

# 系泊系统设计方案和优化模型

## 摘要

本文针对系泊系统参数计算与系统设计问题,基于力矩平衡与平动受力平衡建立了静力学非线性方程。基于静力学非线性方程组进一步建立了搜索求解算法、最小二乘法曲线拟合模型与多指标评价模型,得出了系统参数变化规律,设计出最优系泊系统设计方案。

针对锚链种类数量、重物球质量均已知的系泊系统,将其分为钢管钢桶与锚链两部分进行分析。对于钢管与钢桶部分,首先分析了一般情况下的刚体力矩平衡特点,得到了5点具有普适性的结论,之后利用所得结论,结合问题实际情况,发现钢管上端受力与沿管方向夹角远远小于 $5^\circ$ 时,可以将钢管上端受力近似为沿杆方向,从而减少了静力学方程联立后的参数与方程数量。对于锚链部分,以锚链链环为单位折线进行离散处理,对离散后的每个折线段进行受力分析,得到锚链部分静力学迭代方程组。联立所得的两部分方程组建立最优求解搜索模型,得到 $12\text{m/s}$ 风速时,钢桶倾角为 $1.07^\circ$ ,四根钢管从上至下倾斜角度分别为 $1.042^\circ$ 、 $1.048^\circ$ 、 $1.059^\circ$ 与 $1.065^\circ$ ,起锚角约为 $0^\circ$ , $24\text{m/s}$ 风速时钢桶倾角为 $4.27^\circ$ ,各钢管倾斜角度分别为 $4.170^\circ$ 、 $4.199^\circ$ 、 $4.225^\circ$ 与 $4.251^\circ$ ,起锚角为 $1.2^\circ$ 。

当风速变为 $36\text{m/s}$ 时,发现原系泊系统钢桶倾角超过 $5^\circ$ 达到 $8.78^\circ$ ,起锚角达到 $16.10^\circ$ ,均不符合系泊系统设计要求。因此对系泊系统重物球进行了重新选择。结合上述系泊系统静力学方程,对重物球质量进行枚举,得到离散化的重物球质量与其相对应的参数解,利用最小二乘法对离散的重物球质量与参数解进行多项式拟合,得到4条参数拟合曲线与对应的4个参数拟合方程。为得到最优重物球质量,对吃水深度、钢桶倾斜角、起锚角与浮标游动区域半径4个参数建立多指标评价模型,结合已有的4个参数拟合方程,可以得到随重物球质量变化的得分曲线。通过该得分曲线可以得到极大值点,即最优重物球质量,为 $3125\text{kg}$ 。此时钢桶倾角为 $1.50^\circ$ ,吃水深度为 $1.34\text{m}$ ,起锚角为 $15.47^\circ$ ,游动区域为半径 $18.40\text{m}$ 的圆形区域。

当考虑海水流速时,结合已有的静力学方程组,我们将其推广至三维情况,建立基于向量分析下的三维矢量静力学方程。当实测水深、风速与海水流速情况各不相同,结合多指标评价模型进行系统最优化设计。考虑环境最恶劣情况时,即风速、海水流速最大且方向一致同时实测水深最大的情况,得到系泊系统最优设计为选用 $21.06\text{m}$ 锚链V即117个链环,重物球质量为 $4050\text{kg}$ 。此时浮标吃水深度为 $0.4761\text{m}$ ,游动区域半径为 $17.4\text{m}$ ,钢桶与竖直方向的倾斜角为 $4.59^\circ$ 。

最后我们对模型中悬链线的离散化处理进行了误差分析,在风速为 $36\text{m/s}$ 时,所得结果与依据标准悬链线方程所得结果差值平方和仅为 $1.8758\text{m}^2$ ,即离散化处理所得曲线与标准悬链线曲线基本一致。

**关键词:**力矩分析 静力学方程 非线性方程组 多指标评价模型 吃水深度 起锚角

## 一、问题重述

近浅海观测网的传输节点由浮标系统、系泊系统和水声通讯系统组成。其中浮标为一个底面直径与高均为 2m、质量为 1000kg 的圆柱体；系泊系统由钢管、锚链、重物球、钢桶与 600kg 锚组成；水声通讯系统放在外径 30cm、长 1m 和重 100kg 的钢桶中。钢桶两端链接钢管和锚链。钢管总共有 4 节，每节长 1m、直径为 50mm 且自重 10kg。锚链为无档普通链环，其常用种类由题中附件给出。

利用锚链与钢管进行连接钢桶时，要求锚链与海床角度不超过 16 度从而防止锚被拖行，而钢桶可通过悬挂重物球，使其相对竖直方向的倾斜角度不超过 5 度，否则设备的工作效果会变得极差。

现要求，对系泊系统进行设计时，要尽量使得浮标的吃水深度和游动区域以及钢桶的倾斜角度尽可能小。利用上述要求对以下三个情况进行相应的计算与系泊系统设计。

1. 选用 II 型电焊锚链 22.05m、1200kg 重物球，将上述系泊系统放置在水深 18m 的海域，已知海床平坦，海水密度为  $1.025 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ，要求计算当海水静止时，风速分别为 12m/s 与 24m/s 情况下的钢桶和各节钢管倾斜角度、锚链形状、浮标吃水深度和游动区域。

2. 基于问题 1 的假设，计算问题 1 中的各参数在风速为 36m/s 时下的数值。重新选定重物球质量，使得钢桶倾斜角度不超过 5 度，锚链在锚点与海床的夹角不超过 16 度。

3. 设计新的系泊系统，要求该系统在水深 16m~20m 区域之间，海水速度与风速在最大时分别可达 1.5m/s 与 36m/s 情况下满足题目要求，并分析不同情况下钢桶、钢管的倾斜角度以及锚链形状，同时确定浮标的吃水深度和游动区域。

## 二、问题分析

系泊系统是码头工程中的重要组成，在进行海上观测网的信息传输时，需要依靠系泊系统对海面上的传输装置进行固定。由于系泊系统中浮标在风、浪、海流的作用下，不可避免的产生沉浮、漂移等运动，故进行系泊系统的设计时，往往要分析较为复杂的受力情况。所以在设计时，如何简化受力分析并设计较为有效可靠的系泊系统成为了如今重点的课题。

### 2.1 系泊系统影响因素分析

为了确定系泊系统中的各个参数大小，如钢桶、钢管倾斜角度、吃水深度与游动区域等，需要分析对各参数造成影响的影响因素。这里，针对风速、水速、重物球重量、锚链种类与长度以及浮标吃水深度等因素对系统各个参数的影响做出了定性分析。

#### (1) 风速与水速

风速与水速是影响浮标游动区域最直接因素，由于浮标自身重量以及系泊系统的牵引作用，其有一部分会露出在海平面之上，一部分沉浸在海水中。露出的一部分主要受风力作用，沉浸在海水中的受近海水流作用。由于风向与海水流向均未确定，因此在研究两者作用时，还需考虑两者的夹角，当两者夹角不为 180 度时，两者的合力使浮标向着远离锚的方向漂移。当两者角度成 180 度时，两者互相成负力，浮标依旧会朝着力较大的一方远离锚，但是最终稳定后的距离会比单力作用小很多。

## (2) 浮标吃水深度

吃水深度除了作为系统自身的一个参数之外，它同样是影响系统其他参数的一个影响因素。

在(1)中提到，浮标漂移区域大小由风力与海水流力的具体合力大小和方向决定，而影响风力与海水流力两者之间相对大小的因素便为浮标的吃水深度。当浮标吃水深度越深时，海水流力会增大，所受风力会减小。

## (3) 重物球重量

重物球的功能是用来保证在浮标游动区域内钢桶的倾斜角度均可小于 5 度，由于钢桶受力可以考虑为刚体不定轴力矩问题，故悬挂重物时，倾角会发生变化。在其他条件均不发生变化的情况下，重物球越重，钢桶倾斜角越小。

由于重物球的重量会通过钢桶间接作用在锚链与钢管上且质量相对较大，因此，不同重量的重物球会对海下系泊系统的连接部分形状造成较大影响。同时，重物球的质量还会直接影响浮标吃水深度大小，约重的重物球，会使得浮标吃水深度越深。

除此之外，进行受力分析时，重物球的重力也成为了连接两段“绳索”部分的关键桥梁因素。

## (4) 锚链种类与数量

由题目中附件可知，不同的锚链种类长度与质量均不相同，因此选择不同的锚链种类与数量，锚链自身重量与长度均不同。不同的自身重量与长度会影响自身锚链形状，从而影响锚链部分水平方向长度。锚链部分的水平方向长度同时会影响浮标游动区域的大小。

## (5) 钢管与钢桶的力矩因素

考虑钢桶受锚链拉力、钢管拉力与小球重力三力作用，且作用力均作用在钢桶底面与顶面中心，故无法忽略其形状影响，需将其考虑成力矩作用下的不定轴刚体转动问题。同理，在对四个钢管进行分析时，作用在每个钢管两端的力同样会形成力矩。

由于规则物体各部分受到的重力与浮力均匀，故我们可以将重力与浮力等效与重心上，所以，在对钢管与钢桶进行分析时，就变成了以重心所受重力与浮力以及两边所受拉力共同作用下的力矩平衡问题，同时由于平衡时，钢管与钢桶相对静止，因此在力矩平衡基础上，还要考虑平动方向受力平衡的问题。

## 2.2 坐标系的比较与选择

在进行受力分析时，需要建立统一的坐标系，对系统中的物体按照统一标准进行受力分析。

极坐标系由极径与极角唯一确定坐标系中的点，通常用于分析绕轴转动或者以某一点为中心进行的运动。通常在专注距离与运动夹角时，且参考物体往往表面成园曲面时，较为方便。

直角坐标系是进行受力分析时最常用的坐标系，其由网格对区域进行划分，网格中的每一点由一组横坐标与纵坐标唯一确定。由于直角坐标系坐标轴固定，故适用于分析直线类或是规则刚体等等的受力分析。

在本题中，需要对多个刚体进行受力分析，同时需要考虑刚体力矩问题。在分析钢管或是钢桶力矩时，钢管两点的受力方向与角度适合选用角度不随空间位置变化而产生参考变化的坐标系，即直角坐标系。

且选择指标坐标系，恰可以用  $x$  轴方向表示海平面或海底，而  $y$  轴方向表示海水深度方向，因此有利于近海性质的表达与确定。

### 三、问题假设

1. 不考虑不同水深水流流速的差异，认为所有深度海水流速均为题中所给数值。
2. 不考虑风力对海面海水流速的影响
3. 不考虑锚链受水冲力的影响与海水浮力
4. 不考虑钢桶绕自身轴线的滚动旋转，只考虑钢桶因力矩产生的偏转
5. 不考虑锚链的三维变形，锚链位于一个垂直平面内
6. 锚链中链环均为同种型号，不考虑不同种类链环的混合使用

### 四、符号变量与说明

符号	变量含义	变量单位
$F_l$	浮标浮力	N
$F_w$	浮标受到的风力	N
$G_0$	浮标重力	N
$N$	钢管重力与浮力差值	N
$G_S$	重物球重力	N
$G_B$	钢桶重力	N
$F_B$	钢桶浮力	N
$G_C$	锚链总重量	N
$G_m$	单个链环重力	N
$\alpha_i$	第 $i$ 根钢管与竖直方向的倾斜角	度
$\alpha_0$	钢桶与竖直方向倾斜角度	度
$\varphi_i$	第 $i$ 个链环轴向方向与水平方向夹角	度
$\varphi_0$	锚链在锚端的起锚角度	度
$\beta$	锚链连接钢桶端与水平方向的夹角	度
$T_i$	第 $i$ 根钢管上端受到的拉力	N
$T_{i+1}$	第 $i$ 根钢管下端受到的拉力	N
$T_0$	锚链对钢桶的拉力	N
$F_i$	第 $i$ 个链环右上端受到的拉力	N
$F_{i-1}$	第 $i$ 个链环左下端受到的拉力	N
$F_0$	锚链对锚的拉力	N
$\rho$	海水密度	$\text{kg/m}^3$
$h$	浮标吃水深度	m
$D$	海水深度	m
$Y$	锚链竖直方向高度	m
$X$	锚链水平方向长度	m
$L$	锚链总长度	m
$l$	钢管长度	m
$l_0$	钢桶长度	m
$l_m$	单个链环长度	m

## 五、模型建立与求解

针对系泊系统已知情况下参数计算的问题,通过受力分析与刚体转动力矩分析,得到静力学方程,利用迭代关系,进行优化搜索求解可得到已知系泊系统情况下的参数情况。

当系泊系统未知时,建立多指标评价模型,对不同情况下系泊系统设计方案进行多指标评价,选出得分最高的解为最优解。

### 5.1 基于刚体静力学方程的系泊系统参数优化模型

针对锚链种类长度、重物球质量以及海水深度已知的系泊系统,为了计算得到不同风速下的钢桶和各节钢管倾斜角度、锚链形状、吃水深度和游动区域等深度,建立了基于刚体静力学方程的参数计算模型。

#### 5.1.1 刚体力矩的近似分析

在运动中或受力作用后,形状和大小不变且内部各点的相对位置不变的物体称为刚体。在系泊系统中,钢桶与钢管由于形状大小均不产生变化,因此可视为刚体。

由于钢桶与钢管所受拉力均不在质心而在物体两端,故拉力对钢管或是钢桶会产生力矩作用,使其旋转。海水中钢管与刚体受力旋转可以看作时刚体的不定轴旋转,当其稳定时,说明刚体力矩平衡。所以针对钢管与钢桶的受力分析需从力矩进行分析,并在最终稳定状态,力矩达到平衡。

##### (1) 普适情况下的直杆力矩平衡<sup>[1]</sup>分析

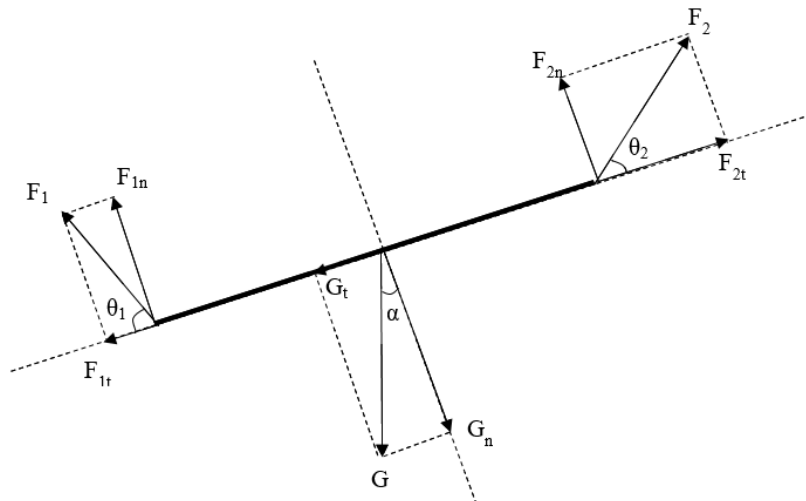


图 1 直杆力矩分析示意图

图 1 表示直杆的受力分析,其中  $F_1$  表示左边上一根直杆对它的拉力,  $F_2$  表示右边下一根直杆对它的拉力,  $G$  为直杆自身重量。由于拉力作用在杆两边,会产生力矩作用,故不能将其等效作用在质心。而由于直杆重心与质心重合,且直杆均匀,故重力等效作用在质心。

以质心作为力矩中心进行分析,建立直杆力矩方程有:

$$\begin{cases} M_1 = \frac{l}{2} \times F_1 \sin \theta_1 \\ M_2 = \frac{l}{2} \times F_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $l$  为杆长。

当直杆稳定时，既不转动也不发生平动，故在力矩上平衡<sup>[1]</sup>，在平动方面受力也达到平衡，于是结合转动与平动，得到相应直杆静力学平衡方程：

$$\begin{cases} \frac{l}{2} \times F_1 \sin \theta_1 = \frac{l}{2} \times F_2 \sin \theta_2 \\ F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin \theta_2 = G \cos \alpha \\ F_1 \cos \theta_1 + G \sin \alpha = F_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (2)$$

将式（2）进行简单变形，可以得到如下结论：

$$\begin{cases} F_{1n} = F_{2n} = \frac{1}{2} G_n \\ F_{1t} + G_t = F_{2t} \end{cases} \quad (3)$$

其中，用  $t$  表示沿杆方向，用  $n$  表示垂直于杆方向。

依据式（3）中的结论，可以得到相应的角度大小关系计算公式：

$$\begin{cases} \tan \theta_1 = \frac{F_{1n}}{F_{1t}} \\ \tan \theta_2 = \frac{F_{2n}}{F_{2t}} = \frac{F_{1n}}{F_{1t} + G_t} \end{cases} \quad (4)$$

由式（4）可以看出， $\theta_1 > \theta_2$ 。

**结论：**

a) 若想保持杆的平衡，不因力矩因素转动，则杆两端的受力方向与重力方向分布在杆的两侧。杆两端的受力均在杆上侧，重力在杆下侧，否则，杆无法保持力矩平衡。

b) 杆两端受到的拉力在垂直于杆方向上的分力大小相同，且为重力在垂直于杆方向分力大小的一半。

c) 当杆如图 1 中形状倾斜时，杆上端的拉力在沿杆方向的分力大于杆下端所受拉力沿杆方向的分力。且沿杆方向的分力差值决定于重力沿杆方向的分力。

d) 当杆如图 1 中形状倾斜时，杆上端受到的拉力与沿杆方向的夹角一定大于杆下端受到的拉力与沿杆方向的夹角。

## （2） 结合题目情况的力矩近似分析

系泊系统中钢管共有 4 段，若对每一段按照上述受力分析进行角度与受力大小确定，则会建立大量方程等式，给求解造成较大的麻烦。结合（1）中得到的 4 个结论，结合题中钢管与钢桶相对位置以及角度特性，对力矩分析进行了进一步优化考虑。

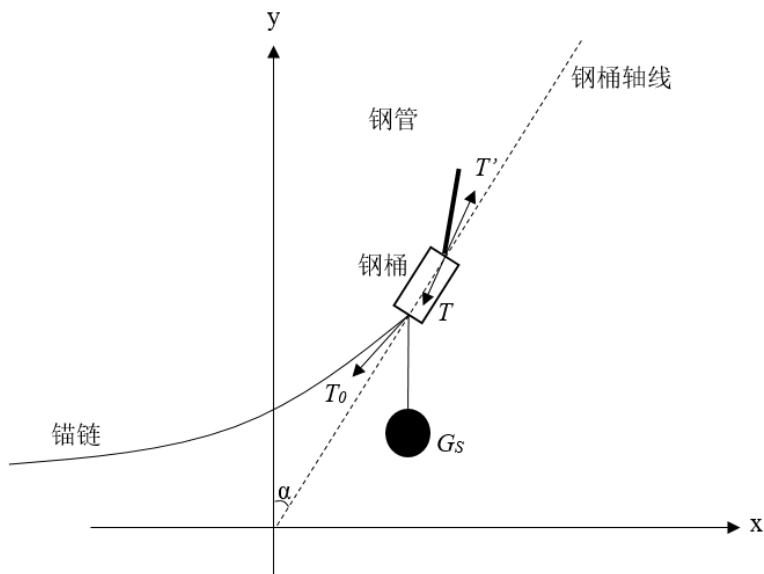


图 2 钢桶钢管相对位置示意图

图 2 中,  $T_0$  为锚链对钢桶的拉力,  $T'$  与  $T$  为一对相互作用力,  $T'$  为钢管对钢桶的拉力,  $T$  为钢桶对钢管的拉力, 两者等大反向。

由于对钢桶进行分析时, 不考虑钢桶绕自身轴线的转动, 且钢桶两端所受拉力均作用于顶面、底面圆心处, 故钢桶受力情况与力矩因素符合 (1) 中所分析的直杆受力情况。因此, 我们对钢桶进行分析时, 将他也处理为直杆模型, 进行力矩分析。

由于直杆平衡时, 两端的拉力与直杆重力分居直杆两侧, 故钢桶与钢管的相对位置如图 2 所示。

已知系泊系统中  $\alpha$  角度小于 5 度, 由钢管与钢桶的相对位置, 可以发现, 钢管偏离竖直方向的角度也小于 5 度。于是我们将单独一根钢管拿出来结合实际角度进行受力分析。

首先对图 2 中  $T$  与钢管夹角与  $\alpha$  关系进行分析, 设  $T$  与杆方向夹角为  $\theta$ ,  $T$  与竖直方向夹角为  $\gamma$ 。由图 2 中可以发现, 方向  $T$  与  $T'$  并不沿钢桶轴方向, 而逆时针偏转一定角度, 故有:

$$\gamma < \alpha < 5^\circ \quad (5)$$

又由于钢管并不沿竖直方向, 而相对顺时针便宜, 夹在  $T'$  与竖直方向之间, 故易得:

$$\theta < \gamma \quad (6)$$

因此可得角度结论为:

$$\theta < \alpha < 5^\circ \quad (7)$$

以连接钢桶的第一根钢管为例, 图 3 中  $F_1$  拉力为图 3 中  $T$  所示方向,  $F_1$  与钢管方向夹角  $\theta_1$  以及钢管倾角  $\alpha$  满足 (5) ~ (7) 式。

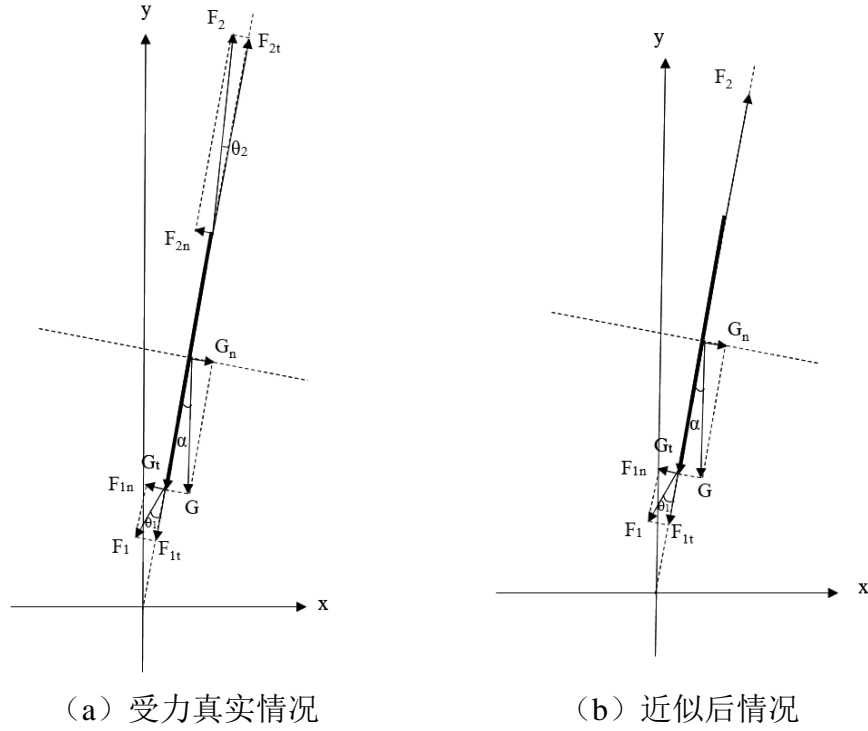


图 3 单根钢管的力矩近似分析

当角度小于 5 度时，其真实受力分析如图 3 中 (a)，我们发现其力大小关系有：

$$\begin{cases} F_{1n} = F_{2n} = \frac{1}{2} G_n \\ F_{1t} \gg F_{1n} \\ G_t \gg G_n \end{cases} \quad (8)$$

因此可以得到相应角度关系为：

$$\begin{cases} \tan \theta_1 = \frac{F_{1n}}{F_{1t}} \\ \tan \theta_2 = \frac{F_{2n}}{F_{2t}} = \frac{\frac{1}{2} G_n}{F_{1t} + G_t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_2 \ll \theta_1 \\ \tan \theta_2 \rightarrow 0 \end{cases} \quad (9)$$

依据式 (9)，可以看出  $\theta_2 \approx 0$ ，因此我们对其真实受力情况进行近似处理，将直杆上端受力方向等效为沿杆方向受力<sup>[2]</sup>，得到如图 3 中 (b) 所示的力矩受力模型。依据式 (2)，重新建立结合问题实际情况下的钢管静力学方程：

$$\begin{cases} F_1 \sin \theta_1 = \frac{1}{2} G \sin \alpha \\ F_1 \cos \theta_1 + G \cos \alpha = F_2 \end{cases} \quad (10)$$

由于  $\theta_1$  与  $\theta_2$  均为小于 5° 的角，于是将正弦直接替换为弧度后，可将上述公式变换为：



$$\begin{cases} F_1 \theta_1 = \frac{1}{2} G \alpha \\ F_1 \cos \theta_1 + G \cos \alpha = F_2 \end{cases} \quad (11)$$

由于该题中钢桶与钢管之间的力与方向角度的关系均满足上述分析的第一根钢管受力情况，故该力矩分析所得结果对该情况下的其他钢管均适用。对于此题，该近似结果具有普适性。

### 5.1.2 基于力矩近似处理的静力学方程组的建立

#### (1) 钢管与钢桶的静力学方程建立

从上至下将钢管进行 1-4 编号，其中钢管 1 为最上方钢管。设  $\alpha_i$  为第  $i$  根钢管与竖直方向的倾斜角， $\alpha_0$  为钢桶与竖直方向的倾斜角； $T_i$  表示第  $i$  根钢管上端所受拉力， $T_{i+1}$  为下端所受拉力； $F_l$  为浮标浮力， $F_w$  为浮标受到的风力， $G_0$  为浮标重力。

由于四根钢管完全相同，设每根钢管质心所受力为  $N$ ， $N$  为钢管重力与浮力的差值，即  $N = G_{\text{杆}} - F_{\text{杆浮}}$ 。

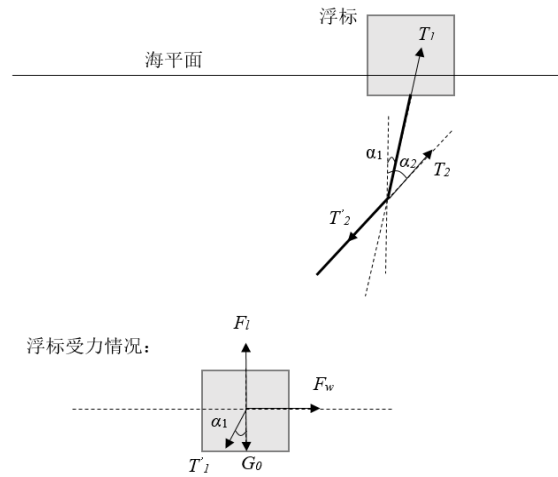


图 4 局部钢管浮标受力示意图

图 4 中给出了浮标与前两根钢管的受力分析示意图，其中  $T_1$  与  $T'_1$  互为相反力。 $T'_2$  与沿钢管 1 方向的夹角为  $\alpha_2 - \alpha_1$ 。由于  $T_i$  与  $T'_i$  为一对方向相反的相互作用力，故在之后的静力学方程中均以  $T_i$  表示，而不在加入标注。图 4 仅对前两根钢管连接情况做出了示意，其后两个钢管与钢桶的连接与其规律相同。

浮标受力分析：

$$\begin{cases} T_1 \sin \alpha_1 = F_w \\ T_1 \cos \alpha_1 + G_0 = F_l \end{cases} \quad (12)$$

当系泊系统稳定时，钢管与钢桶处于考虑力矩因素下的静力学平衡状态（参考 5.1.1），故我们利用牛顿第三定律，对钢管、钢桶之间的相互作用力进行联立，得到各钢管的力矩平衡静力学方程组（参考式 10）。

第一根钢管受力分析：

$$\begin{cases} T_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + N \cos \alpha_1 = T_1 \\ T_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1}{2} N \sin \alpha_1 \end{cases} \quad (13)$$

第二根钢管受力分析：

$$\begin{cases} T_3 \cos(\alpha_3 - \alpha_2) + N \cos \alpha_2 = T_2 \\ T_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = \frac{1}{2} N \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (14)$$

第三根钢管受力分析：

$$\begin{cases} T_4 \cos(\alpha_4 - \alpha_3) + N \cos \alpha_3 = T_3 \\ T_4 \sin(\alpha_4 - \alpha_3) = \frac{1}{2} N \sin \alpha_3 \end{cases} \quad (15)$$

第四根钢管受力分析：

$$\begin{cases} T_5 \cos(\alpha_0 - \alpha_4) + N \cos \alpha_4 = T_4 \\ T_5 \sin(\alpha_0 - \alpha_4) = \frac{1}{2} N \sin \alpha_4 \end{cases} \quad (16)$$

钢桶受力分析：

$$\begin{cases} T \sin(\beta - \alpha_0) + G_s \cos \alpha_0 + (G_B - F_B) \cos \alpha_0 = T_5 \\ T \cos(\beta - \alpha_0) = \frac{1}{2} [G_s \sin \alpha_0 + (G_B - F_B) \sin \alpha_0] \end{cases} \quad (17)$$

其中， $T_0$ 为锚链对桶的拉力， $\beta$ 为锚链拉力与水平方向夹角。

对（12）～（17）式进行联立，可以得到关于钢桶与钢管部分的力矩平衡静力学方程组。

当钢管与钢桶稳定时，沿杆轴向力矩平衡的同时，以杆质心做受力分析，直杆在水平与竖直方向上也因不发生平动而受力平衡，故将受力等效作用在质心沿  $x$ ,  $y$  坐标轴方向进行分解后，受力也应平衡。

因此在式（12）～（17）沿杆力矩平衡的基础上，建立以钢管质心为受力点的平动受力平衡的静力学方程：

$$\begin{cases} T_i \sin \alpha_i = T_{i+1} \sin \alpha_{i+1} \\ T_i \cos \alpha_i = T_{i+1} \cos \alpha_{i+1} + N \end{cases} \quad (18)$$

其中，该式表示第  $i$  根钢管沿  $x$ ,  $y$  方向建立的平衡受力静力学方程，其角度相对位置关系如图 4 所示。

钢管与钢桶静力学方程汇总：

(一)沿杆方向力矩平衡静力学方程组：

钢管：

$$\begin{cases} T_{i+1} \cos(\alpha_{i+1} - \alpha_i) + N \cos \alpha_i = T_i \\ T_{i+1} \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i) = \frac{1}{2} N \sin \alpha_i \end{cases}$$

钢桶：

$$\begin{cases} T \sin(\beta - \alpha_0) + G_s \cos \alpha_0 + (G_B - F_B) \cos \alpha_0 = T_s \\ T \cos(\beta - \alpha_0) = \frac{1}{2} [G_s \sin \alpha_0 + (G_B - F_B) \sin \alpha_0] \end{cases}$$

(二)沿坐标轴方向的平动平衡静力学方程组：

钢管：

$$\begin{cases} T_i \sin \alpha_i = T_{i+1} \sin \alpha_{i+1} \\ T_i \cos \alpha_i = T_{i+1} \cos \alpha_{i+1} + N \end{cases}$$

浮标：

$$\begin{cases} T_1 \sin \alpha_1 = F_w \\ T_1 \cos \alpha_1 + G_0 = F_l \end{cases}$$

## (2) 锚链的静力学方程

锚链由无档普通链环组成，结合附表中数据，可以得到每个无档链环的长度与单位质量。对锚链受力进行分析时，相当于将锚链按照链环使用个数进行离散化，对离散化后的每个链环进行单独受力分析并依据链环受力特性联立得到锚链静力学方程组<sup>[3]</sup>。

设最左端链环为链环 1，由左至右依次标序。设  $F_i$  表示链环  $i$  受到右端链环  $i+1$  的拉力， $F_{i-1}$  表示链环  $i$  受到左端链环  $i-1$  的拉力， $\varphi_i$  表示链环  $i$  轴线与水平方向夹角。由作用力与相互作用力，可以递推得所有环受力规律，示意图如图 5。

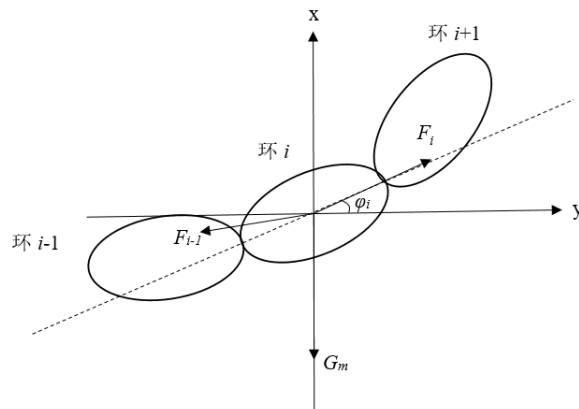


图 5 链环受力示意图

图 5 中，由于链环类型相同，故重力均相同。链环为圆环状，排水小，因此忽略链环所受浮力，仅考虑链环自身的重力  $G_m$ 。

链环具有无档特性，其受力可沿任意方向，考虑到链环在稳定时处于受力平衡状态，故对其进行受力分析可得如下静力学平衡方程组。

$$\begin{cases} F_i \cos \varphi_i = F_{i-1} \cos \varphi_{i-1} \\ F_i \sin \varphi_i = F_{i-1} \sin \varphi_{i-1} + G_m \end{cases} \quad (19)$$

对锚链整体进行受力分析，可以得到锚链受力平衡时的方程式：

$$\begin{cases} F_0 \cos \varphi_0 = T_0 \cos \beta \\ F_0 \sin \varphi_0 + G_C = T_0 \sin \beta \end{cases} \quad (20)$$

其中， $F_0$  为链环 1 受到锚的拉力， $\varphi_0$  为  $F_0$  与水平方向的夹角，即锚链在锚端的起锚角， $G_C$  为锚链总重。

对锚链空间几何性质进行分析，得到竖直高度  $Y$  与水平方向  $X$  的计算公式为：

$$\begin{cases} Y = l_m \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i \\ X = l_m \sum_{i=1}^n \cos \varphi_i \end{cases} \quad (21)$$

其中， $n$  为链环总个数， $l_m$  为单个链环长度。

角度之间满足的关系为：

$$\tan \varphi_{i+1} = F_0 \tan \varphi_0 + \frac{i \times G_m}{F_0 \cos \varphi_0} \quad (22)$$

### 5.1.3 基于优化搜索算法的非线性静力学方程组求解模型

结合钢管钢桶部分与锚链部分的静力学方程，依据力与角度之间的关联进行迭代，可以得到系泊系统整体的静力学方程组：

$$\begin{cases} F_l = (G_B - F_B) + G_S + T_0 \sin \varphi_0 + G_c + 3N + G_0 \\ l_0 \cos \alpha_0 + l(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_4) + h + Y = D \\ F_w = F_0 \cos \varphi_0 \end{cases} \quad (23)$$

其中， $D$  为海水深度， $l$  为钢管长度，为 1m。其中角度关系满足：

$$\begin{cases} \cot \alpha_0 = \frac{G_B - F_l + G_S + F_0 \sin \varphi_0}{F_0 \cos \varphi_0} \\ \cot \alpha_i = \cot \alpha_0 + \frac{(5-i)N}{F_0 \cos \varphi_0} \end{cases} \quad (24)$$

求解方程组，建立以系泊系统竖直高度与海水深度误差为优化目标的优化模型，进行搜索求解吃水深度  $h$ ，将得到误差最小值所对应的吃水深度作为方程解。故有方程求解优化模型：

$$\min f(h) = D - (l_0 \cos \alpha_0 + l(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_4) + h + Y)$$

$$st. \begin{cases} F_w = F_0 \cos \varphi_0 \\ F_l = (G_B - F_B) + G_s + T_0 \sin \varphi_0 + G_c + 3N + G_0 \\ \tan \varphi_{i+1} = F_0 \tan \varphi_0 + \frac{i \times G_m}{F_0 \cos \varphi_0}, i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \cot \alpha_0 = \frac{G_B - F_l + G_s + F_0 \sin \varphi_0}{F_0 \cos \varphi_0} \\ \cot \alpha_j = \cot \alpha_0 + \frac{(5-j)N}{F_0 \cos \varphi_0}, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

其中  $n$  为锚链选用的链环数量。

#### 5.1.4 系泊系统参数计算求解

现有系泊系统，锚链选用 II 型链环 210 个，总长共为 22.05m，重物球质量为 1200kg。该系泊系统位于水深 18m，海床平坦且海水密度为  $1.025 \times 10^3 \text{kg/m}^3$  的近海区域。

结合静力学方程组，设计方程求解优化算法，对该系泊系统在风速为 12m/s 和 24m/s 时各参数进行优化求解。

算法：

**Step1:** 给定目标函数范围内随机数值作为随机解，计算目标函数

**Step2:** 设定步长，对第一步中的随机解进行调整。在范围内，对最优解进行匹配搜索，得到满足目标函数的最优解。此时为满足平动受力平衡时的最优解

**Step3:** 利用力矩平衡静力学方程进行最优解检验。

**Step4:** 得到同时满足平动受力平衡与力矩平衡下的最优解，利用力矩平衡静力学方程进行误差分析。

求解结果：

表 1 系泊系统各参数

风速	12m/s	24m/s
吃水深度	0.74956m	0.74961m
钢管 1 倾斜角度	1.0426°	4.1709°
钢管 2 倾斜角度	1.0483°	4.1996°
钢管 3 倾斜角度	1.0598°	4.2225°
钢管 4 倾斜角度	1.0655°	4.2511°
钢桶倾斜角度	1.0712°	4.2797°
起锚角	0.0859°	1.1803°

从表 1 中可以看出，当风速为 12m/s 时，钢管倾角均为 1 度左右，角度变化不明显。装有传讯装置的钢桶与竖直方向夹角为 1.0712°，符合题中角度小于 5° 的要求。风速为 12m/s 时，锚链与海床夹角即起锚角几乎为 0°。

当风速增大为 24m/s 时，由风力计算公式可以发现，风力变大 4 倍，故此时钢管倾斜角度明显变大，达到 4°左右，起锚角有微小变化达到 1°左右。

由于已知锚链静力学方程中的单个链环轴向与水平方向夹角，故利用（21）式原理，对每个链环坐标点进行叠加求解，最终得到对 210 个链环坐标点的拟合曲线，如图 6。

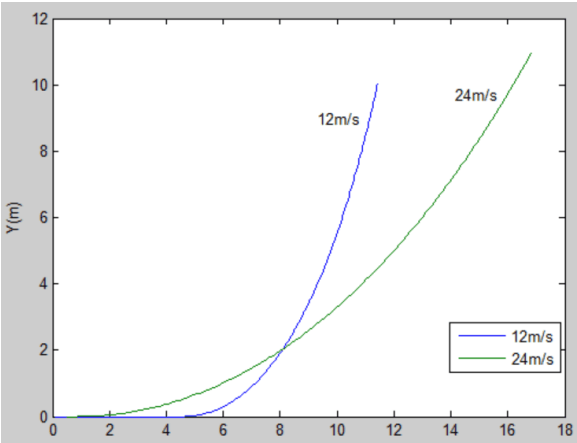


图 6 锚链形状拟合曲线

当风速为 12m/s 时，起锚角约为 0°，故有大约 4.7m 的锚链近似躺在海床上。锚链右端距海底深度为 12.1 米左右，水平方向距离为 13.05 米。

当风速为 24m/s 时，起锚角为 1°左右。锚链右端距离海底深度为 12.7m，水平方向为 17.85 米。

最终结合钢管倾斜角度与钢管自身长度，得到不同风速下浮标游动区域半径分别为 13.15 米与 18.22 米。

表 2 浮标游动区域

风速	12m/s	24m/s
浮标游动区域	半径为 13.15m 圆形区域	半径为 18.22m 圆形区域

## 5.2 确定重物球最优质量的多指标评价问题

通过分析，我们已经得到了两个风速较小下的系泊系统参数情况。现在进一步对较大风速情况进行分析，观察在原有系泊系统下各参数变化情况。之后，在大风状况下，我们对重物球质量进行改变，分析随着重物球质量改变时各参数的变化情况，依此建立关于吃水深度、钢管钢桶倾斜角度、锚链形状与游动区域的多指标评价模型，得到可选择的最优重物球质量。

### 5.2.1 强风情况参数分析

在 5.1 中系泊系统不变的前提下，进一步加大风速，计算风速为 36m/s 的强风情况下的各个参数，分析此时参数是否还符合系泊系统设计要求。

风力计算公式为：

$$F_w = 0.625 \times S v^2$$

其中  $v$  为风速，可知  $F_w \sim v^2$ 。由于浮标底面面积较大，故在竖直方向上，当浮力变化明显时，吃水深度变化极小（参考表 1），因此在计算风力时，受力面积变化影响较为微小，影响风力的主要因素为风速。

当风速从 12m/s 变化到 36m/s 时，风速大小近似增大了 9 倍，故在风速达到

36m/s 的强风时，原有系泊系统的参数变化会较为明显，这时候，钢桶倾斜角度有可能会超过 5 度。

利用 5.1 中模型，改变风速为 36m/s，进行求解，得到结果如表 3。

表 3 强风情况下参数数值

风速	36m/s
吃水深度	0.74972m
钢管 1 倾斜角度	8.5770°
钢管 2 倾斜角度	8.6285°
钢管 3 倾斜角度	8.6801°
钢管 4 倾斜角度	8.7317°
钢桶倾斜角度	8.7832°
起锚角	16.1001°

通过表 3 中的数据，钢桶的倾斜角度超过 5°而接近 9 度，远远超过了系泊系统设计要求。且起锚角刚好超出锚的最大工作限度，达到了 16.1°。

依据所得每个链环坐标与角度，将链环位置处理为点坐标，进行曲线拟合，得到链环曲线形状，如图 7。

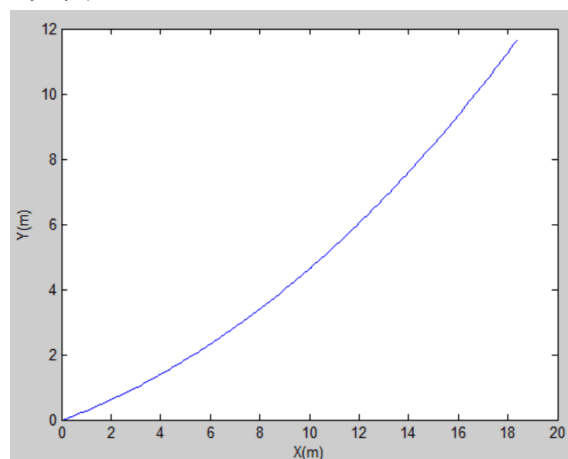


图 7 强风下锚链形状拟合曲线

此时锚链竖直方向高度为 11.67 米，水平长度为 18.39m。依据钢管与钢桶倾斜角度，可以得到最终浮标游动区域为以锚为中心，半径为 19.14 米的圆域。

结合 5.1 中得到的锚链曲线，对三种风速情况进行比较，得到锚链形状在不同风速下的曲线变化情况，如图 8。

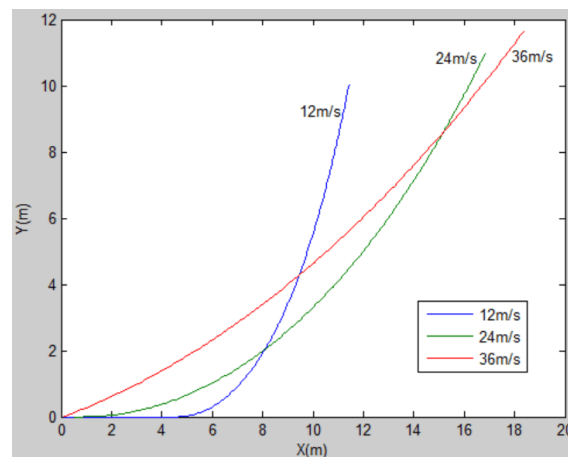


图 8 三种风速下锚链曲线汇总比较

由图 8 可以看出,当系泊系统不发生变化时,风速越大,起锚角越大,锚链右端点越向远处移动,竖直高度也越高。即风速越大,锚链越紧绷。

当风速为 36m/s 时,依据表 3 中得到的参数数值发现,该系统已不符合系统设计要求,钢桶内传讯系统不能良好工作,因此,在风速为 36m/s 时需要系泊系统进行改进,重新选择重物球质量。

### 5.2.2 确定重物球最优质量的多指标评价模型的建立

进行系泊系统重物球质量选择时,要想得到较优的系泊系统设计,需要在使得钢桶倾斜角小于  $5^\circ$ ,起锚角小于  $16^\circ$  的情况下,使得吃水深度、游动区域以及钢桶的倾斜角度尽可能的小。

#### (1) 确定重物球质量可行区间的拟合曲线模型

依据 5.1.3 中联立静力学方程搜索求解模型,可知,当给定一个重物球质量时,可以得到与重物球质量唯一对应的一组参数解。已知重物球质量与各角度参数关系为:

$$\begin{cases} F_w = F_0 \cos \varphi_0 \\ F_l = (G_B - F_B) + G_S + T_0 \sin \varphi_0 + G_c + 3N + G_0 \\ 18 = (l_0 \cos \alpha_0 + l(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_4) + h + Y \\ \tan \varphi_{i+1} = F_0 \tan \varphi_0 + \frac{i \times G_m}{F_0 \cos \varphi_0}, i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \cot \alpha_0 = \frac{G_B - F_l + G_S + F_0 \sin \varphi_0}{F_0 \cos \varphi_0} \\ \cot \alpha_j = \cot \alpha_0 + \frac{(5-j)N}{F_0 \cos \varphi_0}, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

故我们对重物球质量进行枚举,得到一组重物球质量与各参数一一对应的一组数据。

针对得到的数据,利用最小二乘法建立多元线性拟合方程:

$$y = k_1 x^4 + k_2 x^3 + k_3 x^2 + k_4 x^1 + k_0$$

利用多元线性拟合方程,对得到的参数随重物球变化情况进行拟合,可以得到 4 个参数分别对应的 4 条拟合曲线。

利用拟合得到的参数-重物球质量方程,依据系泊系统设计限制条件,对悬挂重物球质量可行区间进行求解。

#### (2) 多指标评价优化模型建立

设计系泊系统时,要求吃水深度、游动区域、起锚角和钢桶的倾斜角度尽可能小,故我们将上述参数作为评价指标,建立基于多指标评价的优化模型。

依据 (1) 中的限制条件,我们将参数在可行区域范围内进行归一化处理:



$$\begin{cases} W_1 = \frac{2-h}{2} \\ W_2 = \frac{5-\alpha_0}{5} \\ W_3 = \frac{16-\varphi_0}{16} \\ W_4 = \frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2} \end{cases}$$

其中，在可行区间内吃水深度  $h$  最大为 2m，钢桶倾斜角度  $\alpha_0$  最大为  $5^\circ$ ，起锚角  $\varphi_0$  最大为 16 度。进行浮标游动区域归一化时，我们选用可行区域内最大游动区域半径进行指标归一化。最终我们得到了关于吃水深度  $h$ 、钢桶倾斜角度  $\alpha_0$ ，起锚角度  $\varphi_0$  与游动区域半径  $r$  四个因素的归一化指标  $W_1$ ， $W_2$ ， $W_3$ ， $W_4$ 。

对四个指标赋予权重，得到不同质量重物球下的得分：

$$S = k_1 W_1 + k_2 W_2 + k_3 W_3 + k_4 W_4$$

依据四条拟合曲线，最终可以得到多指标评价分数随重物球质量变化时的曲线，依据得分曲线，进行最优选取即可。

### 5.2.3 模型求解

基于多元拟合曲线与多目标评价优化模型，建立重物球质量最优选取模型算法：

**Step1:** 随机均匀枚举 10 个重物球质量，依据系泊系统静力学方程进行参数求解，得到与重物球质量唯一对应的参数。

**Step2:** 基于最小二乘法，对参数随重物球质量变化趋势进行曲线方程拟合，得到不同参数随重物球质量变化时的拟合曲线方程。

**Step3:** 结合系泊系统设计限制条件，依据拟合曲线方程得到满足所有限制条件时的重物球质量变化区间，作为重物球质量选取可行区间。

**Step4:** 在可行区间范围内，建立指标参数，将吃水深度  $h$ 、钢桶倾角  $\alpha_0$ 、起锚角度  $\varphi_0$  与浮标游动半径  $r$  进行归一化处理，得到表征四个参数的相应标准化指标。

**Step5:** 结合各参数拟合曲线，对四个标准化指标赋予权重，得到得分情况  $S$ 。且  $S$  为随着重物球质量变化的得分曲线。选取得分曲线极大值点作为最优解。

#### (1) 基于拟合曲线的可行区间求解

利用 5.2.2 中重物球质量唯一对应一组参数解，进行几个重物球质量的随机枚举，基于最小二乘法<sup>[4]</sup>对所得参数情况进行拟合，得到以下 4 个参数 4 条拟合曲线。

起锚角拟合曲线：

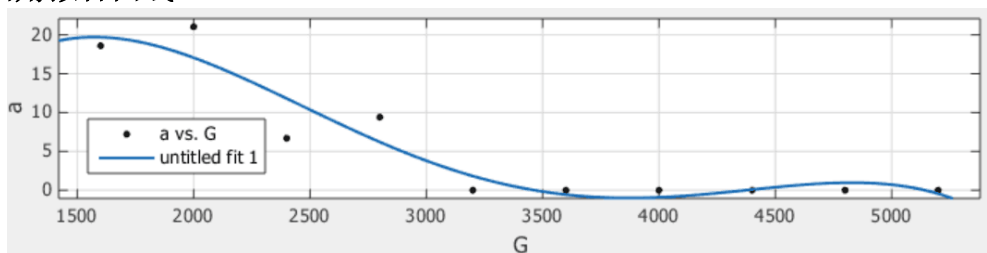


图 9 起锚角随重物球质量变化拟合曲线

拟合方程为：

$$\varphi_0 = -1.215 \times 10^{-12} G_C^4 + 1.665 \times 10^{-8} G_C^3 - 7.87 \times 10^{-5} G_C^2 + 0.1429 G_C - 67.77$$

钢桶倾斜角拟合曲线：

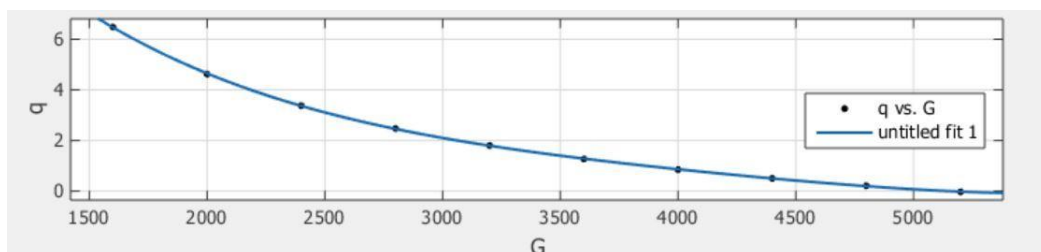


图 10 钢桶倾斜角随重物球质量变化拟合曲线

拟合方程为：

$$\alpha_0 = 5.149 \times 10^{-14} G_C^4 - 8.652 \times 10^{-10} G_C^3 + 5.612 \times 10^{-6} G_C^2 - 0.01752 G_C + 23.34$$

浮标游动半径拟合曲线：

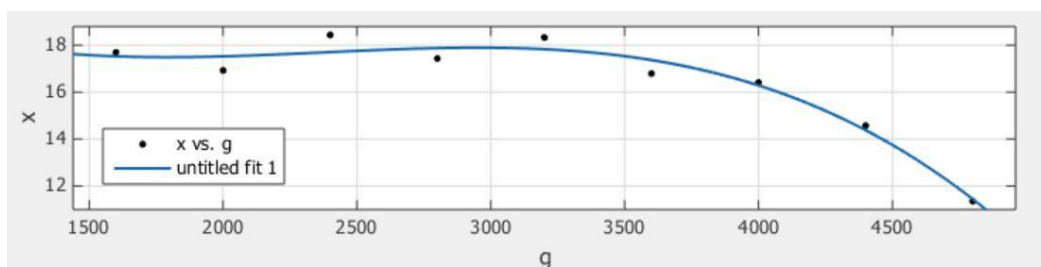


图 11 浮标游动半径随重物球质量变化拟合曲线

拟合方程为：

$$r = 2.721 \times 10^{-15} G_C^4 - 4.927 \times 10^{-10} G_C^3 + 3.598 \times 10^{-6} G_C^2 - 0.008 G_C + 23.28$$

吃水深度拟合曲线：

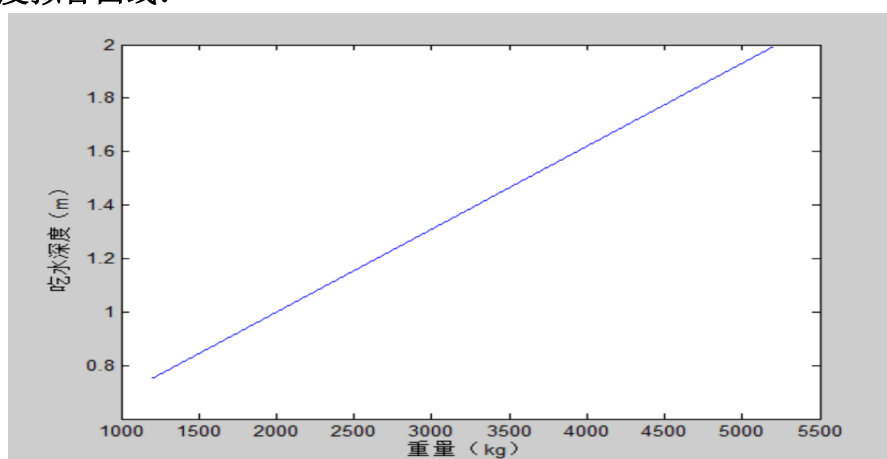


图 12 吃水深度随重物球质量变化拟合曲线

拟合方程：

$$h = \frac{11895.6968 + G_C}{10045\pi}$$

对上述四条拟合曲线进行分析,结合限制条件进行  $G_C$  范围求解。得到  $G_C$  的可行范围为: [2500kg,5100kg]。

### (2) 多指标评价优化模型求解

设  $k_1 = \frac{2}{3}, k_2 = \frac{1}{9}, k_3 = \frac{1}{9}, k_4 = \frac{1}{9}$ , 结合上述得到的拟合曲线方程,可以得到对不同重物球质量时,参数的评价得分,如图 13。

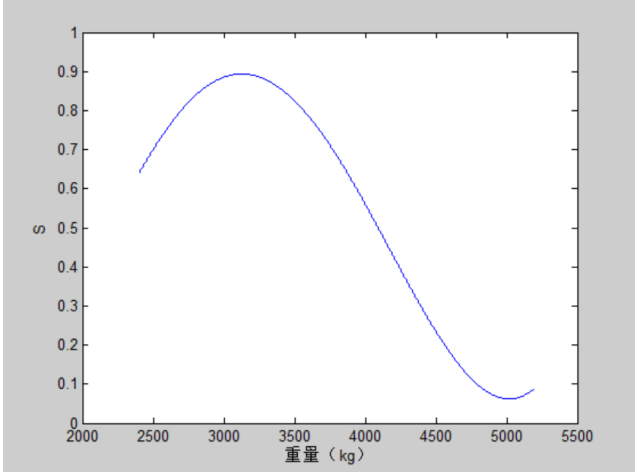


图 13 得分曲线

得分曲线在重物球质量为 3125kg 时,达到最高。结合上述(1)中拟合曲线进行分析可知,当重物球质量较小时,虽然吃水深度相对较小,但钢桶倾斜角相对较大,且浮标游动半径也较大,故最后得分较低。当重物球质量超过 3200kg 时,钢桶倾斜角度与浮标游动半径较小,但由于吃水深度几乎成线性变化,过重的重物球会造成吃水深度的大幅增加,故当重物球质量超过 3200kg 时,不是系统最优解。

最终,依据得分曲线,我们选用极大值点 3125kg 作为最优重物球质量。在此质量下,当风速为 36m/s 时,其系统各参数值如下表 4。

表 4 最优重物球质量下的系统各参数

吃水深度	1.3472m
钢桶倾斜角度	1.5053
游动半径	18.40m
起锚角度	15.47

## 5.3 多因素系泊系统设计模型

### 5.3.1 三维空间系泊系统静力学方程的建立

由于潮汐等因素的影响,系泊系统布放的海域实测水深介于 16m 与 20m 之间。布放点的海水速度最大可达到 1.5m/s,风速最大可达到 36m/s,此时浮标系统将会受到近海风载荷所带来的风力以及近海水流力的作用,系泊系统、水声通讯系统同时也将会受到近海水流力的作用。当风力与水流力对浮标及钢管的作用力不在浮标及钢管所在的平面上时,浮标与钢管将会受到力矩的作用发生转动从而脱离原平面在三维空间中达到力矩平衡,通过分析力矩平衡时的作用力矢量,建

立作用力矢量所满足的矢量方程<sup>[5]</sup>。

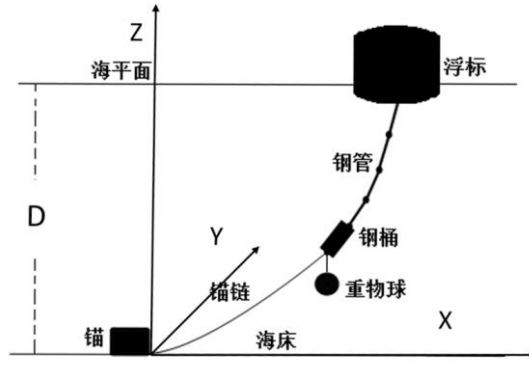


图 14 空间三维坐标系示意图

以锚链与锚的连接点为坐标原点，建立如图 14 所示的空间直角坐标系，设浮标所受到的风力的作用力矢量为  $\vec{F}_w = (F_{wx}, F_{wy}, F_{wz})$ ，受到的水流力的作用力矢量为  $\vec{F}_s = (F_{sx}, F_{sy}, F_{sz})$ ，浮标受到的第 1 根钢管对其的拉力矢量为  $\vec{T}_1 = (T_{1x}, T_{1y}, T_{1z})$ ，浮标自身的重力矢量为  $\vec{G}_0 = (0, 0, G_0)$ ，浮标受到的海水的浮力矢量为  $\vec{F}_l = (0, 0, F_l)$ ，近似认为浮标所受到的力为共点力，当浮标最终达到受力平衡时，浮标所受到的所有力的矢量和为 0，故可以建立公式 (25) 关于浮标的静力学方程。

浮标受力分析：

$$\vec{F}_w + \vec{F}_s + \vec{F}_l + \vec{T}_1 + \vec{G}_0 = \vec{0} \quad (25)$$

对于第  $i$  根钢管进行平动受力及转动力矩受力分析，其上端点所受到的第  $i-1$  根钢管对其的拉力矢量为  $\vec{T}_i = (\vec{T}_{ix}, \vec{T}_{iy}, \vec{T}_{iz})$ ，其下端点所受到的第  $i+1$  根钢管对其的拉力矢量为  $\vec{T}_{i+1} = (\vec{T}_{(i+1)x}, \vec{T}_{(i+1)y}, \vec{T}_{(i+1)z})$ ，同时其受到的自身重力矢量与海水对其的浮力矢量的和矢量为  $\vec{N} = (0, 0, N)$ ，近海水流力对其产生的水流力矢量为  $\vec{F}_{si} = (F_{six}, F_{siy}, F_{siz})$ ，第  $i$  根钢管在三维坐标系中自身的方向矢量为  $\vec{\lambda}_i = (\lambda_{ix}, \lambda_{iy}, \lambda_{iz})$ ，则第  $i$  根钢管在达到平动受力平衡与转动力矩平衡时，所有力沿钢管轴向与垂直于轴向的方向的总合力为 0，故其所受到的所有力的矢量满足公式 (26) 的静力学方程。

第  $i$  根钢管受力分析：

$$\begin{cases} (\vec{T}_i + \vec{T}_{i+1} + \vec{N} + \vec{F}_{si}) \cdot \vec{\lambda}_i = 0 \\ (\vec{T}_i + \vec{T}_{i+1} + \vec{N} + \vec{F}_{si}) \times \vec{\lambda}_i = \vec{0} \end{cases} \quad (26)$$

在处理钢桶平动受力平衡与转动力矩平衡时，分析思路与钢管受力分析类似，设钢桶分别受到的第 4 根钢管对其的拉力矢量为  $\vec{T}_5 = (\vec{T}_{5x}, \vec{T}_{5y}, \vec{T}_{5z})$  锚链对其的拉力矢量为  $\vec{T}_0 = (\vec{T}_{0x}, \vec{T}_{0y}, \vec{T}_{0z})$ ，同时其受到的自身重力矢量  $\vec{G}_B = (0, 0, G_B)$  与海水对其

的浮力矢量  $\vec{F}_B = (0, 0, F_B)$ ，由于重物球系在钢桶下面，钢桶同时会受到重物球对其的拉力矢量  $\vec{G}_S = (0, 0, G_S)$ ，在海水的冲击下钢桶所受到的水流力的作用力矢量为  $\vec{F}_{s5} = (F_{s5x}, F_{s5y}, F_{s5z})$ ，在三维坐标系中钢桶自身的方向矢量为  $\vec{\lambda}_5 = (\lambda_{5x}, \lambda_{5y}, \lambda_{5z})$ ，钢桶在达到平动受力平衡与转动力矩平衡时，所有力沿钢管轴向与垂直于轴向的方向的总合力为 0，故其所受到的所有力的矢量满足公式 (27) 的静力学方程。

钢桶受力分析：

$$\begin{cases} (\vec{T}_0 + \vec{T}_5 + \vec{G}_B + \vec{F}_B + \vec{G}_S + \vec{F}_{s5}) \cdot \vec{\lambda}_5 = 0 \\ (\vec{T}_0 + \vec{T}_5 + \vec{G}_B + \vec{F}_B + \vec{G}_S + \vec{F}_{s5}) \times \vec{\lambda}_5 = \vec{0} \end{cases} \quad (27)$$

设锚链自身的重力矢量为  $\vec{G}_C = (0, 0, G_C)$ ，锚对锚链末端的拉力矢量为  $\vec{F}_0 = (F_0, F_0, F_0)$ ，锚对锚链末端的拉力矢量为  $\vec{T}_0$  的反作用力，则锚链在达到平衡时其所满足的公式 (28) 的静力学方程。

锚链受力分析：

$$\vec{F}_0 + \vec{G}_C - \vec{T}_0 = \vec{0} \quad (28)$$

系泊系统静力学方程汇总：

浮标：
$$\vec{F}_w + \vec{F}_s + \vec{F}_l - \vec{T}_1 + \vec{G}_0 = \vec{0}$$

第 1 根钢管：

$$\begin{cases} (\vec{T}_1 - \vec{T}_2 + \vec{N} + \vec{F}_{s1}) \cdot \vec{\lambda}_1 = 0 \\ (\vec{T}_1 - \vec{T}_2 + \vec{N} + \vec{F}_{s1}) \times \vec{\lambda}_1 = \vec{0} \end{cases}$$

第 2 根钢管：

$$\begin{cases} (\vec{T}_2 - \vec{T}_3 + \vec{N} + \vec{F}_{s2}) \cdot \vec{\lambda}_2 = 0 \\ (\vec{T}_2 - \vec{T}_3 + \vec{N} + \vec{F}_{s2}) \times \vec{\lambda}_2 = \vec{0} \end{cases}$$

第 3 根钢管：

$$\begin{cases} (\vec{T}_3 - \vec{T}_4 + \vec{N} + \vec{F}_{s3}) \cdot \vec{\lambda}_3 = 0 \\ (\vec{T}_3 - \vec{T}_4 + \vec{N} + \vec{F}_{s3}) \times \vec{\lambda}_3 = \vec{0} \end{cases}$$

第 4 根钢管：

$$\begin{cases} (\vec{T}_4 - \vec{T}_5 + \vec{N} + \vec{F}_{s4}) \cdot \vec{\lambda}_4 = 0 \\ (\vec{T}_4 - \vec{T}_5 + \vec{N} + \vec{F}_{s4}) \times \vec{\lambda}_4 = \vec{0} \end{cases}$$

钢桶:

$$\begin{cases} (\vec{T}_0 + \vec{T}_5 + \vec{G}_B + \vec{F}_B + \vec{G}_S + \vec{F}_{s5}) \cdot \vec{\lambda}_5 = 0 \\ (\vec{T}_0 + \vec{T}_5 + \vec{G}_B + \vec{F}_B + \vec{G}_S + \vec{F}_{s5}) \times \vec{\lambda}_5 = 0 \end{cases}$$

锚链:

$$\vec{F}_0 + \vec{G}_C - \vec{T}_0 = \vec{0}$$

### 5.3.2 多因素系泊系统设计优化模型的建立

(1) 目标函数的确定:

系泊系统布放海域的实测水深介于 16m 至 20m 之间, 设海域的水深为  $D$ , 故设计的系泊系统的整体高度应等于该海域的水深, 故目标函数为设计的系泊系统的整体高度与实测的海域水深的差值。

目标函数:

$$\min D - (Y + l \sin \lambda_{1z} + l \sin \lambda_{2z} + l \sin \lambda_{3z} + l \sin \lambda_{4z} + l \sin \lambda_{5z} + h)$$

其中  $l$  为钢管的长度,  $h$  为浮标的吃水深度,  $Y$  为锚链的竖直方向高度。

(2) 约束条件的确定:

由于钢桶竖直时, 水声通讯设备的工作效果最佳, 钢桶的倾斜角度超过 5 度时, 设备的工作效果较差, 同时要求锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角不超过 16 度, 否则锚会被拖行, 致使节点移位丢失, 故  $\alpha_0 \leq 5^\circ$ ,  $\varphi_0 \leq 16^\circ$ 。

系泊系统的设计还要满足之前建立的系泊系统静力学方程, 同时要满足之前建立的锚链静力学方程即满足公式 (20—22)。

(3) 优化模型汇总

基于 (1) 和 (2) 的分析, 对于系泊系统的设计参数的确定, 即确定锚链的型号、长度和重物球的质量, 则最终的优化模型:

$$\min D - (Y + l \sin \lambda_{1z} + l \sin \lambda_{2z} + l \sin \lambda_{3z} + l \sin \lambda_{4z} + l \sin \lambda_{5z} + h)$$

$$st. \begin{cases} \vec{F}_w + \vec{F}_s + \vec{F}_l - \vec{T}_1 + \vec{G}_0 = \vec{0} \\ (\vec{T}_i - \vec{T}_{i+1} + \vec{N} + \vec{F}_{si}) \cdot \vec{\lambda}_i = 0 \\ (\vec{T}_i - \vec{T}_{i+1} + \vec{N} + \vec{F}_{si}) \times \vec{\lambda}_i = 0 \\ (\vec{T}_0 + \vec{T}_5 + \vec{G}_B + \vec{F}_B + \vec{G}_S + \vec{F}_{s5}) \cdot \vec{\lambda}_5 = 0 \\ (\vec{T}_0 + \vec{T}_5 + \vec{G}_B + \vec{F}_B + \vec{G}_S + \vec{F}_{s5}) \times \vec{\lambda}_5 = 0 \\ \vec{F}_0 + \vec{G}_C - \vec{T}_0 = \vec{0} \\ \alpha_0 \leq 5^\circ, \varphi_0 \leq 16^\circ \end{cases}$$

其中重物球的质量, 锚链的长度, 锚链的型号即确定锚链单位长度的质量为决策变量。

### 5.3.2 模型的求解

#### (1) 恶劣环境下的简化求解

当布放海域的实测水深为 20m，布放点的海水速度达到最大 1.5m/s，风速达到最大 36m/s 时，且风力的方向与海水的水流力方向相同沿着 X 轴正方向时，此时钢桶的倾斜角度、锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角都将会达到最大，此时整个系泊系统所受到的力都在 XOZ 平面上，因此可对系泊系统静力学方程进行简化，同时将已知固定参数的值代入简化后的方程后如公式 (29) 所示。

$$\begin{cases} 63h + 3661.425 = F_0 \cos \varphi_0 \\ 31557.298h = F_0 \sin \varphi_0 + G_C + G_S + 10383.1068 \\ \cos \alpha_0 + \cos \alpha_4 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 + h + Y = 20 \end{cases} \quad (29)$$

其中  $h$  为浮标的吃水深度， $\varphi_0$  为锚链在锚端的起锚角度， $F_0$  为锚对锚链的拉力，

$G_C$  为锚链总重量， $G_S$  为重物球重力， $Y$  为锚链竖直方向高度可由公式 (21, 22)

进行计算， $\alpha_0, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$  分别为钢桶、第 4、3、2、1 根钢管与竖直方向的夹角，

$\alpha_0, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$  可由公式 ( ) 求出。

$$\begin{cases} \cot \alpha_0 = \frac{F_0 \cos \varphi_0 + G_S + 270}{F_0 \cos \varphi_0 - 253.125} \\ \cot \alpha_4 = \frac{F_0 \sin \varphi_0 + G_S + G_C + 348.2767}{F_0 \cos \varphi_0 - 295.2} \\ \cot \alpha_3 = \frac{F_0 \sin \varphi_0 + G_S + G_C + 426.5534}{F_0 \cos \varphi_0 - 337.275} \\ \cot \alpha_2 = \frac{F_0 \sin \varphi_0 + G_S + G_C + 504.8301}{F_0 \cos \varphi_0 - 379.35} \\ \cot \alpha_1 = \frac{F_0 \sin \varphi_0 + G_S + G_C + 583.1068}{F_0 \cos \varphi_0 - 421.425} \end{cases} \quad (30)$$

约束方程进行简化后，可得到简化的优化模型，对该简化的优化模型搜索求解即可得到重物球的质量，锚链的长度，锚链的型号即锚链单位长度的质量，同时可搜索得到最优求解时钢桶、第 4、3、2、1 根钢管与竖直方向的夹角、锚链在锚端的起锚角度。

简化的优化模型：

$$\begin{aligned} & \min 20 - (Y + \sin \lambda_{1z} + \sin \lambda_{2z} + \sin \lambda_{3z} + \sin \lambda_{4z} + \sin \lambda_{5z} + h) \\ & \begin{cases} 63h + 3661.425 = F_0 \cos \varphi_0 \\ 31557.298h = F_0 \sin \varphi_0 + G_C + G_S + 10383.1068 \\ \cos \alpha_0 + \cos \alpha_4 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 + h + Y = 20 \\ \alpha_0 \leq 5^\circ, \quad \varphi_0 \leq 16^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

## (2) 恶劣环境下的简化优化模型求解

通过对简化的优化模型搜索求解,可得到对应不同型号即对应单位长度的锚链质量不同时的最优搜索求解结果如表 5 所示

表 5 搜索求解结果

型号	I	II	III	IV	V
单位长度质量 (kg/m)	3.2	7	12.5	19.5	28.12
重物球的质量 (kg)	4950	4700	4500	4350	4050
锚链的长度 (m)	53.15	36.96	28.728	24.024	21.063
游动区域半径 (m)	21.3958	20.6679	19.7044	18.6182	17.4361
钢桶倾斜角度 (度)	3.8386	3.725	4.1766	4.3084	4.5892
吃水深度 (m)	0.4913	0.4861	0.4830	0.4817	0.4761
多指标评价得分值	0.1197	0.1648	0.1949	0.2271	0.2890

对搜索求解得到的最优系泊系统的设计方案进行多指标评价得分值的计算,从多值标评价得分值的结果可以看出,选用型号 V 的锚链 21.063m,重物球的质量为 4050kg 时综合评价得分值最高,此种设计方案浮标的吃水深度为 0.4761m、游动区域半径为 17.4361m、钢桶与竖直方向的倾斜角度为 4.5892 度。此时该最优系泊系统的设计方案所对应的锚链线形状如图 15 所示。

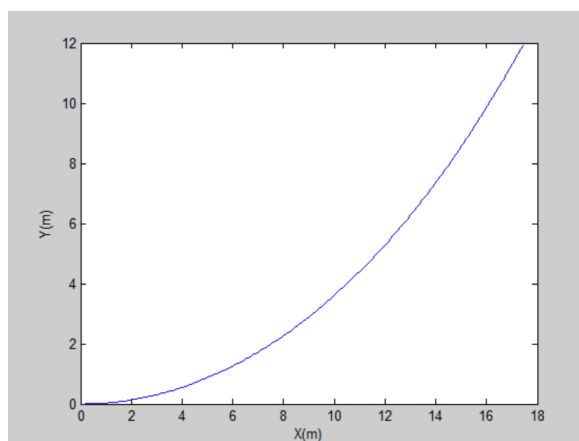


图 15 锚链曲线图

该最优系泊系统设计方案得到的锚链线的右端点的横坐标为 17.4361,纵坐标为 11.94,即该最优方案下锚链线对应的竖直高度为 11.94m,此时该方案下各参数结果如表 6 所示。

表 6 最优设计方案下各参数结果

型号		V	
单位长度的质 (kg/m)	28.12	第 1 根钢管的倾斜角度 (度)	4.6751
重物球的质量 (kg)	4050	第 2 根钢管的倾斜角度 (度)	4.7439
锚链的长度 (m)	21.063	第 3 根钢管的倾斜角度 (度)	4.8069
游动区域半径 (m)	17.4361	第 4 根钢管的倾斜角度 (度)	4.8183
吃水深度 (m)	0.4761	钢桶与竖直方向的倾斜角 (度)	4.5892

由表 6 可以看出在最优设计方案下,4 根钢管的倾斜角度均小于 5 度,钢桶的倾斜角度为 4.5892 度也满足小于 5 度的要求,游动区域的半径为 17.4361m,



游动区域的总面积为  $955.10\text{m}^2$ ，浮标的吃水深度为  $0.4761\text{m}$  相比于浮标  $2\text{m}$  的高度已经很小，认为此优化方案有较好的效果。

## 六、模型评价与改进

### 6.1 模型的误差分析

由参考文献<sup>[6]</sup>中可以得到在一般系泊系统中，描述锚链的标准悬链线方程，其建立过程如下<sup>[6]</sup>，设  $o$  点处锚链的张力为  $T_0$ ，力的作用线与  $x$  轴成  $\alpha$  角，其水平分力记为  $R$ ，锚链单位长度在水中的重力为  $q$

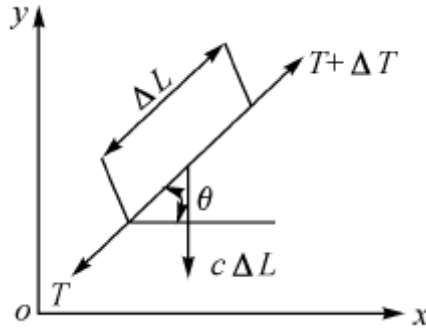


图 16 悬链线微元受力分析

任取悬链线部分长度为  $\Delta L$  的微元，其受力如图 16 所示<sup>[7,8]</sup>。两端张力  $T$  和  $T + \Delta T$ ，其作用线与  $x$  轴成  $\theta$  角，水中自重为  $q \Delta L$ 。张力  $T + \Delta T$  为  $L$  的连续函数，在  $x$ 、 $y$  轴上的投影也为连续函数，把两个投影分别展开成泰勒级数，并略去二阶小量后，可得到张力  $T + \Delta T$  在  $x$  轴上的投影为：

$$T \cos \theta + \frac{d(T \cos \theta)}{dL} \Delta L$$

在  $y$  轴上的投影为：

$$T \sin \theta + \frac{d(T \sin \theta)}{dL} \Delta L$$

微元受力平衡方程式为：

$$\sum F_x = \left[ T \cos \theta + \frac{d(T \cos \theta)}{dL} \Delta L \right] - T \cos \theta = 0 \quad (31)$$

$$\sum F_y = \left[ T \sin \theta + \frac{d(T \sin \theta)}{dL} \Delta L \right] - T \sin \theta = T \sin \theta + q \cdot \Delta L \quad (32)$$

由 (31) 与 (32) 式可得如下微分方程

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2} \quad (33)$$

其中  $a = \frac{R}{q}$ 。

由悬链线坐标边界条件可得以下关系式：

$$y(0)=0 \quad (34)$$

$$y'(0)=\tan \theta \quad (35)$$

由(34)、(35)两式求解微分方程(33)，可得一般状态下的悬链线方程：

$$y = ach \left[ \frac{x}{a} + \ln(\tan \alpha + \sec \alpha) - a \cdot \sec \alpha \right]$$

将上述方式建立的悬链线方程与模型中解得的锚链离散化方程相比较，绘出锚链形状如图 17 所示。

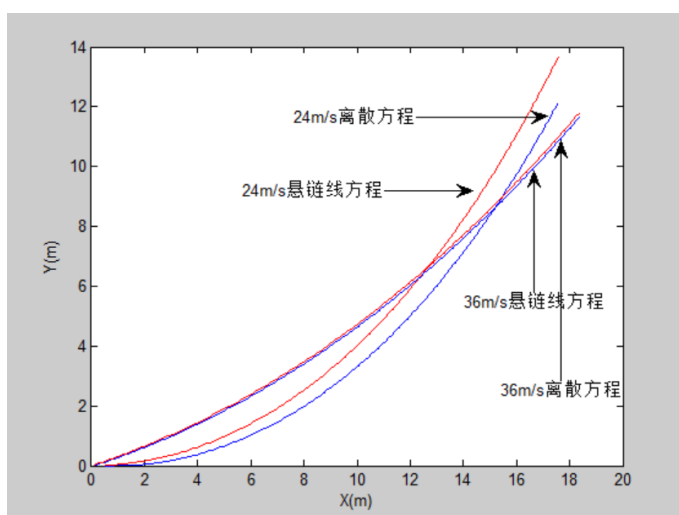


图 17 离散曲线与悬链线曲线比较

由图 17 可以看出风速为 24m/s 时悬链线连续函数曲线与模型中分段离散化后处理得到的曲线较为近似，但存在一定的差异；当风速为 36m/s 时悬链线连续函数曲线与模型中分段离散化后处理得到的曲线基本完全一致，由此可以看出模型中分段离散化处理锚链得到的锚链曲线轨迹在风速较大时与标准悬链线函数曲线有很好的统一性。

表 7 差值平方和

风速 (m/s)	24	36
差值平方和 (m <sup>2</sup> )	163.4958	1.8758

当风速为 36m/s 时，模型中的离散化处理得到的曲线与标准悬链线函数曲线的 y 值差值平方和为 1.8758m<sup>2</sup>，当风速为 24m/s 时模型中的离散化处理得到的曲线与标准悬链线函数曲线的 y 值差值平方和为 163.4958m<sup>2</sup>，因此模型中离散化处理锚链对于风速较大的系泊系统分析更为准确，模型中所做的离散化处理在风速较大时更为接近标准悬链线方程。

## 6.2 模型的优缺点

### 6.2.1 模型优点：

- 对系泊系统每一个组成单元进行了受力与力矩分析，精确建立了系泊系统各物理量间互相影响的方程组
- 综合考虑了吃水深度，浮动区域和倾斜角度等多个因素设计出能符合所有指标要求的系泊系统。

#### 6.2.2 模型缺点：

- 研究重物球对系泊系统的影响时按一定步长取重物球质量，对函数关系进行拟合的方法存在误差，对系统分析造成影响。
- 对于锚链进行离散化分析取固定的分割步长造成与实际锚链单元不一致从而产生一定偏差。

#### 6.3 模型的改进方向

- 1.在搜索求解多元非线性方程组时，可以使用模拟退火或者其他搜索算法提高搜索解的速度。
- 2.对于锚链的分析可以用更精确的微元法建立悬链线方程

## 七、文献

- [1]石宏睿，空间站力矩平衡姿态研究与姿态控制器设计[M]，哈尔滨工业大学，2010.
- [2]王磊，单点系泊系统的动力学研究[M]，中国海洋大学，2012 年 6 月.
- [3]周凌远，斜拉桥非线性理论及极限承载力研究[D]，西南交通大学，2007-02-01
- [4]陈两波，郑亚青，基于最小二乘法的曲线拟合研究[J]，无锡职业技术学院学报，2012 年 05 期.
- [5]张奇华，考虑力矩平衡的三维剩余推力法[J]，岩土工程学报，2008 年 09 期.
- [6]王丹，刘家新，一般状态下的悬链线方程的应用[G]，航海工程，2007 年 03 期.
- [7]钟于祥，锚泊船舶出链长度及张力估算[J]，淮阴工学院学报，2004，13(3):3-4
- [8]张养利，王连昌，李文潮，张改英，悬链线微分方程的另一种解法[J],第四军医大学学报，2001(1):41.

## 八、附件清单

- 附件一：问题 1 方程组函数 matlab 源程序
- 附件二：问题 2 方程组函数 matlab 源程序
- 附件三：遍历搜索求解算法 matlab 源程序
- 附件四：总方程组函数 matlab 源程序
- 附件五：问题 3 方程组函数 matlab 源程序

### 附件一：问题 1 方程组函数

```
function F= myfun(X)
%%物理量设置
L=X;
F0=1025*9.8*pi*0.15*0.15;
F1=1025*9.8*pi*0.025*0.025;
GG=1200*9.8;    Gg=100*9.8;    G1=98;
a(1)=atan((10045*pi*L-23655.6968)./(180*(2-L)));
T=(10045*pi*L-23655.6968)./sin(a(1));
%%锚链离散化分析
b(1)=sin(a(1));
for i=2:210
a(i)=atan(T.*tan(a(1))+((i-1)*7*9.8*22.05/210)./(T.*cos(a(1))));
b(i)=sin(a(i));
end
y=(22.05/210)*sum(b,2);
%% 钢管及钢桶倾角分析
q6=atan((Gg-F0+GG+T.*sin(a(1)))/(T.*cos(a(1))));
q4=atan(tan(q6)+(G1-F1)/(T.*cos(a(1))));
q3=atan(tan(q6)+2*(G1-F1)/(T.*cos(a(1))));
q2=atan(tan(q6)+3*(G1-F1)/(T.*cos(a(1))));
q1=atan(tan(q6)+4*(G1-F1)/(T.*cos(a(1))));

%% 约束方程
F=sin(q6)+sin(q4)+sin(q3)+sin(q2)+sin(q1)+L+y-18;
End
```

### 附件二：问题 2 方程组函数

```
function F= myfun(X)
%%物理量设置
L=X;
F0=1025*9.8*pi*0.15*0.15;
F1=1025*9.8*pi*0.025*0.025;
GG=1200*9.8;    Gg=100*9.8;    G1=98;
a(1)=atan((10045*pi*L-23655.6968)./(1620*(2-L)));
T=(10045*pi*L-23655.6968)./sin(a(1));
%%锚链离散化分析
b(1)=sin(a(1));
for i=2:210
a(i)=atan(T.*tan(a(1))+((i-1)*7*9.8*22.05/210)./(T.*cos(a(1))));
b(i)=sin(a(i));
end
y=(22.05/210)*sum(b,2);
```

```

%% 钢管及钢桶倾角分析
q6=atan((Gg-F0+GG+T.*sin(a(1)))/(T.*cos(a(1))));
q4=atan(tan(q6)+(G1-F1)/(T.*cos(a(1))));
q3=atan(tan(q6)+2*(G1-F1)/(T.*cos(a(1))));
q2=atan(tan(q6)+3*(G1-F1)/(T.*cos(a(1))));
q1=atan(tan(q6)+4*(G1-F1)/(T.*cos(a(1))));

%% 约束方程
F=sin(q6)+sin(q4)+sin(q3)+sin(q2)+sin(q1)+L+y-18;
End

```

### 附件三：遍历搜索求解算法

```

clear all
h = waitbar(0,'Please wait...');
for i=0:0.02:0.26
    for j=100:5:360
        for k=0:0.1:1
            n=(53*11)*i*50+11*(j-100)/5+k*10;
            A(floor(n+1),:)=myfun(i,j,k,i,j,k);
            waitbar(n/(14*53*11),h,['已完成' num2str(floor( n*100/(14*53*11))) '%'])
        end
    end
end
end

```

### 附件四：总方程组函数

```

function F = myfun(X)
%% 物理量设置
T0=X(1);    T1=X(2);    T2=X(3);    T3=X(4);    T4=X(5);    T=X(6);
q0=X(7);    q1=X(8);    q2=X(9);    q3=X(10);   q4=X(11);   q6=X(12);
a(1)=X(13); TT=X(14); L=X(15);
F0=1025*9.8*pi*0.15*0.15;
F4=1025*9.8*pi*0.025*0.025;
F3=1025*9.8*pi*0.025*0.025;
F2=1025*9.8*pi*0.025*0.025;
F1=1025*9.8*pi*0.025*0.025;
GG=1200*9.8;    Gg=100*9.8; G4=98;    G3=98;    G2=98;    G1=98;    G0=9800;
%% 锚链离散化分析
b(1)=sin(a(1));
for i=2:20
    a(i)=atan(TT.*tan(a(1))+((i-1)*7*9.8*22.05/20)./(T1.*cos(a(1))));
    b(i)=sin(a(i));
end

```

```

y=(22.05/20)*sum(b);
%% 总方程组
F(1) = F0.*cos(q6)+T4-GG.*cos(q6)-Gg.*cos(q6)-T0.*sin(q0+q6);
F(2)=0.5*(GG.*sin(q6)+Gg.*sin(q6)-F0.*sin(q6))-T0.*cos(q0+q6);
F(3)=F4.*cos(q4)+T3-G4.*cos(q4)-T4.*cos(q6-q4);
F(4)=0.5*(G4.*sin(q4)-F4.*sin(q4))-T4.*sin(q6-q4);
F(5)=T3.*cos(q4-q3)+G3.*cos(q3)-F3.*cos(q3)-T2;
F(6)=0.5*(G3.*sin(q3)-F3.*sin(q3))-T3.*sin(q4-q3);
F(7)=T2.*cos(q3-q2)+G2.*cos(q2)-F2.*cos(q2)-T1;
F(8)=T2.*sin(q3-q2)-0.5*(G2.*sin(q2)-F2.*sin(q2));
F(9)=T1.*cos(q2-q1)+G1.*cos(q1)-F1.*cos(q1)-T;
F(10)=0.5*(G1.*sin(q1)-F1.*sin(q1))-T1.*sin(q2-q1);
F(11)=1025*9.8*pi*L-G0-T.*cos(q1);
F(12)=0.625*2*(2-L)*12*12-T.*sin(q1);
F(13)=T0.*cos(q0)-TT.*cos(a(1));
F(14)=T0.*sin(q0)-TT.*sin(a(1))+22.05*7;
F(15)=18-cos(q6)-cos(q4)-cos(q3)-cos(q2)-cos(q1)-L-y;
end

```

### 附件五：问题 3 方程组函数

```

function [F,q6,a,T]= myfun(X)
%% 物理量设置
LL=X;
W=28.12;
F0=1025*9.8*pi*0.15*0.15;
F1=1025*9.8*pi*0.025*0.025;
GG=4050*9.8;
Gg=100*9.8; G1=98; GL=W*210*LL;
L=(W*210*LL+GG+10383.1068)/31557.298;
a(1)=atan((31557.298*L-GL-GG-10383.1068)/(63*L+3661.425));
T=(31557.298*L-GL-GG-10383.1068)/sin(a(1));
%% 锚链离散化分析
b(1)=sin(a(1));
for i=2:210
a(i)=atan(T.*tan(a(1))+((i-1)*W*9.8*LL)/(T.*cos(a(1))));
b(i)=sin(a(i));
end
y=LL*sum(b,2);
%% 钢管及钢桶倾角分析
q6=atan((GG+270+T.*cos(a(1)))/(T.*cos(a(1))-253.125));
q4=atan((T.*sin(a(1))+GL+GG+348.2767)/(T.*cos(a(1))-295.2));
q3=atan((T.*sin(a(1))+GL+GG+426.5534)/(T.*cos(a(1))-337.275));
q2=atan((T.*sin(a(1))+GL+GG+504.8301)/(T.*cos(a(1))-379.35));

```

```
q1=atan((T.*sin(a(1))+GL+GG+583.1068)/(T.*cos(a(1))-421.425));  
%% 约束方程  
F=sin(q6)+sin(q4)+sin(q3)+sin(q2)+sin(q1)+L+y-18;  
end
```