

# Теорсеминар №1

Кружки ИТМО. 21 октября 2024. 2 занятие, параллель А

## Текущие результаты

1. Дано дерево. За один ход игрок выбирает вершину и удаляет все ребра, выходящие из этой вершины. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при оптимальной игре?  $O(n)$ .
2. Дан массив целых чисел. Вес ребра между  $i$ -ой и  $j$ -ой вершинами равен  $(a_i + a_j) \bmod M$ . Найдите минимальное остовное дерево.  $O(n \log^2 n)$ .
3. Множество вершин графа называется выпуклым, если для любых двух вершин из этого множества все простые пути проходят только по этому множеству. Посчитайте по модулю  $10^9 + 7$  количество выпуклых множеств в графе за  $O(n + m)$ .
4. Турнир - это ориентированный граф, где между каждой парой вершин есть ровно одно ребро. Пусть  $v < u$ , если в турнире есть ребро  $v \rightarrow u$ . Докажите, что если запустить `std::stable_sort` с таким компаратором, то он найдет гамильтонов путь.
5. Дан неориентированный граф. Найдите цикл длины 4, или скажите, что такого нет за  $O(n^2)$ .
6. Дан неориентированный граф. Найдите в нем путь длины 10, или скажите, что такого нет.  $O(n + m)$ .
7. Даны запросы двух видов. Первый - провести ребро между вершинами, гарантируется, что не появилось циклов. Второй - найти хог на пути между вершинами.  $O(q \log n)$ .
8. Дан кактус и  $q$  запросов. Первый вид - добавить вершину в множество. Второй вид - дана вершина, найти максимальное расстояние от этой вершины до вершины из множества.  $O((n + q) \log n)$ .
9. Дан массив из  $n$  целых чисел. Найдите подотрезок с минимальным  $\max(a_{l..r}) \cdot \text{AND}(a_{l..r})$  за  $O(n \log n)$ , где AND - битовое И.
10. За одну секунду фишка в ориентированном графе перемещается равновероятно в одного из своих соседей. Посчитайте математическое ожидание попадания фишки из вершины  $s$  в вершину  $t$  за  $O(n^3)$ .