Cinemática de la partícula

Primer Examen Parcial
Equipo 12

Aguilar Enriquez Paul Sebastian
Benitez Barroso Brandon Raul Castillo Herrera Gabriela
Martinez Vidal Joceline Yadira
Milán Hernández Maria Fernanda

29 de agosto del 2016

Repositorio del documento en GitHub
`https://github.com/penserbjorne/clase-cinematicaydinamica-2017-1`

Ejercicio 1 El movimiento de una partícula en una dimensión está dada por la ecuación $x(t) = \alpha t^2 + \beta + \gamma cos(\omega t)$ donde t representa al tiempo. Determina las expresiones para la velocidad v y aceleración a como funciones del tiempo. Si $\alpha = 6\frac{m}{s^2}$, $\beta = -8m$, $\gamma = 40m$ y $\omega = \pi\frac{rad}{seg}$. Determina los vlores de $v(t)$ y $a(t)$ cuando $t = 6s$.

Solución:

Primero se deriva $\mathbf{x(t)}$ para así obtener la $\mathbf{v(t)}$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2\alpha t - \gamma\omega sen(\omega t) \tag{1}$$

Después se deriva $\mathbf{v(t)}$ para poder obtener la $\mathbf{a(t)}$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 2\alpha - \gamma\omega^2 cos(\omega t) \tag{2}$$

Por útimo sustituimos los valores dados del problema:

$\alpha = 6[\frac{m}{s^2}], \beta = -8[m], \gamma = 40[m], \omega = \pi[\frac{rad}{s}]$ y $t = 6[s]$

En $\mathbf{v(t)}$:

$$v(6[s]) = 2(6[\frac{m}{s^2}])(6[s]) - (40[m])(\pi[\frac{rad}{s}])sen(((\pi[\frac{rad}{s}])(6[s])) \tag{3}$$

$$v(6[s]) = 72[\frac{m}{s}] - (40[m])(\pi[\frac{rad}{s}])(0) \tag{4}$$

$$v(6[s]) = 72[\frac{m}{s}] \tag{5}$$

En $\mathbf{a(t)}$:

$$a(6[s]) = 2(6[\frac{m}{s^2}]) - (40[m])(\pi[\frac{rad}{s}])cos(((\pi[\frac{rad}{s}])(6[s])) \tag{6}$$

$$a(6[s]) = 12([\frac{m}{s^2}]) - 394{,}78[\frac{m}{seg^2}] \tag{7}$$

$$a(6[s]) = -394{,}78[\frac{m}{s^2}] \tag{8}$$

Por lo tanto tenemos que la velocidad y la aceleracion en el tiempo $t = 6s$ es:

$$\begin{cases} v(6[s]) = 72[\frac{m}{s}] \\ a(6[s]) = -394{,}78[\frac{m}{s^2}] \end{cases} \tag{9}$$

Ejercicio 3 La aceleración de un objeto que se mueve en una dimensión está dada por $a(x(t)) = -\omega^2 x(t)$, donde $\omega > 0$ es una constante con unidades $\frac{rad}{s}$. (a) Muestra que la expresión para la posición como función de tiempo es de la forma $x(t) = Asen(\omega t) + Bcos(\omega t)$. (b) Si definimos $\widetilde{T} = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$ y $\widetilde{V} = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 - x_0^2)$, muestra que entonces $\widetilde{T} = \widetilde{V}$ para todo tiempo t.

Solución:

(a) Garantizando que es la solución:

$$x(t) = Asen(\omega t) + Bcos(\omega t) \tag{10}$$

Derivamos

$$\frac{dx}{dt} = A\omega cos(\omega t) - B\omega sen(\omega t) \tag{11}$$

Volvemos a derivar

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 sen(\omega t) - B\omega^2 cos(\omega t) \tag{12}$$

Factorizando

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(\underbrace{Asen(\omega t) - Bcos(\omega t)}_{x(t)}) = -\omega^2 x(t) \tag{13}$$

$\therefore$ la expresión para la posición como función de tiempo es de la forma $x(t) = Asen(\omega t) + Bcos(\omega t)$

(b) De otra forma

$a(x) = v\frac{dv}{dx}$ en lugar de $a(x) = \frac{dv}{dt}$ ya que la segunda depende del tiempo

$$a(x) = v\frac{dv}{dx} = -\omega^2 x \tag{14}$$

Separamos variables y definimos integrales

$$\int_{v_0}^{v} v'dv' = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x'dx' \tag{15}$$

Integrando

$$\frac{v^2 - v_0 2}{2} = -\omega^2 \frac{x^2 - x_0 2}{2} \tag{16}$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0 2) = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 - x_0 2) \tag{17}$$

$$\therefore \widetilde{T} = \widetilde{V} \tag{18}$$

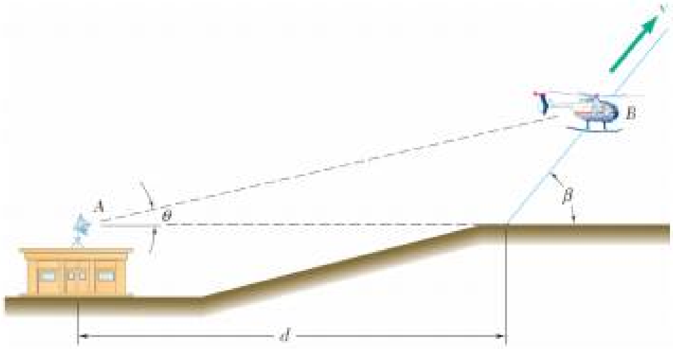


Figura 1: Helicóptero despegando en el Problema 11.

Ejercicio 11 Después de despegar, un helicóptero vuela en línea recta haciendo un ángulo β con respecto al suelo. Simultáneamente, un radar sigue su movimiento en el punto A como se observa en la figura 1. Determina la velocidad del helicóptero en términos de d, β, θ y $\dot{\theta}$.

Solución:

De acuerdo a la geometría (figura 2)

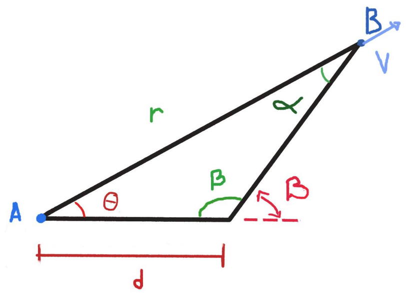


Figura 2: Geometria del planteamiento del problema

$$\theta + (180° + \beta) + \alpha = 180° \tag{19}$$

$$\alpha = 180° - (180° - \beta) - \theta \tag{20}$$

$$\alpha = \beta - \theta \tag{21}$$

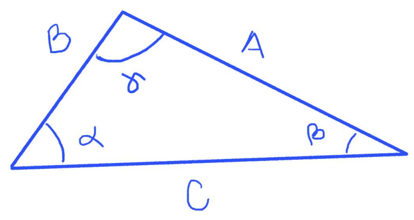


Figura 3: Triangulo para representar la ley de senos y cosenos

Respecto a la ley de los senos (figura 3)

$\frac{A}{sen(\alpha)} = \frac{B}{sen(\beta)} = \frac{C}{sen(\gamma)}$

Entonces tenemos:

$$\frac{r}{sen(180^\circ - \beta)} = \frac{d}{sen(\alpha)} \tag{22}$$

$$\frac{r}{sen(180^\circ - \beta)} = \frac{d}{sen(\beta - \theta)} \tag{23}$$

Recordando que:

$$sen(\alpha - \beta) = sen(A)cos(B) - cos(A)se(B)$$

Podemos realizar lo siguiente:

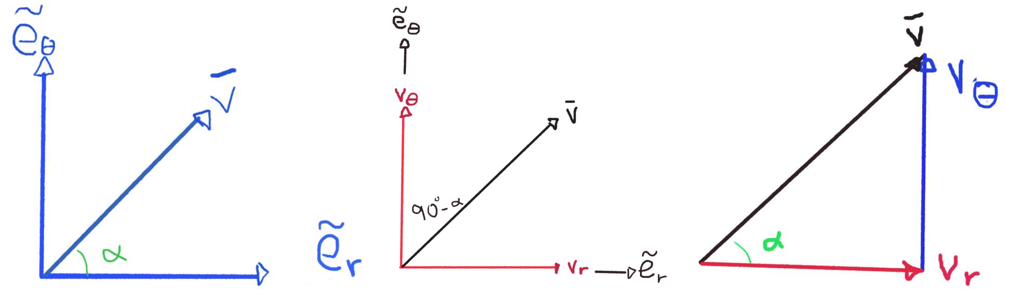
$$rsen(\beta - \theta) = d(sen(180^\circ - \beta)) \tag{24}$$

$$rsen(\beta - \theta) = d(sen(180^\circ)cos(\beta) - cos(180^\circ)sen(\beta)) \tag{25}$$

$$rsen(\beta - \theta) = d(sen(\beta)) \tag{26}$$

$$rsen(\alpha) = d(sen(\beta)) \tag{27}$$

$$r = \frac{d(sen(\beta))}{sen(\alpha)} \tag{28}$$



(a) (b) (c)

Figura 4: Vector Velocidad

A partir del dibujo del vector velocidad (figuras 4):

$$v_\theta = vcos(90° - \alpha) = v\hat{e_\theta} \tag{29}$$

$$v_\theta = vsen(\alpha) \tag{30}$$

Como se demostró en clase, sabemos que:

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

Sustituyendo por las variables conocidas:

$$v_\theta = r\dot{\theta} \tag{31}$$

$$vsen(\alpha) = (\frac{dsen(\beta)}{sen(\alpha)})\dot{\theta} \tag{32}$$

$$v = \frac{\frac{dsen(\beta)}{sen(\alpha)}\dot{\theta}}{\frac{sen(\alpha)}{1}} \tag{33}$$

$\therefore$ el resultado es:

$$\left\{ \; v = \frac{dsen(\beta)}{sen^2(\alpha)}\dot{\theta} = \frac{dsen(\beta)}{sen^2(\beta-\theta)}\dot{\theta} \right. \tag{34}$$

Ejercicio 12 Un avión es detectado por un radar exactamente en la parte más baja de un *loop*, como se muestra en la figura 5. Si el aeroplano cambia su velocidad a una razón a_t conocida, y el radio de curvatura en ese instante es ρ , ¿cuáles son los valores de $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ detectados por el radar en ese instante? Evalúa las expresiones obtenidas para cuando $\rho = 2000m$, $v_0 = 150\frac{m}{s}$, $a = 800m$, $b = 600m$ y $a_t = 25\frac{m}{s^2}$.

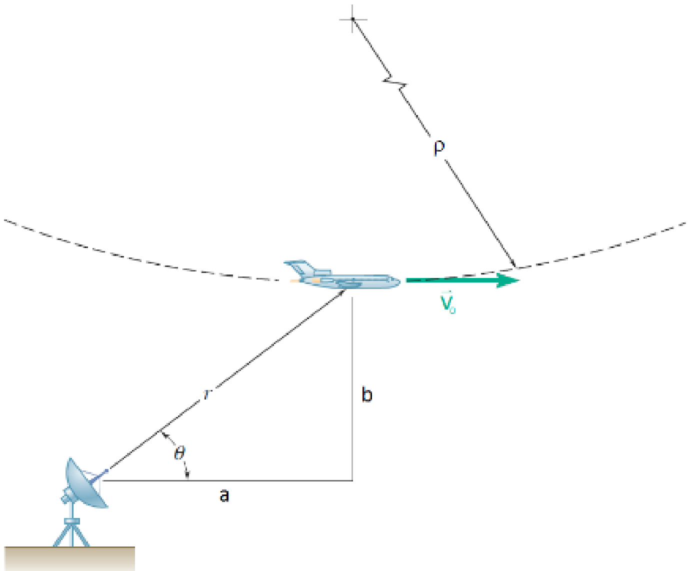


Figura 5: Momento de la detección del aeroplano del Problema 12.

Solución:

$$\bar{r} = r\hat{r} \tag{35}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{r} \tag{36}$$

Sabemos que $\hat{x} = cos(\theta)\hat{r} - sen(\theta)\hat{\theta} \therefore$

$$\bar{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} = v_0\hat{x} = v_0cos(\theta)\hat{r} - v_0sen(\theta) \tag{37}$$

Sabemos que $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$y $\dot{\hat{\theta}} = \dot{\theta}\hat{\theta} \therefore$

$$\bar{v} = v_0cos(\theta)\hat{r} - v_0sen(\theta) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{38}$$

Igualando termino a termino

$$v_0 cos(\theta) = \dot{r} \rightarrow \dot{r} = v_0 cos(\theta) \tag{39}$$

$$-v_0 sen(\theta) = r\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = -\frac{v_0 sen(\theta)}{r} \tag{40}$$

Sustituyendo los valores numericos en $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{r} = (150\frac{m}{s})(\frac{800m}{\sqrt{600^2+800^2}m}) = 120\frac{m}{s} \\ \dot{\theta} = -\frac{v_0\frac{b}{r}}{r} = -\frac{v_0 b}{r^2} = \frac{(-150\frac{m}{s})(600m)}{600^2+800^2m^2} = -0{,}09\frac{rad}{s} \end{cases} \tag{41}$$

$$\hat{a} = \frac{dv}{dt} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{42}$$

Sabemos que:

$\bar{a} = \hat{a}_t\hat{x} + a_n\hat{y}$

$\hat{x} = cos(\theta)\hat{r} - sen(\theta)\hat{\theta}$

$\hat{y} = sen(\theta)\hat{r} + cos(\theta)\hat{\theta}$

$\therefore$ al factorizar y sustituir

$$\hat{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \tag{43}$$

$$\hat{a} = \hat{a}_t(cos(\theta)\hat{r} - sen(\theta)\hat{\theta}) + a_n(sen(\theta)\hat{r} + cos(\theta)\hat{\theta}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \tag{44}$$

Igualando terminos

$$\hat{a}_t cos(\theta) + a_n sen(\theta) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \tag{45}$$

$$-\hat{a}_t sen(\theta) + a_n cos(\theta) = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \tag{46}$$

Despejando $\ddot{r}$:

$$\ddot{r} = \hat{a}_t cos(\theta) + a_n sen(\theta) + r\dot{\theta}^2 \tag{47}$$

$$\ddot{r} = \frac{\hat{a}_t a}{r} + \frac{v_0^2 b}{\rho r} + r\dot{\theta}^2 \tag{48}$$

Despejando $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{cos(\theta) - \hat{a}_t sen(\theta) - 2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \tag{49}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{v_0^2 cos(\theta)}{\rho r} - \frac{\hat{a}_t sen(\theta)}{r} - \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \tag{50}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{v_0^2 a}{\rho r^2} - \frac{\hat{a}_t b}{r^2} - \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \tag{51}$$

Sustituyendo los valores numericos en $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$

$$\ddot{r} = \frac{(25\frac{m}{s^2})(800m)}{\sqrt{800^2+600^2}m} + \frac{(150\frac{m}{s})^2(600m)}{(2000m)(\sqrt{600^2+800^2}m)} + (\sqrt{600^2+800^2}m)(-0{,}09\frac{rad}{s})^2 \tag{52}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(150\frac{m}{s})^2(800m)}{(2000m)((800^2+600^2)m^2)} - \frac{(25\frac{m}{s^2})(600m)}{((800^2+600^2)m^2)} - \frac{(2)(120\frac{m}{s})(-0{,}09\frac{rad}{s})}{\sqrt{800^2+600^2}m} \tag{53}$$

$$\begin{cases} \ddot{r} = 20\frac{m}{s^2} + 6{,}75\frac{m}{s^2} + 8{,}1\frac{m}{s^2} = 34{,}85\frac{m}{s^2} \\ \ddot{\theta} = \frac{9}{1000}\frac{rad}{s^2} - \frac{3}{200}\frac{rad}{s^2} + \frac{27}{1250}\frac{rad}{s^2} = 0{,}0156\frac{rad}{s^2} \end{cases} \tag{54}$$