🏂 Markov Process

⚡ 问题背景

在离散时间的 Markov 过程（Discrete-Time Markov Chains, DTMC）中，我们可以通过幂运算计算转移矩阵 P^n 来得到状态之间的转移概率。然而，在连续时间 Markov 过程（Continuous-Time Markov Chains, CTMC）中，这种方法不再适用。

因为在连续时间下，我们关注状态之间在非常短的时间 t 内的转移概率，通常记为 $p_{jk}(t)$。这里的 $p_{jk}(t)$ 表示从状态 j 转移到状态 k 的概率。

如果状态空间 S 是无限的，分析会变得非常复杂。因此，我们常假设状态空间 $|S|$ 是有限的，即 $|S| < \infty$.

🏕️ 定理1：转移率（Transition Rate）

定义：对于 $j \neq k \in S$，有

$$q_{jk} = q_j r_{jk} \tag{1}$$

其中：

- q_{jk} 表示从状态 j 到状态 k 的**转移率**（transition rate）。
- q_j 是从状态 j 出发的总体转移率（总转移到其他状态的速率）。
- r_{jk} 是条件概率，即假设转移发生的情况下，从 j 转移到 k 的概率。

📝 **举例解释**

假设你在超市里购物，每分钟会随机决定是否从一个货架走到另一个货架（这就是转移率 q_j）。如果你选择转移，你可能会按某种概率走向特定的货架（对应 r_{jk}）。
比如：

- 你每分钟离开水果区的概率是 $q_j = 0.5$.
- 如果你离开水果区，你有 80% 的概率去零食区，20% 的概率去饮料区。

  因此：

- 从水果区到零食区的转移率是 $q_{jk} = 0.5 \times 0.8 = 0.4$.
- 从水果区到饮料区的转移率是 $q_{jk} = 0.5 \times 0.2 = 0.1$.

接下来在讲解新定理之前我们来了解以下几个知识点：

1.**Notation $o(h)$ 的定义**

如果满足以下条件：

$$\frac{g(h)}{h} \to 0 \quad 当\ h \to 0。$$

则函数 $g(h)$ 是 $o(h)$. 这意味着，当 h 变得非常小时，$g(h)$ 的增长速度比 h 快速趋于 0.

🌰例子：

- $h^2 + 3h^3$ 是 $o(h)$，因为 $\frac{h^2+3h^3}{h} = h + 3h^2$，当 $h \to 0$ 时，趋于 0.
- $2h + h^2$ 不是 $o(h)$，因为 $\frac{2h+h^2}{h} = 2 + h$，当 $h \to 0$ 时，不趋于 0.

2.**e^{-ah} 的近似**

通过泰勒展开，我们有：

$$e^{-ah} = 1 - ah + o(h)$$

这表示在 h 很小时，指数函数可以用 $1 - ah$ 来近似.

🌰例子：
想象你有一个非常小的时间间隔 h，假设你在 h 时间内完成某事件的概率可以通过指数分布建模. 通过这个近似，可以快速估计转移概率.

3.概率 $P(T \le h)$

如果 $T \sim \exp(\alpha)$，即 T 遵循参数为 α 的指数分布，则有：

$$P(T \le h) = 1 - e^{-\alpha h} = \alpha h + o(h)$$

这表明，在非常短的时间间隔 h 内，事件发生的概率接近于 αh.

> 🚌**生活中的例子：**
> **假设你观察公交车到站的时间间隔（符合指数分布），如果平均每分钟有 1 辆车到达（$\alpha = 1$），那么在非常短的时间 $h = 0.1$ 分钟内车到达的概率大约是 $\alpha h = 0.1$（即 10%）。**

好了，了解之后咱们来看一下这个定理

⛺ 定理2

假设状态空间 $|S| = N < \infty$，以下成立：

1.

$$p_{jj}(h) = 1 - q_j h + o(h)$$

2.

$$p_{jk}(h) = q_{jk} h + o(h), \quad \forall j \ne k$$

其中：

- $p_{jj}(h)$ 是状态 j 在时间 h 内保持不变的概率.
- $p_{jk}(h)$ 是在时间 h 内从状态 j 转移到状态 k 的概率.

我们称 $q_{jk} h$ 和 $1 - q_j h$ 为**无限小转移概率**（**infinitesimal transition probabilities**）.

证明部分

1.**定义事件**

- $A(h)$：在时间间隔 $(0, h]$ 内没有发生转移.
- $B(h)$：在时间间隔 $(0, h]$ 内发生至少两次转移.

2.**计算** $p_{jj}(h)$

$$p_{jj}(h) = P(X(h) = j, A(h) \mid X(0) = j) + P(X(h) = j, B(h) \mid X(0) = j)$$

对于第一项，根据指数分布的性质，有：

$$P(A(h) \mid X(0) = j) = e^{-q_j h} = 1 - q_j h + o(h)$$

第二项是 $P(B(h) \mid X(0) = j)$，可以证明其为 $o(h)$，因为事件 $B(h)$ 表示发生至少两次转移，其概率随着 h 减小时更快趋于 0.

所以，结合两项：

$$p_{jj}(h) = 1 - q_j h + o(h)$$

3. 计算 $p_{jk}(h)$ （$j \neq k$） 从状态 j 跳转到状态 k 的概率满足：

$$p_{jk}(h) = P(\text{从 } j \text{ 直接跳到 } k \text{ 在时间 } h \text{ 内}) + P(B(h) \mid X(0) = j)$$

第一项是 $q_{jk}h + o(h)$，第二项同样为 $o(h)$，因此：

$$p_{jk}(h) = q_{jk}h + o(h)$$

生成矩阵 Q

定义生成矩阵 Q：

$$Q = (q_{jk}), \quad q_{jj} = -q_j, \quad q_{jk} = q_j r_{jk}, \quad \forall j \neq k$$

生成矩阵的性质：

- 每一行的元素和为 0：

$$\sum_{k \in S} q_{jk} = 0$$

  证明如下：

$$\sum_{k \in S} q_{jk} = q_{jj} + \sum_{k \neq j} q_{jk} = -q_j + q_j \sum_{k \neq j} r_{jk} = -q_j + q_j = 0$$

- $q_{jj} < 0$，$q_{jk} \geq 0 \, (j \neq k)$.

定理3：Forward Equations

对于有限状态空间 $|S| < \infty$，转移概率矩阵 $P(t)$ 满足：

$$P'(t) = P(t)Q \tag{3}$$

其中：

- $P'(t)$ 表示转移矩阵 $P(t)$ 中每个元素对时间 t 的导数.
- Q 是生成矩阵.

这个公式被称为正向方程（Forward Equations）.

证明部分

1. 目标

   我们需要证明每个元素 $p_{jk}(t)$ 满足：

$$p'_{jk}(t) = \sum_{r \in S} p_{jr}(t) q_{rk}.$$

2. 右导数的计算

   利用 2.5 中的结果，对任意 j, k：

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{jk}(t+h) - p_{jk}(t)}{h}$$

   由转移概率的定义：

$$p_{jk}(t+h) = \sum_{r \in S} p_{jr}(t) p_{rk}(h)$$

   因此：

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{jk}(t+h) - p_{jk}(t)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\sum_{r \in S} p_{jr}(t) p_{rk}(h) - p_{jk}(t)}{h}$$

3.分解计算

将 $r=k$ 和 $r\neq k$ 的部分拆分：

$$=\lim_{h\downarrow 0}\frac{\sum_{r\neq k}p_{jr}(t)p_{rk}(h)+p_{jk}(t)p_{kk}(h)-p_{jk}(t)}{h}.$$

使用 定理2 的结果：

- 对于 $r\neq k$，$p_{rk}(h)=q_{rk}h+o(h)$.
- 对于 $r=k$，$p_{kk}(h)=1-q_kh+o(h)$.

替换后得到：

$$=\lim_{h\downarrow 0}\frac{\sum_{r\neq k}p_{jr}(t)(q_{rk}h+o(h))+p_{jk}(t)(1-q_kh+o(h))-p_{jk}(t)}{h}.$$

4.化简

将 h 提取出来：

$$=\lim_{h\downarrow 0}\sum_{r\neq k}p_{jr}(t)q_{rk}+p_{jk}(t)(-q_k)+o(h).$$

当 $h\to 0$ 时，$o(h)$ 消失，最终得到：

$$p'_{jk}(t)=\sum_{r\in S}p_{jr}(t)q_{rk}.$$

5.左导数的计算

同理，对于左导数：

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{jk}(t)-p_{jk}(t-h)}{h}$$

可使用类似的方法计算，最终也得到：

$$p'_{jk}(t)=\sum_{r\in S}p_{jr}(t)q_{rk}.$$

6.导数的存在性

由于左导数和右导数相等，因此 $p_{jk}(t)$ 的导数存在，并且满足：

$$p'_{jk}(t)=\sum_{r\in S}p_{jr}(t)q_{rk}.$$

> 💡 **总结**
>
> **通过以上证明，我们验证了转移概率矩阵的导数满足：**
>
> $$P'(t)=P(t)Q,$$
>
> **其中，生成矩阵 Q 表示每个状态之间的转移速率。**

Example: Flip-Flop Circuit

我们分析一个简单的两状态 Markov 过程，它的生成矩阵 Q 和转移概率矩阵 $P(t)$ 满足 $P'(t)=P(t)Q$.

以下是他的推导过程：

定义生成矩阵 Q

根据题意：

- $q_{00}=-q_0=-\lambda$
- $q_{01}=1\cdot\lambda=\lambda$

- $q_{10} = 1 \cdot \mu = \mu$
- $q_{11} = -q_1 = -\mu$

因此生成矩阵为:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

求解 $P'(t) = P(t)Q$

假设转移概率矩阵 $P(t)$ 的形式为:

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix}.$$

由 $P'(t) = P(t)Q$ 可得:

$$\begin{pmatrix} p'_{00}(t) & p'_{01}(t) \\ p'_{10}(t) & p'_{11}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

通过矩阵乘法，对每个元素的导数进行计算，例如，取矩阵第一行第一列（row 1 × col 1）:

$$p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t).$$

同理，其它导数公式可以分别计算得出.

替换 $p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$

注意到 $p_{00}(t) + p_{01}(t) = 1$，所以 $p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$. 代入上述导数表达式:

$$p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \mu(1 - p_{00}(t)).$$

展开化简:

$$p'_{00}(t) = -(\lambda + \mu)p_{00}(t) + \mu.$$

求解微分方程

该方程为一阶线性微分方程，可以通过变量分离或积分因子法求解. 设初始条件:

$$p_{00}(0) = P(X(0) = 0 \mid X(0) = 0) = 1.$$

解得:

$$p_{00}(t) = \frac{1}{\lambda + \mu}\{\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\}.$$

求 $p_{01}(t)$

由 $p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$，代入 $p_{00}(t)$:

$$p_{01}(t) = 1 - \frac{1}{\lambda + \mu}\{\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\}.$$

化简后:

$$p_{01}(t) = \frac{1}{\lambda + \mu}\{\lambda - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}\}.$$

对称性与其他元素

类似地，可以求得:

$$p_{10}(t) = \frac{1}{\lambda + \mu}\{\mu - \mu e^{-(\lambda+\mu)t}\},$$

$$p_{11}(t) = \frac{1}{\lambda + \mu}\{\lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t}\}.$$

长时间的极限行为

当 $t \to \infty$，指数项 $e^{-(\lambda+\mu)t} \to 0$，此时：

$$p_{00}(\infty) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad p_{01}(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

这说明，系统达到平稳状态时，转移概率只依赖于生成矩阵的参数 λ 和 μ，与初始状态无关。