§ 8.6 Vektorwertige Funktionen

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $f = (f^i)_{1 \leq i \leq l} \quad \Omega \Longrightarrow \mathbb{R}^l$

Defn 8.57 (8.6.1 stimme) ① Die Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, falls jede Komponente f^i, $1 \leq i \leq l$ an der Stelle x_0 diff. ist.

Das Differenzial $df(x_0)$ hat die Gestalt

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} df^1(x_0) \\ \vdots \\ df^n(x_0) \end{pmatrix}$$

② f heisst auf Ω diff. (bzw von der Klasse C^m, $m \geq 1$) falls jedes f^i diff. ist (bzw $f^i \in C^m(\Omega)$) $1 \leq i \leq l$.

Bmk 8.58 (8.6.1) 1) Bzgl der Standardbasis dx^j, $1 \leq j \leq n$ erhalten wir

$$df^i(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0)\, dx^j = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x^n} \right.$$

die Darstellung

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0) & & \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x_0) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f^\ell}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^\ell}{\partial x^2}(x_0) & & \frac{\partial f^\ell}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Die $\ell \times n$ Matrix $df(x_0) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) \right)_{1 \leq i \leq \ell,\ 1 \leq j \leq n}$

heisst Jacobi oder Funktionalmatrix von f an der Stelle x_0.

(2) Auch im vektorwertigen Fall ist die Funktion f genau dann differenzierbar in x_0, wenn eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ existiert mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

Bsp 8.59 ① $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ mit

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

→ 205-1

Es gelten die üblichen Differentiationsregeln

Satz 8.60
(8.6.1 Struwe) Sei $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ an der stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Funktionen αf und $f+g$ sowie das Skalarprodukt von f und g an der stelle x_0 diff. und

1) $d(\alpha f)(x_0) = \alpha\, df(x_0)$

2) $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$

3) $d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) \cdot dg(x_0) + g(x_0) \cdot df(x_0)$

wobei $f(x_0) \cdot dg(x_0) = \sum_{i=1}^{\ell} f^i(x_0)\, dg^i(x_0)$ ...

Satz 8.61 (Kettenregel) Seien $g: \Omega \to \mathbb{R}^\ell$
(8.6.2 Struwe) an der stelle $x_0 \in \Omega$ und
$f: \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ an der stelle $g(x_0)$
differenzierbar.

Polarkoordinaten

Bsp 8.59 (2) $f : [0,\infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

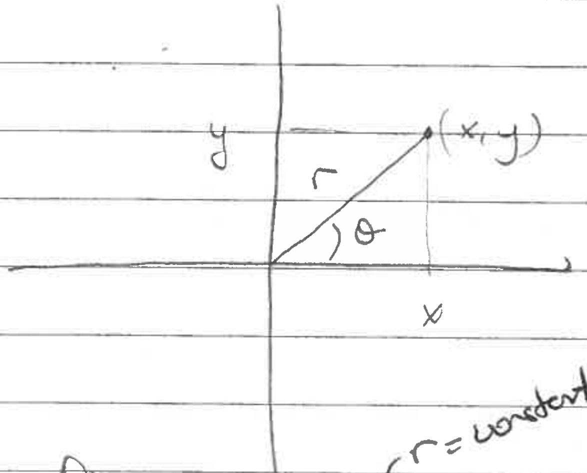
$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} x = \\ y = \end{matrix} \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}$$

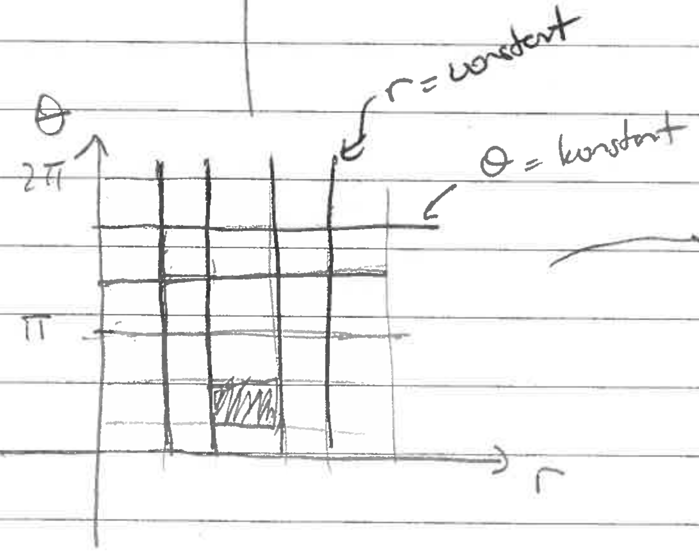
$$df^1(r,\theta) = (\cos\theta \quad -r\sin\theta)$$

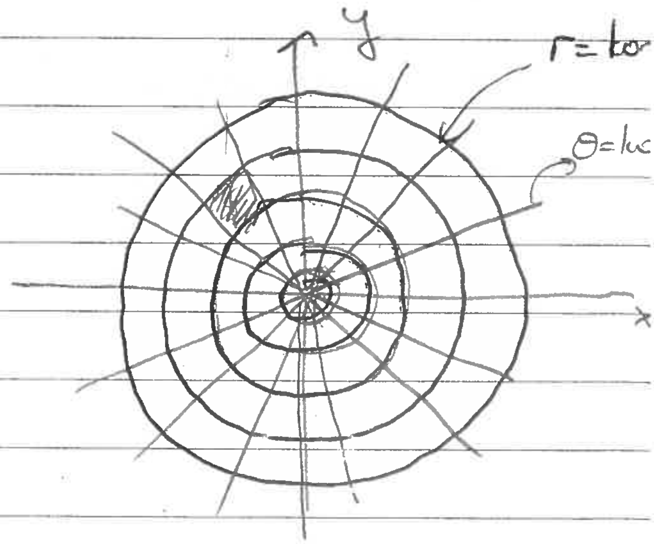
$$df^2(r,\theta) = (\sin\theta, \quad r\cos\theta)$$

$$df(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \leftarrow \text{Jacobi Matrix}$$

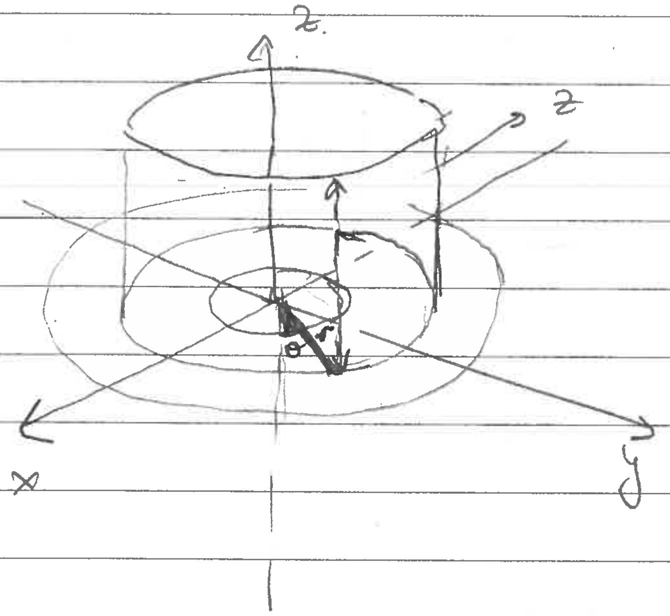
$$\det(df(r,\theta)) = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$







Bsp 8-59 (3) Zylinderkoordinaten



Die x, y Anteile werden in Polarkoordinaten transformiert und die z Koordinate beibehalten.

$$f : (0,\infty) \to [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} x = \\ y = \\ z = \end{matrix} \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}$$

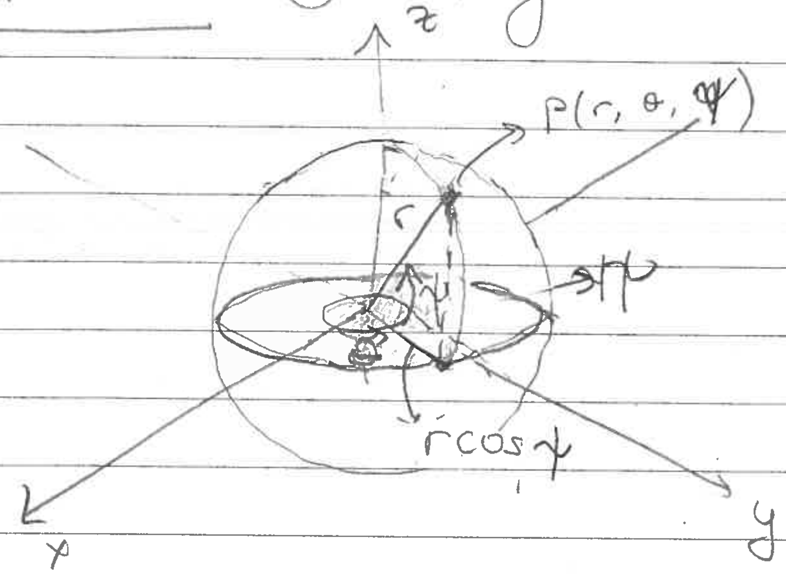
$$df(r,\theta,z) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Jacobimatrix

$$\det\left(df(r,\theta,z)\right) = r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r.$$

(Rotationssymmetrie bezüglich z Achse)

20.5.3

Bsp 8.59. (4) Kugelkoordinaten



r = radius

$$f : [0,\infty) \times [0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

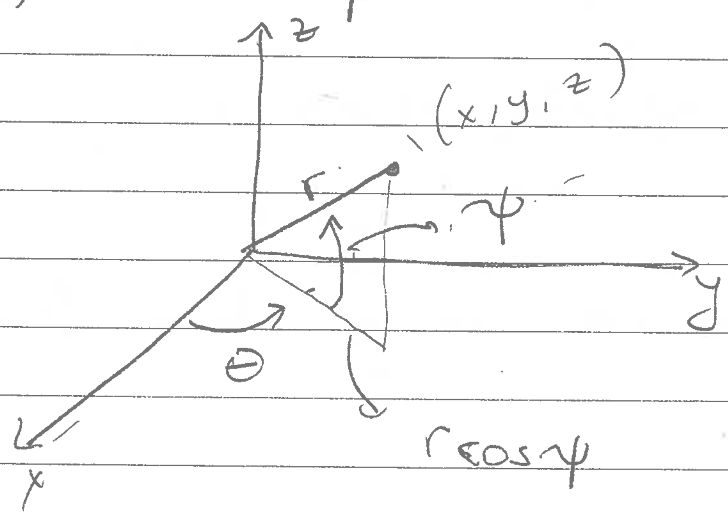
$$f\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\psi \\ r\sin\theta\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$df(r,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & -r\sin\theta\cos\psi & -r\cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\psi & r\cos\theta\cos\psi & -r\sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\det(df) = r^2\cos\psi$$

ψ: Breitengrad

θ: Längengrad



(Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

Dann ist die Funktion $f\circ g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und

$$d(f\circ g)(x_0) = \underbrace{df(g(x_0))}_{2\times 2 \text{ Matrix}} \cdot \underbrace{dg(x_0)}_{2\times 3 \text{ Matrix}}$$

Bsp. (1) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \to \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \qquad df = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \to \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ xyz \end{pmatrix} \qquad dg = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$(f\circ g) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \to \begin{pmatrix} (x^2+y^2+z)^2 - (xyz)^2 \\ 2(x^2+y^2+z^2)(xyz) \end{pmatrix}$$

$$d(f\circ g)(x,y,z) = df(g(x,y,z)) \cdot (dg)(x,y,z)$$

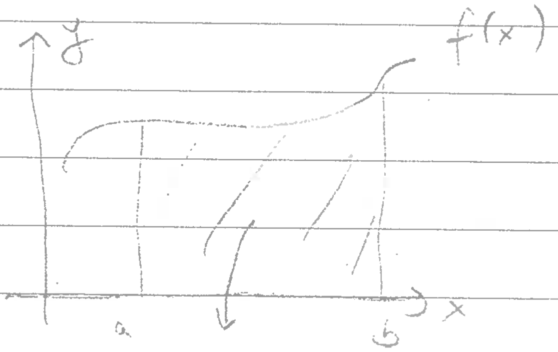
$$= \begin{pmatrix} 2(x^2+y^2+z^2) & -2xyz \\ 2xyz & 2(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x(x^2+y^2+z^2) - 2xy^2z^2 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

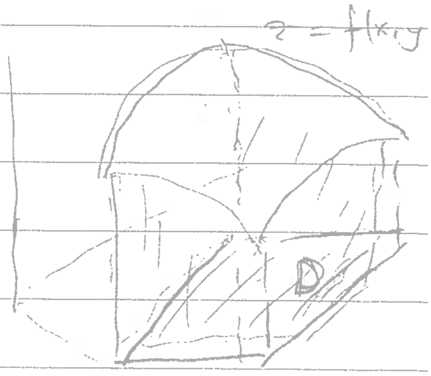
§ 9. Integration in $\mathbb{R}^n$.

Im Eindimensionalen hatten wir mit dem Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ den Flächeninhalt unter dem Graphen von f berechnet

Wir suchen nach einer Verallgemeinerung mit der man z.B Volumen unter dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen berechnen kann



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$V = \int_D f(x,y)\,d\mu$$

Erinnerung: Bestimmtes Riemann-Integral einer Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a,b]$:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Das Integral I war als Grenzwert von Riemannscher Ober und Untersumme definiert (falls diese Grenzwert jeweils existieren und übereinstimmten)

Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale ist Analog. Aber der Definitionsbereich D ist komplizierter.

Wir betrachten zunächst den Fall zweier Variabler, $n=2$, und einen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

D.h. D ist ein kompakter Quader (Rechte

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion

<u>Defn 9.1</u> Mann nennt $Z = \{(x_0, x_1 \ldots x_n), (y_0, y_1 \ldots y_m)\}$

eine <u>Zerlegung</u> des Quaders $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

falls gilt $a_1 = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b_1$

$a_2 = y_0 < y_1 \ldots < y_m = b_2$

mit $Z(D)$ wird die Menge der Zerlegungen von D bezeichnet

(2) Die <u>Feinheit</u> einer Zerlegung $Z \in Z(D)$ ist

$$\|Z\| := \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

(3) Für eine vorgegebene Zerlegung Z, nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die Teilquader der Zerlegung Z

Das <u>Volumen</u> des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\mathrm{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

(4) Für beliebige Punkte $\xi_{\underline{i}\underline{j}} \in Q_{\underline{i}\underline{j}}$ der jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{\underline{i},\underline{j}} f(\xi_{\underline{i}\underline{j}}) \, vol(Q_{\underline{i}\underline{j}})$$

eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z

(5) Analog zum Integral einer Variablen heissen für eine Zerlegung Z

$$U_f(Z) := \sum_{\underline{i},\underline{j}} \inf_{\underline{x} \in Q_{\underline{i}\underline{j}}} f(\underline{x}) \, vol(Q_{\underline{i}\underline{j}})$$

$$O_f(Z) := \sum_{\underline{i},\underline{j}} \sup_{\underline{x} \in Q_{\underline{i}\underline{j}}} f(\underline{x}) \, vol(Q_{\underline{i}\underline{j}})$$

die Riemannsche Untersumme bzw.
" Obersumme von $f(x)$

Bmk 9.2 (1) Es gilt

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

d.h. eine Riem. Summe zur Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter und Obersumme dieser Zerlegung.

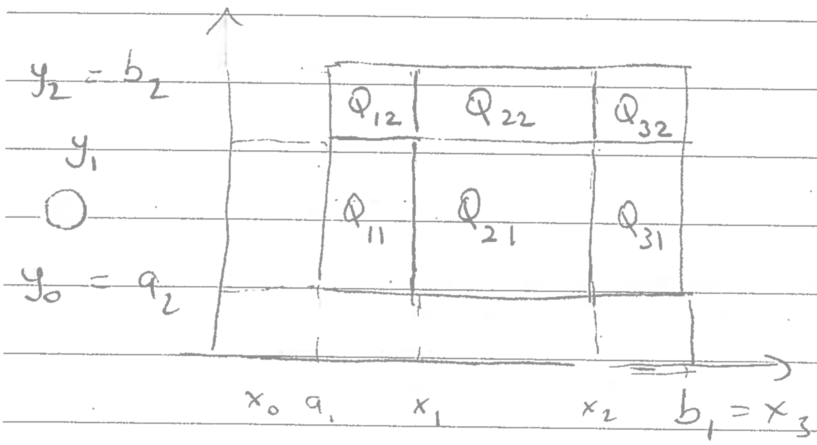
② Entsteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x_i oder/und y_j so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \quad \text{und}$$

$$O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

○ Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2).$$



Sei $f: D \to \mathbb{R}$ beschränkt (2.2)

Defn 9.3 ① Riemannsches Unter-Integral

bzw. Riemannsches Ober-Integral der

Funktion $f(x)$ über D ist

$$U_f := \sup \{ U_f(Z) : Z \in Z(D) \}$$

$$:= \int_{\underline{D}} f(x)\, d\mu$$

$$O_f := \operatorname{Inf} \{ O_f(Z) : Z \in Z(D) \}$$

$$:= \overline{\int_{D}} f(x)\, d\mu$$

② Die Funktion $f(x)$ nennt man

Riemann-integrierbar über D, falls

Unter und Oberintegral übereinstimmen.

Das Riemann integral von $f(x)$ über D

ist $$\int_D f(x)\, d\mu = \overline{\int_{D}} f(x)\, d\mu = \int_{\underline{D}} f(x)\, d\mu$$

Bmk

In höheren Dimensionen, $n > 2$, ist die Vorgehensweise analog.

Schreibweise: Für $n=2$, $n=3$

$$\int_D f(x,y)\,d\mu \quad \text{bzw} \quad \int_D f(x,y,z)\,d\mu$$

oder auch $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ bzw $\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

oder $\iint_D f\,dx\,dy$ bzw $\iiint_D f\,dx\,dy\,dz$

Satz 9.4 (Elementare Eigenschaften des Integrals).

(Stmne: Satz 9.1.2, 9.1.3, 9.1.4, 9.1.5)

① Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ beschränkt und R integrabel, $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind αf, $f+g$ R-integrabel

Linearität: $\int_D (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_D f\,d\mu + \beta \int_D g\,d\mu$.

Monotonie:

(2) Gilt $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in D$, so folgt

$$\int_D f \, d\mu \leq \int_D g \, d\mu$$

(3) Positivität. Gilt für alle $x \in D$, $f(x) \geq 0$

(d.h. $f(x)$ ist nichtnegativ), so folgt

$$\int_D f \, d\mu \geq 0.$$

(4) Abschätzung

$$\left| \int_D f(x) \, d\mu \right| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| \, \mathrm{vol}(D).$$

(5) Sind D_1, D_2, D Quader, $D = D_1 \cup D_2$ und $\mathrm{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist f genau dann über D integrierbar, falls f über D_1 und über D_2 integrierbar ist und es gilt

$$\int_D f \, d\mu = \int_{D_1} f \, d\mu + \int_{D_2} f \, d\mu$$

(Gebietsadditivität)

§ 9.2 Der Satz von Fubini

Wie kann man das R-Integral konkret berechnen?

Der Satz von Fubini hilft uns

Satz 9.5 (Satz von Fubini) Sei

(Skript 9.2.1) $Q = [a,b] \times [c,d] \in \mathbb{R}^2$ und sei

$f \in C^0(Q)$. Dann gilt

$$\int_Q f \, d\mu = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b (f(x,y) \, dx \right) dy .$$

d.h. das Integral von f über Q kann iterativ durch 1-dimensionale Integration bestimmt werden

Bsp 9.6 ① Sei $f(x,y) = 2x + 2yx$

$Q = [0,1] \times [-2,2]$.

$$\int_Q f\,d\mu = \int_{-2}^{2} \left(\int_0^1 (2x + 2yx)\,dx \right) dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(x^2 + yx^2 \Big|_0^1 \right) dy = \int_{-2}^{2} (1+y)\,dy$$

$$= y + \frac{y^2}{2} \Big|_{-2}^{2} = 4$$

oder $$\int_0^1 \left(\int_{-2}^{2} (2x + 2yx)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(2xy + y^2 x \Big|_{-2}^{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[(4x + 4x) - (-4x + 4x) \right] dx$$

$$= \int_0^1 8x\,dx = 4x^2 \Big|_0^1 = 4.$$

② $$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (e^x \sin y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(-e^x \cos y \Big|_0^{2\pi}\right) dx$$

$$= \int_0^1 0 \, dx = 0$$

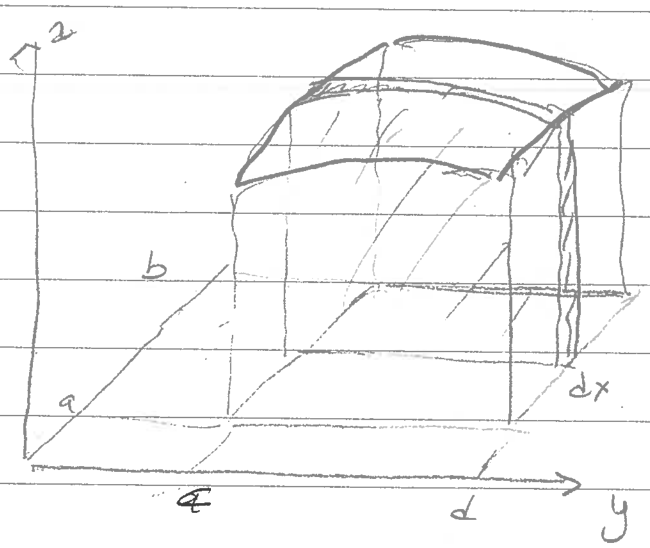
<u>oder</u>

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^x \sin y \, dx\right) d\cancel{x}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin y \;\, e^x \Big|_0^1\right) dy = \int_0^{2\pi} (e-1) \sin y \, dy$$

$$= -(e-1) \cos y \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Geometrische Deutung



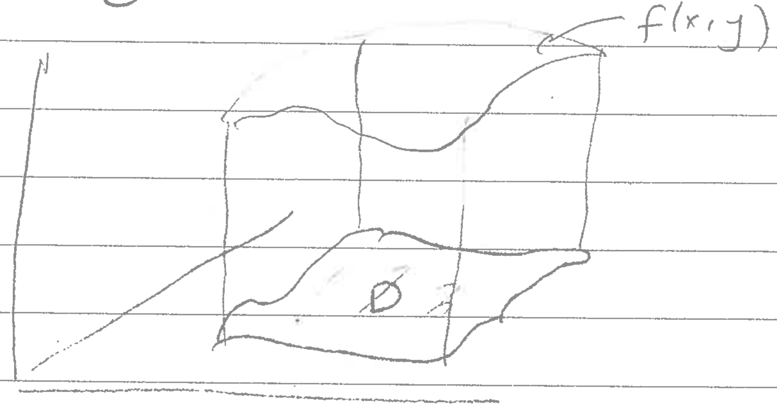
Im der Skizze ergibt sich als Volumen der markierten Schicht bei festem x und sehr kleiner Dicke dx näherungsweise das Volumen

$$\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) \cdot dx$$

Das Aufaddieren sämtlicher Schichtvolumen entspricht gerade der Integration über die Variable x, d.h. für das gesuchte Volumen gilt $V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$.

Bis jetzt können wir nur Integrale über achsenparallel rechteckige bzw quaderförmige Bereiche berechnen

Das reicht für viele praktische Aufgaben nicht aus. Meist ist der Integrationsbereich D krummlinig oder zumindest anders begrenzt



Die meisten praktischen Aufgaben lassen sich auf die Integration über sogenannte Normalbereiche zurückführen.

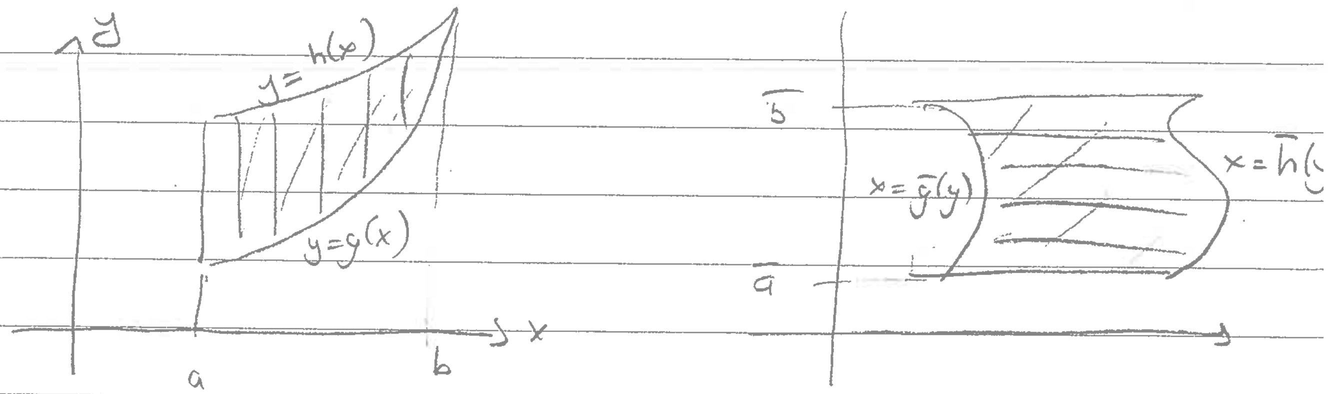
Defn 9.10 ① Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heisst ein Normalbereich bezüglich der x-achse bzw bezüglich der y-Achse falls es stetige Funktionen g, h bzw $\bar{g}, \bar{h}$ gibt mit

$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \;, \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

bzw

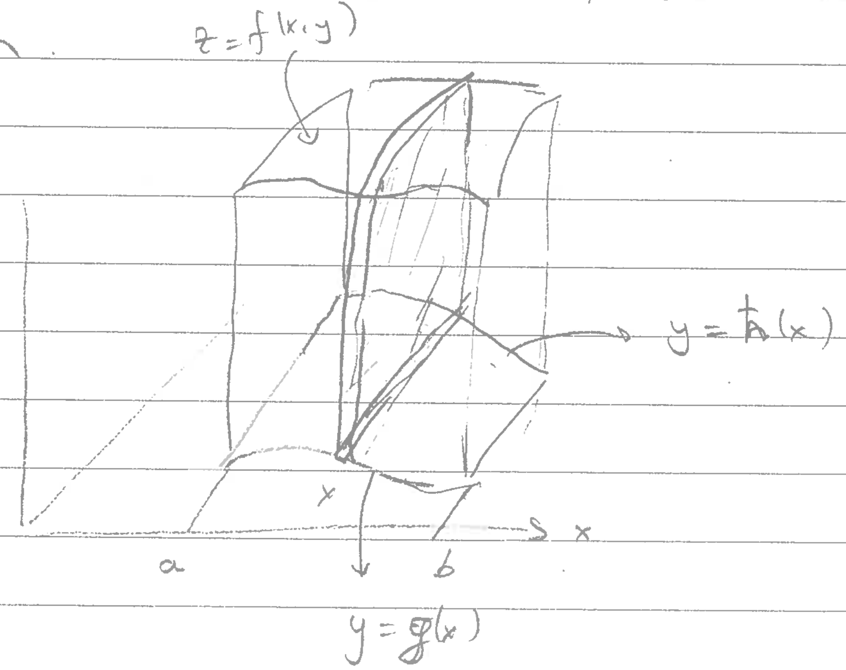
$$D = \{(x,y) \mid \bar{a} \leq y \leq \bar{b} \text{ und } \bar{g}(y) \leq x \leq \bar{h}(y)\}$$

Bsp. Kreise und Rechtecke sind Normalbereiche bzg beider Achsen.



Normalbereich bzg x-achse   y-achse.

Über Normalbereiche lässt sich sehr bequem integrieren.



Die markierte Scheibe bei x=const mit kleiner Dicke dx besitzt näherungsweise das Volumen

$$V(x) = \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Nun braucht man $V(x)$ nur noch über $[a,b]$ zu integrieren

$$V = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

Satz 9.11 ① Ist $f(x)$ stetig auf einem Normalbereich

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \text{ und } g(x) \le y \le h(x) \}$$

so gilt

$$\int_D f(x)\,d\mu = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

② bzw. Falls

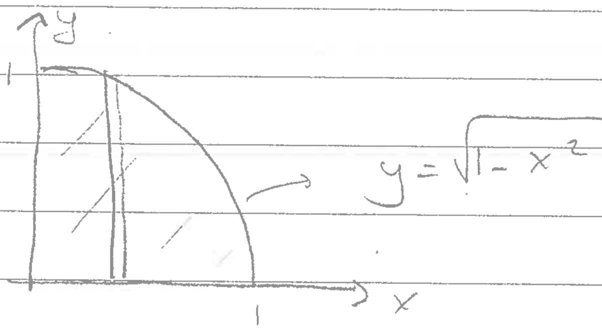
$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{a} \le y \le \bar{b},\ \bar{g}(y) \le x \le \bar{h}(y) \}$$

so gilt

$$\int_D f\,d\mu = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left(\int_{\bar{g}(y)}^{\bar{h}(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Bsp 9-12. ① Sei $f(x,y) = x - y$

D =



$$\int_D f \, d\mu = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x-y) \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

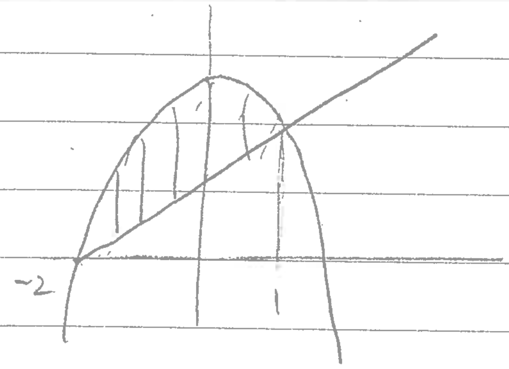
$$= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx - \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 1-x^2}_{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} =}$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx \qquad \begin{aligned} u &= 1-x^2 \\ du &= -2x\,dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u}\, du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_D f \, d\mu = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

(2) Sei D := die durch die Gerade $g(x) = x+2$ und die Parabel $h(x) = 4-x^2$ begrenzte Gebiet



$$\int_D x \, d\mu$$

Schnittpunkte: $x+2 = 4-x^2$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x+2)$$

Zur Berechnung des Doppelintegrals zerlegen wir das Gebiet in Streifen parallel zur y-Achse.
Für festes x variiert y von $g(x) = x+2$ bis $h(x) = 4-x^2$

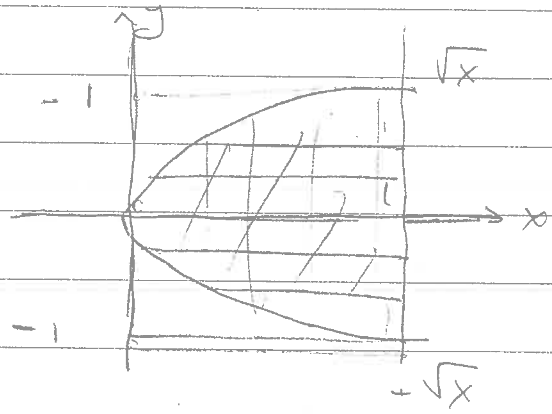
$$\int_D x \, d\mu = \int_{-2}^{1} \left(\int_{x+2}^{4-x^2} x \, dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} x \left(4 - x^2 - x + 2 \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (2x - x^3 - x^2) dx = x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \Big]_{-1}^{2}$$

$$= (4 - 4 - 8/3) - \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) =$$

(3) Sei D :



$$\int_D f\, d\mu = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x=y^2}^{1} f\, dx \right) dy$$

Zerlegung des Gebiets in Streifen parallel zur x-achse

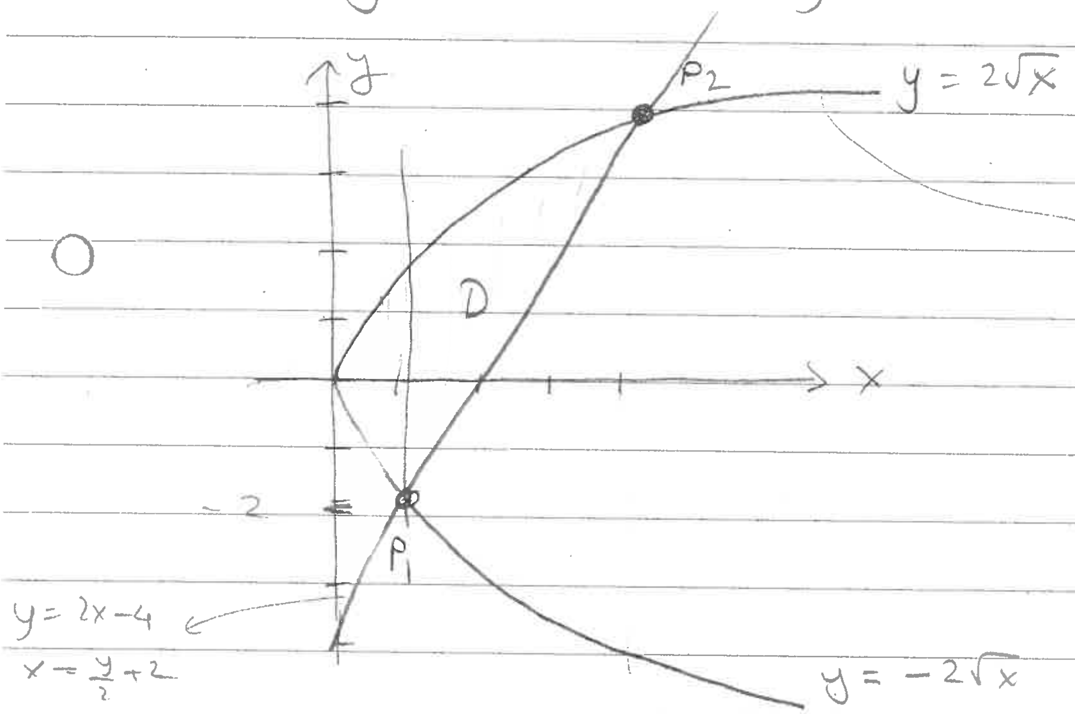
oder mit Zerlegung in Streifen parallel zur y-Achse

$$\int_D f\, d\mu = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Manchmal muss man D zerlegen.

(4) Bestimme $\int_D x\,dx\,dy$ wobei D

von $y^2 = 4x$ und $y = 2x - 4$ begrenzt wird



Schnittpunkte $P_1; P_2$: $\quad 4x = y^2 = (2x-4)^2$

$\Rightarrow (2x-4)^2 = 4x \ldots$

$\Rightarrow x = 1$ und $x = 4$

$P_1 = (1, -2) \qquad P_2 = (4, 4)$

Zerlegung des Gebiets in Streifen parallel zur y-Achse

$$\int_D x\,d\mu = \int_0^1 \left(\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} x\,dy \right) dx + \int_1^4 \left(\int_{y=2x-4}^{2\sqrt{x}} x\,dy \right) dx$$

$$\ldots = 14.4$$

Wenn wir aussen nach y integrieren, brauchen wir keine Unterteilung

$$\int_D x \, d\mu = \int_{y=-2}^{y=4} \left(\int_{x=y^2/4}^{y/2+2} x \, dx \right) dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{y^2/4}^{y/2+2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left(\left(\frac{y}{2}+2\right)^2 - \frac{y^4}{16} \right) dy$$

Beispiel für das Ändern der Integrations-reihenfolge

Bsp (1)

$$\int_0^1 \int_1^{e^y} f(x,y)\,dx\,dy$$

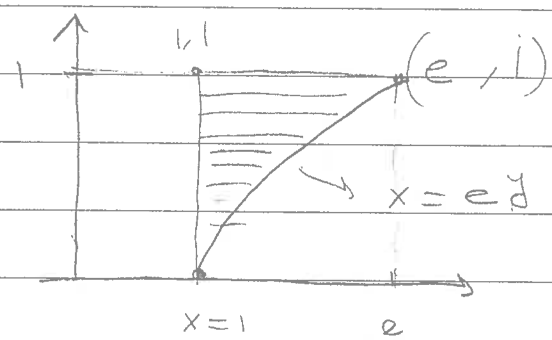
$x = e^y$ und $x = 1$

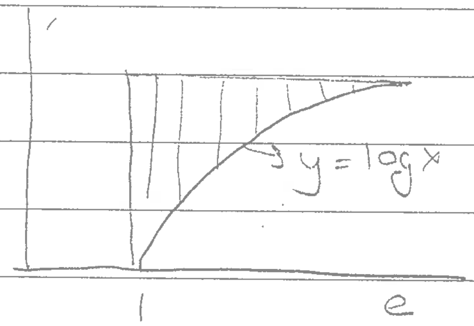
$\Downarrow$

$y = \ln x$

$1 = \ln x$

$\Rightarrow x = e$



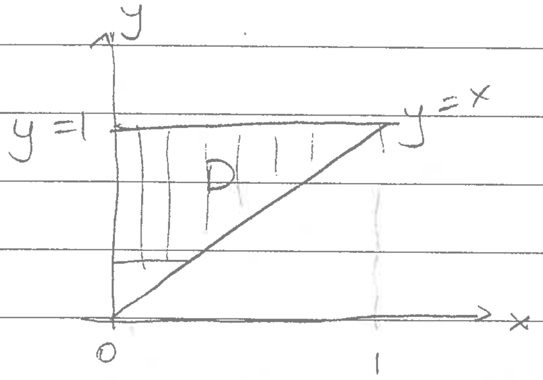


$$\int_1^e \int_{y=\log x}^{y=1} f(x,y)\,dy\,dx$$

Bsp (2) Berechne $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\,dy\,dx$

Man kann das Integral $\int^b e^{y^2}dy$ nicht direct berechnen, weil man kein explizit Stammfunktion für e^{y^2} finden kann

Man kann sich die Reihenfolge der Zerlegung beliebig heraussuchen damit die Rechnung möglichst einfach wird.



$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x}^{y=1} e^{y^2}\,dy\,dx = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=y} e^{y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[x e^{y^2} \Big|_{x=0}^{x=y} \right] dy$$

$$= \int_0^1 y e^{y^2}\,dy = \frac{e^{y^2}}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

226.3

Bmk 9-13

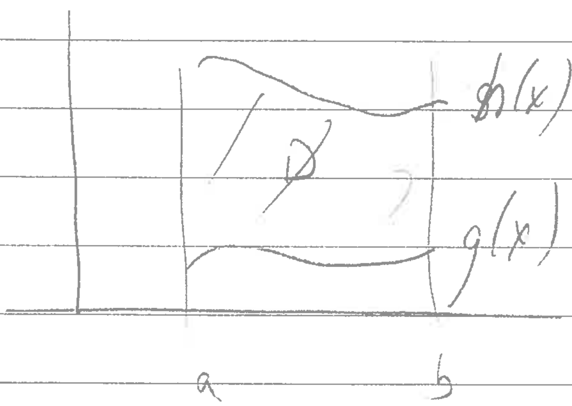
(1) Das Integral $A = \int_D 1 \, d\mu$

ergibt die Fläche von D

Für einen Normalbereich bzg der x Achse erhalten wir daraus die bekannte Formel

$$A = \int_D 1 \, d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1 \, dy \, dx$$

$$= \int_a^b \big(h(x) - g(x) \big) \, dx$$



(2) Interpretiert man $\rho(x,y)$ als ortsabhängige Flächendichte, so erhält man mit

$$m = \int_D \rho(x,y)\,d\mu$$ die Masse von D.

Defn 9.14 Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ heisst Normalbereich, falls es eine Darstellung

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\; g(x) < y < h(x),\; \text{und } \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$$

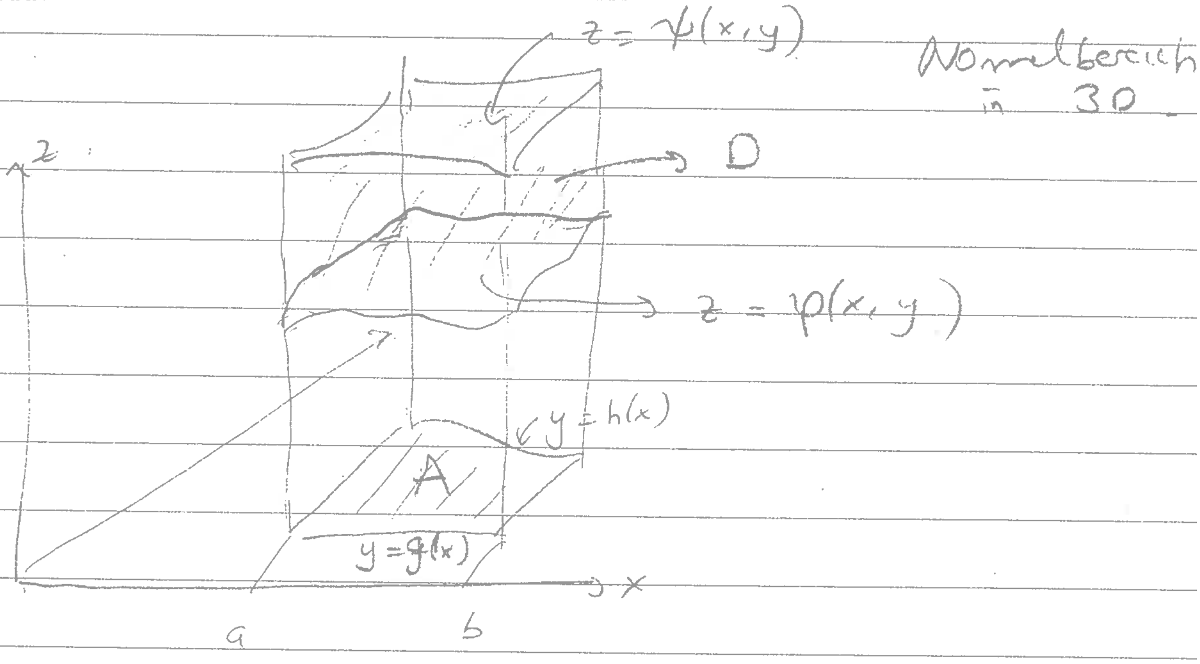
gibt.

(Vertauscht man die Rollen von x, y, ~~und~~ z so entstehen weitere Mengen, die auch Normalbereiche genannt werden.

Satz 9-15 Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Normalbereich mit Darstellung wie oben, und $f: D \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt

$$\int_D f \, d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) \, dz \, dy \, dx$$



$z = \varphi(x,y)$ und $z = \psi(x,y)$ stellen die "Grund" und Deckelfläche von D dar.

Der Normalbereich A ist die senkrechte Projektion von D in die x-y Ebene. Dessen "Grund" und "Deckelkurve" sind durch $y = g(x)$ und $y = h(x)$ gegeben.

Bmk 9.16 Das Integral

$$V = \int_D 1 \, d\mu \quad \text{für} \quad D \subset \mathbb{R}^3$$

ergibt das Volumen von D.

·) Für einen Normalbereich D erhält man

$$D = \{ (x,y,z) \mid a \le x \le b, \ g(x) \le y \le h(x), \ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y) \}$$

$$V = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} 1 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \psi(x,y) - \varphi(x,y) \, dy \, dx$$

§9.3 Substitutionsregel

Häufig sind kartesische Koordinaten für die Berechnung von Integralen eher ungeeignet.

z.B. wenn man Symmetrien bezüglich gewisser Punkte oder Achsen nutzen will.

Wir behandeln als nächstes Variablentransformationen vom Typ $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und verallgemeinern die 1-Dim. Substitutionsregel:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

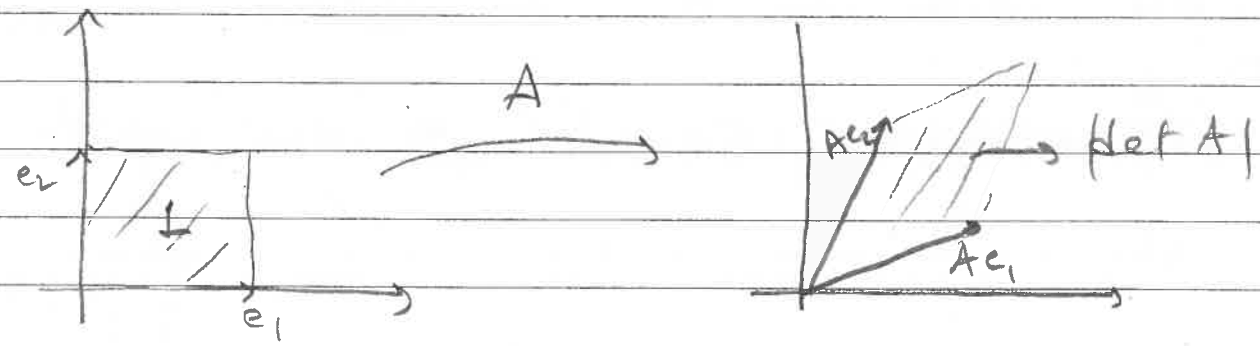
mit f stetig, $x = \varphi(t)$ $\varphi : [a,b] \to I$ stetig differenzierbar, I = Intervall

Zunächst erinnern wir uns an die Lineare Algebra:

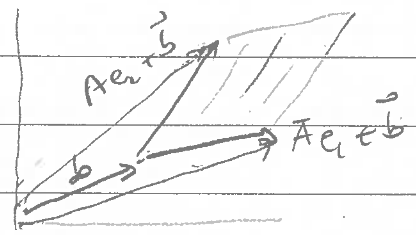
Das Bild des Einheitsquadrats/ würfels unter der linearen Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\vec{x} \to A\vec{x} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ist ein Parallelogramm mit Fläche $|\det A|$



Dies bleibt wahr, wenn man zur affin-linearen Abbildung $\Phi(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ betrachtet – es kommt ja nur ein Verschiebung zu



Nun, betrachten wir eine differenzierbare nichtlineare Transformation $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Dann gilt zumindest nahe eines festen Punktes $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$:

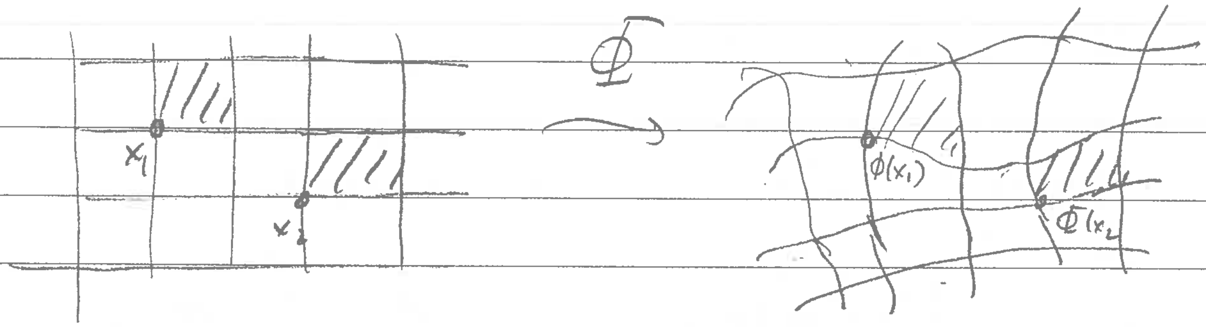
$$\Phi(x) \approx \Phi(x_0) + d\Phi(x_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Die rechte Seite stellt gerade eine Abbildung vom Typ $A\vec{x} + \vec{b}$ dar wobei die Jacobi Matrix $d\Phi(x_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ die Rolle von A (und $\Phi(x_0)$ von $\vec{b}$) übernimmt. Somit ist der lokale Flächenverzerrungsfaktor von Φ gegeben durch $|\det d\Phi(x_0)|$ d.h den Betrag der Jacobi- oder Funktionaldeterminante

- Die lokale Flächenverzerrung muss bei der Substitution in Integralen berücksichtigt werden und zwar in der Form:

„$d\vec{x} = |\det d\Phi(\vec{y})|\, d\vec{y}$", falls $\vec{x} = \Phi(y)$

Geometrische Darstellung in $\mathbb{R}^2$



Die Flächen der einander entsprechenden markierten Vierecke unterscheiden sich gerade um den Faktor $|\det d\Phi(x_1)|$ bzw

$$|\det(d\,\Phi(x_2))|$$

Substitutionsregel

Satz 9.17 (Storwe 8.5.2) Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Phi : U \to V$ bijektiv, stetig differenzierbar mit $\det \Phi(\vec{y}) \neq 0$ $\forall y \in U$, sowie $f : V \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int\limits_{V=\Phi(U)} f(\vec{x})\, d\mu(x) = \int\limits_U f(\Phi(\vec{y}))\, |\det(d\Phi(y))|\, d\mu(y)$$

Bmk. Im Spezialfall $n=1$ mit Intervallen $V=[a,b]$ und $U=[\tilde a, \tilde b]$ besagt die obige Formel

$$\int_{V=[a,b]=\Phi(U)} f(x)\, d\mu(x) = \int_{[\tilde a, \tilde b]} f(\varphi(y))\, |\varphi'(y)|\, d\mu(y)$$

während die Substitutionsformel von Integral einer Variable besagt

$$\int_{\varphi(\tilde a)}^{\varphi(\tilde b)} f(x)\, dx = \int_{\tilde a}^{\tilde b} f(\varphi(y))\, \varphi'(y)\, dy$$

Trotz, oder gerade wegen, der Betragsstriche sind diese Formeln äquivalent. Denn für φ monoton wachsend gilt $\varphi' \geq 0$ und $\varphi(\tilde a)=a$ und $\varphi(\tilde b)=b$ und die Formel sind direkt gleich.
Andernfalls ist φ monoton fallend und somit $\varphi' \leq 0$ und $\varphi(\tilde a)=b$ und $\varphi(\tilde b)=a$. Dann entspricht der Vorzeichenunterschied auf der rechten Seite der Richtungsumkehr $\varphi(\tilde a) > \varphi(\tilde b)$ auf der linken Seite.
Man kann dies so ausdrücken, dass das Integrationselement dx eine Orientierung besitzt, das Volumenelement $d\mu(x)$ nicht.

233 - I

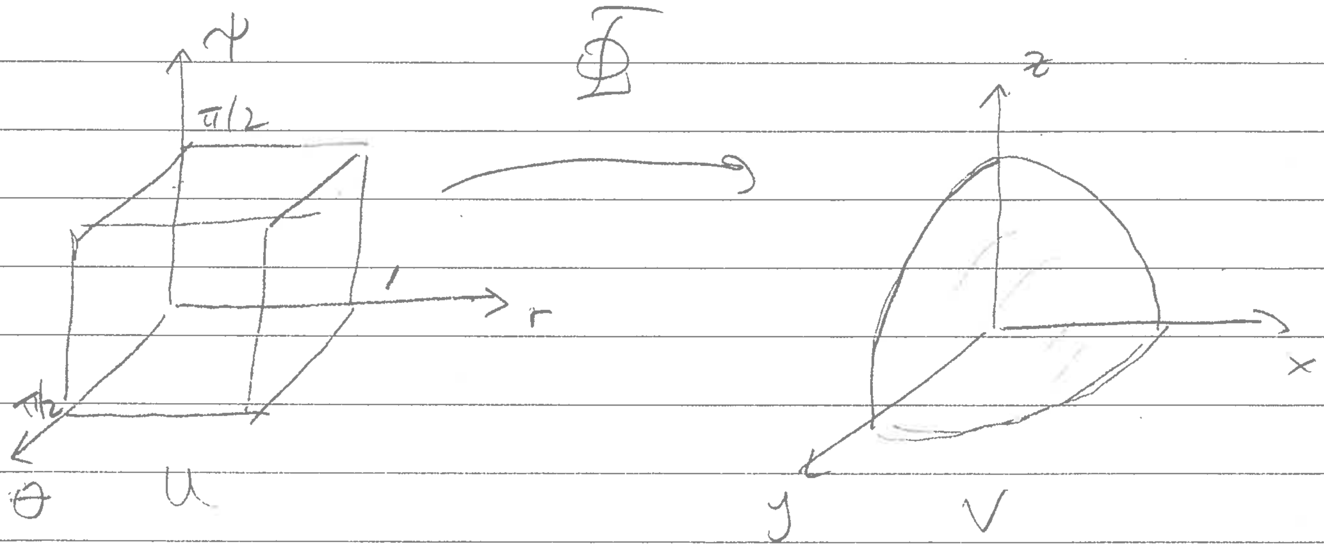
Bsp. ① Berechne $\iiint_V 1 \, d\mu$

wobei $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,$
$x, y, z \geq 0\}$

Kugeloktanten.

Es ist einfacher in Kugelkoordinaten zu berechnen.

$$\Phi(r, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\psi \\ r\sin\theta\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}$$



234

Die Transformation Φ ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert und mit

$$U = [0,1] \times [0, \tfrac{\pi}{2}] \times [0, \tfrac{\pi}{2}] \quad \text{gilt}$$

$$\Phi(U) = V.$$

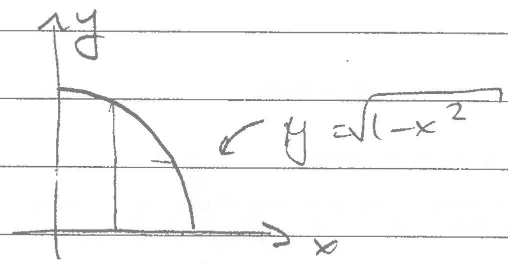
$$\det(d\Phi) = r^2 \cos\psi$$

$$\operatorname{vol}(V) = \int_V d\mu(\vec{x}) = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos\psi \, d\psi \, d\theta \, dr$$

$$= \pi/6.$$

(2) Berechne das Integral

$$\iint_D x \, dx\, dy \quad \text{wobei } D = \text{Viertelkreis}$$



$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 \left(xu \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$1 - x^2 = u$$
$$-2x\,dx = du$$

$$= \int_0^1 \frac{u^{1/2}}{2} \, du$$

$$= +\frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = +\frac{1}{3} = +\frac{1}{3}.$$

235

oder $\iint\limits_D x\,dx\,dy$ $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right) d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

③. Die Substitutionsregel in mehreren Variablen ist manchmal nützlich auch zur Berechnung von Integralen in einer Variable.

Zunächst möchten wir das Integral

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \quad \text{berechnen.}$$

Wir Berechnen I durch Berechnung eines Flächenintegrals wie folgt

Es gilt $I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2$

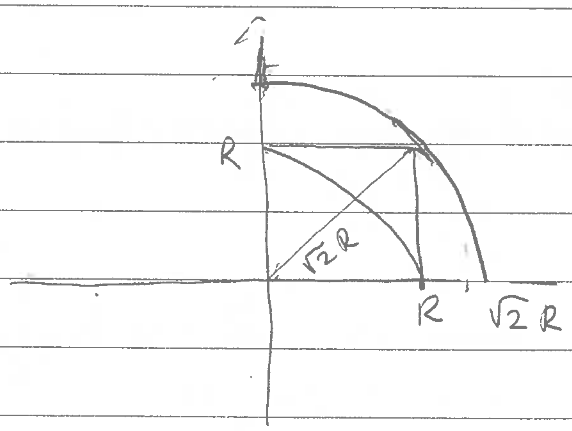
$$= \lim_{R\to\infty} \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^R e^{-y^2}\,dy\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty} I_R$$

für $I_R = \int_{[0,R]\times[0,R]} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

Bezeichnet K_ρ den Viertelkreis im 1. Quadranten mit radius ρ, so gilt

$$\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \le I_R \le \int_{K_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$



Die Integrale über K_ρ berechnet man nun über Polarkoordinaten

$$\int_{K_\rho} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^\rho \int_0^{\pi/2} e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{\rho^2}\right)$$

und somit gelten die Abschätzungen

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) \leq I_R \leq \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$$

und gilt schliesslich

$$\lim_{R\to\infty} I_R = \frac{\pi}{4}$$

d.h. $$I^2 = \lim_{R\to\infty} I_R = \frac{\pi}{4}$$

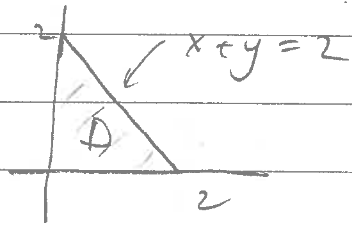
d.h. $$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

237-1

Substitutionsregel

Bsp. 4 $$\int_D e^{(y-x)/(y+x)}\, d\mu(x,y)$$

wobei



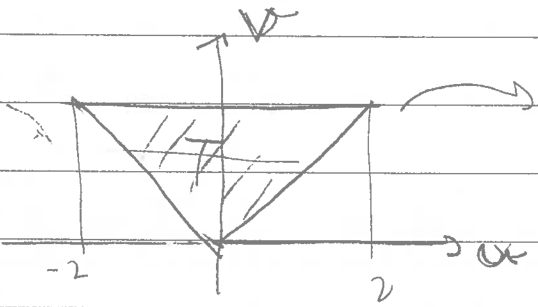
Wir setzen $u = y-x$, $v = y+x$ $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(v-u) \\ y = \frac{1}{2}(v+u) \end{array}\right\}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

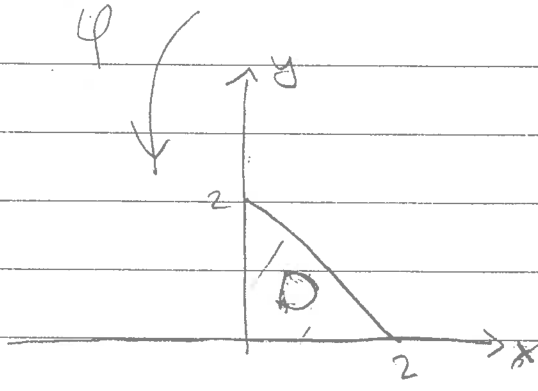
$$\det(\Phi'(u,v)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$x=0 \Longrightarrow v=u$

$y=0 \Longrightarrow v=-u$

$x+y=2 \Longrightarrow v=2$





237. 2

$$\iint_D e^{(y-x)/y+x}\, d\mu(x,y) = \iint_T e^{u/v} \left|-\frac{1}{2}\right| d\mu(u,v)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\int_{-v}^{v} e^{u/v}\, du\right) dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(v\, e^{u/v}\Big|_{-v}^{v}\right) dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 v\left(e-\frac{1}{e}\right) dv = \left(e-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{2}\Big|_0^2\right)$$

$$= e - \frac{1}{e}$$

§ 9.4 Der Satz von Green.
(Skript 8.4)

Wir erinnern uns: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Ist $v : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein C^1-Vektorfeld

mit Potential f, so folgt

$\Rightarrow$ $\operatorname{rot}(v(x)) = \operatorname{rot}(\nabla f(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

wobei $\operatorname{rot}(v(x,y)) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y)$

So ist $\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$

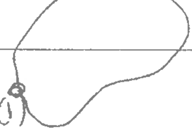
in zwei Dimensionen eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials

$\Rightarrow$

Die Bedingung $\operatorname{rot}(v) = 0$ ist sogar eine hinreichende Bedingung, falls das Gebiet Ω einfach zusammenhängend ist.

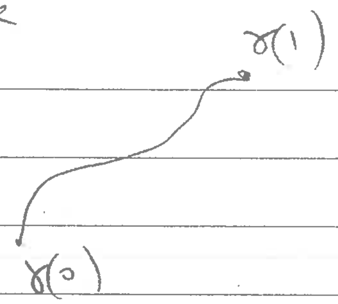
In diesem Fall $\oint_\gamma v = \int_\gamma \nabla f \, ds = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0$.

für $\forall$ geschlossene Weg γ.



$\gamma(0) = \gamma(1)$

und für ein nicht-geschlossene Weg γ



$$\int_\gamma V = \int_\gamma \nabla f \, ds = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

d.h. Falls der Vektorfeld ein Gradientenfeld ist, ist das Integral $\int_\gamma V$ eine Funktion der Endpunkte ist.

Anders gesagt, es gibt Fälle wobei ein Weg integral (d.h. ein Integral auf einem 1-dimensional Objekt mit hilfe eine 0-dimensionalen Menge berechnet werden kann.

Bmk. Auch für funktionen einer Variable:
Falls $F' = f$ ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Hauptsatz der Integralrechnung einer Variab

Frage: Gibt es auch Fälle wobei ein 2-dimensionale Integral mit hilfe einer 1-dim'l Menge berechnet werden kann?

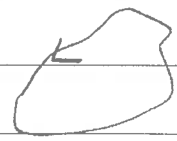
Die Antwort ist genau der Inhalt des Satz von Green.

Satz 9.19 (Green). Sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ein (Stwee 8-4-1) Gebiet dessen rand $\partial\Omega$ ein stückweise C^1 Parameter-darstellung hat. Sei U eine offene Menge mit $\Omega \subset U$ und sei $f = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ wobei

$P, Q \in C^1(U)$. Dann gilt

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\mu = \int_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy$$

wobei $\partial\Omega$ so parametrisiert wird dass Ω zur linken des Randes liegt



Anders gesagt sei $V = (P, Q)$ ein C^1 Vektorfeld auf dem Gebiet U. Sei $\Omega \subset U$ ein Gebiet dessen Rand $\partial\Omega$ eine stückweise C^1 Parameterdarstellung hat. Die Parametrisierung von Ω sei so gewählt dass Ω stets links zur Durchlaufrichtung liegt. Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} V\,ds = \int_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\Omega} \operatorname{rot}(V)\,d\mu .$$

Bevor wir die Idee des Beweis geben, geben wir einige Beispiele und Anwendungen

Bsp. 9.20 ① Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x,y) = (y+3x,\ y-2x)$$ und wir

möchten dieses Kraftfeldes entlang der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Ellipse

$$\gamma : 4x^2 + y^2 = 4 .$$

Die Arbeit ist $\int_\gamma F\,d\vec{s} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$

$$= \int_\gamma (y+3x)\,dx + (y-2x)\,dy \underset{\text{Green}}{=} \iint_\Omega \frac{\partial(y-2x)}{\partial x} - \frac{\partial(y+\ldots}{\partial y}\ldots d\mu$$

Zum erst berechnen wir die Weg-integel

$$\int_\gamma F\,ds = \int_\gamma (y+3x)\,dx + (y-2x)\,dy$$

wobei $\gamma : 4x^2+y^2=4$

Als parameterierung nehmen wir

$$(x,y) = (\cos\theta,\ 2\sin\theta),\quad \theta\in[0,2\pi].$$
$$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta,\ 2\cos\theta)$$

$$\int_\gamma F\,ds = \int_0^{2\pi} (\cos\theta + 6\sin\theta)(-\sin\theta)\,d\theta + (2\sin\theta - 2\cos\theta)(2\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(3\underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{\frac{\sin 2\theta}{2}} - \cancel{2}\sin^2\theta - \cancel{4}\Big)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3\sin 2\theta}{2} - 2\sin^2\theta - 4\,d\theta = -10\pi$$

(wir benutzen die Formel $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$)

Aber wenn wir der Satz von Green benützen haben wir

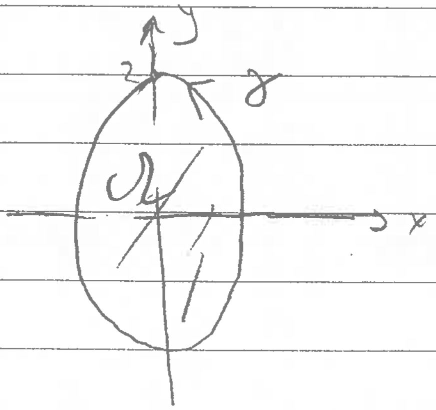
$$\int_\gamma (y+3x)\,dx + (y-2x)\,dy$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \iint_\Omega \left(\frac{\partial(y-2x)}{\partial x} - \frac{\partial(y+3x)}{\partial y}\right) d\mu$$

$$= \iint_\Omega (-2-3)\,d\mu = -5 \iint_\Omega d\mu$$

$$= -5\,(\text{Flächeninhalt von Ellipse } 4x^2+y^2=4)$$

$$=(-5)(\pi(2\cdot 1)) = -10\pi$$

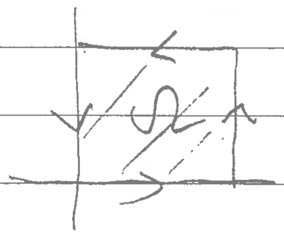


Einfacher!

2 Berechne des Weg integral

$$\int_{\partial\Omega} \left(5-xy-y^2\right) dx - \left(2xy-x^2\right) dy$$

Wobei Ω des Quadrat mit Eckpunkte $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ im gegenuhrzeigersinn ist.



$$\int_{\partial\Omega} \left(5-xy-y^2\right) dx - \left(2xy-x^2\right) dy$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2-2xy\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(5-xy-y^2\right)\right] d\mu$$

$$= \iint_{\Omega} (2x-2y) - (-x-2y)\, \cancel{d\mu} = \int_0^1\int_0^1 3x \, d\mu$$

$$= 3\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) dy = \frac{3}{2}\int_0^1 dy$$

$$= \frac{3}{2}$$

(3) Mittels des Satzes von Green können wir den Flächeninhalt eines Gebiets mithilfe eines Wegintegrals berechnen.

Und zwar

$$\text{Flächeninhalt}(\Omega) = \iint_\Omega d\mu = \iint_\Omega 1 \, d\mu$$

$$= \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\mu \quad \text{wobei}$$

P und Q funktionen mit $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ sind.

Zum. Beispiel können wir $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$, $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$ nehmen. Daraus folgt dass

$$F(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} -y\,dx + x\,dy$$

Als ein Bsp können wir verifizieren dass der Flächeninhalt des Kreis $x^2+y^2 \leq 4 = \Omega$ gleich 4π ist.

Betrachte

die Parametrisierung $: \gamma(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$\theta \in [0, 2\pi]$

des Rands $\partial\Omega$.

$$F(\Omega) = \iint_{\Omega} d\mu = \frac{1}{2}\int_{d\Omega} -y\,dx + x\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-2\sin\theta)(-2\sin\theta) + (2\cos\theta)(2\cos\theta)\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\ d\theta = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$