Cinemática del cuerpo rígido y Cinética del cuerpo rígido

Cuarto Examen Parcial
Equipo 12

Aguilar Enriquez Paul Sebastian
Benitez Barroso Brandon Raul   Castillo Herrera Gabriela
Martinez Vidal Joceline Yadira
Milán Hernández Maria Fernanda

18 de noviembre del 2016

Repositorio del documento en GitHub
`https://github.com/penserbjorne/clase-cinematicaydinamica-2017-1`

Ejercicio 36 El tambor de freno que se muestra en la figura 1 está conectado a una rueda más grande que no se muestra en la figura. El movimiento del disco está gobernado por la ecuación $\theta(t) = At + Bt^2$, donde θ está en radianes, t en segundos, y las constantes A y B tienen las unidades adecuadas. Determine la velocidad angular cuando $t = t_0$ y calcule el número de revoluciones que da el tambor hasta que se detiene. Evalúa tus resultados cuando $t_0 = 3s$, $A = 36\frac{rad}{s}$ y $B = -1.6\frac{rad}{s^2}$.

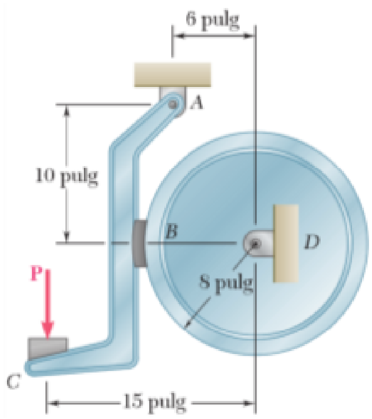

Figura 1: Sistema mostrado para el Problema 36.

Solución:

Dado $\theta = 36t - 1.6t^2$ radianes.

Obteniendo la velocidad angular

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = (36 - 3.2t)\frac{rad}{s}$$

Sustituyendo $t = 3s$.

$$\omega = 36 - (3.2)(3)$$

$$\omega = 26.4\frac{rad}{s}$$

Cuando la rueda se detiene $\omega = 0$

$$0 = 36 - 3.2t$$

Despejamos t

$$t = 11.25s$$

$$\theta = (36)(11.25) - (1.6)(11.25)^2$$

$$\theta = 202.5 \text{ radianes}$$

$$\theta = \frac{202.5}{2\pi}$$

$$\left\{ \theta = 32.2 revoluciones \right. \qquad (1)$$

Ejercicio 39 Para el dispositivo mostrado en la fugura 2, obtén una expresión para la velocidad angular del engrane C y muestra que ésta es independiente del radio del engrane B. Supón que el engrane A no se mueve (i.e. no gira) y denota la velocidad angular de la barra ABC como ω_0.

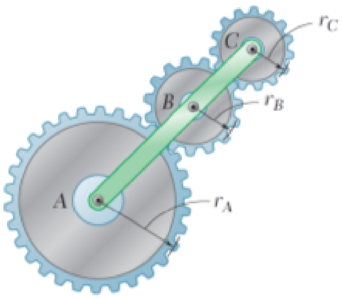

Figura 2: Sistema mostrado para el Problema 39.

Solución:

Indicando el punto de contacto entre los engranes A y B como 1, y el punto de contacto entre los engranes B y C como 2 como se muestra en la figura 3.

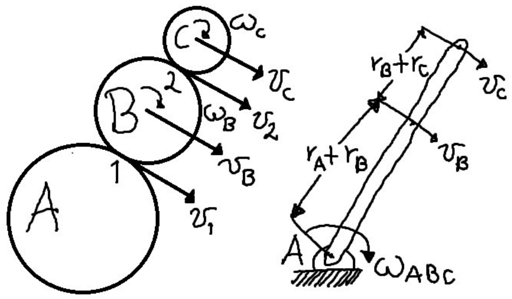

Figura 3: Punto 1 y 2.

Barra ABC:

$$\omega_{ABC} = \omega_{ABC}$$

Considerando el sentido de giro de ω_{ABC} como se muestra en el diagrama:

$$V_A = 0$$

$$V_B = (r_A + r_B)\omega_{ABC}$$

$$V_C = (r_A + 2r_B + r_C)\omega_{ABC}$$

En el engrane A:

$$\omega_A = 0,\ V_A = 0,\ V_1 = 0$$

En el engrane B:

$$V_1 = V_B - r_B\omega_B = 0$$

$$(r_A + r_B)\omega_{ABC} - r_B\omega_B = 0$$

$$\omega_B = (\tfrac{r_A+r_B}{r_B})\omega_{ABC}$$

$$V_2 = V_B + r_B\omega_B$$

$$V_2 = 2(r_A + r_B)\omega_{ABC}$$

En el engrane C:

$$V_2 = V_C - r_C\omega_C$$

$$2(r_A + r_B)\omega_{ABC} = (r_A + 2r_B + r_C)\omega_{ABC} - r_C\omega_C$$

$$\omega_C = (r_A - r_C)\omega_{ABC} = -r_C\omega_C$$

$$\left\{ \omega_C = (1 - \tfrac{r_A}{r_C})\omega_{ABC} \right.$$

Ejercicio 44 El tambor de freno, de $8in$ de radio, está unido a un volante más grande que no se muestra en la figura 4. El momento de inercia de la masa total del tambor y del volante es de $14lb * ft * s^2$ y el coeficiente de frcción cinética entre el tambor y la zapata del freno es de 0.35. Si la velocidad angular del volante es de $360rpm$ en el sentido de las manecillas del reloj cuando se aplica una fuerza $\hat{P}$ de $75lb$ de magnitud al pedal C, determine el número de revoluciones realizadas por el volante antes de detenerse.

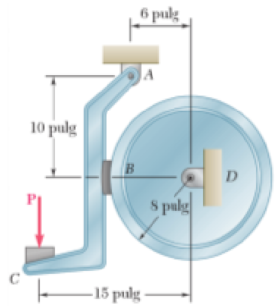

Figura 4: Diagrama correspondiente al Problema 44.

Solución:

Empezamos notando que, al aplicar la fuerza $\hat{P}$ sobre el freno, se llega a un equilibrio en las torcas con respecto al punto A, utilizando la regla de la mano derecha y tomando en cuenta el sentido del giro del tambor

$$\Sigma\hat{\tau}_A = \hat{0} \Rightarrow -\hat{r}_N \times \hat{N} - \hat{r}_f \times \hat{F} + \hat{r}_P \times \hat{P} = \hat{0}$$

donde $\hat{N}$ es la fuerza normal debida al tambor y $\hat{F}$ es la fuerza de fricción debida al roce del tambor con la zapata. Notando que cada ángulo que forma cada fuerza con su respectivo brazo de palanca, reescribimos la ecuacion como:

$$-r_N N - r_F F + r_P P = 0$$

pero, recordando que la magnitud de la fuerza de friccion es $F = fN$, donde f es el coeficiente de fricción cinética, resolvemos para la magnitud de la friccion y obtenemos:

$$F = \frac{fr_p}{r_N + fr_F} P$$

Ahora, en el sistema del tambor, tomando en cuenta las torcas que se ejercen debido a la fricción y a la normal (con respecto al centro D y usando nuevamente la mano de la regla derecha), podemos escribir:

$$\Sigma\hat{\tau}_D = I\hat{\alpha} \Rightarrow \hat{r}_D \times \hat{F} = I\hat{\alpha}$$

donde I es el momento de inercia del tambor y el volante, $\hat{\alpha}$ es su aceleración angular y r_D es el radio del disco. Nótese que la torca debida a la normal se anula ya que la normal es la clineal con su brazo de palanza. Así, obtenemos la ecuación diferencial de la dinámica del tambor-volante

$$\alpha = \frac{d\omega(\theta)}{dt} = -\frac{r_D F}{I} < 0 \text{ i.e. el sistema se desacelera}$$

donde se ha supuesto que, tanto α como ω son funciones del angulo θ. Por tanto, utilizando la regla de la cadena $\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$, por lo que

$$\int_{\omega_0}^{0} \omega d\omega = \alpha \int_0^\theta d\theta' \Rightarrow \theta\alpha = \left.\frac{\omega^2}{2}\right|_{\omega_0}^{0} \Rightarrow \theta = \frac{\omega_0{}^2}{2\alpha}$$

donde se integra desde la velocidad angular del tambor-volante justo antes de que se aplique el freno ω_0 hasta que éste se detiene, que según la ecuacion de α, la aceleración angular es constante. Así, tomando los valores dados inicialmente y usando la ecuación de F, la ultima ecuacion obtenida implica finalmente que

$$\left\{ \; \theta = \frac{I\omega_0{}^2(r_N + f r_F)}{2 f r_D r_P P} = \frac{1712}{25}\pi^2 rad = \frac{856}{25}\pi rev \right.$$

Ejercicio 45 Un neumético de radio r y radio de giro centroidal $\hat{k}$ se suelta desde el reposo sobre una pendiente y rueda sin deslizarse como se muestra en la figura 5. Obtenga una expresión para la aceleración del centro del neumático en términos de r, $\hat{k}$, β y g.

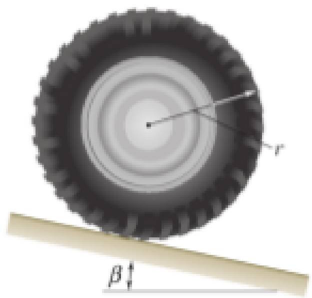

Figura 5: Diagrama correspondiente al Problema 45.

Solución:

Partiendo de lo siguiente:

Particular:
$I_P = mr^2$

Barra:
$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$

$I_{z'} = \frac{1}{3}ML^2$

Disco:
$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$

$I_{z'} = \frac{3}{2}MR^2$

Esfera Solida:
$I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$

Sabemos que:

$$I = nML^2 = MR^2$$

$$k = \sqrt{n}L$$

$$\Sigma\hat{\tau} = I_{eff}\hat{\alpha} = m\hat{r} \times a_0 + I\hat{\alpha}$$

$$\hat{a} = \frac{d\hat{v}}{dt} \Longrightarrow \hat{r} \times \hat{a} = mr^2\hat{\alpha}$$

$$\hat{r} \times \hat{\omega} = m\hat{r} \times \hat{a}_0 + I\hat{\alpha}$$

$$-r\omega sen(\beta) = -mra_0 - I\frac{a_0}{r}$$

Sabiendo que:

$V = \omega r$, $a_0 = \alpha r$, $I = m\hat{k}^2$ y $\omega = mg$

Sistituyendo y despejando:

$$a_0 = \frac{r\omega sen(\beta)}{mr - \frac{I}{r}} = \frac{r\omega sen(\beta)}{mr + \frac{m\hat{k}^2}{r}} = \frac{rgsen(\beta)}{r + \frac{\hat{k}^2}{r}}$$

$$\left\{ \frac{r^2 gsen(\beta)}{r^2 + \hat{k}^2} \right.$$