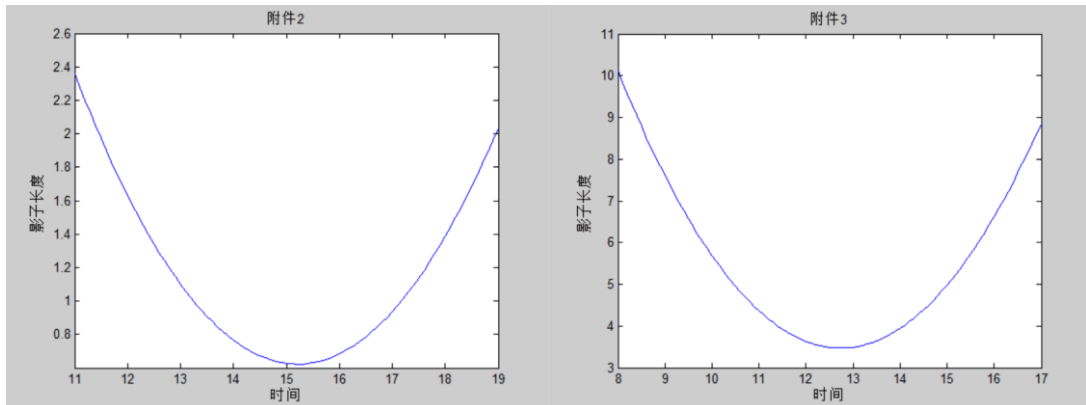
图 16 附件 1 实际影长拟合曲线

观察图 16 与图 3 发现，实际拟合曲线与计算所得拟合曲线基本一致。图 16 中影长最短时所对应的北京时间为 12:32 分，所求得固定直杆对应经度为：111.01°E。比较实际拟合曲线与 5.1.2 中影长变化曲线以及实际测量值与模拟退火算法中所求得经度基本一致。

对附件 2 中及附件 3 中实际影长随时间变化的散点图进行基于最小二乘法的二次曲线拟合，得到相应方程如下：

$$\begin{cases} s_2(t) = 0.09814t^2 - 2.985t + 23.32 \\ s_3(t) = 0.2964t^2 - 7.551t + 51.56 \end{cases}$$

对拟合曲线进行绘图得到附件 2 与附件 3 中实际情况拟合出的影长随时间变化曲线。



(a) 附件 2 实际拟合曲线 (b) 附件 3 实际拟合曲线

图 17 实际拟合曲线

通过比较附件 1、附件 2 与附件 3 中实际拟合曲线与基于模拟退火算法得到的值进行比较，发现相似度极高，故我们认为莫 i 选哪个具有较高的可靠性。

6.1.1 模型的优点

(1) 通过分析相关天文学地理知识建立了基于 Spencer 算法的杆影变化函数模型, 该模型综合考虑了太阳高度角、太阳方位角、时角随时间的变化, 再结合相关几何关系处理得到一天中固定杆长的影子长度随时间的变化, 模型贴合实际真实情况, 结果可靠性高。

(2) 通过结合模拟退火算法与基于 Spencer 算法的杆影变化函数模型, 搜索求解满足固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标的地点经纬度及日期时间, 收敛精度控制较高, 结果可信度较强。

(3) 基于张正友平面标定法的视频坐标系转换, 将图像像素坐标系转换为世界坐标系, 坐标转换后得到的影子长度排除了相机拍摄时的透射及方位角畸变, 影子长度测量准确性提高, 搜索得到的若干个可能的地点与日期比较准确。

6.1.2 模型的缺点

(1) 模拟退火算法的搜索求解时间较长, 且会存在陷入局部最优解的情况, 结果有时并不理想使求解得到的结果有一定的误差, 随着迭代步数与误差精度的提高运行时间急速增加, 消耗时间增长。

(2) 基于 Spencer 算法的杆影变化函数中对于时角的修正不够准确, 平太阳时与真太阳时之间的时差未进行考虑, 搜索得到的若干个可能的地点与日期对于数据的敏感性较强。

(3) 基于张正友平面标定法的视频坐标系转换模型, 内参与外参的参数确定较为复杂, 同时五个对应坐标点的选取有一定的难度。

6.2 模型的改进

(1) 在计算时角时综合考虑平太阳时与真太阳时之间的时差修正, 将修正后时角代入模拟退火算法进行搜索, 结果准确性将会提高。

(2) 在确定基于张正友平面标定法的视频坐标系转换模型中的参数时, 选取五个对应坐标点, 建立世界坐标系时以平行于相机的底线为一个坐标轴, 可以简化参数的计算。

(3) 可以考虑结合使用粒子群算法与遗传算法代替模拟退火算法求解最优结果, 求解得到的最优结果将会更加贴近实际情况。

七、文献

- [1]中国大百科全书天文学北京：中国大百科全书出版社，1980,42
- [2]世界气象组织气象仪器和观测方法指南北京：气象出版社,1992:75-86
- [3]裴聪.基于计算机视觉中双目立体匹配技术研究[D].江苏:江苏大学, 2010.15-19
- [4]黄春燕.双目立体相机标定算法研究与实现.山西太原：中北大学，2015
- [5]快速模拟退火算法应用.张霖斌；姚振兴；纪晨；张中杰；石油地球物理勘探

八、附件清单

- 附件一：方位角偏差匹配目标函数
- 附件二：模拟退火二维搜索算法程序
- 附件三：模拟退火三维搜索算法程序
- 附件四：视频分段时间长度数据统计表