

嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略分析

摘要

本文针对嫦娥三号软着陆轨道设计与飞行控制策略问题,建立了以动力学方程、轨迹拟合、离散迭代、图像处理与垂直变推力最优燃耗为基础的模型,分析了不同阶段具体飞行轨迹并设计了相应控制策略,完成了嫦娥三号软着陆轨道的主要分析与设计。

在建立模型之前,我们首先对探月工程中的一些概念做了定性与定量分析,并基于分析对一些影响因素做出了理想化处理,忽略了一些影响极小但真实纯在的因素并做出了相应假设,例如忽略月球软着陆时地球与太阳引力影响以及月球自转影响等,使模型建立具有可行性。

为了确定近月点的具体位置,我们建立动力学方程对探测器飞行过程中受力状况进行分析,同时建立轨迹拟合方程对实际飞行轨迹进行拟合,最终依据飞行时间与着陆点,我们确定出在主减速段探测器飞过的月心偏转角,从而得出近月点经纬度为(19.51W, 33.10N)。由于近月点高度为 15km,依据开普勒定律,我们得到近月点探测器飞行速度为 1693m/s,方向水平朝南。

在对飞行轨道进行设计优化时,我们主要将其分为了两部分,第一部分为主减速阶段,第二部分为以粗避障与精避障为主要过程的近似垂直下降过程。

优化主减速阶段飞行控制策略时,结合探测器动力学方程再次建立相应随时间变化的微分方程,并将其离散化为 20 段,对每一微小段中的飞行情况作了近似假设,让其运动状况变为可分析的规律运动。之后我们建立相应迭代方程,并通过枚举法进行推力初始角度枚举,利用迭代公式得到不同角度最后对应的不同时间,选取最小时间所对应角度,再次在该角度附近进行更精确角度枚举,最终选得最少时间时所对应推力初始角度 0.44° ,对应第一阶段耗时为 425s,燃料消耗为 1084.1kg。

在分析粗避障与精避障为主的下降过程,在垂直方向上建立可变推力的最优燃耗模型,分析在下降过程中推力大小随时间变化关系,计算最优燃耗控制策略。在水平方向上,采取基于图像分割处理方法,结合目标函数规划模型,选取最优降落目标区域。最终得到粗避障下降总耗时 125s,燃料消耗 87kg,垂直降落 2900m,水平位移 100m,精避障悬停 30s,燃料消耗 22.4kg,精避障过程耗时 80s,燃料消耗 56kg。最终 4m 出自由落体耗时 2.23s。

最终探测器在软着陆过程中总耗时 662.23s,燃料消耗 1247.54kg,探测器落地时,质量为 1152.46kg。基于所得结果,我们分步对每个过程进行了误差分析,得到了每个过程中的误差大小,经比较发现,每个过程与总过程误差均在可控范围内,故认为方案较为准确。

最后我们针对主减速段用时与速度变化情况作了敏感性分析,并对我们的模型进行了评价。

关键词: 软着陆轨道 动力学方程 离散化 动力学微分方程 变推力最优燃耗

一、问题重述

嫦娥三号于 2013 年在中国成功发射,作为 1978 年之后第一个进行月球软着陆的无人月球探测器备受世人瞩目。其着陆准备轨道上的运行质量为 2.4t,并载有一个比冲为 2940m/s 且能够产生 1500N 到 7500N 可调节推力的主减速发动机。嫦娥三号在进行月球软着陆时,可由四周安装的姿态调整发动机进行探测器姿态调整。嫦娥三号预定降落在月球 19.51W, 44.12N, 海拔-2641m 的月球表面。

针对着陆轨道与控制策略设计,要求着陆准备轨道是近月点 15km、远月点为 100km 的椭圆形轨道;着陆轨道为近月点至着陆点的轨道,着陆过程由 6 个阶段组成,并要求每个阶段节点所处状态为要求状态。结合上述要求,在尽可能减少着陆燃料消耗的情况下,对以下几个问题进行分析:

- (1) 确定着陆准备轨道近月点远月点的位置,以及嫦娥三号速度的大小方向。
- (2) 确定着陆轨道并对其 6 个阶段进行控制策略的最优化设计。
- (3) 对轨道与控制策略进行误差分析与敏感性分析。

二、问题分析

2.1 背景介绍

在美国“阿波罗”号登月飞船之后的半个世纪,人们掀起了对外太空的探测,由于月球是距离地球最近的天体,故成为各国对空间探测的首选目标。

由于探月时,地面站与探测器之间距离较远,信号延迟大,地面基线短,尤其会受到月球背面不可见弧段遮挡等不利因素,无法进行实时操控,因此现如今月球探测器多采用自主导航的技术。自主导航往往是探测器根据提前设定好的轨迹路线,实现变轨与姿态调整等运动。探测器在对月球表面进行软着陆时,实现着陆变轨姿态的自动调整以及降落时对坑洼地形的障碍检测规避。

为了能够实现安全探测,并大大减少探测成本提高效率,轨道的预先设计就变得尤为重要。太空飞行器能否发射成功,很大一部分取决于轨道的计算。对于实现月球软着陆的任务,着陆准备轨道与着陆轨道的分析就成为了重中之重。所以结合障碍检测规避的飞行轨迹设计,就成为了探测器登陆月球的关键。

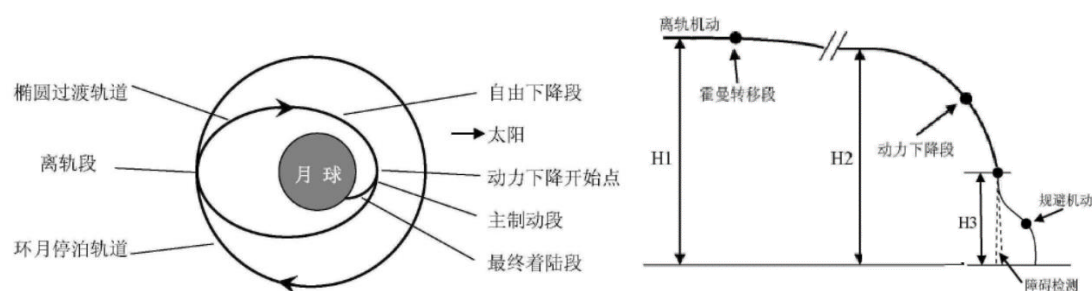


图 1 探测器软着陆轨道示意图

探测器实现软着陆一般会通过几个步骤:先进入着陆准备轨道即环月椭圆轨道,进行表面探测与测量,之后在近月点进行减速边轨进入着陆轨道,着陆轨道由 6 个阶段构成但可总结为三个主要阶段:主减速阶段、粗避障阶段、精避障阶段,最终安全的降落在平缓的月球表面。

2.2 相关概念的介绍

- (1) 比冲

火箭发动机单位质量推进剂产生的冲量或单位流量的推进剂产生的推力为

发动机比冲。其满足关系式：

$$F_{thrust} = v_e \dot{m}$$

其中， F_{thrust} 是发动机的推力，单位是牛顿； v_e 是以米/秒为单位的比冲； \dot{m} 是单位时间燃料消耗的公斤数。

嫦娥三号发动机比冲为 2940m/s，故可通过关系式求得对应发动机推力时燃料的消耗量。

(2) 运行质量

运行质量指探测器在运行状态中的整体质量，其包含设备本身质量和燃料重量。在嫦娥三号进行软着陆时，运行质量会随着燃料的消耗而变化。由于质量的变化，其推力产生的加速度与月球引力对其作用会随质量的变化而变化。

(3) 椭圆绕月飞行轨道

在探月器从地球飞向月球时，常采用椭圆形式的绕月轨道，使探月器脱离地球引力而被月球引力捕获。在探月器接近近月点时，采取空中刹车，使得探月器速度降低，从而被月球引力捕获，继而成椭圆形轨道绕月飞行。

在进行软着陆之前的准备轨道也为椭圆形的绕月轨道，月球往往靠近于椭圆的其中一个焦点，故在轨道上会有近月点与远月点，近月点即轨道中离月球最近的地点，远月点为离月球最远的地点。在两点，探测器的飞行方向均相对于月球为径向切线方向。由于近月点与月球距离最近，我们往往在此进行变轨运动，使飞行器进入软着陆轨道。

(4) 月球参数

月球形状为一个不明显的扁球形，平均半径、赤道平均半径与极区半径分别为 1737.013km、1737.646km 和 1735.843km，质量为 7.3×10^{23} kg。通常将月球的平均半径作为海拔零点，题中的着陆点海拔为-2640m 即该点相对平均半径高度低了 2640m。

月球经纬度是用来标示月球表面上的位置。在月球表面上的任何位置，都可以经由相当于地球上的经度和纬度的两组数字指出位置。天文学家以一个小的碗状陨石坑（莫斯汀 A'）作为定义月面坐标的基准点。

(5) 着陆轨道各关键点高度的重新定义

近月点与远月点高度指相对于月球海拔零点而言，为 15km 与 100km。主减速阶段为从近月点降低到距月球表面 3000m 的高度点，此时 3000m 为相对月球表面，由于降落地点的海拔高度为-2640m，故主减速段末端的高度实际为海拔 360m 的地方。故实际降落高度为 $15000 - 360 = 14640$ m，而并非 $15000 - 3000 = 12000$ m，所以主减速阶段的降落高度实际为 14640m，为从海拔 15km 近月点降低至主将落地点上方海拔 360m 处。

2.3 燃料消耗影响因素分析

在进行软着陆时，探测器的燃料消耗往往受到喷射角度、推力大小与工作时间三个因素的影响。

在减速主阶段，喷射方向与速度方向成一定夹角，不同的夹角会造成达到最终状态的轨迹、时间不同，喷射方向与速度发现的夹角也会由推力大小影响，故三个因素相互交融影响，越大的推力会使得单位时间内消耗的燃料越多，不同的喷射方向与速度方向的夹角会造成轨迹与时间的不同，越长的时间总的燃料消耗也会越多。因此我们在研究燃料消耗优化问题时，需要对这几个因素进行综合考虑。

2.4 避障图形处理

在主减速段之后,进行避障飞行时,对所拍摄到的图形进行分析,计算图中较为平缓的区域。由于图像为二维像素矩阵,无法整体分析,且还要排除处于环形山内的平缓区域,故我们准备进行像素分割的方法对图像进行处理,将大型图像分割成多块小像素块,从而对每一块里的高程图形进行分析,研究地势变化程度。

2.5 地月参数的理想化考虑

(1) 仅考虑月球引力

已知地球质量 $M_E=5.98 \times 10^{24} \text{kg}$, 月球质量为 $M_M=7.350 \times 10^{22} \text{kg}$, 嫦娥三号进行绕月飞行时距离地球距离 $r_E=3.844 \times 10^8 \text{m}$ 。

嫦娥三号尽心绕月飞行时,地球对其引力加速度为:

$$g_E = \frac{GM_E}{r_E^2} \approx 0.0027 (\text{kg} / \text{s}^2)$$

月球对嫦娥三号的引力加速度为:

$$g_M = \frac{GM_M}{r_M^2} \approx 1.6008 (\text{kg} / \text{s}^2)$$

比较 g_E 与 g_M , 可以发现 $g_E \ll g_M$, 所以, 在研究嫦娥三号软着陆问题时, 仅考虑月球引力的影响。

(2) 近似为惯性坐标系

月球自转速度为 $\omega=2.6617 \times 10^{-6} \text{rad/s}$, 在非惯性系下, 嫦娥三号所受到的最大离心加速度为:

$$\alpha = \omega^2 r = 1.2396 \times 10^{-5} (\text{kg} / \text{s}^2)$$

相较于月球引力非常小, 故我们在进行探测器着陆问题中, 忽略非惯性系中力的大小, 仅考虑惯性坐标系中的运动。

(3) 软着陆轨道相对于月球的方位

为了减少在着陆过程中燃料的消耗, 一般情况下, 绕月飞行轨道, 着陆准备轨道与着陆轨道均处于同一平面, 这样可以减少纵向方向改变时所不必要的麻烦与燃料消耗。

根据信息假设, 嫦娥三号软着陆轨道平面为过圆球自转轴的平面, 且相对于月球经纬度为从南至北着陆。

2.5 题目难点分析

在研究着陆轨道时, 变量较多, 又由于着陆轨道横跨月球维度较大, 无法将月球地表近似为平面, 故引力、垂直地标方向等均随着地心角的偏移而改变, 除此之外, 在地心角偏移变化的基础上, 速度与推力方向夹角、质量、加速度以及时间等均为变化量, 且其具体关系不固定, 对模型的建立造成了极大困难, 且对于复杂模型的求解也造成了困扰。

在避障时的图像分析, 如何对图像进行有效平缓区域的评判成为了关键, 由于图像包含信息量极大, 故在处理时, 对于大量数据的处理也成为了难点。

三、模型假设

- 一切外力均作用于探测器的质心，不考虑形状影响
- 飞行器在真空中飞行，不考虑大气、粒子等的摩擦因素
- 月球表面引力一致，不随经度纬度变化，只随月球海拔高度变化
- 进行软着陆过程中不考虑地球与其他星球的引力作用，只考虑月球本身引力
- 不考虑由于月球自转影响，且忽略科里奥利力
- 嫦娥三号软著路轨道平面为月球自转轴平面，且探测器从南至北着陆

四、符号变量说明

| | |
|----------|-----------------------------------|
| r | 探测器与月球球心的距离（单位:m） |
| F | 探测器发动机推力大小（单位:N） |
| m | 探测器的质量（单位:Kg） |
| g | 月球重力加速度大小（单位: Kg/s ² ） |
| α | 探测器的比冲大小（单位: m/s） |
| v | 探测器的速度大小（单位: m/s） |

五、模型建立与求解

为了确定探测器在软着陆时，近月点与远月点的具体位置，我们对软着陆第一段即主减速段进行了分析，依据探测器减速姿态，发动机推力方向与推力大小以及速度大小与方向等因素，建立了主减速段探测器的动力学方程。同时我们在垂直方向上建立燃耗最优下降轨迹和下降速率的三次多项式进行轨迹拟合^[1]。结合动力学方程和轨迹曲线拟合，确定主减速段轨迹起始点，得到具体近月点。

依据所得近月点与题中所给降落点，针对从近月点开始的主减速段进行轨迹形状的调整，改变拟合曲线的参数，以燃料消耗最少为目标调整具体飞行控制策略，得到第一段的最优化控制策略。

之后我们对图像处理，进行图像分割，得到更小的图形像素块，并对每一块进行研究从而确定平缓区域，之后针对选出的平缓区域建立线性规划问题，选出最合理最省燃料的降落粗选区域，并在精避障阶段采取相同方法，最终选出最佳降落区域，得到燃料最省降落控制方案。

5.1 基于动力学方程与轨迹拟合曲线的近月点确定模型

5.1.1 坐标系的选取

建立动力学方程的第一步是选取合适的坐标系，由于着陆轨道跨越维度较大，月球表面无法近似为平面，建立直角坐标会因月球表面切线的角度变化造成复杂的角度变化关系，故我们采取以角度和径向距离为主要坐标的极坐标系，这样可以在简化动力学方程建立时的角度变化关系。

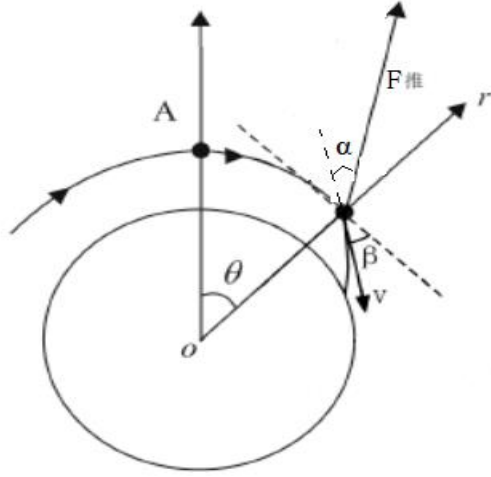


图 2 月球极坐标示意图

图 2 中，A 为近月点， r 为径向距离， θ 为相对于近月点的径向偏向角也为极角， α 为推力方向与速度方向夹角。

5.1.2 动力学方程的建立

在建立动力学方程时，忽略月球上方的稀薄空气摩擦与各种粒子影响，同时由于降落时间较短，不考虑月球自转产生的科里奥利力等的影响。

对径向方向，考虑月球引力、推力大小与方向和速度的大小和方向等因素，建立径向方向的动力学方程：

$$\dot{v}_r = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v_\theta}{r} + \frac{F}{m_0 - mt} \sin \lambda \quad (1)$$

其中， \dot{v}_r 代表对径向速度 v_r 的求导， μ 为月球的引力常数， r 、 θ 为探测器与月球的月心距与极角， λ 为速度方向与推力方向的夹角， F 为发动机推力。

同理，对切向方向，在上述过程中去掉月球引力的影响，即可分析得切向方向动力学方程：

$$\dot{v}_\theta = \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{F}{m_0 - mt} \cos \lambda \quad (2)$$

其中 v_θ 为切线方向速度。

除此之外，切向速度与角速度、径向速度与径向距离变化关系为：

$$\dot{r} = v_r; \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} \quad (3)$$

5.1.3 轨迹拟合曲线的建立

为了研究探测器软着陆过程中垂直方向上燃料消耗最优时的下降轨迹问题，建立多项式对轨迹进行拟合^[1]：

$$\begin{cases} r(\tau) = k_0 + k_1\tau + k_2\tau^2 + k_3\tau^3 \\ v(\tau) = k_1 + 2k_2\tau + 3k_3\tau^2 \end{cases} \quad (4)$$

其中, $k_i(i=0,1,2,3)$ 为多项式系数, τ 为时间。且有 $v(\tau)=\dot{r}(\tau)$, 两者均为径向参数, 即径向速度与径向距离。

该拟合多项式的边界条件为:

$$\begin{cases} r(0) = r_0, v(0) = v_0 \\ r(\tau_f) = r_f, v(\tau_f) = v_f \end{cases} \quad (5)$$

其中, τ_f 是拟合曲线终点处时间, r_f 是曲线终点处径向距离, v_f 为曲线终点处切向速度。

结合 (3) 与 (4) 我们发现, 若当 τ_f 为已知时, 则恰有四个未确定系数 k_i , 同时有四个边界条件限制, 故当 τ_f 已知时, 拟合曲线可以容易确定。

5.1.4 近月点速度模型

嫦娥三号的着陆准备轨道为一个近月点 15km, 远月点 100km 的椭圆形轨道, 且该轨道满足开普勒轨道定律, 其轨道示意图如图 3。

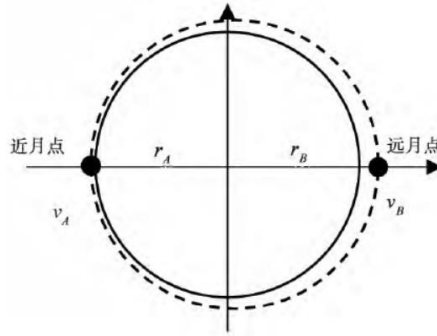


图 3 着陆准备轨道示意图

设近月点至月心的距离为 r_A , 远月点至月心的距离为 r_B , 单位时间嫦娥三号扫过的面积为:

$$\begin{cases} S_A = \frac{1}{2} r_A v_A \\ S_B = \frac{1}{2} r_B v_B \end{cases} \quad (6)$$

其中, v_A, v_B 是嫦娥三号在近月点与远月点的速度。根据开普勒定律, 由 $S_A=S_B$ 可得:

$$r_A v_A = r_B v_B$$

根据机械能守恒定律, 有:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - m g_A r_A = \frac{1}{2} m v_B^2 - m g_B r_B \quad (7)$$

其中 m 是嫦娥三号的质量, g_A, g_B 是月球引力加速度, 即:

$$\begin{cases} g_A = \frac{GM_M}{r_A^2} \\ g_B = \frac{GM_M}{r_B^2} \end{cases} \quad (8)$$

结合（6）、（7）与（8）式，带入整理可得：

$$v_A^2 = 2GM_M \frac{1}{r_A} \left(\frac{r_B}{r_A + r_B} \right) \quad (9)$$

其中， M_M 为月球质量。

5.1.5 模型汇总

● 动力学方程

$$\begin{cases} \dot{v}_r = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v_\theta}{r} + \frac{F}{m_0 - mt} \sin \lambda \\ \dot{v}_\theta = \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{F}{m_0 - mt} \cos \lambda \\ \dot{r} = v_r \\ \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} \end{cases}$$

● 轨迹拟合曲线

$$\begin{cases} r(\tau) = k_0 + k_1 \tau + k_2 \tau^2 + k_3 \tau^3 \\ v(\tau) = k_1 + 2k_2 \tau + 3k_3 \tau^2 \end{cases}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} r(0) = r_0, v(0) = v_0 \\ r(\tau_f) = r_f, v(\tau_f) = v_f \end{cases}$$

5.2 近月点位置求解

5.2.1 求解算法

若已知时间，利用轨迹拟合方程可以得知径向距离与径向速度随时间的变化具体定量关系，利用每个时刻关系式带入动力学方程中，可以最终求解出极角变化速度的关系，对其进行积分求解，便可知道在主减速段中最终偏转的地心角度。

步骤 1：总时间^[2]与总推力^[3]的确定

嫦娥三号在进行软着陆时，总共耗时约为 710s，其中粗避障与精避障以及最后落地阶段耗时约为 3min，所以，为简便近月点的求解，我们将主减速阶段时间设为 450s，以此时间作为大致时间进行近月点的位置确定，之后在阶段燃耗最优控制方案确定中，再进一步对时间进行优化。

由于近月点探测器速度较大，想要减速至水平方向速度为 0，需要较强的制动性，探月器在这一阶段往往用最大推力对其进行制动以降低速度^[3]。所以，在主减速阶段，发动机的推力为 7500N。

步骤 2：轨迹拟合曲线方程的确定

将 $\tau=450s$ 带入（4）式中，依据（5）中的具体边界条件，可以求解的具体随时间变化的拟合曲线方程。

步骤 3：依据动力学方程求解角度随时间变化关系

在得到径向方向上距离与速度随时间变化的具体参数后，可以通过（1）与（2）求得 v_θ 随时间变化速率，将其对时间进行不定积分，便可求得 v_θ 与时间关系，通过（3）便可求得的角速度，对其进行定积分计算，求得在总时间内 θ 总变化角度，即为软着陆主减速阶段中与月心连线飞行跨越的角度。

步骤 4: 根据 θ 计算近月点具体经纬度

求得 θ 后, 可以通过初始点与末位点的海拔高度关系求得水平距离长度, 已知环月轨道, 着陆准备轨道, 着陆轨道均在一个平面内, 故根据水平距离与海拔高度等两个信息, 结合着陆轨道所在月球平面, 可以得到近月点具体的月球经纬度。

5.2.2 求解结果

$$\begin{cases} r(\tau) = k_0 + k_1\tau + k_2\tau^2 + k_3\tau^3 \\ v(\tau) = k_1 + 2k_2\tau + 3k_3\tau^2 \end{cases} \text{ with } \begin{cases} r(0) = 1752013, v(0) = 0 \\ r(450) = 1737373, v(450) = 57 \end{cases}$$

其中, 降落地点海拔高度为-2640m, 由于主减速阶段末端离月面为 3km, 故末端的海拔为 360m, 距离月心距离为 1737.373km。近月点为距离平均月球半径即海拔零点, 故距离月心距离为 1752.013km。径向起始速度为 0m/s, 而主减速阶段末端径向速度为 57m/s 的速度。对拟合曲线进行求解, 得:

$$\begin{cases} r(\tau) = 1752013 - 0.14\tau^2 + 0.0001582\tau^3 \\ v(\tau) = -0.28\tau + 0.0004746\tau^2 \end{cases}$$

此处 $v(\tau) = -0.28\tau + 0.0004746\tau^2$ 即为 (1) 中 v_r 的关于时间 τ 的关系式, 通过动力学方程可以求解的 v_θ , 通过 (3) 式便可得到角速度与时间函数关系:

$$\dot{\theta} = f(\tau)$$

对其进行定积分求解可得:

$$\theta = \int_{\tau=0}^{\tau=450} \dot{\theta} dt = 11.02^\circ$$

依据假设, 着陆轨道为过月球自转轴平面的轨道, 且有南至北, 故近月点的经纬度为 (19.51W, 33.10N)。依据 (9) 式, 近月点的速度为: 1693m/s。

5.3 主减速段的轨迹优化模型

在 5.2 中, 我们按照给定大致时间 450s, 求得了近月点的位置, 但是主减速段的轨迹并不是最优的, 所以我们在第一问求得近月点之后, 进一步对于两定点之间的飞行轨迹进行进一步优化, 调整轨迹拟合曲线参数, 使其达到最少燃耗。

为研究最优化轨迹以及最少燃耗飞控方案, 我们需要研究探测器从近月点开始的主减阶段中, 具体姿态调整问题, 即需要研究在每一个时刻发动机推力与速度方向夹角的变化, 从而对其角度进行最优求解, 得到在飞行中, 发动机推力与速度方向夹角变化关系曲线。

由于在每个时刻, 月心偏向角, 速度方向、速度与推力夹角、月球引力等均在发生变化, 我们无法对整个时间段建立完备的微分方程与动力学方程。故我们采取离散的方式, 将轨迹离散化, 我们针对离散化后的每一小段进行近似均匀变化的运动分析。

5.3.1 坐标系的选择

由于在研究动态过程中, 要考虑到月球表面弧形, 无法当平面计算, 若按照直角坐标系进行分析, 最后角度变化方向较为复杂, 故我们选取只用偏转角与径向距离代表物体运动的极坐标系对其进行分析, 简化各参数起始与末端状态表示。

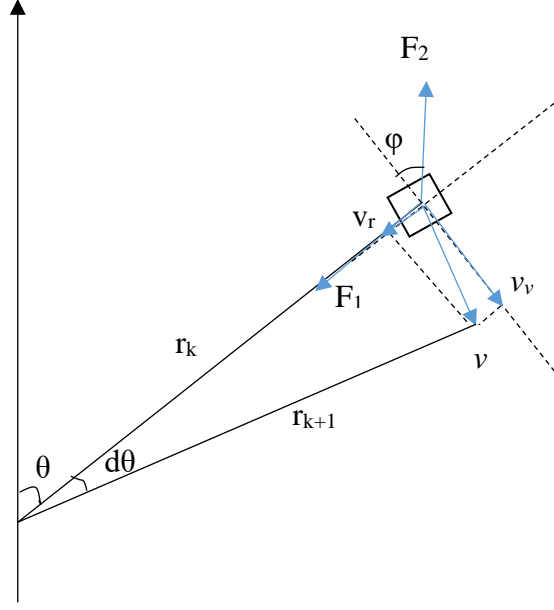


图 3 离散模型极坐标示意图

图 3 为探测器飞行离散化后中的一段，其中 $F_{1(k)}$ 为第 k 个离散段月球对探测器的万有引力， F_2 为发动机推力， $v_{v(k)}$ 为探测器在第 k 个离散段飞行的切向速度， $v_{r(k)}$ 为第 k 个离散段探测器飞行的径向速度， $\phi_{(k)}$ 为探测器发动机的推力方向与切向方向夹角， $d\theta_{(k)}$ 为第 k 个离散段探测器与月球球心所夹的角度， $m_{(k)}$ 为第 k 个离散段探测器的质量， $r_{(k)}$ 为第 k 个离散段探测器与月球球心的距离。

5.3.2 离散后的理想近似处理

对飞行轨迹进行无限小的分割离散化之后，我们将每一段做理想化近似处理。即假设，在离散化后的每一小段中，探测器所收到的月球引力，发动机推力大小均保持不变，且发动机推力方向角 ϕ 与月球引力的方向均在离散后的一小段中保持不变，同时探测器的质量在这一小段中也为固定值，不随时间变化，因此探测器在径向与切向上的加速度均为固定值，即在径向与切向上均做匀变速直线运动。

针对每个离散段，进行动力学分析，同时运用迭代关系得到每一小段物理量的约束关系，最终可以得到无数小段趋近于总轨迹的结果。

5.3.3 优化动力学方程的建立

已知在主减速阶段，探测器已最大推力进行制动^[3]，所以 $F_2=7500\text{N}$ 。设将总轨迹离散为 k 段，有：

$$F_{1(k)} = G \times \frac{M_M m_{(k)}}{r_{(k)}^2} \quad (10)$$

其中， G 为引力系数， M_M 为月球质量， $m_{(k)}$ 为第 k 段中探测器的运行质量， $r_{(k)}$ 为第 k 段中探测器距离月心的距离。

对于切向方向有：

$$\begin{cases} F_2 \cos \varphi_{(k)} = m_{(k)} a_{v(k)} \\ v_{v(k+1)} = v_{v(k)} + a_{v(k)} dt_{(k)} \\ x_{r(k)} = v_{r(k)} dt_{(k)} + \frac{1}{2} a_{r(k)} dt_{(k)}^2 \end{cases} \quad (11)$$

对于径向方向有：

$$\begin{cases} F_{1(k)} - F_2 \sin \varphi_{(k)} = m_{(k)} a_{r(k)} \\ v_{r(k+1)} = v_{r(k)} + a_{r(k)} dt_{(k)} \\ r_{(k+1)} = r_{(k)} - x_{r(k)} \end{cases} \quad (12)$$

迭代关系为：

$$\begin{cases} m_{(k+1)} = m_{(k)} - \frac{7500}{2940} \sum_{k=1}^{k-1} dt_{(k)} \\ dt_{(k)} = \frac{r_{(k)} d\theta_{(k)}}{v_{v(k)}} \end{cases} \quad (13)$$

其中 $dt_{(k)}$ 为探测器在第 k 个离散段中飞行所花费的总时间， $d\theta_{(k)}$ 为第 k 个离散段

与月球球心所夹的角度， $r_{(k)}$ 为探测器在第 k 个离散段中与月球球心的距离。

5.4 主减速段最优化轨迹求解

5.4.1 算法

步骤一： 给定初始推力角 $\varphi_{(I)}$

利用枚举法，给定一个初始时刻发动机推力与切向方向夹角 $\varphi_{(I)}$ ，经过迭代计算得到在此初始角度下的结果。

步骤二： 进行比较

比较枚举出的几个角度所得结果，得到所枚举角度中使得飞行时间最少的角度方案。

步骤三： 精确枚举

得到上述最少时间角度后，我们缩小枚举间隔，更进一步在此角度附近进行小范围角度枚举。

步骤四： 确定最终初始角度

在上述小范围内角度进行结果比较，选出最佳的初始推力角度。

5.4.2 结果

通过枚举，最佳初始推力角度 $\varphi_{(I)}$ 为 0.43° ，主减速段共耗时 425s，燃料消耗 1084.1kg。

(1) 喷射角度

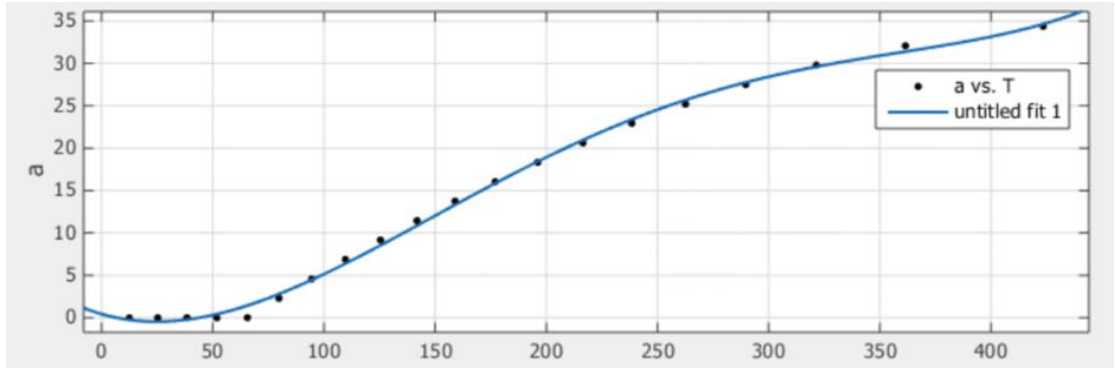


图4 推力方向角度变化

图4为发动机推力方向随时间变化的拟合曲线，在第一开始，发动机推力与切线方向夹角较小，随着时间的推移，角度慢慢变大，最终在目标状态时与切线方向成 35° 左右，故需要在姿态调整阶段，进一步将探测器进行姿态调整，是发动机主方向指向月心。推力随时间变化拟合曲线为：

$$\varphi(t) = 5.361 \times 10^{-9} t^4 - 5.443 \times 10^{-6} t^3 + 0.0017 t^2 - 0.075 t + 0.439$$

(2) 速度

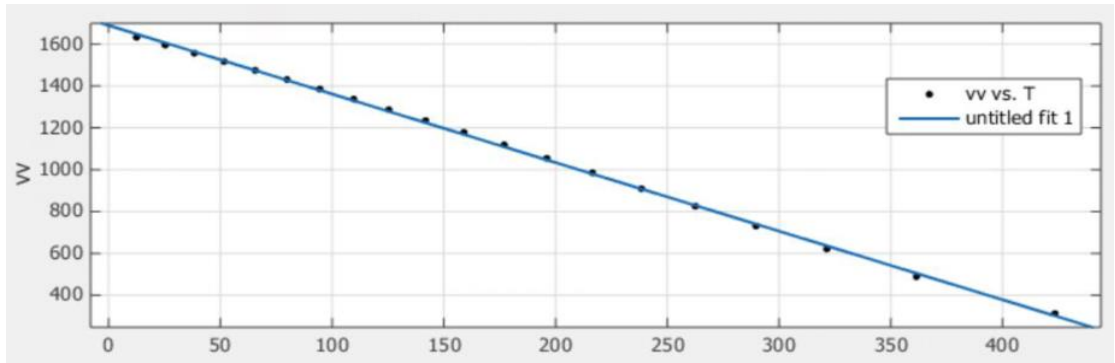


图5 切向速度随时间变化

图5为切向速度随时间的变化趋势，可以看出，由于发动机大推力的制动，切向速度时间剧烈降低，在425s时降为0m/s。

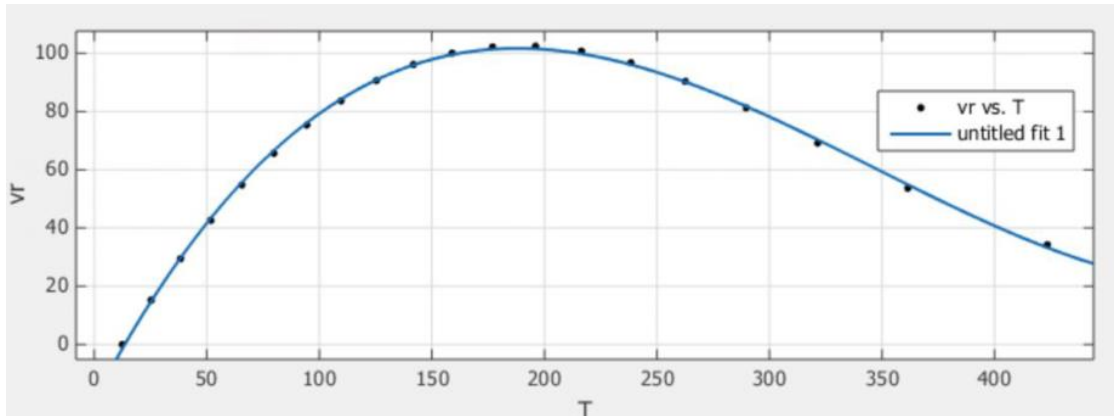


图6 径向速度

图6为径向速度，由图中可以看出，当一开始推力角度不大的时候，径向速度由于引力作用逐步增大，后期随着推力角度不断增大，径向速度开始逐渐减慢，最终为57m/s。拟合曲线为：

$$v_r(t) = 5.155 \times 10^{-6} t^3 - 0.0053 t^2 + 1.465 t - 18.89$$

(3) 探测器与月心距离

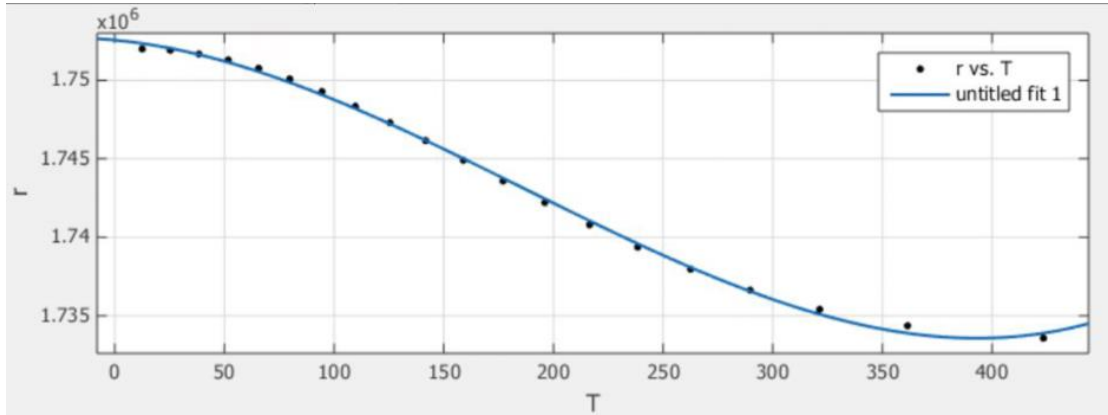


图 7 探测器与月心距离

图 7 为探测器与月心距离随时间变化。可以看出，在起初径向方向速度较小时，距离减小速度较缓，随着速度的增加，径向距离减小较快，在最后段，径向速度再次减小，径向距离变化趋于平缓，在最后 425s 时，降低至与月心距离大约为 1737km 的地方，离地面高度约为 350m。拟合曲线为：

$$r(t) = 0.0005394t^3 - 0.3013t^2 - 13.25t + 1753000$$

5.5 结合图像处理的变推力垂直软着陆控制模型

这一部分，我们主要分两步进行软着陆飞行控制方案的设计，首先对图像进行处理，选出在粗避障与精避障两个图形中最优的平缓目标区域，由于探测器在粗避障与精避障以及最后下落阶段，发动机均竖直向下，故我们针对竖直向下的一维方向建立变推力垂直软着陆控制模型，研究在竖直方向上，探测器下降过程中最优能耗的飞行控制策略。

5.5.1 最优降落区域的选择模型

为了针对粗避障与精避障所拍摄图像中平缓区域进行最优选择，我们首先对图形数据进行了处理，将图形分为更为细小的像素块，对每块像素块中的高度进行方差分析，得到每块像素块的方差值，作为这一像素块区域中平缓程度。之后结合每块像素块平缓区域平缓程度值，结合到飞船水平距离大小，进行两个目标的优化排序，最终选出最优降落区域。

(一) 图形数据处理

对拍摄图片进行更小的像素块分割，将其按一定比例进行划分，对每一块更小的图片进行区域高度数据分析。

设 H_{ij} 为像素块中第 i 行第 j 列处高度值，则有：

$$\begin{cases} \bar{H} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij} \\ S^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (H_{ij} - \bar{H})^2 \end{cases} \quad (14)$$

其中 \bar{H} 为某一像素块中平均高度， S^2 为该像素块中高度的方差值。

(二) 基于最优目标规划的平缓区域选择模型

假设探测器在拍摄图片时，位置为所拍摄图像中心，则以每个像素块中心到所拍摄图片中心距离作为探测器距离该区域的水平距离，设为 L 。

对两个指标进行归一化处理：

$$\begin{cases} M_{ij} = \frac{\max S_{ij}^2 - S_{ij}^2}{\max S_{ij}^2 - \min S_{ij}^2} \\ N_{ij} = \frac{\max L_{ij} - L_{ij}}{\max L_{ij} - \min L_{ij}} \end{cases} \quad (15)$$

设某像素块距离探测器水平距离为 L ，建立目标函数 G ，有：

$$G_{ij} = k_1 M_{ij}^2 + k_2 N_{ij} \quad (16)$$

其中， k_1 、 k_2 为对水平距离 L 与像素块高度方差值的重要性分布值， $k_1, k_2 \subseteq [0, 1]$ 。

● 模型汇总

$$G_{ij} = k_1 M_{ij}^2 + k_2 N_{ij}$$

$$\begin{cases} M_{ij} = \frac{\max S_{ij}^2 - S_{ij}^2}{\max S_{ij}^2 - \min S_{ij}^2} \\ N_{ij} = \frac{\max L_{ij} - L_{ij}}{\max L_{ij} - \min L_{ij}} \end{cases}$$

5.5.2 变推力软着陆控制模型

(1) 动力学方程

设 σ 为发动机的秒耗量， α 为发动机的比冲， g 为月球引力加速度， μ 为发动机推力控制量。由于发动机推力范围为 $[1500\text{N}, 7500\text{N}]$ ，发动机比冲为 2940m/s ，故 μ 取值范围为 $[0.51, 2.55]$ ，当 $\mu=0.51$ 时，推力为最小值 1500N ，当 $\mu=2.55$ 时，发动机推力最大为 7500N 。

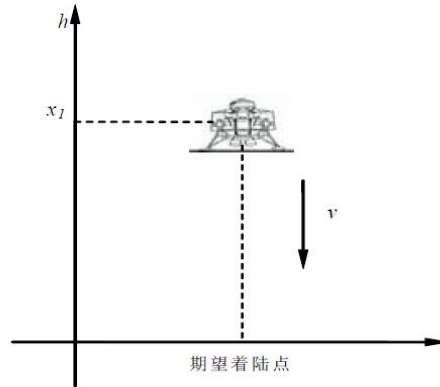


图 8 向下一维软着陆过程示意图

建立物理意义符号动力学方程：

$$\begin{cases} \dot{h} = v \\ \dot{v} = g - \frac{\sigma \alpha}{m} \mu \\ \dot{m} = -\sigma \mu \end{cases} \quad (17)$$

通过简单地变换可以得到：

$$\begin{cases} \dot{\mu} = -\frac{\dot{m}}{\sigma} \\ \ddot{h} = g + \alpha \frac{\dot{m}}{m} \end{cases} \quad (18)$$

式中，符号上方带有几个点，表示对该变量求几次导。对其计算可得：

$$\dot{m} = -\frac{1}{\alpha}(g - \ddot{h})m \quad (19)$$

故想要得到 m 的关系，需要求解 h 。

(2) 基于标称轨迹的燃耗与高度变化关系确定^[4]

在粗避障与精避障过程中，探测器以一定竖直方向初速度下降，并最终在末端均变为静止。为了保证探测器平缓的降落，减少降落危险，故要使探测器在末端的速度、加速度尽可能的小，同时整个过程燃耗尽可能的少。在研究整个下降过程时，我们需要对探测器飞行质量 m 于高度 h 进行关于时间 t 的函数关系求解，最终得到优化解。

采用多项式齿条函数来表示着陆器的标称轨迹：

$$\psi(t, t_0, T) = \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^5 \left[r_1 - r_2 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right) + r_3 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^2 - r_4 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^3 + r_5 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^4 - r_6 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^5 \right] \quad (20)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \psi(t_0, t_0, T) = 0 \\ \psi(T, t_0, T) = 1 \\ \left. \frac{d}{dt} \psi(t, t_0, T) \right|_{t=t_0} = 0.02 \\ \left. \frac{d}{dt} \psi(t, t_0, T) \right|_{t=T} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left. \frac{d^2}{dt^2} \psi(t, t_0, T) \right|_{t=t_0} = 0 \\ \left. \frac{d^2}{dt^2} \psi(t, t_0, T) \right|_{t=T} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

式中函数 ψ 的值为 0 代表初始位置为 0，值为 1 代表抵达终点。一阶求导值为 0 时代表速度为 0m/s，在对粗避障阶段分析时，初始一阶函数值为 0.02 代表初速度为 57m/s，在对精避障阶段进行分析时，将 0.02 改为 0 即可。二阶求导中 0 值代表初始与末端加速度均为 0。

当探测器进行竖直方向的降落时，利用 (20) 中函数 ψ ，可得标称速度与质量间关系为：

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = \dot{\psi}(t, t_0, T)(h_T - h_0) \\ \dot{m}(t) = -\frac{1}{\alpha}(g - \ddot{h}(t))m(t) \end{cases} \quad (22)$$

依据 $\dot{\mu} = -\frac{\dot{m}}{\sigma}$ ，可以得到标称控制量为：

$$u(t) = -\frac{1}{\sigma\alpha}(g - \ddot{h}(t))m(t) \quad (23)$$

最后我们可以得到关于时间 t , $u(t)$ 与 $h(t)$ 的变化关系, 结合总时间 T 我们可以得到在粗避障与精避障在竖直方向上具体飞行控制最优策略。

(3) 最优下降时间 T 的确定

采用多项式齿条函数 $\psi(t, t_0, T)$ 来表示着陆器的标称轨迹, 则着陆器的标称轨迹方程式为:

$$h(t) = h_0 + \psi(t, t_0, T)(h_T - h_0) \quad (24)$$

其中 h_0 为着陆器初始高度, h_T 为期望的着陆器末端高度, 则在着陆器下降过程中, 着陆器的速度满足公式:

$$\dot{h}(t) = \dot{\psi}(t, t_0, T)(h_T - h_0) \quad (25)$$

其中 $\dot{h}(t)$ 为着陆器与水平地面之间的距离随时间变化的导函数, 即着陆器竖直降落方向上的速度, $\dot{\psi}(t, t_0, T)$ 为多项式齿条函数 $\psi(t, t_0, T)$ 随时间变化的导函数, 为了保证着陆器在避障降落阶段的安全, 在精避障降落阶段, 我们要求中着陆器在竖直降落时其竖直方向上的最大速度不超过 3m/s, 在粗避障降落阶段, 由于初速度为 57m/s, 为了是下降过程中有足够时间进行水平方向移动进行避障, 故我们合理要求着陆器在竖直降落时其竖直方向上的最大速度不超过 60m/s 即 $\dot{h}(t)$ 满足以下公式:

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = \dot{\psi}(t, t_0, T)(h_T - h_0) \leq V \\ V = \begin{cases} 60, & \text{当 } h_T = 3000 \text{ } h_0 = 100 \text{ 吋} \\ 3, & \text{当 } h_T = 100 \text{ } h_0 = 4 \text{ 吋} \end{cases} \end{cases} \quad (26)$$

在着陆器下降过程中同时要使得着陆器以尽可能短的时间完成下降过程, 即下降时间满足以下的非线性规划模型

目标函数:

$$\min T$$

$$s.t. \begin{cases} \dot{h}(t) = \dot{\psi}(t, t_0, T)(h_T - h_0) \leq V \\ V = \begin{cases} 60, & \text{当 } h_T = 3000 \text{ } h_0 = 100 \text{ 吋} \\ 3, & \text{当 } h_T = 100 \text{ } h_0 = 4 \text{ 吋} \end{cases} \\ T \geq 0 \end{cases} \quad (27)$$

通过求解该非线性规划模型得到最优解的 T 即为最优的避障降落时间, 得到最优降落时间 T 后, 将 T 代入多项式齿条函数 $\psi(t, t_0, T)$ 及着陆器标称轨迹公式 (25)

与标称控制量公式（23）中即可得到最优控制下降策略。

● 模型汇总

$$\begin{aligned} & \min T \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \dot{h}(t) = \dot{\psi}(t, t_0, T)(h_T - h_0) \leq V \\ V = \begin{cases} 60, & \text{当 } h_T = 3000 \text{ } h_0 = 100 \text{ 时} \\ 3, & \text{当 } h_T = 100 \text{ } h_0 = 4 \text{ 时} \end{cases} \\ T \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

利用 $\psi(t)$ ，以及每个阶段的速度限制条件，我们对降落时间进行优化，使降落时间尽可能的段，利用上述目标函数可以求得最小时间 T ，总时间确定后便可得到具体飞行控制轨迹与飞行控制时间。

$$\begin{aligned} \psi(t, t_0, T) &= \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^5 \left[r_1 - r_2 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right) + r_3 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^2 - r_4 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^3 + r_5 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^4 - r_6 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^5 \right] \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \psi(t_0, t_0, T) = 0 \\ \psi(T, t_0, T) = 1 \\ \left. \frac{d}{dt} \psi(t, t_0, T) \right|_{t=t_0} = 0.77 \text{ 或 } 0 \\ \left. \frac{d}{dt} \psi(t, t_0, T) \right|_{t=T} = 0 \\ \left. \frac{d^2}{dt^2} \psi(t, t_0, T) \right|_{t=t_0} = 0 \\ \left. \frac{d^2}{dt^2} \psi(t, t_0, T) \right|_{t=T} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5.6 粗避障与精避障时飞行控制策略结果

5.6.1 平缓区域的优化选择与水平飞控策略

(一) 算法

步骤一：图形分割

对 2400m 拍摄 2300*2300 图片按照 100m*100m，由于分割尺寸较大，为了避免平缓区域恰被分进不同像素块，而造成平缓区域计算漏洞，因此我们进行重叠 50m 的分割，即分割出的相邻像素块会有 50m 宽度的重叠区域，将图片分为得到 1013 块像素块。

对 100m 拍摄得到的 100*100 图片按照探测器大约尺寸进行 2m*2m 分割，且分割像素块不互相重叠。

步骤二：针对每块像素块求得方差

针对每块像素块，利用每个像素的高程数据，进行这一块中所有高程数据的方差计算。

认为，在每一个像素块中，方差越小，代表高程数据比较集中于某一值，高程数据在这一块中相对稳定，故意味着高度变化平缓。相反，若一块像素块中方

差越大，则代表这块中地势越陡峭。

步骤三：参数标准化

假设探测器在拍照时，位置处于图片中间，计算没块像素块距离原图片中心位置的距离。

对所有像素块的方差值与距离进行标准化处理，这里，像素块的方差值与距离均为负影响因素，即两个指标越小，代表目标因素越好。

步骤四：赋予权重计算得分排名

我们建立标准化后的以像素块与中心距离大小和像素块方差值两个指标为优化目标的优化函数。

由于降落区域对平缓度要求较高，故我们将(16)中的权重分别设为 $k_1=0.7$ ， $k_2=0.3$ 。

对每个像素区域进行排序，选出排名最靠前的区域作为降落区域。

(二)区域选择结果

● **2400m 平缓区域选择**

对图像进行分割，进行每块中高度数据的方差计算，利用方差大小代表此小像素块中平缓程度，方差越小代表此处越平缓而方差越大代表此处地势越不平缓，如表 1：

表 1 2400m 拍摄图片像素块方差

| 像素块坐标 | 1 | 2 | 3 | ... | 21 | 22 | 23 |
|-------|-------|-------|-------|-----|------|------|------|
| 1 | 5.88 | 7.85 | 7.81 | ... | 2.25 | 1.90 | 2.67 |
| 2 | 8.45 | 17.99 | 19.34 | ... | 2.68 | 2.77 | 2.37 |
| 3 | 14.56 | 16.05 | 11.02 | ... | 2.13 | 2.31 | 3.15 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 21 | 3.44 | 3.47 | 2.67 | ... | 3.02 | 2.89 | 2.00 |
| 22 | 3.00 | 2.17 | 3.45 | ... | 2.48 | 2.75 | 2.21 |
| 23 | 1.93 | 2.91 | 3.00 | ... | 1.94 | 3.22 | 3.00 |

对 2400m 出拍摄照片进行像素块分割，并计算每个像素块方差大小，越大代表像素块中地势越陡峭，方差越小代表此处像素块地势越平缓。

计算每块像素距离图像中心距离，利用(15)与(16)进行归一化得分排序，得到平缓区域排名为：

表 2 粗避障平缓区域选择优先度

| 像素块 | 得分 |
|----------|------|
| (13, 12) | 1.91 |
| (12, 11) | 1.90 |
| (13, 11) | 1.89 |
| ... | ... |
| (1, 11) | 0.32 |

故我们选用所分割中的第 13 行 12 列的像素块，作为粗避障的目标区域。已知(13,12)距离探测器距离为 100m，在探测器南方，故使探测器朝南水平距离飞行 100m。

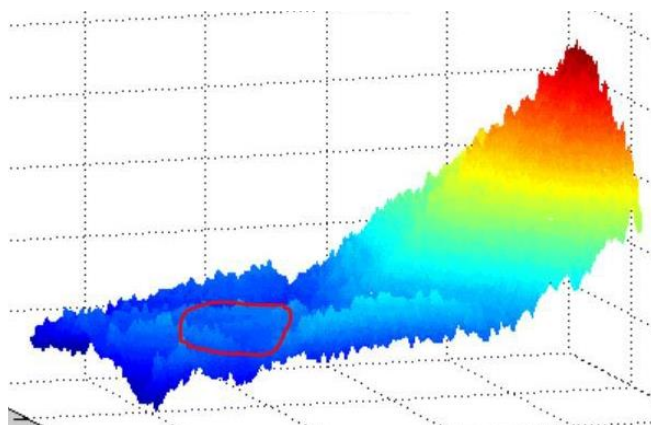


图 9 粗避障目标区域示意图

图 9 为 2400m 拍摄图片包含目标区域的一小块放大示意图，可以看出，红色所标区域相对周围较为平缓。

● 100m 平缓区域选择

表 3 100m 拍照像素块方差值

| 像素块坐标 | 1 | 2 | 3 | ... | 47 | 48 | 49 | 50 |
|-------|------|------|------|-----|------|------|------|------|
| 1 | 0.90 | 0.92 | 0.96 | ... | 1.93 | 1.84 | 2.09 | 1.98 |
| 2 | 1.08 | 0.89 | 0.96 | ... | 1.95 | 2.29 | 2.50 | 2.21 |
| 3 | 1.00 | 0.95 | 0.99 | ... | 2.12 | 2.08 | 2.03 | 1.89 |
| 4 | 0.86 | 0.97 | 0.98 | ... | 1.96 | 1.76 | 1.51 | 1.48 |
| 5 | 1.32 | 1.14 | 1.21 | ... | 1.72 | 1.58 | 1.40 | 1.20 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 47 | 0.92 | 0.95 | 0.90 | ... | 1.03 | 1.02 | 0.98 | 1.07 |
| 48 | 0.93 | 0.77 | 0.89 | ... | 1.10 | 1.22 | 1.05 | 1.06 |
| 49 | 1.08 | 0.90 | 0.82 | ... | 0.91 | 1.10 | 1.13 | 0.98 |
| 50 | 0.80 | 0.70 | 0.99 | ... | 1.00 | 1.25 | 1.25 | 1.09 |

利用与 2400m 相同的方法，将 100m 按照探测器尺寸面积 2 倍大的区域进行 2m*2m 大小划分，对 100m 拍摄图片进行距离与方差两个指标的分析，归一化得分排序后，得到 100m 拍摄照片平缓区域选择的优先度为：

表 4 100m 精避障优先选择区域

| 像素块 | 得分 |
|----------|------|
| (27, 26) | 1.63 |
| (28, 26) | 1.61 |
| (27, 28) | 1.60 |
| ... | ... |
| (2, 49) | 0.08 |

故我们选用 (27,26) 处作为精避障后最终落地点。该点距离探测器中心为 4.47m。

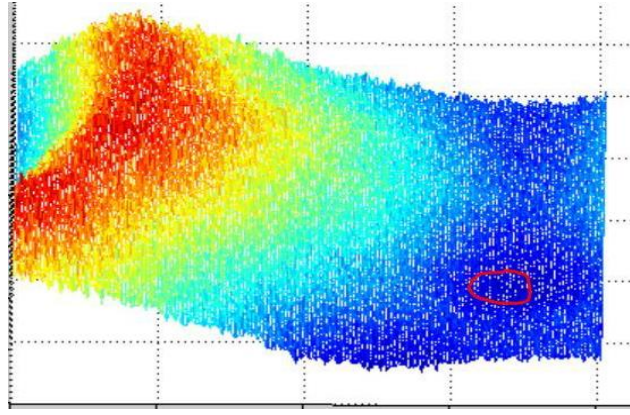


图 10 100m 精避障降落区域示意图

图 10 为 100m 拍摄图片包含目标区域的一小块放大示意图，可以看出，红色所标区域相对周围较为平缓。

5.6.2 变推力垂直软着陆飞行控制策略

(1) 粗避障阶段探测器飞行控制策略

粗避障探测器下落阶段，探测器从距离预定着陆点月面 3000m 的高空开始以 57m/s 的竖直速度进行下落，最终在距离预定着陆点月面 100 米的上空实现悬停，探测器竖直方向上速度、加速度减为 0，探测器受力平衡。

通过对变推力软着陆控制模型的求解，可以得到最优的避障降落时间 T 为 125 秒，选取 $t_0 = 0$ 则多项式齿条函数 $\psi(t, t_0, T)$ 为

$$\psi(t) = \left(\frac{t}{80}\right)^5 \left[r_1 - r_2 \left(\frac{t}{80}\right) + r_3 \left(\frac{t}{80}\right)^2 - r_4 \left(\frac{t}{80}\right)^3 + r_5 \left(\frac{t}{80}\right)^4 - r_6 \left(\frac{t}{80}\right)^5 \right]$$

其中 $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ 分别为 252, 1050, 1800, 1575, 700, 126，因此， $\psi(t)$ 关于 t 的函数为：

$$\psi(t) = \left(\frac{t}{80}\right)^5 \left[252 - 1050 \left(\frac{t}{80}\right) + 1800 \left(\frac{t}{80}\right)^2 - 1575 \left(\frac{t}{80}\right)^3 + 700 \left(\frac{t}{80}\right)^4 - 126 \left(\frac{t}{80}\right)^5 \right]$$

将得到的多项式齿条函数 $\psi(t)$ 代入着陆器标称轨迹公式 (23) 中可以得到探测器的标称轨迹 $h(t)$ 的具体函数表达式：

$$h(t) = 3000 - 2900\psi(t)$$

探测器在粗避障下落过程中相对于水平月面的高度，将标称轨迹函数 $h(t)$ 对时间 t 求导即为探测器在粗避障下落过程中的速度函数 $v(t) = h'(t)$ 。

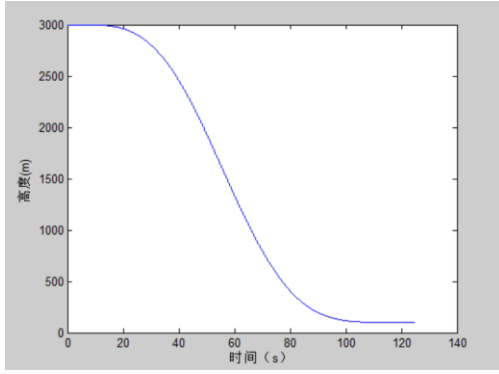


图 11 探测器高度变化曲线图

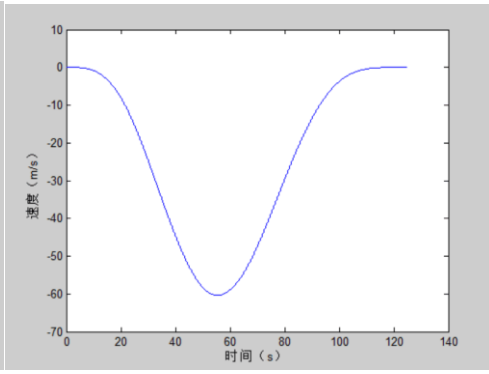


图 12 探测器速度变化曲线图

图 12 中，速度为负值代表探测器向下降落。有图中可以看出，探测器高度下降起初较为缓慢，在中间时由于速度的加快，降落高度曲线变陡，再组后，速度进一步降低，降落再次变得平缓，达到距月面 100 米处时，速度恰好平缓降低至 0m/s，在次高度进行悬停拍照。

得到探测器在粗避障下落过程中的速度函数 $v(t) = h'(t)$ 后对速度函数进一步进行求导后可得到探测器在粗避障软着陆过程中的加速度变化函数 $a(t)$ ，之后再通过求解质量所满足的常微分方程，可以进一步得到探测器在下落的过程中所受到的发动机推力随时间变化的函数。

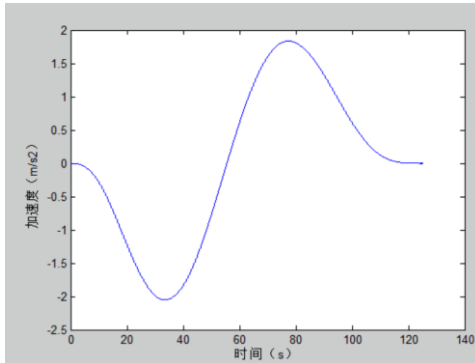


图 13 探测器加速度变化曲线图

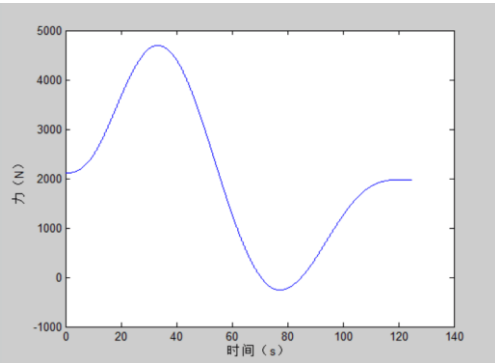


图 14 探测器发动机推力变化曲线图

从图 14 中可以看出主发动机的推力先逐渐减小使得探测器能够逐渐加速，然后发动机推力再逐渐增加使得达到最大速度的探测器再不断进行减速，保证探测器在终点处的速度为 0，同时使得探测器在终点处能够受力平衡保持悬停；

在整个粗避障变推力垂直软着陆飞行过程中，探测器的质量共减少了 87Kg 即探测器在整个下落过程中共消耗燃料 87Kg，共耗时 125s。

(2) 精避障阶段探测器飞行控制策略

精避障探测器下落阶段，探测器从距离预定着陆点月面 100m 的上空以悬停状态开始下落，最终在距离预定着陆点月面 4 米的上空实现悬停，探测器竖直方向上速度、加速度减为 0，探测器受力平衡进行保持。

通过对变推力软着陆控制模型的求解，可以得到最优的避障降落时间 T 为 80 秒，选取 $t_0 = 0$ 则多项式齿条函数 $\psi(t, t_0, T)$ 为

$$\psi(t) = \left(\frac{t}{80}\right)^5 \left[r_1 - r_2 \left(\frac{t}{80}\right) + r_3 \left(\frac{t}{80}\right)^2 - r_4 \left(\frac{t}{80}\right)^3 + r_5 \left(\frac{t}{80}\right)^4 - r_6 \left(\frac{t}{80}\right)^5 \right]$$

其中 $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ 分别为 252, 1050, 1800, 1575, 700, 126, 故有:

$$\psi(t) = \left(\frac{t}{80}\right)^5 \left[252 - 1050\left(\frac{t}{80}\right) + 1800\left(\frac{t}{80}\right)^2 - 1575\left(\frac{t}{80}\right)^3 + 700\left(\frac{t}{80}\right)^4 - 126\left(\frac{t}{80}\right)^5 \right]$$

将得到的多项式齿条函数 $\psi(t)$ 代入着陆器标称轨迹公式 (23) 中可以得到探测器的标称轨迹 $h(t)$ 的具体函数表达式:

$$h(t) = 100 - 96\psi(t)$$

探测器在粗避障下落过程中相对于水平月面的高度, 将标称轨迹函数 $h(t)$ 对时间 t 求导即为探测器在粗避障下落过程中的速度函数 $v(t) = h'(t)$

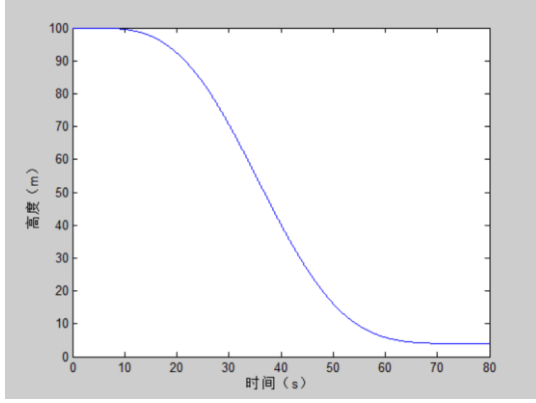


图 15 探测器高度变化曲线图

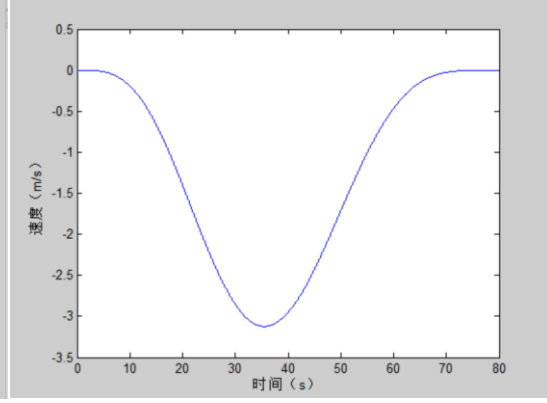


图 16 探测器速度变化曲线图

从图中我们可以发现, 精避障降落高度与速度变化趋势与粗避障时基本一致, 均为先缓速下降, 在中段时提高速度, 最终在末尾降低速度, 实现平缓降落。

得到探测器在粗避障下落过程中的速度函数 $v(t) = h'(t)$ 后对速度函数进一步进行求导后可得到探测器在粗避障软着陆过程中的加速度变化函数 $a(t)$, 之后再通过求解质量所满足的常微分方程, 可以进一步得到探测器在下落的过程中所受到的发动机推力随时间变化的函数。

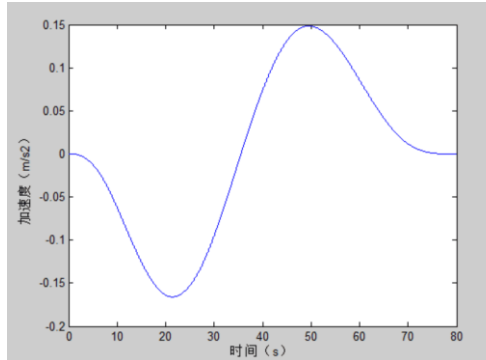


图 17 加速度变化曲线图

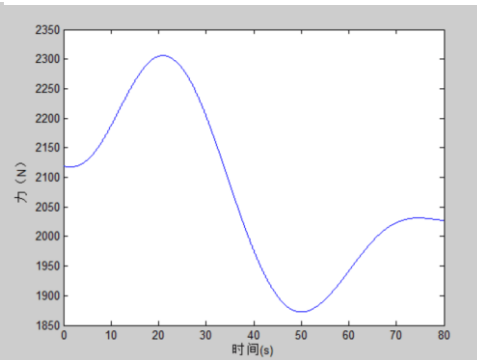


图 18 发动机推力变化曲线图

从图 18 中可以看出主发动机的推力先逐渐减小使得探测器能够逐渐加速，然后发动机推力再逐渐增加使得达到最大速度的探测器再不断进行减速，保证探测器在终点处的速度为 0，同时使得探测器在终点处能够受力平衡保持悬停；

在整个粗避障变推力垂直软着陆飞行过程中，探测器的质量共减少了 56kg 即探测器在整个下落过程中共消耗燃料 56kg，共耗时 80s。

5.7 全过程飞行控制策略汇总

(1) 主减速段

主减速段已 7500N 推力进行制动，共耗时 425s，耗用燃料为 1084.1kg，从离月面 15km 的近月点降低至海拔 360m 距月球表面 3000m 的目标预定点。最终状态探测器发动机方向偏转径向垂直方向 55° 。

(2) 姿态调整阶段与粗避障阶段

通过姿态调整发动机，将偏离径向方向 55° 发动机朝向调制与径向方向一致，即垂直向下方向。在此过程中，水平速度一直为 0m/s，只有竖直方向速度，故此时高度从 3000m 降至 2400m，水平位移为 0m。

粗避障阶段采用垂直变推力进行下降，同时利用姿态调整发动机进行水平位移避开陡峭地区，到达平缓目标区域。垂直下降 2300m 至离月球表面 100m 处，水平移动 100m。

粗避障连同姿态调整阶段共耗时 125s，能耗 87kg。

(3) 精避障阶段与缓速下降阶段

利用发动机推力在离月球 100m 处进行悬停拍摄，共悬停 30s，燃料消耗 20.44kg。

在降落过程中耗时 80s，消耗燃料 56kg，水平位移 4.4m，竖直方向下降 96m，到达距离月面 4m 高度地方，并悬停。其中 30m 至 4m 过程由于速度较慢，我们视其为缓速下降阶段。

(4) 自由落体阶段

在月球表面 4 米处关闭发动机，探测器在月球表面自由落体，耗时 2.23s。最终经过 662.23s，探测器降落月球表面，降落月球表面后探测器总质量为：1152.46kg。

5.8 误差分析

5.8.1 误差产生的原因

嫦娥三号探测器在实际软着陆的控制过程中，除了受到之前建立模型过程中所用到的月球的万有引力与主发动机的推力外，不可避免的还要受到地球以及太阳对于探测器的万有引力，以及其他行星对于探测器的万有引力作用；地球对探测器的引力加速度约为 $0.0027 \text{ (kg/s}^2\text{)}$ ，太阳对探测器的引力加速度约为 $0.0059 \text{ (kg/s}^2\text{)}$ ，月球对探测器的引力加速度约为 $1.6008 \text{ (kg/s}^2\text{)}$

在嫦娥三号探测器从着陆准备轨道开始下降最终到达地面时，月球同时在进行着自传运动，这也将会对探测器的着陆造成影响；同时探测器在自身控制发动机的推力以及在测量相应轨道的参数时也会存在系统误差，导致探测器的着陆位置存在偏差；这里仅对模型求解出的结果与实际结果进行对比分析。

5.8.2 分阶段分析误差

(1) 主减速阶段误差分析

(2) 快速调整阶段与粗避障阶段误差分析

快速调整阶段探测器从距离预定着陆点月面 3000 米高空到距离预定着陆点月面 2400 米高空，探测器快速调整姿态使得发动机推力方向向下，水平速度为

0m/s，从参考文献^[2]可以得知实际嫦娥三号探测器快速调整模式用时 31s，粗避障阶段用时 100s，共计消耗燃料为 113.18kg；在我们模型中快速调整阶段与粗避障阶段共计用时 125s，共计消耗燃料 87kg；误差时间为 6s，消耗燃料误差为 26.18kg

原因分析：在我们的模型中快速调整阶段与粗避障阶段作为一个阶段统一考虑，同时忽略在 2400m 处识别障碍进行水平位移的运动对燃料的消耗，因此模型过于理想简化，燃料误差较多。

(3) 精避障阶段与缓速下降阶段误差分析

精避障阶段探测器从距离预定着陆点月面 100 米高空到距离预定着陆点月面 30 米高空，发动机推力方向向下，水平速度为 0m/s，从参考文献^[2]可以得知实际嫦娥三号探测器精避障阶段用时 75s，缓速下降阶段用时 55.7s，共计消耗燃料为 97.25kg；在我们模型中快速调整阶段与粗避障阶段共计用时 80s，共计消耗燃料 56kg；误差时间为 50.7s，消耗燃料误差为 41.25kg

原因分析：在我们的模型中精避障阶段与缓速下降阶段作为一个阶段统一考虑，同时忽略在 100m 处识别障碍进行水平位移的运动对燃料的消耗，因此模型过于理想简化，燃料误差较大，同时认为缓速下降过程与精避障过程具有速度、加速度的连贯性，因此时间误差较大。

(4) 自由落体阶段误差分析

自由落体阶段探测器从距离预定着陆点月面 4 米高空自由下落，关闭所有发动机，从参考文献^[2]可以得知实际嫦娥三号探测器自由落体阶段用时 1.5696s；在我们模型中自由落体阶段用时 2.2s，基本不存在时间误差。

原因分析：自由落体过程不消耗燃料，没有发动机推力，整个过程十分简单明确易于分析，因此与实际情况没有出现误差。

5.9 敏感性分析

在变推力软着陆控制模型中，在确定最优下落时间 T 时，我们设定了下降过程中最大速度的限制，即最大速度不超过 C ，设置不同的 C 值则最优时间将会随着 C 值的改变而改变，着陆器的最优下降时间满足以下的非线性规划模型

目标函数： $\min T$

$$\text{约束条件: } st. \begin{cases} \dot{h}(t) = \psi(t, t_0, T)(h_T - h_0) \leq V \\ V = \begin{cases} 60, & \text{当 } h_T = 3000 \quad h_0 = 100 \text{ 时} \\ 3, & \text{当 } h_T = 100 \quad h_0 = 4 \text{ 时} \end{cases} \\ T \geq 0 \end{cases}$$

通过求解该非线性规划模型，可以得到最优下落时间 T 与下落过程中所能达到的最大速度的关系，最大速度即为 C 值，因此可以得到最优下落时间与 C 值的关系函数，其关系散点图如图 19 所示。

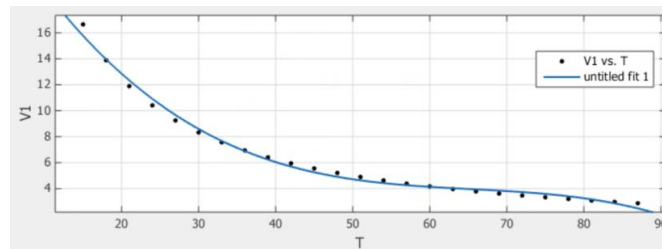


图 19 最大速度与最优下落时间关系曲线

通过对该散点图的拟合，可以得到拟合函数来近似表示两者之间函数关系，拟合函数关系为 $V_1(t) = -8.066 \times 10^{-5} \cdot t^3 + 0.0158 \cdot t^2 - 1.063 \cdot t + 28.43$ ，通过该拟合函数图像可以看出当 $V_1 \in [0, 40]$ 时最优下落时间变化比较平缓，即此时变推力软着陆控制模型中最优时间 T 对参数 C 不敏感； $V_1 \in [40, 90]$ 时最优下落时间变化比较剧烈，即此时变推力软着陆控制模型中最优时间 T 对参数 C 比较敏感。

六、模型评价与改进

6.1 模型的评价

6.1.1 模型的优点

(1) 本文所建立的基于动力学方程与轨迹拟合曲线的近月点确定模型、主减速段的轨迹优化模型、结合图像处理的变推力垂直软着陆控制模型充分考虑了探测器所满足的物理学运动方程，并通过求解运动方程得到最优结果，符合现实的真实情况，同时对不必要的因素进行了简化，简化了求解过程。

(2) 基于模型的敏感性分析，最终得到了模型对于某些参数具有较好的稳定性，具有较好的通用性与普适性，模型求解结果简单便于实际控制探测器的运动，可靠性较强。

6.1.1 模型的缺点

(1) 模型的精度不够高，求解的结果与最优结果仍有一定的偏差，模型的处理过于简化，与实际情况有一定的偏差，微分方程的求解具有一定的难度，求解时间有些偏长。

(2) 模型对于障碍区的处理只是分区求取了方差，并未考虑更多的统计指标，且在基于最优目标规划的平缓区域选择模型中具有一定的主观性，对于某些参数的选取较为敏感，稳定性欠佳。

6.2 模型的改进

(1) 针对障碍区的判定处理、躲避仍有一定的提升空间，可以做的更加细化，得到更好的控制降落策略。

(2) 主减速段的轨迹优化模型求解存在一定的困难，可以考虑对该模型再进行一定的简化处理，使得求解简化、省时。

七、参考文献

- [1]Ueno, S. and Yamaguchi, Y., Near-Minimum Guidance Law of a Lunar Landing Module, Porceedings of 14th IFA C Symposium on Automatic Control in Aerospace, Korea, 1998: 1054-1061
- [2]嫦娥三号着陆器动力下降的制导导航与控制, 中国科学: 技术科学, 2014 年 44 卷第 4 期
- [3] 丁弘, 月球软着陆导航与控制方法研究, 硕士学位论文; 哈尔滨工业大学 ; 2008 年
- [4] 王奕婷, 图像特征信息提取的算法研究, 硕士学位论文; 西安科技大学 ; 20114 年

八、附件清单

- 附件一: 距离月面 2400m 处高程矩阵
- 附件二: 距离月面 100m 处高程矩阵
- 附件三: 距离月面 2400m 子矩阵坡度矩阵
- 附件四: 距离月面 100m 子矩阵坡度矩阵
- 附件五: 主减速段轨迹迭代算法
- 附件六: 垂直减速段微分方程求解算法