אנליזה נומרית – עבודה 3

אילנה פרבוי, פן אייל

שאלה 1:

1) נמצא את פולינום האינטרפולציה ע"י שיטת ניוטון:

נמצא את y_0, y_1:

$$y_0 = f(x_0) = f(0) = \sin(0) = 0$$

$$y_1 = f(x_1) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

נמצא את $p_0(x_0) = y_0 = c_0$

ונקבל $c_0 = 0$

נמצא את $p_1(x) = p_0(x) + c_1(x - x_0) = 0 + c_1(x - 0) = c_1 x$

ונקבל $p_1(x_1) = y_1 = c_1 x_1$

וכעת $c_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{4}{\pi}$

קיבלנו כי $\boldsymbol{p_1(x) = \frac{4}{\pi}x}$ הוא פולינום האינטרפולציה המתלכד עם $f(x) = \sin\left(\frac{2}{x}\right)$

בנקודות $x_0 = 0, x_1 = \frac{4}{\pi}$

2) נמצא את שגיאת הפולינום:

$$E_2(x) = |f(x) - P_2(x)| = \left|\sin(2x) - \frac{4x}{\pi}\right|$$

נחקור את $E_2(x)$ לשם מציאת חסם עליון הדוק:

$$\mathrm{w(x)} = \sin(2x) - \frac{4x}{\pi}$$

$$w'(x) = 2\cos(2x) - \frac{4}{\pi} = 0$$

$$\cos(2x) = \frac{2}{\pi}$$

$$x \approx 0.4403$$

וזוהי נקודת מקסימום בתחום $[0,1]$, נשים לב $E_2(0.4403) \approx \sin(2x) - \frac{4x}{\pi} = 0.2105$

נבדוק בקצוות:

$$E_2(0) = |0 - 0| = 0$$

$$E_2(1) = \left|\sin(2) - \frac{4}{\pi}\right| = 0.3639$$

מכאן ניתן לראות כי החסם ההדוק ביותר הינו: $\mathbf{0.3939}$.

3) מכיוון ש $f(x) = \sin(2x)$ רציפה וגזירה אינסוף פעמים בקטע $[0,1]$ שגיאת האינטרפולציה מקיימת:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!}$$

נשים לב כי $f^{(n+1)}(x) \le \begin{cases} |\pm 2^{n+1} * \sin(2x)| \\ |\pm 2^{n+1} * \cos(2x)| \end{cases} \le 2^{(n+1)} * 1 \le 2^{(n+1)}$.

כלומר הסופרימום של הנגזרת ה $(n+1)$-ית של f גדלה ככול ש $(n+1)$ גדל, והדבר גורם להגדלת השגיאה.
הביטוי $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ חסום על ידי גודל האינטרוול $1^{(n+1)} = 1$.
ובמכנה הביטוי $(n+1)!$ גם גדל ככל ש n גדל.
מכאן:

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)} * 1}{(n+1)!} = 0$$

כלומר, **עבור n מספיק גדול הביטוי במכנה גדל מהר יותר מהביטוי במונה ולכן השגיאה קטנה,**
אך עבור n-ים קטנים, המצב הפוך, השגיאה גדלה.

שאלה 2:

1) נמצא את פולינום האינטרפולציה מדרגה 3 של $f^{-1}(y)$ בשיטת לגראנז'. כיוון ש$f(x)$ הפיכה, מתקיים:

$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{f^{-1}(y)}$
10	*2*
4	*5*
-2	*6*
-6	*8*

עבור סדרת דגימות$\left(y_i, f^{-1}(y_i)\right)$ זו, כאשר $L_i(y) = \prod_{j=0, j\ne i}^{n} \frac{y-y_j}{y_i-y_j}$ נקבל:

$$L_0(y) = \frac{(y-4)(y+2)(y+6)}{(10-4)(10+2)(10+6)} = \frac{(y^2-2y-8)(y+6)}{1152} = \frac{y^3+4y^2-20y-48}{1152}$$

$$L_1(y) = \frac{(y-10)(y+2)(y+6)}{(5-10)(5+2)(5+6)} = \frac{(y^2-8y-20)(y+6)}{-385} = \frac{y^3-2y^2-68y-120}{-385}$$

$$L_2(y) = \frac{(y-10)(y-4)(y+6)}{(6-10)(6-4)(6+6)} = \frac{(y^2-14y+40)(y+6)}{-96} = \frac{y^3-14y^2-44y+240}{-96}$$

$$L_3(y) = \frac{(y-10)(y-4)(y+2)}{(8-10)(8-4)(8+2)} = \frac{(y^2-14y+40)(y+2)}{-80} = \frac{y^3-12y^2+12y+80}{-80}$$

מכאן פולינום האינטרפולציה הינו:

$$\boldsymbol{p_3(y)} = \sum_{i=0}^{3} f^{-1}(y_i)L_i(y)$$

$$= 2 * \frac{y^3+4y^2-20y-48}{1152} + 5 * \frac{y^3-2y^2-68y-120}{-385} + 6 * \frac{y^3-14y^2-44y+240}{-96} + 8 * \frac{y^3-12y^2+12y+80}{-80} =$$

$$\frac{y^3+4y^2-20y-48}{576}+\frac{y^3-2y^2-68y-120}{-77}+\frac{y^3-14y^2-44y+240}{-16}$$
$$+\frac{y^3-12y^2+12y+80}{-10}$$
$$\approx \boldsymbol{-0.1737y^3+2.1079y^2+2.3983y-21.5248}$$

2) מכיוון ש$f^{-1}(y)$ הינה פולינום ממעלה 3, ונתונות 4 נקודות שונות שלה אז לפי משפט היחידות מתקיים ש$f^{-1}(y)=p_3(y)$, לכן **השגיאה היא 0**.

3) ניתן למצוא את השורש. כיוון שf היא פונקציה הפיכה, ומהאבחנה בסעיף 2 מתקיים:

$$f(x^*)=0 \leftrightarrow x^*=f^{-1}(0) \leftrightarrow \boldsymbol{x^*}=p_3(0)\approx$$
$$=-0.1737*0^3+2.1079*0^2+2.3983*0-21.5248=\boldsymbol{-21.5248}$$

שאלה 3:

1) אנו מעוניינים במינימיזציה של ריבוע שגיאות האמידה

$$E(A,B,C)=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i,y_i)-g(x_i,y_i)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i,y_i)-Ax_i-By_i-C)^2$$

נמצא את המשוואות הנורמאליות:

$$\nabla E(A,B,C)=\begin{pmatrix}\frac{\partial E}{\partial A}\\ \frac{\partial E}{\partial B}\\ \frac{\partial E}{\partial C}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial E}{\partial A}=-2x_i\sum_{i=1}^{n}(f(x_i,y_i)-Ax_i-By_i-C)^2=0\\ \frac{\partial E}{\partial B}=-2y_i\sum_{i=1}^{n}(f(x_i,y_i)-Ax_i-By_i-C)^2=0\\ \frac{\partial E}{\partial C}=-2\sum_{i=1}^{n}(f(x_i,y_i)-Ax_i-By_i-C)^2=0\end{cases}$$

מציאת הארגומנטים הממזערים את המשוואות הריבועיות יהיו זהים גם לשורש המשוואות הללו. (שורש הינה משוואה מונוטונית)

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_if(x_i,y_i)-A\sum_{i=1}^{n}x_i^2-B\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-C\sum_{i=1}^{n}x_i=0\\ \sum_{i=1}^{n}y_if(x_i,y_i)-A\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-B\sum_{i=1}^{n}y_i^2-C\sum_{i=1}^{n}y_i=0\\ \sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)-A\sum_{i=1}^{n}x_i-B\sum_{i=1}^{n}y_i-C*n=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{A\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + C\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i, y_i)} \\ \boldsymbol{A\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + B\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + C\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i f(x_i, y_i)} \\ \boldsymbol{A\sum_{i=1}^{n} x_i + B\sum_{i=1}^{n} y_i + C * n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)} \end{cases}$$

2) כעת נמצא את משוואת המישור במובן LS ע״י פתירת המשוואות הנורמאליות עם המדידות הנתונות.
נחשב:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2) = 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (0 * 0 + 0 * 1 + 1 * 0 + 1 * 1) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (0 + 0 + 1 + 1) = 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = (0^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2) = 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = (0 + 1 + 0 + 1) = 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i, y_i) = (0 * -2.0780 + 0 * 1.1424 + 1 * 3.0574 + 1 * 5.8197) = 8.8771$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i f(x_i, y_i) = (0 * -2.0780 + 1 * 1.1424 + 0 * 3.0574 + 1 * 5.8197) = 6.9621$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) = (-2.0780 + 1.1424 + 3.0574 + 5.8197) = 7.9415$$

$$\begin{cases} 2A + B + 2C = 8.8771 \\ A + 2B + 2C = 6.9621 \\ 2A + 2B + 4C = 7.9415 \end{cases}$$

נדרג:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 8.8771 \\ 1 & 2 & 2 & 6.9621 \\ 2 & 2 & 4 & 7.9415 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4.90635 \\ 0 & 1 & 0 & 2.99135 \\ 0 & 0 & 1 & -1.963475 \end{bmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{cases} A = 4.90635 \\ B = 2.99135 \\ C = -1.963475 \end{cases}$$

ולכן משוואת הישר שקיבלנו הינה:

$$\boldsymbol{g(x, y) = 4.90635x + 2.99135y - 1.963475}$$

שאלה 4:

1) עבור המודל $y = B + \frac{R}{1+e^{\frac{c-x}{w}}}$ עם הערכים $B = 1, R = 5$ נקבל מודל שאינו לינארי ביחס לפרמטרים c ו- w החסרים:

$$y = 1 + \frac{5}{1 + e^{\frac{c-x}{w}}}$$
$$\leftrightarrow\ y - 1 = \frac{5}{1 + e^{\frac{c-x}{w}}}$$
$$\leftrightarrow\ (y-1)\left(1 + e^{\frac{c-x}{w}}\right) = 5$$
$$\leftrightarrow\ (y-1) + (y-1) * e^{\frac{c-x}{w}} = 5$$
$$\leftrightarrow\ (y-1) * e^{\frac{c-x}{w}} = 6 - y$$
$$\leftrightarrow\ e^{\frac{c-x}{w}} = \frac{6-y}{y-1}$$

כעת נבצע לינאריזציה של הפיתוח על ידי הפעלת פעולת $\ln()$ על שני הצדדים:

$$\ln\left(e^{\frac{c-x}{w}}\right) = \ln\left(\frac{6-y}{y-1}\right)$$
$$\leftrightarrow\ \frac{c-x}{w} = \frac{c}{w} - \frac{1}{w}x = \ln\left(\frac{6-y}{y-1}\right)$$

לכן נבצע את הטרנפורמציה הבאה:

$$\boldsymbol{Y = \ln\left(\frac{6-y}{y-1}\right), X = x, A = -\frac{1}{w}, B = \frac{c}{w}}$$

כאשר הנעלמים הם A, B.

2) נמצא את c, w האופטימלים:

$$\hat{A}, \hat{B} = \underset{A,B}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} (Y(y_i) - Ax_i - B)^2$$

נמצא את המשוואות הנורמאליות:

$$\nabla E(A,B) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial A} \\ \frac{\partial E}{\partial B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial A} = -2x_i \sum_{i=1}^{n} (Y(y_i) - Ax_i - B)^2 = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial B} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y(y_i) - Ax_i - B)^2 = 0 \end{cases}$$

מציאת הארגומנטים הממזערים את המשוואות הריבועיות יהיו זהים גם לשורש המשוואות הללו. (שורש הינה משוואה מונוטונית)

$$\begin{cases} x_i \sum_{i=1}^{n} Y(y_i) - Ax_i - B = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Y(y_i) - Ax_i - B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y(y_i)x_i - A\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ - B\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Y(y_i) - A\sum_{i=1}^{n} x_i \ - B * n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} Y(y_i)x_i \\ A\sum_{i=1}^{n} x_i + B * n = \sum_{i=1}^{n} Y(y_i) \end{cases}$$

כעת נמצא את הנעלמים ע״י פתירת המשוואות הנורמאליות עם המדידות הנתונות.
נחשב:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (0^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2 + 15^2) = 319$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (0 + 2 + 4 + 5 + 7 + 15) = 33$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} Y(y_i) = &\left(\ln\left(\frac{6-1.4793}{1.4793-1}\right) + \ln\left(\frac{6-1.8121}{1.8121-1}\right) + \ln\left(\frac{6-2.9877}{2.9877-1}\right) + \ln\left(\frac{6-3.4000}{3.4000-1}\right)\right. \\ &\left. + \ln\left(\frac{6-4.7553}{4.7553-1}\right) + \ln\left(\frac{6-5.9675}{5.9675-1}\right)\right) \\ &\approx (2.2441 + 1.6403 + 0.4157 + 0.0800 - 1.1043 - 5.0294) \\ &= -1.7536 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} Y(y_i)x_i = &\left(\ln\left(\frac{6-1.4793}{1.4793-1}\right) * 0 + \ln\left(\frac{6-1.8121}{1.8121-1}\right) * 2 + \ln\left(\frac{6-2.9877}{2.9877-1}\right) * 4\right. \\ &\left. + \ln\left(\frac{6-3.4000}{3.4000-1}\right) * 5 + \ln\left(\frac{6-4.7553}{4.7553-1}\right) * 7 + \ln\left(\frac{6-5.9675}{5.9675-1}\right) * 15\right) \\ &\approx (2.2441 * 0 + 1.6403 * 2 + 0.4157 * 4 + 0.0800 * 5 - 1.1043 * 7 - 5.0294 * 15) \\ &= -77.8277 \end{aligned}$$

נקבל:

$$\begin{cases} 319A + 33B = -77.8277 \\ 33A + 6B = -1.7536 \end{cases}$$

נדרג:

$$\begin{bmatrix} 319 & 33 & -77.8277 \\ 33 & 6 & -1.7536 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.4959 \\ 0 & 1 & 2.4350 \end{bmatrix}$$

נקבל:

$$\begin{cases} A = -0.4959 = -\frac{1}{w} \\ B = 2.4350 = \frac{c}{w} \end{cases}$$

כלומר:

$$\frac{1}{w} = 0.4959 \quad \leftrightarrow \boldsymbol{w = 2.0165}$$
$$\boldsymbol{c} = 2.4350w = \mathbf{4.9102}$$

לכן ה$sigmoid$ המיטבי הינו: $y = 1 + \frac{5}{1+e^{\frac{4.9102-x}{2.0165}}}$