Restricción y Relajación

Restricción

El método de restricción consiste en agregar condiciones y restricciones que aseguren encontrar al menos una solución.

```
"Encontrar un camino brillante cuando se está perdido."
```

Relajación

El método de relajación consiste en remover condiciones asegurandonos de no incluir nuevas soluciones.

```
"Eliminar obstáculos y espinas cuando las relaciones son complicadas."
```

```
md"""

## Restricción y Relajación

#### Restricción

El método de restricción consiste en agregar condiciones y restricciones que aseguren encontrar al menos una solución.

    "Encontrar un camino brillante cuando se está perdido."

#### Relajación

El método de relajación consiste en remover condiciones asegurandonos de no incluir nuevas soluciones.

    "Eliminar obstáculos y espinas cuando las relaciones son complicadas."
"""
```

Ejemplo 1. [POI-2005 SKO-Knights]

En resumen, debemos encontrar (u1, u2) y (v1, v2) enteros que satisfagan:

$$\forall t_i \in Z, \exists \alpha, \beta \in Z \text{ tal que } \sum\limits_{i=1}^n t_i (a_i, b_i) = \alpha (u_1, u_2) + \beta (v_1, v_2)$$

Para n vectores dados (a_i, b_i), con $i \in \{1, \dots, n\}$.

Solución:

- Primero, es importante notar que el problema nos asegura de que la solución existe, una observación inteligente es poder usar eso mismo a nuestro favor, para tomar **3 vectores y volverlos 2**, de esa forma reducir n a $n-1$ vectores.
- ¿Que tipo de estructura pueden formar dos vectores? Pongamos un ejemplo con los vectores $(2, 3)$ y $(4, 2)$.

```
md"""
#### Ejemplo 1. [POI-2005 SKO-Knights](https://www.luogu.com.cn/problem/P3421)

En resumen, debemos encontrar (u1, u2) y (v1, v2) enteros que satisfagan:

$$\forall t_i \in Z, \exists \alpha, \beta \in Z \text{ tal que }
\sum\limits_{i=1}^n t_i (a_i, b_i) = \alpha (u_1, u_2) + \beta (v_1, v_2)$$

Para $n$ vectores dados $(a_i, b_i)$, con $i \in \{1, \dots, n\}$.

Solución:

- Primero, es importante notar que el problema nos asegura de que la solución
existe, una observación inteligente es poder usar eso mismo a nuestro favor, para
tomar __3 vectores y volverlos 2__, de esa forma reducir $n$ a $n-1$ vectores.

- ¿Que tipo de estructura pueden formar dos vectores? Pongamos un ejemplo con los
vectores $(2, 3)$ y $(4, 2)$.

"""
```

```
using Plots
```

```
(process:2712): GLib-GIO-WARNING **: 20:55:02.885: Unexpectedly, UWP app `37
309CoolLeGetInc.CoolleLibreOfficeforStore_2.0.12.0_neutral__g0y9d13zmhd68'
 (AUMId `37309CoolLeGetInc.CoolleLibreOfficeforStore_g0y9d13zmhd68!App') sup
ports 131 extensions but has no verbs
```

```julia
N = 10
```

```
N = 10
```

```julia
u = [2, 3]
```

```
u = [2; 3]
```

```julia
v = [4, 2]
```

```
v = [4; 2]
```

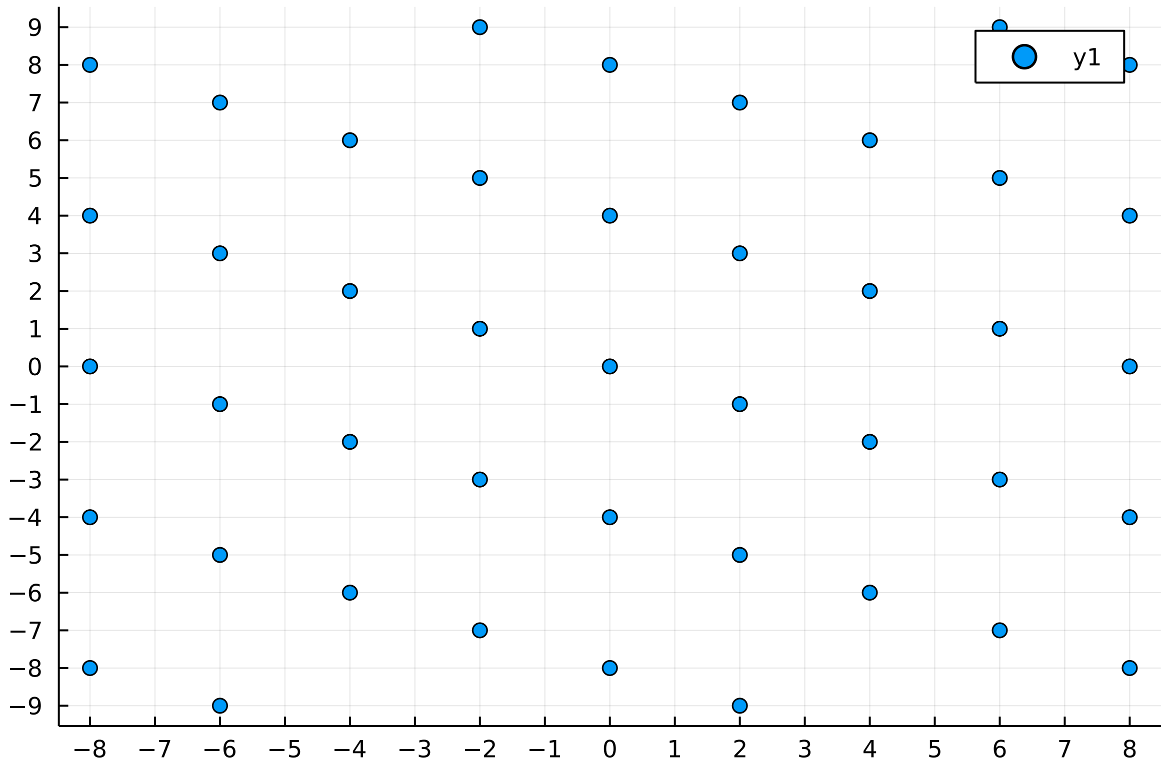
```julia
X = []
```

```
X = Vector{Int64}()
```

```julia
Y = []
```

```
Y = Vector{Int64}()
```

```julia
for i = -N:N
    for j = -N:N
        w = i * u + j * v
        if -N < w[1] < N && -N < w[2] < N
            push!(X, w[1])
            push!(Y, w[2])
        end
    end
end
```




```
scatter(X, Y, xticks=-N:N, yticks=-N:N)
```

Obviamente todos los valores en x e y pertenecen al máximo común divisor de cada componente, respectivamente. Por otro lado, parece que son puntos enteros de una recta trasladada respecto a y (o x).

Restricción: ¿Cualquier dos vectores se pueden intercambiar de tal forma que uno de ellos es recto?

Si uno de lo vectores es recto y el otro no, entonces el eje Y debería contener los múltiplos de este vector recto, veamos como sería:

Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) los vectores iniciales, donde ninguno es recto y no son paralelos entre si.

$$\begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 & = 0 \\ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 & = y \end{cases}$$

Luego: $\alpha_1 a_1 = -\alpha_2 a_2$ donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_1 &\equiv 0 \mod a_2 \\ \alpha_1 \frac{a_1}{\gcd(a_1, a_2)} &\equiv 0 \mod \frac{a_2}{\gcd(a_1, a_2)} \\ \alpha_1 &\equiv 0 \mod \frac{a_2}{\gcd(a_1, a_2)} \end{aligned}$$

Simétricamente $\alpha_2 \equiv 0 \mod \frac{a_1}{\gcd(a_1, a_2)}$, sin embargo tienen distinto signo.

Finalmente

$$Y = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\gcd(a_1, a_2)}$$

Por tanto, el primer vector es

$$U_1 = (0, \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\gcd(a_1, a_2)})$$

Para conseguir el segundo vector, notemos que la primera coordenada si o si es $\gcd(a_1, a_2)$, pero por la **igualdad de Bezout** existen p y q tal que $pa_1 + qa_2 = \gcd(a_1, a_2)$, por tanto el segundo vector es:

$$U_2 = (\gcd(a_1, a_2), pb_1 + qb_2)$$

```
md"""
```

```
Obviamente todos los valores en x e y pertenecen al máximo común divisor de cada
componente, respectivamente. Por otro lado, parece que son puntos enteros de una
recta trasladada respecto a y (o x).

__Restricción__: ¿Cualquier dos vectores se pueden intercambiar de tal forma que
uno de ellos es recto?

Si uno de lo vectores es recto y el otro no, entonces el eje Y debería contener
los múltiplos de este vector recto, veamos como sería:


Sean $(a_1, b_1)$ y $(a_2, b_2)$ los vectores iniciales, donde ninguno es recto y
no son paralelos entre si.

$$\begin{cases}
    \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 &= 0 \\
    \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 &= y
\end{cases}$$

Luego: $\alpha_1 a_1 = -\alpha_2 a_2$ donde

$$\begin{aligned}
\alpha_1 a_1 &\equiv 0 \mod a_2 \\
\alpha_1 \frac{a_1}{\gcd(a_1, a_2)} &\equiv 0 \mod \frac{a_2}{\gcd(a_1, a_2)}\\
\alpha_1 &\equiv 0 \mod \frac{a_2}{\gcd(a_1, a_2)}
\end{aligned}$$

Simétricamente $\alpha_2 \equiv 0 \mod \frac{a_1}{\gcd(a_1, a_2)}$, sin embargo
tienen distinto signo.

Finalmente

$$Y = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\gcd(a_1, a_2)}$$

Por tanto, el primer vector es

$$U_1 = (0, \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\gcd(a_1, a_2)})$$

Para conseguir el segundo vector, notemos que la primera coordenada si o si es
$\gcd(a_1, a_2)$, pero por la __igualdad de Bezout__ existen $p$ y $q$ tal que $p
a_1 + q a_2 = \gcd(a_1, a_2)$, por tanto el segundo vector es:

$$U_2 = (\gcd(a_1, a_2), p b_1 + q b_2)$$

"""
```

Pero, ¿en verdad estos dos vectores reemplazan a los anteriores? Notemos como en la siguiente ecuación debe mantenerse la integralidad de t_1, t_2, r_1, r_2.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gcd(a_1, a_2) \\ \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\gcd(a_1, a_2)} & p b_1 + q b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

Con un poco de algebra tenemos

$$\begin{bmatrix} -q & p \\ \frac{a_1}{\gcd(a_1, a_2)} & \frac{a_2}{\gcd{a_1, a_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{a_2}{\gcd{a_1, a_2}} & p \\ \frac{a_1}{\gcd(a_1, a_2)} & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, ambos vectores son intercambiables.

```
md"""
Pero, ¿en verdad estos dos vectores reemplazan a los anteriores? Notemos como en la siguiente ecuación debe mantenerse la integralidad de $t_1, t_2, r_1, r_2$.

$$\begin{bmatrix}
a_1 & a_2 \\
b_1 & b_2
\end{bmatrix}

\begin{bmatrix}
t_1 \\
t_2
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & \gcd(a_1, a_2) \\
\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\gcd(a_1, a_2)} & p b_1 + q b_2
\end{bmatrix}

\begin{bmatrix}
r_1 \\
r_2
\end{bmatrix}$$

Con un poco de algebra tenemos

$$\begin{bmatrix}
-q & p \\
\frac{a_1}{\gcd(a_1, a_2)} & \frac{a_2}{\gcd{a_1, a_2}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
t_1 \\
```

```
t_2
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
r_1 \\
r_2
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
-\frac{a_2}{\gcd{a_1, a_2}} & p \\
\frac{a_1}{\gcd(a_1, a_2)} & q
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
r_1 \\
r_2
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
t_1 \\
t_2
\end{bmatrix}$$

Por tanto, ambos vectores son intercambiables.
"""
```

Algoritmo para pasar 3 vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ a 2.

1. Si dos de ellos son paralelos los juntamos: $join(v_1, v_2) = (\gcd(a_1, a_2), \gcd(b_1, b_2))$.
2. Si uno de ellos es recto, juntamos los otros 2 y luego juntamos los dos vectores rectos como en 1.
3. juntamos dos de ellos, luego el que no es recto resultante con el tercero y finalmente los dos rectos.
4. notemos que el vector recto puede disminuir la segunda coordenada del otro.

```
md"""

#### Algoritmo para pasar 3 vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ a 2.

1. Si dos de ellos son paralelos los juntamos: $join(v_1, v_2) = (\gcd(a_1, a_2), \gcd(b_1, b_2))$.

2. Si uno de ellos es recto, juntamos los otros 2 y luego juntamos los dos vectores rectos como en 1.

3. juntamos dos de ellos, luego el que no es recto resultante con el tercero y finalmente los dos rectos.

4. notemos que el vector recto puede disminuir la segunda coordenada del otro.

"""
```

```
Enter cell code...
```

```
Enter cell code...
```

```
Enter cell code...
```