אנליזה נומרית – עבודה 4

אילנה פרבוי, פן אייל

שאלה 1:

נראה כי $\|x-y\| \geq |\|x\|-\|y\||$:

$$|\|x\|-\|y\|| = |\|x-y+y\|-\|y\|| \underbrace{\leq}_{\substack{triangle\\ norm\\ inequality}} |\|x-y\|+\|y\|-\|y\|| =$$

$$= |\|x-y\|| \underbrace{=}_{\|\ \ \|\geq 0} \|x-y\|$$

שאלה 2:

נראה כי $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$:

למדנו בכיתה כי: $\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, כלומר: $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ נסמן ב-* אי שיוויון זה.

כעת:

$$\|AB\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|ABx\|}{\|x\|} \underbrace{\leq}_{\substack{from\ *\\ \overrightarrow{Bx}\ is\ a\ vector}} \sup_{x\neq 0}\frac{\|A\|\|Bx\|}{\|x\|} \underbrace{=}_{\|\ \ \|\ is\ a\ scalar} \|A\|\sup_{x\neq 0}\frac{\|Bx\|}{\|x\|} \underbrace{=}_{by\ definition} \|A\|\|B\|$$

שאלה 3:

נמצא את $cond(A)$ כאשר $A = \begin{bmatrix} 9.7 & 6.6 \\ 4.1 & 2.8 \end{bmatrix}$:

נחשב את המטריצה ההופכית של A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} 9.7 & 6.6 \\ 4.1 & 2.8 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 2.8 & -6.6 \\ -4.1 & 9.7 \end{bmatrix} = \frac{1}{(9.7*2.8)-(4.1*6.6)}\begin{bmatrix} 2.8 & -6.6 \\ -4.1 & 9.7 \end{bmatrix}$$

$$= 10*\begin{bmatrix} 2.8 & -6.6 \\ -4.1 & 9.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -66 \\ -41 & 97 \end{bmatrix}$$

כעת נמצא את $cond(A)$:

$$cond(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|$$

$$= \left\|\begin{bmatrix} 9.7 & 6.6 \\ 4.1 & 2.8 \end{bmatrix}\right\|_\infty * \left\|\begin{bmatrix} 28 & -66 \\ -41 & 97 \end{bmatrix}\right\|_\infty$$

$$= \max\{(9.7+6.6),(4.1+2.8)\} * \max\{(28+66),(41+97)\}$$

$$= 16.3 * 138 = 2249.4$$

שאלה 4:

נפתור את מערכת המשוואות ***בשיטת יעקובי***, עם תנאי עצירה $\left\|x^{(n+1)}-x^{(n)}\right\|<\varepsilon=10^{-2}$

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)}=\dfrac{7+x_2^{(n)}-x_3^{(n)}}{4} \\ x_2^{(n+1)}=\dfrac{21+4x_1^{(n)}+x_3^{(n)}}{8} \\ x_3^{(n+1)}=\dfrac{15+2x_1^{(n)}-x_2^{(n)}}{5} \end{cases}$$

עבור ניחוש התחלתי $x^{(0)}=(1,2,2)$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=\dfrac{7+2-2}{4}=\dfrac{7}{4}=1.75 \\ x_2^{(1)}=\dfrac{21+4*1+2}{8}=\dfrac{27}{8}=3.375 \\ x_3^{(1)}=\dfrac{15+2*1-2}{5}=3 \end{cases}$$

נבדוק את תנאי העצירה:

$$\left\|\begin{pmatrix}1.75\\3.375\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|_\infty=\left\|\begin{pmatrix}0.75\\1.375\\1\end{pmatrix}\right\|_\infty=1.375$$

נבצע את האיטרציה הבאה:

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=\dfrac{7+3.375-3}{4}=1.84375 \\ x_2^{(2)}=\dfrac{21+4*1.75+3}{8}=3.875 \\ x_3^{(2)}=\dfrac{15+2*1.75-3.375}{5}=3.025 \end{cases}$$

נבדוק את תנאי העצירה:

$$\left\|\begin{pmatrix}1.84375\\3.875\\3.025\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1.75\\3.375\\3\end{pmatrix}\right\|_\infty=\left\|\begin{pmatrix}0.09375\\0.5\\0.025\end{pmatrix}\right\|_\infty=0.5$$

נבצע את האיטרציה הבאה:

$$\begin{cases} x_1^{(3)}=\dfrac{7+3.875-3.025}{4}=1.9625 \\ x_2^{(3)}=\dfrac{21+4*1.84375+3.025}{8}=3.925 \\ x_3^{(3)}=\dfrac{15+2*1.84375-3.875}{5}=2.9625 \end{cases}$$

נבדוק את תנאי העצירה:

$$\left\|\begin{pmatrix}1.9625\\3.925\\2.9625\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1.84375\\3.875\\3.025\end{pmatrix}\right\|_\infty=\left\|\begin{pmatrix}0.11875\\0.05\\-0.0625\end{pmatrix}\right\|_\infty=0.11875$$

נבצע את האיטרציה הבאה:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \dfrac{7 + 3.925 - 2.9625}{4} = 1.990625 \\ x_2^{(4)} = \dfrac{21 + 4 * 1.9625 + 2.9625}{8} = 3.9765625 \\ x_3^{(4)} = \dfrac{15 + 2 * 1.9625 - 3.925}{5} = 3 \end{cases}$$

נבדוק את תנאי העצירה:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1.990625 \\ 3.9765625 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.9625 \\ 3.925 \\ 2.9625 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.028125 \\ 0.0515625 \\ 0.0375 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.0515625 < 10^{-2}$$

כלומר הפתרון הוא:

$$\begin{pmatrix} 1.990625 \\ 3.9765625 \\ 3 \end{pmatrix}$$

תוך 4 איטרציות.

נפתור את מערכת המשוואות ***בשיטת גאוס-זיידל***, עם תנאי עצירה $\left\| x^{(n+1)} - x^{(n)} \right\| < \varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = \dfrac{7 + x_2^{(n)} - x_3^{(n)}}{4} \\ x_2^{(n+1)} = \dfrac{21 + 4x_1^{(n+1)} + x_3^{(n)}}{8} \\ x_3^{(n+1)} = \dfrac{15 + 2x_1^{(n+1)} - x_2^{(n+1)}}{5} \end{cases}$$

עבור ניחוש התחלתי $x^{(0)} = (1,2,2)$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{7 + 2 - 2}{4} = 1.75 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{21 + 4 * 1.75 + 2}{8} = 3.75 \\ x_3^{(1)} = \dfrac{15 + 2 * 1.75 - 3.75}{5} = 2.95 \end{cases}$$

נבדוק את תנאי העצירה:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1.75 \\ 3.75 \\ 2.95 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.75 \\ 0.95 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1.75$$

נבצע את האיטרציה הבאה:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{7 + 3.75 - 2.95}{4} = 1.95 \\ x_2^{(2)} = \dfrac{21 + 4 * 1.95 + 2.95}{8} = 3.96875 \\ x_3^{(2)} = \dfrac{15 + 2 * 1.95 - 3.96875}{5} = 2.98625 \end{cases}$$

נבדוק את תנאי העצירה:

$$\left\|\begin{pmatrix}1.95\\3.96875\\2.98625\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1.75\\3.75\\2.95\end{pmatrix}\right\|_\infty=\left\|\begin{pmatrix}0.2\\0.21875\\0.03625\end{pmatrix}\right\|_\infty=0.21875$$

נבצע את האיטרציה הבאה:

$$\begin{cases} x_1^{(3)}=\dfrac{7+3.96875-2.98625}{4}=1.995625\\ x_2^{(3)}=\dfrac{21+4*1.995625+2.98625}{8}=3.99609375\\ x_3^{(3)}=\dfrac{15+2*1.995625-3.99609375}{5}=2.99903125\end{cases}$$

נבדוק את תנאי העצירה:

$$\left\|\begin{pmatrix}1.995625\\3.99609375\\2.99903125\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1.95\\3.96875\\2.98625\end{pmatrix}\right\|_\infty=\left\|\begin{pmatrix}0.045625\\0.02734375\\0.01278125\end{pmatrix}\right\|_\infty=0.045625<10^{-2}$$

כלומר הפתרון הוא:

$$\begin{pmatrix}1.995625\\3.99609375\\2.99903125\end{pmatrix}$$

תוך 3 איטרציות.

שאלה 5:

נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases}1.133x_1+5.281x_2=6.414\\24.14x_1-1.210x_2=22.93\end{cases}$$

1) בעזרת *G.E* בלי *pivoting*:

$$\left[\begin{matrix}1.133&5.281\\24.14&-1.210\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}6.414\\22.93\end{matrix}\right]\to R_2=R_2-\frac{24.14}{1.133}R_1=R_2-21.31R_1$$

$$\left[\begin{matrix}1.133&5.281\\0&-1.210-112.5\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}6.414\\22.93-136.7\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}1.133&5.281\\0&-113.7\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}6.414\\-113.8\end{matrix}\right]$$

נבצע *backward substitution*:

$$-113.7x_2=-113.8$$
$$x_2=1.001$$

$$1.133x_1+5.281x_2=6.414$$
$$1.133x_1+5.281*1.001=6.414$$
$$1.133x_1=6.414-5.286$$
$$1.133x_1=1.128$$
$$x_1=0.9956$$

וקיבלנו $x_1=0.9956, x_2=1.001$

2) בעזרת G.E עם pivoting:

$$\begin{bmatrix} 1.133 & 5.281 & | & 6.414 \\ 24.14 & -1.210 & | & 22.93 \end{bmatrix} \rightarrow R_2 \leftrightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 & | & 22.93 \\ 1.133 & 5.281 & | & 6.414 \end{bmatrix} \rightarrow R_2 = R_2 - \frac{1.133}{24.14} R_1 = R_2 - 0.047 R_1$$

$$\begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 & | & 22.93 \\ 0 & 5.281 + 0.057 & | & 6.414 - 1.078 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 & | & 22.93 \\ 0 & 5.338 & | & 5.336 \end{bmatrix}$$

נבצע *backward substitution*:

$$5.338 x_1 = 5.336$$
$$x_1 = 1.000$$

$$1.133 x_1 + 5.281 x_2 = 6.414$$
$$1.133 * 1.000 + 5.281 x_2 = 6.414$$
$$5.281 x_2 = 6.414 - 1.133$$
$$5.281 x_2 = 5.281$$
$$x_1 = 1.000$$

וקיבלנו $x_1 = 1.000, x_2 = 1.000$

שאלה 6:

נמצא ערך העצמי ווקטור עצמי המתאים לערך העצמי עבור המטריצה $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ באמצעות שיטת *power* באמצעות קוד פייתון:

```
import numpy as np

A = np.array([[5,-1,7],[-1,-1,1],[7,1,5]])
x = np.array([1.,1.,1.])
for i in range(9):
    x = A @ x
    l = np.amax(x)
    x = 1./l * x

print(f"The returned eigenvalue is: {l}, and the eigenvector is: {x}")

print(f"The max real eigen value is: {np.max(np.linalg.eig(A)[0])}")
```

הפתרון המוחזר לאחר הרצה הינו:

```
The returned eigenvalue is: 11.999954223865643,
and the eigenvector is: [ 9.99997457e-01 -1.27156414e-06  1.00000000e+00]
The max real eigen value is: 12.000000000000004
```

כלומר אכן קיבלנו ערך מקורב לערך העצמי האמיתי הגדול ביותר.