

§ 8.6 Vektorwertige Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f^i)_{1 \leq i \leq l} : U \rightarrow \mathbb{R}^l$

Defn 8.57 ① Die Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ (8.6.1 stme) reist an der Stelle

$x_0 \in U$ differenzierbar, falls

jede Komponente f^i , $1 \leq i \leq l$ an

② der Stelle x_0 diff. ist.

Das Differenzial $df(x_0)$ hat die Gestalt

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} df^1(x_0) \\ \vdots \\ df^l(x_0) \end{pmatrix}$$

③ f heißt auf U diff. (bzw. von der Klasse C^m , $m \geq 1$) falls jedes f^i

diff. ist (bzw. $f^i \in C^m(U)$) $1 \leq i \leq l$.

Bmk. 8.58 1) Bzgl. der Standardbasis $\{x^j\}_{1 \leq j \leq n}$

erhalten wir

$$df^i(x_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) dx^j = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f^i}{\partial x^n}(x_0) \right)^T$$

Log

die Darstellung

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0) & & \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x_0) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f^l}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^l}{\partial x^2}(x_0) & & \frac{\partial f^l}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Die $\ell \times n$ Matrix $df(x_0) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) \right)$
 $1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n$

heisst Jacobi oder Funktional.methx
 von f an der Stelle x_0 .

② Auch im Vektorwertigen Fall ist die Funktion f genau dann differenzierbar in x_0 , wenn eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ existiert mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Bsp 8.59 ① $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ mit

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

→ 205-1

o

Es gelten die üblichen Differenzierungsregeln
Satz 8.60

(8.6.1 stme) Sei $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dann sind die Funktionen αf und $f + g$ sowie das Skalarprodukt von f und g an der Stelle x_0 diff. und

$$1) d(\alpha f)(x_0) = \alpha df(x_0)$$

o

$$2) d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$$

$$3) d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) \cdot dg(x_0) + g(x_0) \cdot df(x_0)$$

wobei $f(x_0) \cdot dg(x_0) = \sum_{i=1}^l f^i(x_0) d g^i(x_0)$

Satz 8.61 (Kettenregel) Seien $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$

(8.6.2 stme) und der Stelle $x_0 \in \Omega$ und $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ und der Stelle $g(x_0)$ differenzierbar.

Polar koordinaten

205 T

Bsp 8.59 (2) $f: (0, \infty) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

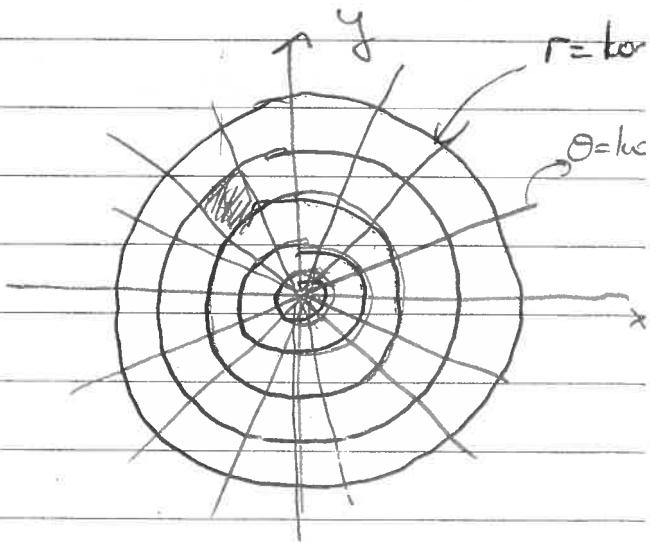
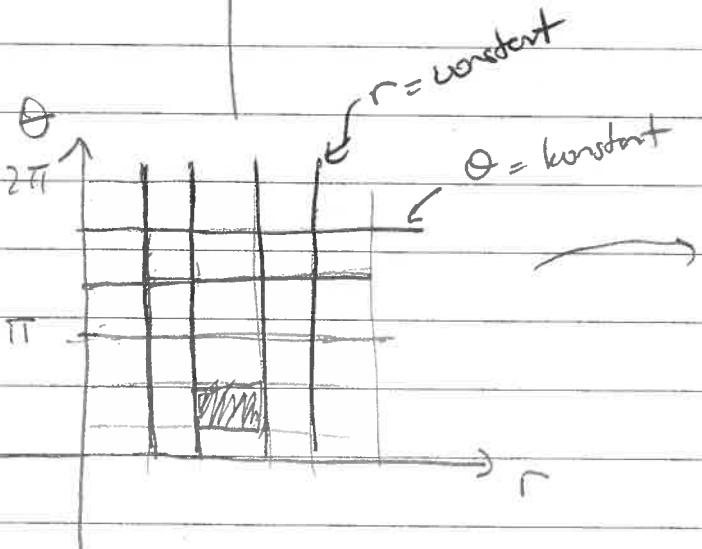
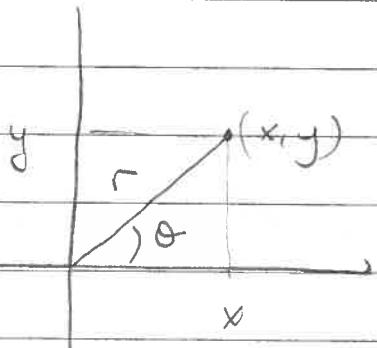
$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta}} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}$$

$$df(r, \theta) = (\cos \theta \quad -r \sin \theta)$$

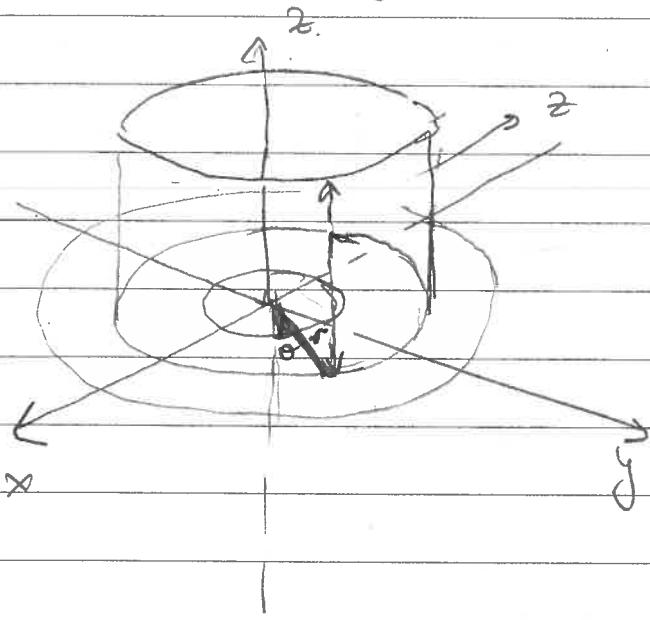
$$df^1(r, \theta) = (\sin \theta, \quad r \cos \theta)$$

$$df(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{Jacobi Matrix}$$

$$\det(df(r, \theta)) = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$



Bsp 8-59 ③ Zylinderkoordinaten



Die x, y Anteile werden in Polarkoordinaten transformiert und die z Koordinate beibehalten.

$$f : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transform}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}$$

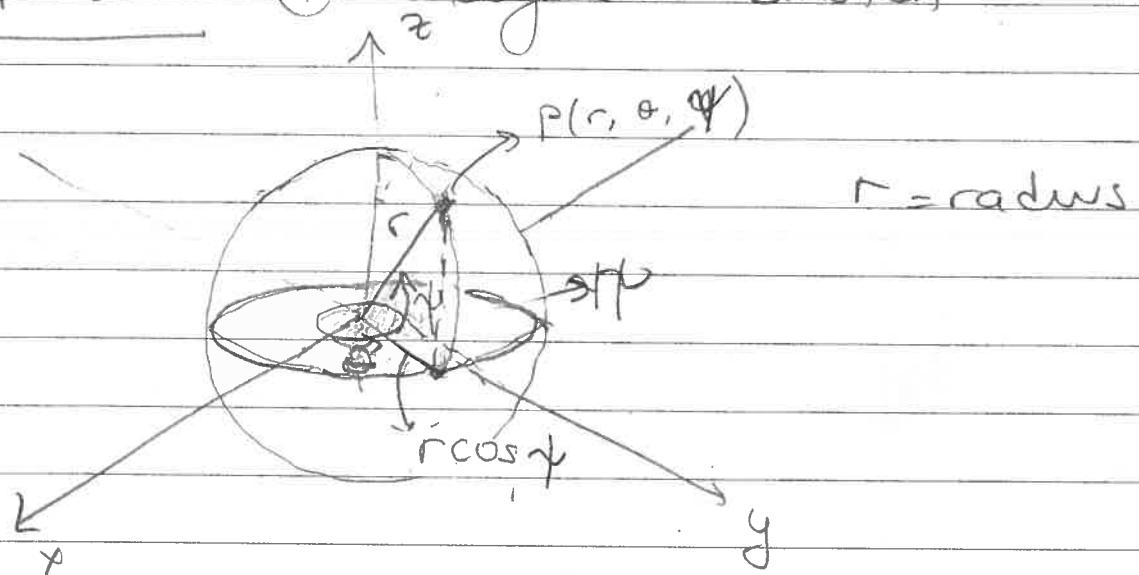
$$df(x, \varphi, z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Jacobi matrix}$$

$$\det(df(r, \varphi, z)) = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

(Rotationssymmetrie bezüglich z Achse)

20.5.3

Bsp. 8.59. ④ Kugelkoordinaten

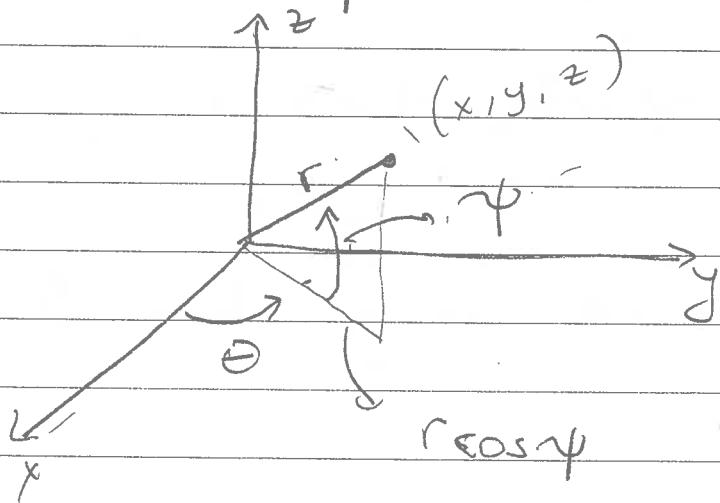
 r = radius

$$f : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r (\cos \theta \cos \varphi) \\ r (\sin \theta \cos \varphi) \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$df(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det(df) = r^2 \cos \varphi$$



φ : Breitengrad
 θ : Längengrad

(Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

Dann ist die Funktion $f \circ g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
an der Stelle x_0 differenzierbar, und

$$d(f \circ g)(x_0) = \underbrace{df(g(x_0))}_{2 \times 2 \text{ Matrix}} \cdot \underbrace{dg(x_0)}_{2 \times 3 \text{ Matrix}}.$$

Bsp. ① Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $df = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$

$$(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

○ $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $dg = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$

$$(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz \end{pmatrix}$$

$(f \circ g): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 + z^2)^2 - (xyz)^2 \\ 2(x^2 + y^2 + z^2)(xyz) \end{pmatrix}$$

○ $d(f \circ g)(x, y, z) = df(g(x, y, z)) \cdot (dg)(x, y, z)$

$$= \begin{pmatrix} 2(x^2 + y^2 + z^2) & -2xyz \\ 2xyz & 2(x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz^2 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

§ 9. Integration in \mathbb{R}^N .

Im Endimensionalen hatten wir mit dem Integral

$$\int_a^b f(x) dx \text{ den Flächeninhalt}$$

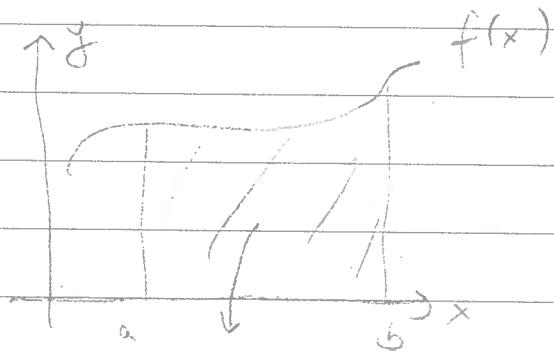
unter dem Graphen von f berechnet

O Wir suchen noch einer Verallgemeinerung

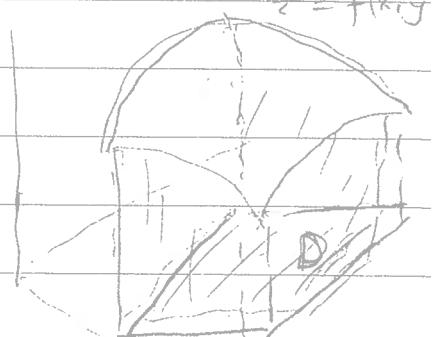
mit der man z.B. Volumen unter dem

Graphen einer Funktion von zwei Variablen

berechnen kann



$$A = \int_a^b f(x) dx$$



$$V = \int_D f(x,y) d\mu$$

D

Erinnerung: Bestimmtes Riemann-Integral
einer Funktion $f(x)$ über einem
Interval $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Das Integral I war als Grenzwert
von Riemannscher Ober und Untersumme
definiert (falls diese Grenzwert
jeweils existieren und übereinstimmen)

Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale ist
Analog. Aber der Definitionsbereich D ist
komplizierter.

Wir betrachten zunächst den Fall zweier
Variabler, $n=2$, und einen Definitionsbereich
 $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

d.h. D ist ein kompakter Quader (Rechteck)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion

(20d)

Defn 9.1 Man nennt $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$

eine Zerlegung des Quaders $D = [a_0, b_1] \times [a_1, b_2]$

falls gilt $a_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$

$$a_1 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$$

mit $Z(D)$ wird die Menge der Zerlegungen von D bezeichnet

② Die Feinheit einer Zerlegung $Z \in Z(D)$ ist

$$\|Z\| = \max_{i,j} \{ |x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j| \}$$

③ Für eine vorgegebene Zerlegung Z , nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die Teilquader der Zerlegung Z

Das Volumen des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\text{vol}(Q_{ij}) = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

④ Für beliebige Punkte $\xi_j \in \Omega_j$ der jeweiligen Teilquadranten nennt man

$$R_f(z) := \sum_{ij} f(\xi_j) \text{vol}(\Omega_j)$$

eine Riemannsche Summe zur Zerlegung z

⑤ Analog zum Integral einer Variablen heißen für eine Zerlegung z

$$U_f(z) := \sum_{ij} \inf_{x \in \Omega_j} f(x) \text{vol}(\Omega_j)$$

$$O_f(z) := \sum_{ij} \sup_{x \in \Omega_j} f(x) \text{vol}(\Omega_j)$$

die Riemannsche Untergesumme bzw.
Obergesumme von $f(x)$

Bmk 9-2 ① Es gilt

$$U_f(z) \leq R_f(z) \leq O_f(z)$$

d.h. eine Riem. Summe zu Zerlegung z liegt stets zwischen der Untergesumme und Obergesumme dieser Zerlegung.

(211)

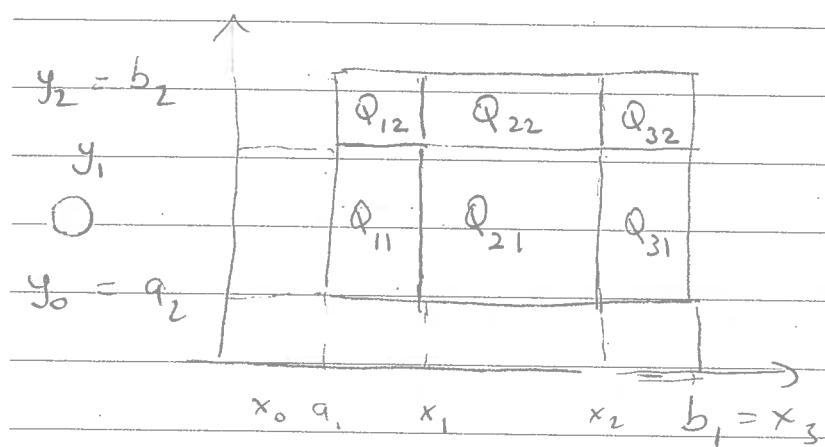
② Entsteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x^- oder y^- so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \text{ und}$$

$$O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

○ Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2).$$



Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

212

Defn 9.3 ① Riemannsches Unter-Integral

bzg. Riemannsches Oberintegral der Funktion $f(x)$ über D ist

$$U_f := \sup \{ U_f(z) : z \in Z(D) \}$$

$$O := \underline{\int_D} f(x) d\mu$$

$$O_f := \inf \{ O_f(z) : z \in Z(D) \}$$

$$:= \overline{\int_D} f(x) d\mu$$

② Die Funktion $f(x)$ nennt man

Riemann-integrierbar über D , falls

Unter und Oberintegral übereinstimmen.

Das Riemann Integral von $f(x)$ über D

$$\text{ist } \int_D f(x) d\mu = \overline{\int_D f(x) d\mu} = \underline{\int_D f(x) d\mu}$$

Bmk

213

In höheren Dimensionen, $n \geq 2$, ist die Vorgehensweise analog.

Schreibweise: Für $n=2$, $n=3$

$$\int_D f(x,y) d\mu \quad \text{bzw} \quad \int_D f(x,y,z) d\mu$$

Oder auch

$$\int_D f(x,y) dx dy \quad \text{bzw} \quad \int_D f(x,y,z) dx dy dz$$

Oder

$$\iint_D f dx dy \quad \text{bzw} \quad \iiint_D f dx dy dz$$

Satz 9.4 (Elementare Eigenschaften des Integrals)

(Satz 9.1.2, 9.1.3)
Struktur:

9.1.4, 9.1.5 ① Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

und R integrierbar, $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind

$\alpha f, f+g$ R -integrierbar

Linearität: $\int_D (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_D f d\mu + \beta \int_D g d\mu$

Monotonie:

(2) Gilt $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D$, so folgt

$$\int_D f d\mu \leq \int_D g d\mu$$

(3) Positivität. Gilt für alle $x \in D$, $f(x) \geq 0$

(d.h. $f(x)$ ist nichtnegativ), so folgt

$$\int_D f d\mu \geq 0.$$

(4) Abschätzung

$$\left| \int_D f(x) d\mu \right| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| \cdot \text{vol}(D).$$

(5) Sind D_1, D_2, D Quadrs., $D = D_1 \cup D_2$ und
 $\text{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist f genau

dann über D integrierbar, falls f über D_1 und über D_2 integrierbar ist und es gilt

$$\int_D f d\mu = \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu$$

(Gebietsadditivität)

§ 9-2 Der Satz von Fubini.

Wie kann man das \mathbb{R} -Integral konkret berechnen?

Der Satz von Fubini hilft uns

Satz 9.5 (Satz von Fubini) Sei

Skizze 9.2.1) $Q = [a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$ und sei

$f \in C^0(Q)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_Q f \, d\mu &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy. \end{aligned}$$

d.h. das Integral von f über Q kann

iterativ durch 1-dimensionale Integration

bestimmt werden

Bsp 9.6 ① Sei $f(x, y) = 2x + 2yx$

$$\mathcal{D} = [0, 1] \times [-2, 2]$$

$$\iint_D f d\mu = \int_0^2 \left(\int_{-2}^1 (2x + 2yx) dx \right) dy$$

$$= \int_{-2}^2 \left(x^2 + yx^2 \Big|_0^1 \right) dy = \int_{-2}^2 (1+y) dy$$

$$= y + \frac{y^2}{2} \Big|_{-2}^2 = 4$$

oder $\int_0^1 \left(\int_{-2}^2 (2x + 2yx) dy \right) dx$

$$= \int_0^1 \left(2xy + \frac{y^2 x}{2} \Big|_{-2}^2 \right) dx$$

$$= \int_0^1 [(4x + 4x) - (-4x + 4x)] dx$$

$$= \int_0^1 8x dx = 4x^2 \Big|_0^1 = 4$$

$$\textcircled{2} \quad \int_0^1 \int_0^{2\pi} (e^x \sin y) dy dx$$

$$= \int_0^1 (-e^x \cos y \Big|_0^{2\pi}) dx$$

$$= \int_0^1 0 dx = 0$$

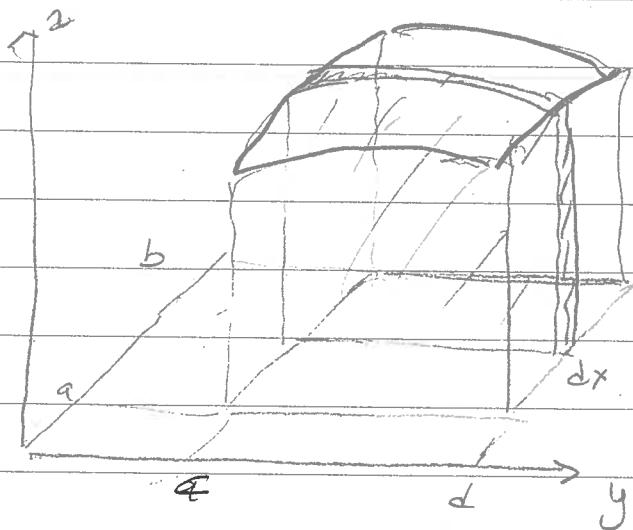
O oder

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^x \sin y dx \right) dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin y \Big|_0^1 \right) dy = \int_0^{2\pi} (e - 1) \sin y dy$$

$$= - (e - 1) \cos y \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Geometrische Deutung:



Im der Stütze ergibt sich als Volumen der markierten Schicht bei festem x und sehr kleiner Dicke dx nähерungsweise das Volumen

$$\left(\int_c^d f(x, y) dy \right), dx$$

Das Aufaddieren sämtlicher Schichtvolumen

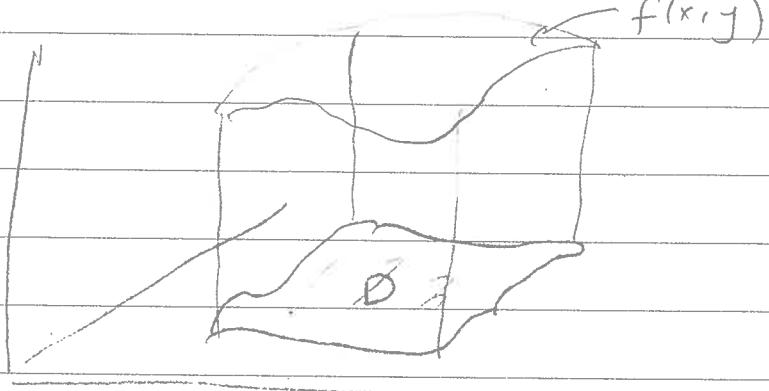
entspricht gerade der Integration über die Variable x , d.h. für das gesuchte

Volumen gilt

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Bis jetzt können wir nur Integrale über achsenparallel rechteckige bzw quaderförmige Bereiche berechnen.

Das reicht für viele praktische Aufgaben nicht aus. Meist ist der Integrationsbereich D gekrümmung oder zumindest anders begrenzt.



Die meisten praktischen Aufgaben lassen sich auf die Integration über sogenannte Normalbereiche zurückführen.

Defn 9.10 ① Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt ein Normalbereich bezüglich der x -Achse bzw. bezüglich der y -Achse falls es stetige Funktionen g, h bzw. \bar{g}, \bar{h} gibt mit

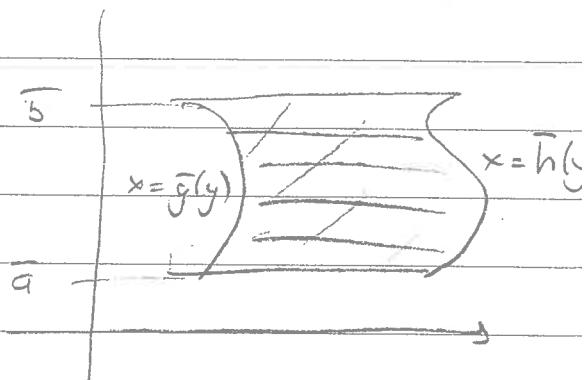
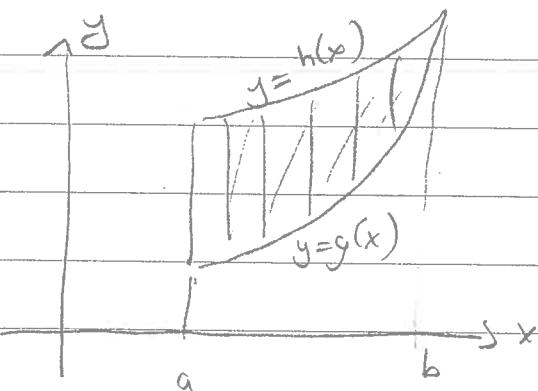
$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

bzw

$$D = \{(x, y) \mid \bar{a} \leq y \leq b \text{ und } \bar{g}(y) \leq x \leq \bar{h}(y)\}$$

(220)

Bsp. Kreise und Rechtecke sind Normalbereiche bzg beider Achsen.

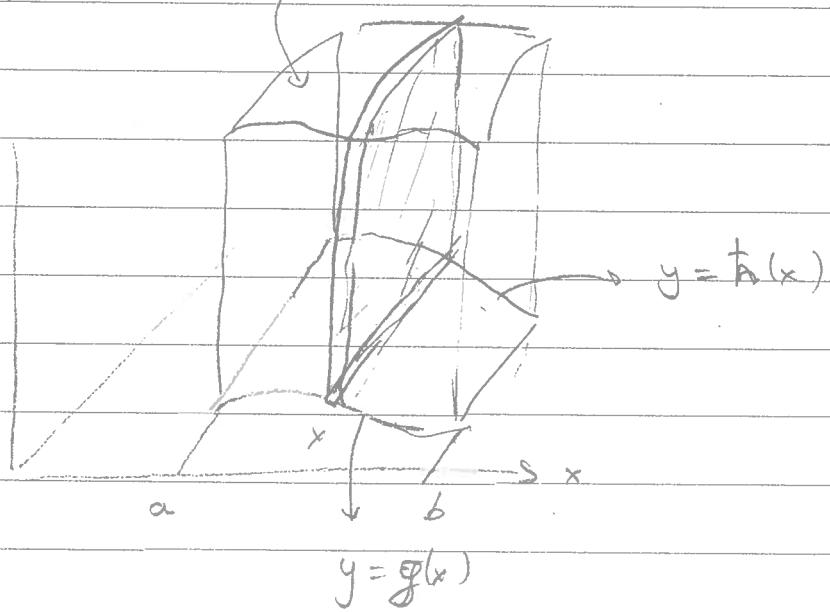


o

Normalbereich bzg x-achse

y-achse

Über Normalbereiche lässt sich sehr leicht integrieren. $z = f(x,y)$



Die markierte Scheibe bei $x = \text{const}$ mit kleiner Dicke dx besitzt näherungsweise des Volumen

$$V(x) = \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

Nun braucht man $V(x)$ nur noch über $[a, b]$ zu integrieren

$$V = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Satz 9-11: ① Ist $f(x)$ stetig auf einem

○ Normalbereich

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

so gilt

$$\iint_D f(x, y) d\mu = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

○

② bzw. Falls

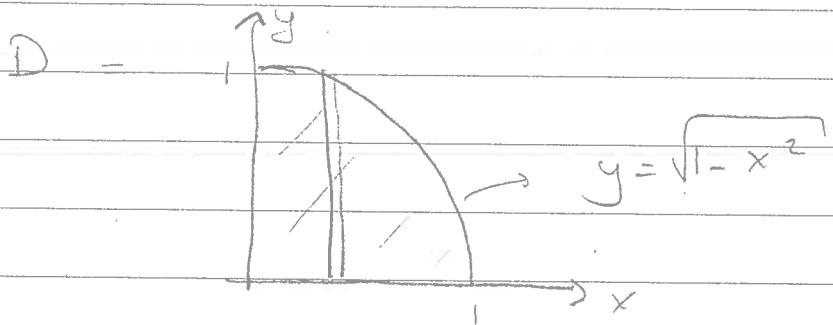
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{a} \leq y \leq \bar{b}, \bar{g}(y) \leq x \leq \bar{h}(y)\}$$

so gilt

$$\iint_D f(x, y) d\mu = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left(\int_{\bar{g}(y)}^{\bar{h}(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

222

Bsp 9-12 - ① sei $f(x,y) = x-y$



$$\int_0^1 \int_{y=0}^{x=\sqrt{1-x^2}} (x-y) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2} \Big|_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)$$

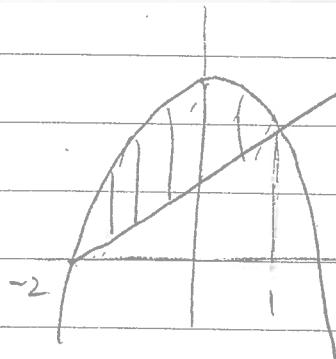
$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx \quad u = 1-x^2 \\ du = -2x dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int f d\mu = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

D

(2)

Sei D das Gebietdie Gerade $g(x) = x + 2$ und die Parabel $h(x) = 4 - x^2$ begrenzte Gebiet

$$\int_D x \, dy$$

O

$$\begin{aligned} \text{Schnittpunkte: } & x+2 = 4-x^2 \\ & x^2 + x - 2 = 0 \\ & (x-1)(x+2) \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Doppelintegrals zerlegen wir das Gebiet in Streifen parallel zur y -Achse.

Für festes x variiert y von $g(x) = x + 2$

O

$$\text{bis } h(x) = 4 - x^2$$

$$\int_D x \, dy = \int_{-2}^1 \left(\int_{x+2}^{4-x^2} x \, dy \right) dx$$

D

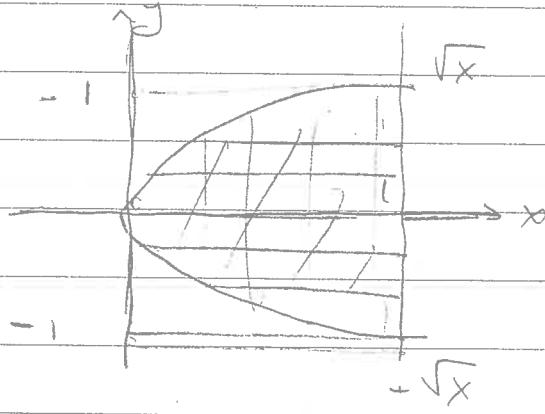
$$\begin{matrix} 4-x^2 \\ -2 \\ x+2 \\ 2 \end{matrix}$$

$$= \int_{-1}^2 x (4 - x^2 - x + 2) \, dx$$

$$= \int_{-1}^2 (2x - x^3 - x^2) \, dx = \left. x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right|_1^2$$

$$= (4 - 4 - 8/3) - (1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}) =$$

(3)

Sei $D:$ 

$$\int_D f \, d\mu = \int_{-1}^1 \left(\int_{x=y^2}^1 f(x) \, dx \right) dy$$

Zerlegung des Gebiets in Streifen
parallel zur x-Achse

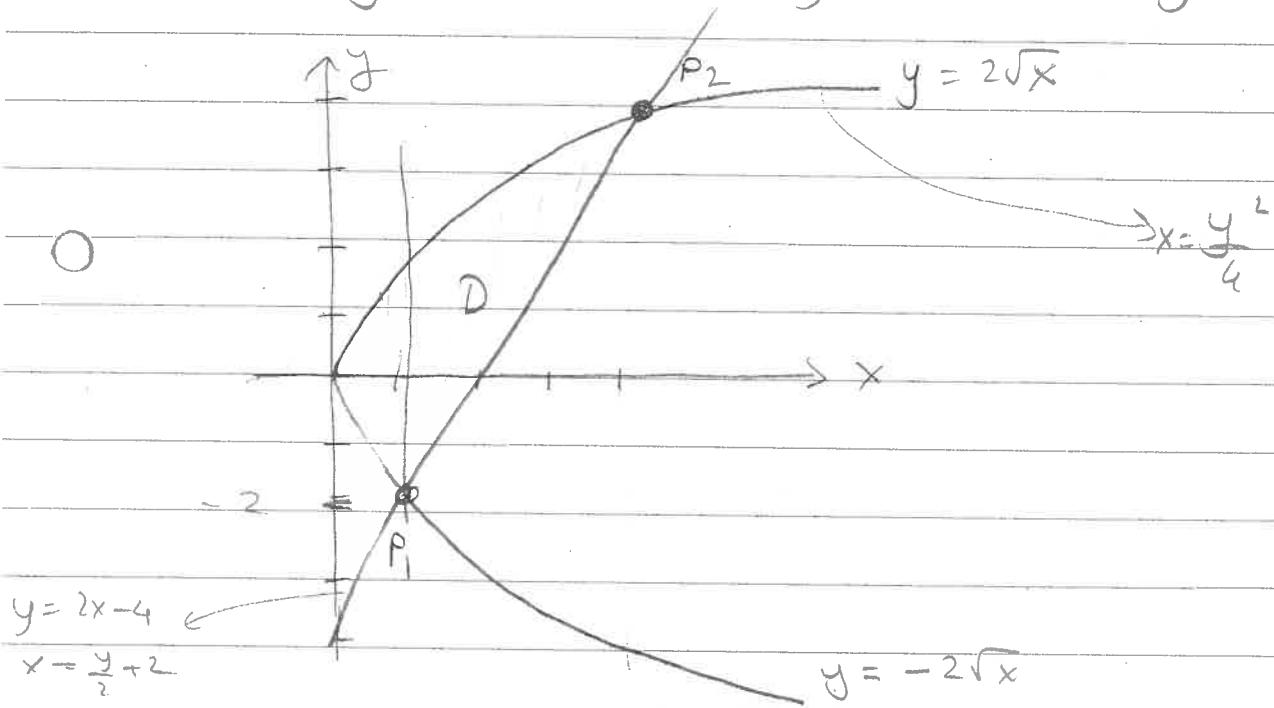
oder mit Zerlegung in Streifen parallel zur
y-Achse

$$\int_D f \, d\mu = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y) \, dy \right) dx$$

Manchmal muss man D zerlegen.

④ Bestimme $\int_D x \, dxdy$ wobei D

von $y^2 = 4x$ und $y = 2x - 4$ begrenzt wird



$$\text{Schnittpunkte } P_1; P_2 : 4x = y^2 = (2x-4)^2$$

$$\Rightarrow (2x-4)^2 = 4x \quad \dots$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ und } x = 4$$

$$P_1 = (1, -2) \quad P_2 = (4, 4)$$

Zerlegung des Gebiets in Streifen parallel zur y -Achse

$$\int_D x \, d\mu = \int_0^{2\sqrt{x}} \left(\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} x \, dy \right) dx + \int_1^4 \left(\int_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}} x \, dy \right) dx$$

$$\dots = 14.4$$

Wenn wir aussen nach y integrieren, brauchen wir keine Unterteilung

$$\int_D x \, d\mu = \int_{y=-2}^4 \left(\int_{x=y^2/4}^{y/2+2} x \, dx \right) dy$$

$$= \int_{-2}^4 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{y^2/4}^{y/2+2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(\left(\frac{y}{2} + 2\right)^2 - \frac{y^4}{16} \right) dy$$

226. (1)

Beispiel für das Anwenden der Integrationsrechenfolge

Bsp. (1)

$$e^y$$

$$\iint f(x,y) dx dy$$

0 |

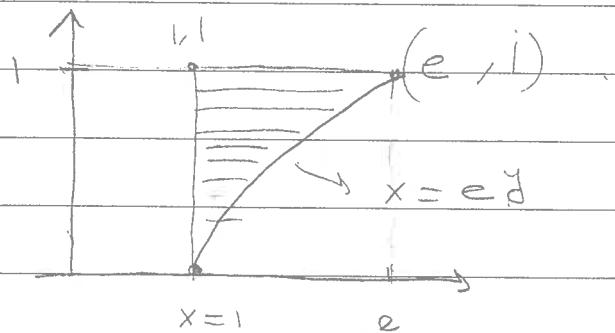
$$x = e^y \text{ und } x = 1$$



$$y = \ln x$$

$$1 = \ln x$$

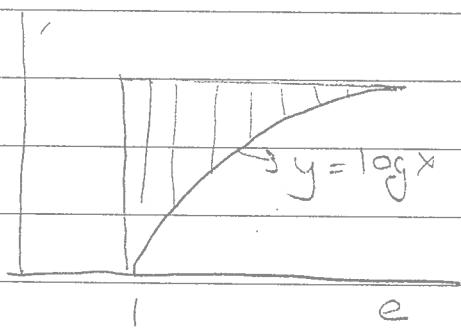
$$\Rightarrow x = e$$



$$e \quad y = 1$$

$$\iint f(x,y) dy dx$$

$$1 \quad y = \log x$$



Bsp. (1)

Berechre

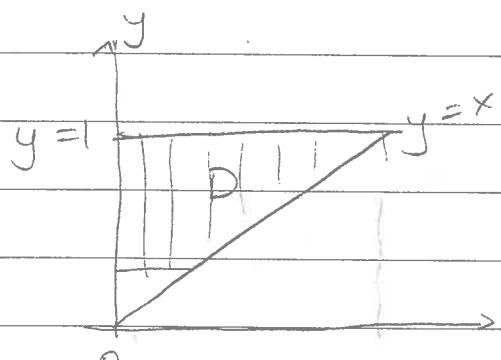
$$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx$$

Man kann das Integral $\int e^{y^2} dy$ nicht

direkt berechnen, weil man ... kein explizit Stammfunktion für e^{y^2} finden kann

226. (2)

Man kann sich die Reihenfolge der Zerlegung beliebig herausuchen damit die Rechnung möglichst einfach wird.



$$\int \int e^{y^2} dy dx$$

$x=1 \quad y=1$
 $x=0 \quad y=x$

$$= \int \int e^{y^2} dx dy$$

$y=1 \quad x=y$
 $y=0 \quad x=0$

$$= \int_0^1 \left[x e^{y^2} \Big|_{x=0}^{x=y} \right] dy$$

$$= \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{e^{y^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

Bmk 9-13

① Das Integral $A = \int_D 1 \, d\mu$

ergibt die Fläche von D

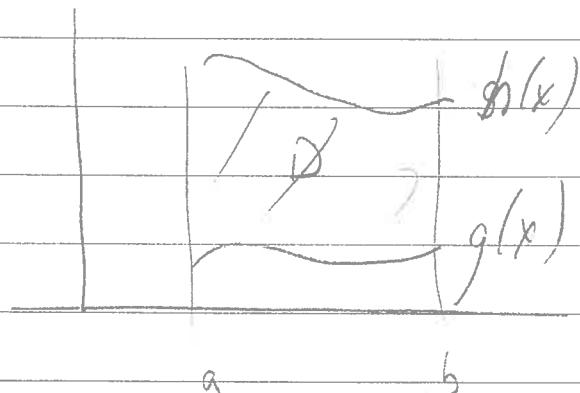
für einen Normalbereich bzg der

x -Achse erhalten wir daraus die

bekannte Formel

$$A = \int_D 1 \, d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1 \, dy \, dx$$

$$= \int_a^b (h(x) - g(x)) \, dx$$



② Interpretiert man $\rho(x,y)$ als ortsabhängige Flächenlichte, so erhält man mit

$$n = \int_D \rho(x,y) d\mu \text{ die } \underline{\text{Masse}} \text{ von } D.$$

Defn 9-14 Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ heißt

O Normalbereich, falls es eine Darstellung

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x),$$

und $\varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$

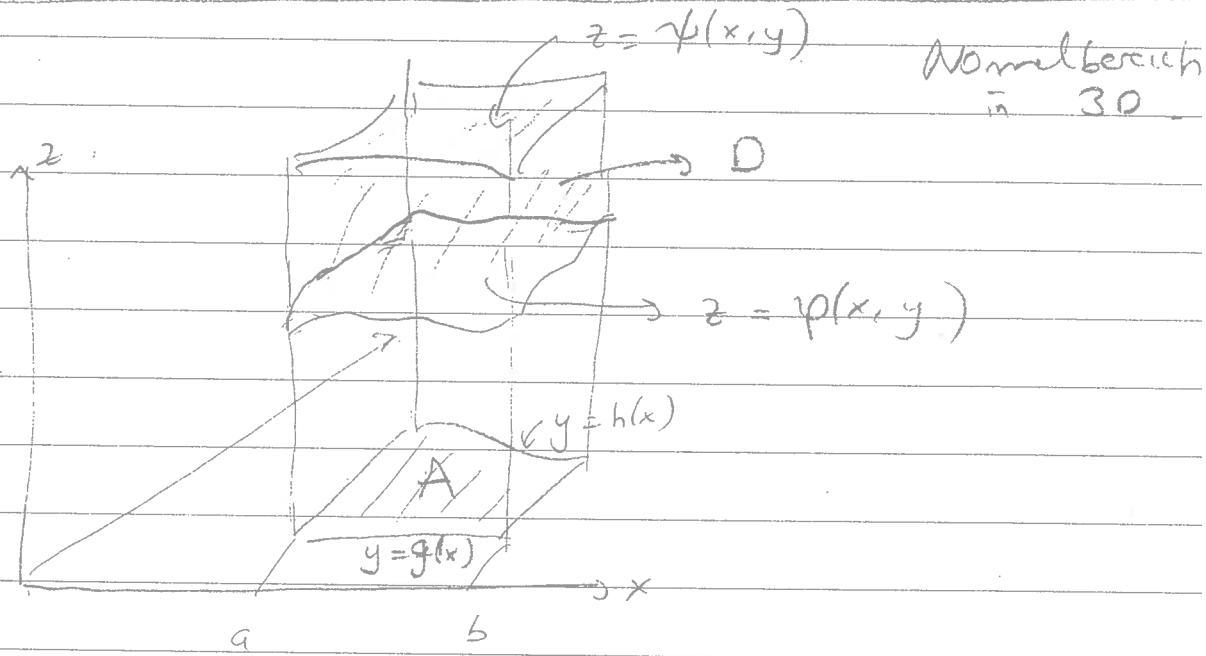
gibt

O Vertauscht man die Rollen von x, y , und z
 So entstehen weitere Mengen, die auch
 Normalbereiche genannt werden.

Satz 9-15 Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Normalbereich mit Darstellung wie oben, und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt

$$\int_D f d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx$$



$z = \varphi(x, y)$ und $z = \psi(x, y)$ stellen die "Grund" und Deckelfläche von D dar.

Der Normalbereich A ist die senkrechte Projektion von D in die x - y Ebene.

Dessen "Grund" und "Deckelfläche" sind durch $y = g(x)$ und $y = h(x)$ gegeben.

Bmk 9-16

Das Integral

$$V = \int_D f d\mu \quad \text{für } D \subset \mathbb{R}^3$$

ergibt das Volumen von D .

→ Für einen Normalbereich D erhält man

$$D = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

$$V = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} 1 dz dy dx$$

$$= \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} (\psi(x, y) - \varphi(x, y)) dy dx$$

§ 9.3 Substitutionsregel

Häufig sind kartesische Koordinaten für die Berechnung von Integralen eher ungeignet.

z.B. wenn man Symmetrien bezüglich gewisser Punkte oder Achsen nutzen will

Wir behandeln als nächstes Vorbilddarstellungen vom Typ $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und

verallgemeinern die 1-Dim. Substitutionsregel:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

mit f stetig, $x = \varphi(t)$ $\varphi: [a, b] \rightarrow I$ stetig differenzierbar, I = Intervall

Zunächst erinnern wir uns an die Lineare Algebra:

731

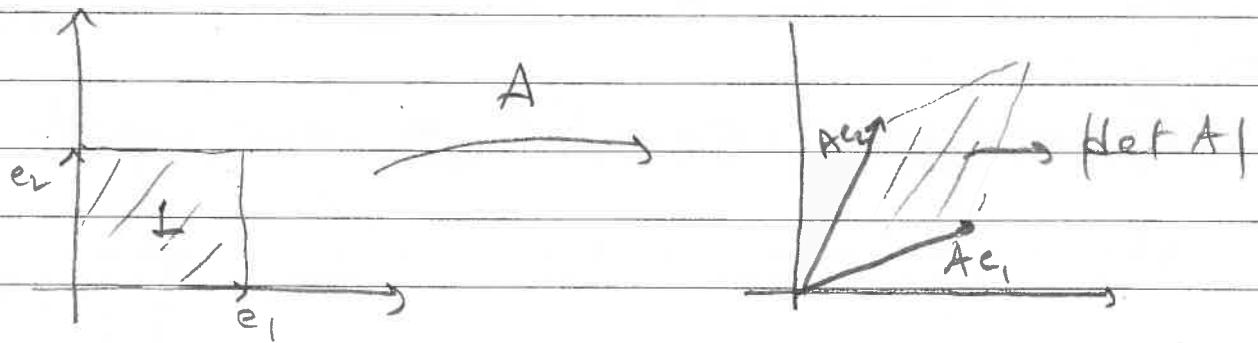
Das Bild des Einheitsquadrats/würfels

unter der linearen Abbildung

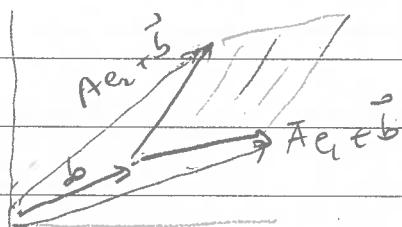
$$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\vec{x} \rightarrow A\vec{x} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ist ein Parallelogramm mit Fläche $\det A$



Dies bleibt wahr, wenn man zur affin-linearen Abbildung $\Phi(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ betrachtet - es kommt ja nur ein Verschiebung zu



Nun, betrachten wir eine differenzierbare nichtlineare Transformation $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dann gilt zumindest nahe eines festen Punktes $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(\vec{x}) \approx \Phi(\vec{x}_0) + d\Phi(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Die rechte Seite stellt gerade eine

Abbildung vom Typ $A\vec{x} + \vec{b}$ dar

wobei die Jacobi Matrix $d\Phi(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

die Rolle von A (und $\Phi(\vec{x}_0)$ von \vec{b})

übernimmt. Somit ist der lokale

Flächenverzerrungsfaktor von Φ gegeben

durch $|\det d\Phi(\vec{x}_0)|$ d.h. den Betrag der

Jacobi- oder Funktionaldeterminante

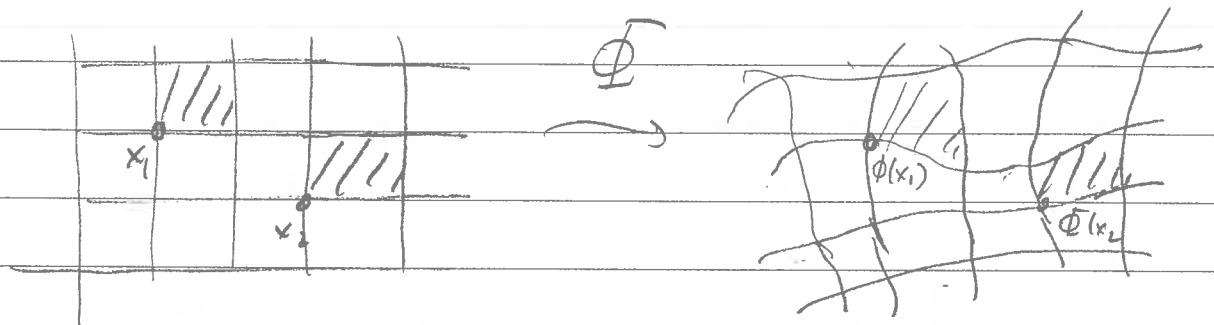
Die lokale Flächenverzerrung muss bei

der Substitutionen in Integralen berücksichtigt

werden und zwar in der Form:

$$d\vec{x} = |\det d\Phi(\vec{y})| d\vec{y}, \text{ falls } \vec{x} = \Phi(\vec{y})$$

Geometrische Darstellung in \mathbb{R}^2



Die Flächen der einander entsprechenden markierten Vierecke unterscheiden sich gerade um den Faktor $|\det(D\Phi(x_1))|$ bzw.

$$|\det(D\Phi(x_2))|$$

Substitutionsregel

Satz 9.17 (Struwe 8-5.2) Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen

$\Phi: U \rightarrow V$ bijektive, stetig differenzierbare

mit $\det(D\Phi(\vec{y})) \neq 0 \quad \forall \vec{y} \in U$, sowie

$f: V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_V f(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) = \int_U f(\Phi(\vec{y})) |\det(D\Phi(\vec{y}))| d\mu(\vec{y})$$

$$V = \Phi(U)$$

Bmk. Im Spezialfall $\gamma = 1$ mit

Intervallen $V = [a, b]$ und $U = [\tilde{a}, \tilde{b}]$

besagt die obige Formel

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f(\varphi(y)) |\varphi'(y)| dy$$

$$V = [a, b] = \varPhi(U) \quad [\tilde{a}, \tilde{b}]$$

Während die Substitutionsformel ein Integral einer
variablen

besagt

$$\int_{\varphi(\tilde{a})}^{\varphi(\tilde{b})} f(x) dx = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\varphi(y)) \varphi'(y) dy$$

Trotz aller gleichen wegen der Betragsschritte sind
diese Formeln äquivalent. Denn für φ monotone
wachsend gilt $\varphi' \geq 0$ und $\varphi(\tilde{a}) = a$ und $\varphi(\tilde{b}) = b$
und die Formel sind direkt gleich.

Andernfalls ist φ monoton fallend und somit
 $\varphi' \leq 0$ und $\varphi(\tilde{a}) = b$ und $\varphi(\tilde{b}) = a$. Dann
entspricht der Vorzeichenunterschied auf der
rechten Seite der Richtungsumkehr $\varphi(\tilde{a}) > \varphi(\tilde{b})$
auf der linken Seite.

Man kann dies so ausdrücken, dass das
Integrationselement dx eine Orientierung besitzt,
das Volumenelement $d\mu(x)$ nicht.

Bsp ① Berechre $\iiint 1 \, d\mu$

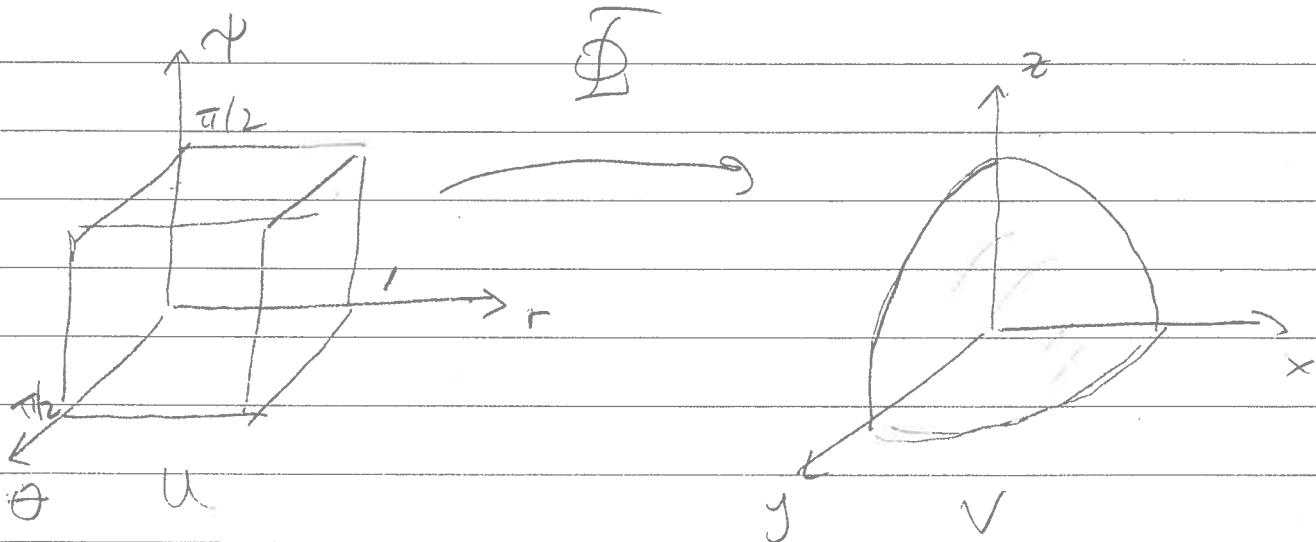
$$\text{wobei } V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$$

$$\begin{cases} & x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

Kugel oktanten.

Es ist einfacher in Kugelkoordinaten zu berechnen.

$$\vec{\phi}(r, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \psi \\ r \sin \theta \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}$$



234

Die Transformation Φ ist auf ganz \mathbb{R}^3
definiert und mit

$$u = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{geht}$$

$$\Phi(u) = v.$$

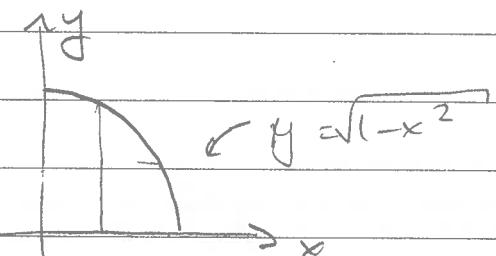
$$\det(d\Phi) = r^2 \cos \varphi$$

$$vol(v) = \int d\mu(\vec{x}) = \int_0^r \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \pi/6.$$

② Berechre das Integral

$$\iint_D x \, dy \, dx \quad \text{wobei } D = \text{Viertelkreis}$$

$$D$$



$$\sqrt{1-x^2}$$

$$\int \int_D x \, dy \, dx =$$

$$x=0 \quad y=0$$

$$= \int_0^1 \left(x \sqrt{1-x^2} \right) dx = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{u^{1/2}}{2} du$$

$$1-x^2 = u$$

$$-2x \, dx = du$$

$$= +\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = +\frac{1}{3} \cdot = +\frac{1}{3}.$$

235

oder $\iint_D x \, dx \, dy$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$dx \, dy = r \, dr \, d\theta$$

$$\iint_D r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos \theta \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^1 \right) d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

③ Die Substitutionssregel in mehreren Variablen ist manchmal nützlich auch zur Berechnung von Integralen in einer Variable.

Zunächst möchten wir das Integral

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

Wir berechnen I durch Berechnung eines Flächenintegrals wie folgt.

$$\text{Es gilt } I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2$$

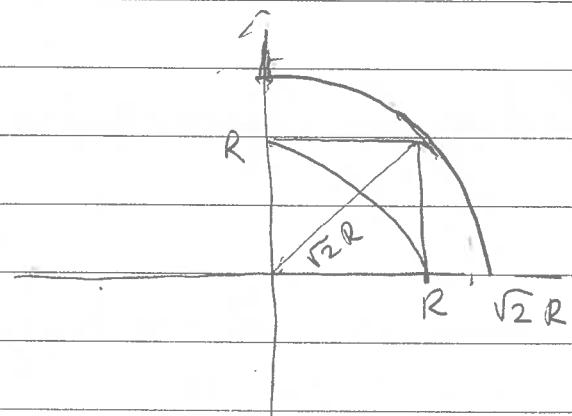
$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^R e^{-y^2} dy \right)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} I_R$$

für $I_R = \int_{(0,R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

Bezeichnet K_R den Viertelkreis im 1. Quadranten mit Radius R , so gilt

$$\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I_R \leq \int_{K_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$



Die Integrale über K_p berechnet man nun über Polarkoordinaten

$$\int\limits_{K_p} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^r e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$$

w) somit gelten die Abschätzungen

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq I_R \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

und gilt schliesslich

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \frac{\pi}{4}$$

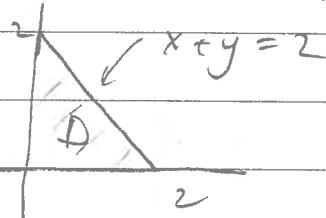
) d.h. $I^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \frac{\pi}{4}$

d.h. $I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$

Substitution regel

Bsp. ④ $\int e^{(y-x)/(y+x)} d\mu_{(x,y)}$

wobei



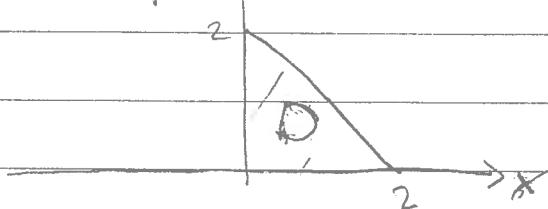
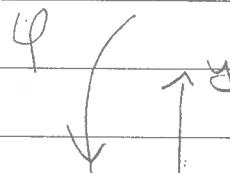
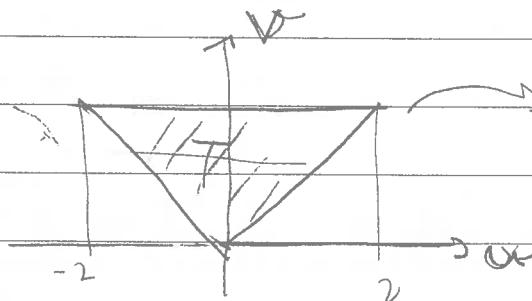
Wir setzen $u = y - x$ $\rightarrow x = \frac{1}{2}(v - u)$ $\left\{ \begin{array}{l} (x) = \phi(u) \\ (y) = \psi(v) \end{array} \right.$
 $v = y + x$ $\rightarrow y = \frac{1}{2}(v + u)$

$$\det \left(\begin{pmatrix} \phi(u,v) & \psi(u,v) \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$x=0 \Rightarrow v=u$

$y=0 \Rightarrow v=-u$

$x+y=2 \Rightarrow v=2$



$$\iint_D e^{(y-x)/y+x} d\mu(x,y) = \iint_T e^{u/v} |1-\frac{1}{2}| d\mu(u,v)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_{-v}^v e^{u/v} du \right) dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(v e^{u/v} \Big|_{-v}^v \right) dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 v \left(e - \frac{1}{e} \right) dv = \left(e - \frac{1}{e} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{2} \Big|_0^2 \right)$$

$$= e - \frac{1}{e}$$

§ 9.4 Der Satz von Green (Skript 8.4)

Wir erinnern uns: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Ist $\mathbf{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein C^1 -Vektorfeld

mit Potential f , so folgt

$$\text{rot } (\mathbf{v}(x)) = \text{rot}(\nabla f(x)) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

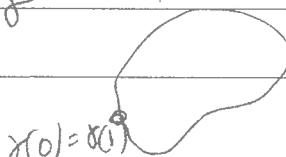
$$\text{wobei } \text{rot}(\mathbf{v}(x,y)) = \frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y}$$

$$\text{So } \text{rot } \mathbf{v} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$$

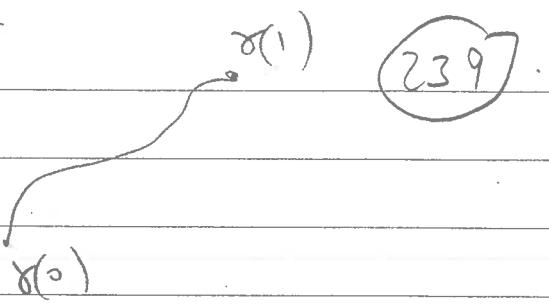
In zwei Dimensionen eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials

Die Bedingung $\text{rot}(\mathbf{v}) = 0$ ist sogar eine hinreichende Bedingung, falls das Gebiet Ω einfach zusammenhängend ist.

In diesem Fall $\oint_{\gamma} \mathbf{v} = \int_{\gamma} \nabla f \cdot ds = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0$.

for geschlossene veg γ . 

nicht geschlossene
und für einweg γ



239

$$\int_{\gamma} v = \int_{\gamma} \nabla f \cdot ds = f(r(1)) - f(r(0))$$

d.h. falls der Vektorfeld ein Gradientenfeld ist,
ist das Integral $\int_{\gamma} v$ eine Funktion der
Endpunkte ist.

Anders gesagt, es gibt Fälle wo bei ein
Weg integral (d.h. ein Integral auf
einem 1-dimensional Objekt mit Hilfe
einer 0-dimensionalen Menge berechnet
werden kann).

Bspk. Auch für Funktionen einer Variable:
Falls $F' = f$ ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Hauptsatz der Integralrechnung einer Variab.

Frag: Gibt es auch Fälle wobei ein 2 dim. und Integral mit Hilfe einer 1-dim'l Menge berechnet werden kann?

Die Antwort ist genau der Inhalt des Satz von Green.

Satz 9.19. (Green). Sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ein Gebiet dessen Rand $\partial\Omega$ ein stückweise C^1 Parameterdarstellung hat. Sei U eine offene Menge mit $\Omega \subset U$ und sei $f = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ wobei

$P, Q \in C^1(U)$. Dann gilt

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\mu = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy$$

wobei $\partial\Omega$ so parametrisiert wird dass Ω zur linken des Randes liegt



zu 1)

Anders gesagt sei $V = (P, Q)$ ein C^1 -Vektorfeld auf dem Gebiet U . sei $\Sigma \subset U$ ein Gebiet dessen rand $\partial\Sigma$ ein stückweise C^1 -Parametrisierung hat. Die parametrisierung von $\partial\Sigma$ sei so gewählt dass \vec{n} stets links zur Durchlaufrichtung liegt. Dann gilt

$$\int_V ds = \int_{\partial\Sigma} P dx + Q dy = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot}(V) d\mu.$$

Bevor wir die Idee des Beweis geben, geben wir einige Beispiele und Anwendungen

Bsp. 9.20 ① Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x, y) = (y + 3x, y - 2x) \text{ und wir}$$

möchten dieses Kraftfeldes entlang der im gegenurzeigersinn durchlaufenen Ellipse
 $x: 4x^2 + y^2 = 4$.

Die Arbeit ist $\int_F ds = \int_P dx + Q dy$

$$= \int_8 (y + 3x) dx + (y - 2x) dy - \iint_{\Sigma} \frac{\partial(y - 2x)}{\partial x} - \frac{\partial(y + 3x)}{\partial y} d\mu$$

Zum erst berechnen wir die Weg-integel

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{s} = \int_{\gamma} (y+3x) dx + (y-2x) dy$$

$$\text{wobei } \gamma : 4x^2+y^2=4$$

O Als parameterisierung nehmen wir

$$(x, y) = (\cos \theta, 2 \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\gamma'(\theta) = (-\sin \theta, 2 \cos \theta)$$

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} ((\cos \theta + 6 \sin \theta)(-\sin \theta) d\theta + (2 \sin \theta - 2 \cos \theta)(2 \cos \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (3 \sin \theta \cos \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} - 2 \sin^2 \theta - 4) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} [\frac{3}{2} \sin 2\theta - 2 \sin^2 \theta - 4] d\theta = -10\pi$$

O wir benutzen die Formel $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Aber wenn wir der Satz von Green benötigen
haben wir

$$\int\limits_{\gamma} (y+3x) dx + (y-2x) dy$$

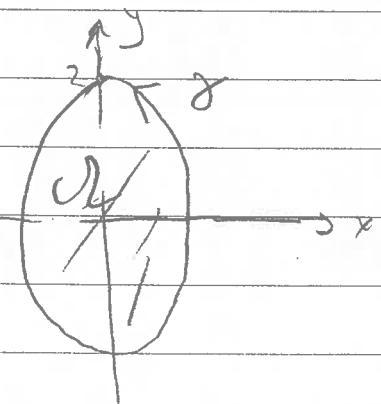
$$= \iint_D \left(\frac{\partial(y-2x)}{\partial x} - \frac{\partial(y+3x)}{\partial y} \right) d\mu$$

$$= \iint_D (-2-3) d\mu = -5 \iint_D d\mu$$

$$= -5 (\text{Flächeninhalt von Ellipse})$$

$$4x^2 + y^2 = 4$$

$$= (-5)(\pi(2 \cdot 1)) = -10\pi$$



Zinfelder

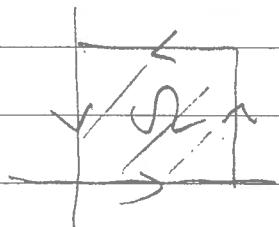
② Berechne das Weg integral

$$\int (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy$$

$\partial\Omega$

Wobei Ω das Quadrat mit Eckpunkten

$(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ im
gegenuhrzeigersinn ist.



$$\int (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy$$

$\partial\Omega$

$$= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} [x^2 - 2xy] - \frac{\partial}{\partial y} (5 - xy - y^2) \right] d\mu$$

$$= \iint_{\Omega} (2x - 2y) - (-x - 2y) d\mu = \iint_{\Omega} 3x d\mu$$

$$= 3 \left(\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right) dy \right) = \frac{3}{2} \int_0^1 dy = \frac{3}{2}$$

(245)

③ Mittels des Satzes von Green können wir den Flächeninhalt eines Gebiets mithilfe eines Wegintegrals berechnen.

Und zwar

$$\text{Flächeninhalt}(\Omega) = \iint_{\Omega} dm = \iint_{\Omega} dm$$

$$= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dm \quad \text{wobei}$$

P und Q funktionieren mit $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ sind.

Zum Beispiel können wir $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$
 $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$

nehmen. Daraus folgt dass

$$F(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} -y dx + x dy$$

Als ein Bsp. können wir verifizieren dass der Flächeninhalt des Kreis $x^2 + y^2 \leq 4 = \Omega$ gleich 4π ist.

(246)

Betrachte

$$\text{Iu Parametrisierung: } \gamma(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

des Kreises $\partial\Omega$

$$F(\Omega) = \iint_{\Omega} d\mu = \frac{1}{2} \int_{\Omega} -y dx + x dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\sin\theta)(-2\sin\theta) + (2\cos\theta)(2\cos\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 4(\sin^2\theta + \cos^2\theta) d\theta = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$