אנליזה נומרית – עבודה 2

אילנה פרבוי, פן אייל

שאלה 1:

נשים לב שמציאת נקודות החיתוך בין x^2 לבין $0.2x + 3$ שקול למציאת השורש של הפונקציה $f(x)$:

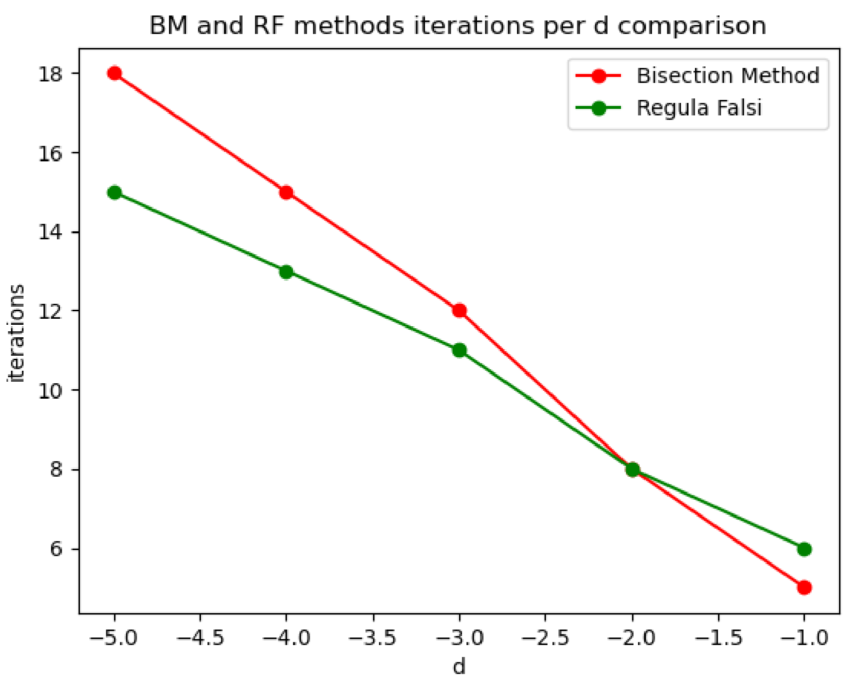
$$x^2 = 0.2x + 3 \;\rightarrow\; f(x) = x^2 - 0.2x - 3 = 0$$

קוד הפייתון מצורף בקובץ zip של ההגשה.

א) הפתרון בעזרת שיטת החצייה בקרבה של $\epsilon = 10^{-8}$ הוא **1.8349351603537798**

ב) השוואת מספר האיטרציות כתלות ב d :

d	שיטת החצייה	שיטת רגולה פאלסי
-1	5	6
-2	8	8
-3	12	11
-4	15	13
-5	18	15



(הקוד מצורף בעמוד האחרון כנספח וגם כקובץ פייתון בתיקיית ההגשה)

שאלה 2:

נתונה איטרציית נקודת השבת הבא:

$$g(x_n) = x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a} = x_n(x_n^2 + 3a) * (3x_n^2 + a)^{-1}$$

כאשר שורש $\sqrt{a}$ היא נקודת השבת של $g(x_n)$, כלומר $g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$.
נחפש מהו הסדר המינימאלי של הנגזרת השונה מאפס בנקודת השבת – זהו, ע״פ ההגדרה, סדר ההתכנסות של שיטת איטרציית נקודת השבת:

$$g'(x_n) = \left(x_n(x_n^2 + 3a)\right)' * (3x_n^2 + a)^{-1} + x_n(x_n^2 + 3a) * ((3x_n^2 + a)^{-1})' =$$

$$\left((x_n^2 + 3a) + 2x_n^2\right) * (3x_n^2 + a)^{-1} + x_n(x_n^2 + 3a) * -(3x_n^2 + a)^{-2} * 6x_n =$$

$$(3x_n^2 + 3a) * (3x_n^2 + a)^{-1} - (6x_n^4 + 18x_n^2 a) * (3x_n^2 + a)^{-2} =$$

$$(3x_n^2 + a)^{-2} * \left((3x_n^2 + 3a) * (3x_n^2 + a) - (6x_n^4 + 18x_n^2 a)\right) =$$

$$(3x_n^2 + a)^{-2} * (9x_n^4 + 12x_n^2 a + 3a^2 - 6x_n^4 - 18x_n^2 a) =$$

$$(3x_n^2 + a)^{-2} * (3x_n^4 - 6x_n^2 a + 3a^2)$$

$$g'(\sqrt{a}) = (3a + a)^{-2} * (3a^2 - 6a^2 + 3a^2) = \frac{0}{16a^2} = 0$$

$$g'(x_n) = ((3x_n^2 + a)^{-2})' * (3x_n^4 - 6x_n^2 a + 3a^2) + (3x_n^2 + a)^{-2} * (3x_n^4 - 6x_n^2 a + 3a^2)' =$$

$$(-2(3x_n^2 + a)^{-3} * 6x_n) * (3x_n^4 - 6x_n^2 a + 3a^2) + (3x_n^2 + a)^{-2} * (12x_n^3 - 12x_n a) =$$

$$(3x_n^2 + a)^{-3} * \left(-12x_n(3x_n^4 - 6x_n^2 a + 3a^2) + (3x_n^2 + a) * (12x_n^3 - 12x_n a)\right) =$$

$$(3x_n^2 + a)^{-3} * (-36x_n^5 + 72x_n^3 a - 36x_n a^2 + 36x_n^5 - 36x_n^3 a + 12x_n^3 a - 12x_n a^2) =$$

$$(3x_n^2 + a)^{-3} * (48x_n^3 a - 48x_n a^2)$$

$$g''(\sqrt{a}) = (3a + a)^{-3} * (48a^{2.5} - 48a^{2.5}) = \frac{0}{64a^3} = 0$$

$$g'''(x_n) = ((3x_n^2 + a)^{-3})' * (48x_n^3 a - 48x_n a^2) + (3x_n^2 + a)^{-3} * (48x_n^3 a - 48x_n a^2)' =$$

$$-3(3x_n^2 + a)^{-4} * 6x_n * (48x_n^3 a - 48x_n a^2) + (3x_n^2 + a)^{-3} * (144x_n^2 a - 96a^2) =$$

$$(3x_n^2 + a)^{-4} * \left(-18x_n * (48x_n^3 a - 48x_n a^2) + (3x_n^2 + a) * (144x_n^2 a - 96a^2)\right) =$$

$$(3x_n^2 + a)^{-4} * (-864x_n^4 a + 864x_n^2 a^2 + 432x_n^4 a - 288x_n^2 a^2 + 144x_n^2 a^2 - 96a^3) =$$

$$\frac{-432x_n^4 a + 720x_n^2 a^2 - 96a^3}{(3x_n^2 + a)^4}$$

$$g'''(\sqrt{a}) = \frac{-432a^3 + 720a^3 - 96a^3}{(3a + a)^4} = \frac{192a^3}{256a^4} = 0.75a^{-1} \neq 0$$

כלומר סדר ההתכנסות הוא $\boldsymbol{d = 3}$

שאלה 3:

א) עבור $f(x) = 2x_n^2 - 10$

נחשב את $f'(x)$: $f'(x) = 4x$

כזכור, איטרציית ניוטון הינה :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ולכן :

$$\boldsymbol{x_{n+1}} = x_n - \frac{2x_n^2 - 10}{4x_n} = \frac{4x_n^2 - 2x_n^2 + 10}{4x_n} = \boldsymbol{\frac{x_n^2 + 5}{2x_n}}$$

ב) על מנת למצוא את תחום התכנסות של שיטת ניוטון נגדיר פונקציית איטרציית נקודת השבת $g(x)$ כך:

$$g(x) = \frac{x^2 + 5}{2x}$$

ונבדוק באיזה תחום מתקיימות תכונות פונקציית הכיווץ.
לפי תנאי משפט 4 הנלמד בכיתה של איטרצית נקודת השבת, יובטח כי כל בחירת ניחוש ראשוני בתחום זה יביא להתכנסות שיטת ניוטון.

תחילה, נשים לב שg אינה רציפה בנקודה $x = 0$ ורציפה בכל $(-\infty, 0), (0, \infty)$, לכן נצמצם את התחום לתחום זה.
נבדוק האם בבחירת x מתחום זה הנגזרת קיימת:

$$g'(x) = (x^2 + 5)' * (2x)^{-1} + (x^2 + 5) * ((2x)^{-1})'$$
$$= \frac{2x}{2x} + (x^2 + 5) * -2(2x)^{-2} = 1 - \frac{x^2 + 5}{2x^2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2}$$

ואכן, הנגזרת מוגדרת בכל התחום $(-\infty, 0), (0, \infty)$.
נבדוק מתי $|g'(x)| < 1$

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2}\right| < 1 \leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2} < 1 \ and \ \frac{5}{2x^2} - \frac{1}{2} < 1$$

$$\frac{5}{2x^2} - \frac{1}{2} < 1$$
$$\frac{5}{2x^2} < \frac{3}{2}$$
$$5 < 3x^2$$
$$\frac{5}{3} < x^2$$
$$x > \sqrt{\frac{5}{3}} \ or \ x < -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2} < 1$$
$$\frac{5}{2x^2} > -\frac{1}{2}$$
$$10 > -2x^2$$
$$-5 < x^2$$

נכון לכל x

לכן, האינטרוול הרלוונטי הוא: $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{5}{3}}\right),\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\infty\right)$

נבדוק נקודות חשודות:

$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2x^2}=0$$

$$\frac{5}{2x^2}=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ 5=x^2\ \rightarrow\ x=\pm\sqrt{5}$$

עבור $x=2<\sqrt{5}$ נשים לב: $g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2*2^2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{8}=-\frac{1}{8}<0$

ועבור $x=3>\sqrt{5}$ נשים לב: $g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2*3^2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{18}=\frac{2}{9}>0$

לכן $x=\sqrt{5}$ היא נקודת קיצון מינימום.

ועבור $x=-3<-\sqrt{5}$ נשים לב: $g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2*(-3)^2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{18}=\frac{2}{9}>0$

ועבור $x=-2>-\sqrt{5}$ נשים לב: $g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2*(-2)^2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{8}=-\frac{1}{8}<0$

לכן $x=-\sqrt{5}$ היא נקודת קיצון מינימום.

לבסוף נבדוק האם פונקציה זו "לתוך" באינטרוולים הנ"ל,

עבור $x\in\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{5}\right)$ מתקיים: $g'(x)<0$ כלומר הפונקציה g יורדת (ורציפה), לכן מספיק להראות שהיא "לתוך" רק בקצוות האינטרוול.

עבור $\sqrt{\frac{5}{3}}$:

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{5}{3}}^+}g(x)=\lim_{x\to\sqrt{\frac{5}{3}}^+}\frac{x^2+5}{2x}=\frac{\frac{5}{3}+5}{2*\sqrt{\frac{5}{3}}}\approx 2.5819^+\in\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\infty\right)$$

עבור $\sqrt{5}$:

$$\lim_{x\to\sqrt{5}^+}g(x)=\lim_{x\to\sqrt{5}^+}\frac{x^2+5}{2x}=\frac{5+5}{2*\sqrt{5}}=\frac{10}{2\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\in\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{5}\right)$$

כלומר הראנו שהגבול של הקצוות נמצא בתוך, ולכן הפונקציה היא לתוך באינטרוול $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{5}\right)$.

עבור $x>\sqrt{5}$ מתקיים: $g'(x)>0$, כלומר הפונקציה g עולה (ורציפה), לכן מספיק להראות שהיא לתוך רק בקצוות האינטרוול, נבדוק התכנסות עבור ∞:

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{2x}=\infty$$

ולכן הפונקציה היא לתוך באינטרוול $(\sqrt{5},\infty)$.

באופן דומה עבור המקטע השני:

עבור $x \in \left(-\infty,-\sqrt{5}\right)$ מתקיים: $g'(x) > 0$ כלומר הפונקציה g עולה (ורציפה), לכן מספיק להראות שהיא לתוך רק בקצוות האינטרוול, נבדוק התכנסות עבור $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+5}{2x} = -\infty$$

עבור $-\sqrt{5}$:

$$\lim_{x\to-\sqrt{5}^-} g(x) = \lim_{x\to-\sqrt{5}^-} \frac{x^2+5}{2x} = \frac{5+5}{-2*\sqrt{5}} = \frac{10}{-2\sqrt{5}} = \frac{5}{-\sqrt{5}} = -\sqrt{5} \in \left(-\infty,-\sqrt{5}\right)$$

כלומר הראנו שהגבול של הקצוות נמצא בתוך, ולכן הפונקציה היא לתוך באינטרוול $\left(-\infty,-\sqrt{5}\right)$.

עבור $x > -\sqrt{5}$ מתקיים: $g'(x) < 0$, כלומר הפונקציה g יורדת (ורציפה), לכן מספיק להראות שהיא לתוך רק בקצוות האינטרוול, נבדוק התכנסות עבור $-\sqrt{\frac{5}{3}}$:

$$\lim_{x\to-\sqrt{\frac{5}{3}}^-} g(x) = \lim_{x\to-\sqrt{\frac{5}{3}}^-} \frac{x^2+5}{2x} = \frac{\frac{5}{3}+5}{2*-\sqrt{\frac{5}{3}}} \approx -2.5819^- \in \left(-\infty,-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

כלומר הראנו שהגבול של הקצוות נמצא בתוך האינטרוול, ולכן הפונקציה היא לתוך באינטרוול.

סה"כ עבור כל $x \in \left(\sqrt{\frac{5}{3}},\infty\right)$ or $x \in \left(-\infty,-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ שיטת ניוטון תתכנס לשורש.

שאלה 4:

א) נתון ש f גזירה וקמורה ממש בכל $\mathbb{R}$ ובנוסף $f'(x) > 0$ לכל x.

אינטואיטיבית, הימצאות של יותר משורש אחד מכריחה את הפונקציה הקמורה ממש לעבור בשני נקודות $x_1 \neq x_2$ הנמצאות באותו הגובה 0 (אלו הם השורשים), בסתירה להגדרה שהפונקציה עולה ממש $f'(x) > 0$.

פורמלית, אם היה יותר משורש אחד, למשל 2 שורשים, נסמנם $\alpha_1 \neq \alpha_2$, הרי שמתקיים:

$$f(\alpha_1) = 0 \; and \; f(\alpha_2) = 0$$

נניח בלי הגבלת הכלליות כי: $\alpha_1 < \alpha_2$.

ולכן $(\alpha_2 - \alpha_1) > 0$.

הפונקציה קמורה ממש ולכן לנקודות α_1, α_2 מתקיים על פי הגדרת קמירות:

$$f(\alpha_2) > f(\alpha_1) + f'(\alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)$$

כלומר:

$$0 > 0 + f'(\alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)$$

מהנתון מתקיים ש $f'(\alpha_1) > 0$ ומכיוון ש- $(\alpha_2 - \alpha_1) > 0$ נקבל כי

$$0 < f'(\alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)$$

בסתירה לכך ש הפונקציה קמורה.

ב) יהי α השורש של הפונקציה f ו- x_0 בחירה שרירותית של האיבר הראשון בסדרה המתקבלת ע"י איטרציות ניוטון-רפסון עבור f.

אם $x_0 = \alpha$ סיימנו (ניחשנו טוב☺).

אחרת, נראה כי החל מהאיבר השני, סדרת הערכים המתקבלים מאיטרציית ניוטון-רפסון מונוטונית וחסומה, לכן נקבל כי היא מתכנסת.
בנוסף נראה כי הסדרה מתכנסת לשורש הפונקציה.

<u>חסימות</u> – נראה כי $x_n > \alpha$ לכל $n \geq 1$.

נתבונן במשיק לפונקציה f בנקודה x_0 :

$$tangent_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

מהגדרת פונקציה קמורה ממש מתקיים $f(x) > tangent_{x_0}(x)$ לכל x , בפרט עבור x_1 - השורש של המשיק לפונקציה העובר בנקודה $\big(x_0, f(x_0)\big)$.
נקבל ש :

$$f(x_1) > tangent_{x_0}(x_1) = 0 = f(\alpha)$$

וכיוון ש f מונוטונית עולה (גזירה ו $f'(x) > 0$) נקבל ש $x_1 > \alpha$.

נוכל להמשיך באופן דומה להעביר משיקים בנקודות הנבחרות באיטרציית ניוטון-רפסון ומהמונוטוניות של הפונקציה (גזירה בכל $\mathbb{R}$) לקבל שהטענה מתקיימת לכל x_n כך ש $n \geq 1$.

<u>מונוטוניות</u> – נראה כי $x_n > x_{n+1}$ לכל $n \geq 1$.

תהי x_n נקודה המתקבלת בשיטת איטרציית ניוטון-רפסון עבור $n \geq 1$.
נמצא את הנקודה הבאה לפי השיטה : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
מכיוון ש$x_n > \alpha$ לכל $n \geq 1$ (הראינו בחסימות למעלה) ו- f פונקציה מונוטונית עולה, אז $f(x_n) > f(\alpha) = 0$.
כיוון ש $f'(x_n) > 0$ נקבל כי $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$ ולכן : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$

<u>התכנסות לשורש</u> –
תהי x_n נקודה בסדרה המתקבלת ע"י איטרציית ניוטון-רפסון, $n \geq 1$.

הראינו שסדרת הנקודות מונוטונית יורדת ומתכנסת ולכן $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n+1}) = 0$

נזכר כי $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, מכאן ש :

$$0 = \lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$$

אנו יודעים ש $f'(x_n) > 0$ לכל x_n, ולכן מהגבול הנ"ל נובע כי :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

מכאן ש $x_n \to c$ כך ש c שורש הפונקציה, אך מכיוון שהוכחנו בסעיף א' שיש שורש יחיד נקבל ש $x_n \to c = \alpha$ ■

ג) אם נתון כי $f'(x) < 0$ בכל התחום – אינטואיטיבית, סדרת הנקודות תתכנס לשורש משמאל:

- הוכחת החסימות כי $x_n < \alpha$ לכל $n \geq 1$ תישאר דומה מלבד היפוכי סימן במקום המתאים, מכיוון שהפונקציה f נשארת קמורה: $f(x_{n+1}) > tangent_{x_n}(x_{n+1})$
ההבדל מתבטא אך ורק כי f הינה מונוטונית יורדת ולכן נקבל כי $x_{n+1} < \alpha$.
- הוכחת המונוטוניות גם כן נשארת דומה מלבד היפוכי סימן במקום המתאים, מכיוון ש$f'(x_n) < 0$ ו- $f(x_n) > 0$ נקבל כי $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > x_n$ כנדרש.
- אין צורך לשנות את הוכחת ההתכנסות לשורש.

ד) אם הפונקציה הנתונה קעורה ממש (ולא קמורה) ומונוטונית עולה – אינטואיטיבית, סדרת הנקודות תתכנס לשורש משמאל:

- בהוכחת החסימות נראה כי $x_n < \alpha$ לכל $n \geq 1$ שהרי מהגדרת פונקציה קעורה ממש מתקיים שהפונקציה נמצאת כולה מתחת למשיק (ולא מעליו) בפרט בנקודה שהיא השורש של המשיק, ולכן ממונוטוניות הפונקציה f נקבל $x_n < \alpha$.
- בהוכחת המונוטוניות נראה כי $x_n < x_{n+1}$ לכל $n \geq 1$ שהרי הראינו ש $x_n < \alpha$ והיות והפונקציה מונוטונית עולה מתקיים $f(x_n) < f(\alpha) = 0$. מכאן ש $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 0$ ובהצבה באיטרציית ניוטון נקבל את הנדרש.
- בהתכנסות לשורש עדיין נקבל שההפרש בין כל 2 נקודות עוקבות בסדרה שואף ל0 כאשר מספר האיברים שואף לאינסוף ומהסתכלות באיטרציית ניוטון נקבל גם פה שהגבול של הפונקציה בנקודה שואף ל0, כלומר הנקודה שואפת לשורש הפונקציה.

נספחים:

```python
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return x**2-0.2*x-3

def bisection_method(f, a, b, eps):
    iter = 0
    while(True):
        iter += 1
        z = (a + b) / 2
        if f(z) == 0 :
            return z, iter
        else:
            if f(a)*f(z) < 0 :
                b = z
            else:
                a = z
        if(abs(b-a) < 2*eps):
            break
    return ((a + b) / 2), iter

def regular_falsi(f, a, b, delta, real):
    prev2 = a
    prev1 = b
    iter = 0
    while (True):
        iter += 1
        curr = prev1 - f(prev1) * ((prev1-prev2)/(f(prev1)-f(prev2)))
        if f(curr) == 0:
            return curr, iter
        else:
            if f(curr)*f(prev1) < 0:
                prev2 = curr
            else:
                prev1 = curr
        if(abs(curr-real) < delta):
            break
    return curr, iter

def main():
    a = -1
    b = 4
    eps = 10**-8
    bm_true, bm_iter = bisection_method(f, a, b, eps)
    #a
    print(f"bisection true method result for x is {bm_true} in {bm_iter} iterations\n")
    x_axis = []
    y1_axis = []
    y2_axis = []
    #b
    for d in range(-1,-6, -1):
        x_axis.append(d)
        eps = 10**d
        bm_approx, bm_iter = bisection_method(f, a, b, eps)
        y1_axis.append(bm_iter)
        rf_approx, rf_iter = regular_falsi(f, a, b, eps, bm_true)
        y2_axis.append(rf_iter)
        print(f"for d = {d}:")
        print(f"bisection method result for x is {bm_approx} in {bm_iter} iterations")
        print(f"regular falsi result for x is {rf_approx} in {rf_iter} iterations")
    plt.plot(x_axis, y1_axis, color='red', marker="o", label='Bisection Method')
    plt.plot(x_axis, y2_axis, color='green', marker="o", label = 'Regula Falsi')
    plt.xlabel("d")
    plt.ylabel("iterations")
    plt.title(f"BM and RF methods iterations per d comparison")
    plt.legend()
    plt.show()

if __name__ == '__main__':
    main()
```