NGUYỄN MINH TRÍ

CẤU TRÚC RỜI RẠC

PHẦN 1

02 - 2024

UIT.EDU.VN

Chương 1: Cơ sở logic

Nguyễn Minh Trí

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Ngày 18 tháng 2 năm 2024

1.1 Logic mệnh đề

Trong toán học, ta quan tâm đến những khẳng định có giá trị chân lí xác định (hoặc đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai). Các khẳng định như vậy gọi là **mệnh đề**.

Ví dụ 1.1

1. Các khẳng định sau là mệnh đề:
   - "$1 + 2 = 4$" là mệnh đề sai.
   - "20 là số chẵn" là mệnh đề đúng.
2. Các khẳng định sau không phải là mệnh đề:
   - "Ngày mai trời mưa"
   - "n là số nguyên tố"

- Kí hiệu mệnh đề: $P, Q, R, \cdots$
- Mệnh đề P đúng: P có **giá trị chân lí** là 1 (hay có **chân trị** là 1), viết là $P = 1$.
- Mệnh đề P sai: P có giá trị chân lí là 0 (hay có chân trị là 0), viết là $P = 0$.
- **Mệnh đề phức hợp**: mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết bằng các liên từ (và, hoặc, khi và chỉ khi, nếu ... thì...) hoặc trạng từ "không".
- **Mệnh đề sơ cấp** (nguyên thủy): mệnh đề không thể xây dựng từ các mệnh đề khác thông qua liên từ hoặc trạng từ "không".

Định nghĩa 1.2 Cho mệnh đề P, phủ định của P, kí hiệu $\neg P$ hoặc $\overline{P}$ (đọc là "không P" hoặc "phủ định của P").

Bảng chân trị của phép phủ định

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

Ví dụ 1.3

- Cho mệnh đề $P : 2+3=5$. Khi đó $\overline{P}$: ....
- Cho mệnh đề $Q : 2+3<5$. Khi đó $\overline{Q}$: ....

Định nghĩa 1.4 **Phép hội** của hai mệnh đề P và Q, kí hiệu $P \wedge Q$ (đọc là "P và Q") là mệnh đề đúng khi cả P và Q cùng đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ví dụ 1.5

1. Cho P : "Số 5 là số nguyên tố." và Q : "5 là số chẵn."
   Khi đó $P \wedge Q$: "Số 5 là số nguyên tố và 5 là số chẵn."
2. Cho Q : "$\pi > 3$" và R : "$\pi < 4$".
   Khi đó $Q \wedge R$: "$3 < \pi < 4$"

Định nghĩa 1.6 **Phép tuyển** của hai mệnh đề P và Q, kí hiệu $P \vee Q$ (đọc là "P hoặc Q") là mệnh đề **sai** khi cả P và Q cùng sai và **đúng** trong các trường hợp còn lại.

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ví dụ 1.7

1. Cho P : "Số 5 là số nguyên tố." và Q : "Số 5 là số chẵn."
   Khi đó $P \vee Q$: "Số 5 là số nguyên tố hoặc 5 là số chẵn."
2. Cho Q : "$\pi > 3$" và R : "$\pi < 4$".
   Khi đó $Q \vee R$: "$\pi > 3$ hoặc $\pi < 4$"

Định nghĩa 1.8 Mệnh đề P kéo theo Q, kí hiệu $P \to Q$, đọc là "Nếu P thì Q", là mệnh đề sai khi P đúng và Q sai; và đúng trong các trường hợp còn lại.

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ví dụ 1.9

1. Cho P : "Số 5 là số nguyên tố." và Q : "Số 5 là số chẵn."
   Khi đó $P \to Q$: "Nếu 5 là số nguyên tố thì 5 là số chẵn."
2. Cho Q : "$\pi > 3$" và R : "$\pi < 4$".
   Khi đó $Q \to R$: "Nếu $\pi > 3$ thì $\pi < 4$"

Định nghĩa 1.10 Mệnh đề "Nếu P thì Q và ngược lại", kí hiệu $P \leftrightarrow Q$, đọc là "P khi và chỉ khi Q" hoặc "P nếu và chỉ nếu Q", là mệnh đề đúng khi P, Q cùng đúng hoặc cùng sai; và sai trong các trường hợp còn lại.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ví dụ 1.11

1. Cho P : "Số 5 là số nguyên tố." và Q : "Số 5 là số chẵn."
   Khi đó $P \leftrightarrow Q$: "Số 5 là số nguyên tố khi và chỉ khi 5 là số chẵn."
2. Cho Q : "$\pi > 3$" và R : "$\pi < 4$".
   Khi đó $Q \leftrightarrow R$: "$\pi > 3$ nếu và chỉ nếu $\pi < 4$"

1.2 Biểu thức mệnh đề

Định nghĩa 1.12 **Biểu thức mệnh đề** (**biểu thức logic, dạng mệnh đề**) được cấu tạo từ

- Các mệnh đề (hằng mệnh đề)
- Các biến mệnh đề $p, q, r, \ldots$ có thể lấy giá trị là các mệnh đề nào đó
- Các phép toán phủ định, $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ và các dấu ( ) để chỉ thứ tự thực hiện các phép toán.

Ví dụ 1.13 Cho một biểu thức mệnh đề

$$E = (p \wedge q) \vee ((\overline{r \to p}) \to 0)$$

trong đó p, q, r là các biến mệnh đề.

Cho E, F là hai biểu thức mệnh đề. Khi đó

$$\overline{E}, E \wedge F, E \vee F, E \to F, E \leftrightarrow F$$

cũng là các biểu thức mệnh đề.
Độ ưu tiên của các phép toán logic

- Mức 1: ()
- Mức 2: phép phủ định
- Mức 3: phép hội
- Mức 4: phép tuyển
- Mức 5: phép kéo theo
- Mức 6: phép tương đương

Định nghĩa 1.14 **Bảng chân trị**: Bảng liệt kê chân trị của biểu thức mệnh đề theo các trường hợp về chân trị của tất cả các biến mệnh đề trong biểu thức mệnh đề hay theo các bộ giá trị của bộ biến mệnh đề.
Ví dụ 1.15 Bảng chân trị của hai biểu thức mệnh đề $p \to q$ và $\overline{p} \vee q$

p	q	$\overline{p}$	$p \to q$	$\overline{p} \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Ví dụ 1.16 Bảng chân trị của biểu thức mệnh đề $p \wedge \overline{(q \vee r)}$

p	q	r	$q \vee r$	$\overline{(q \vee r)}$	$p \wedge \overline{(q \vee r)}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	0

Ví dụ 1.17 Bảng chân trị của biểu thức mệnh đề

a. $(p \wedge q) \vee \overline{(p \rightarrow p)}$

b. $(p \vee q) \rightarrow \overline{(p \wedge p)}$

c. $(p \rightarrow q) \wedge \overline{(p \wedge r)}$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định nghĩa 1.18 Hai biểu thức mệnh đề E và F được gọi là **tương đương logic** nếu với mọi hệ chân lý gán cho các mệnh đề có mặt trong hai biểu thức đó thì chúng luôn nhận giá trị chân lý như nhau.. Ký hiệu: $E \Leftrightarrow F$ (hay $E \equiv F$).

Ví dụ 1.19 Chứng minh các tương đương logic sau bằng bảng chân trị

a. $p \to q \Leftrightarrow \overline{q} \to \overline{p}$.

b. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

c. $p \to (q \vee r) \Leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$

Giải. a. Xét bảng chân trị

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \to q$	$\overline{q} \to \overline{p}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

- Một biểu thức mệnh đề được gọi là **hằng đúng** nếu nó luôn có chân trị bằng 1.
- Một biểu thức mệnh đề được gọi là **hằng sai** nếu nó luôn có chân trị bằng 0.

Ví dụ 1.20

a. Chứng minh $\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$ là một hằng đúng.

b. Chứng minh $(p \wedge q) \wedge \overline{(p \vee q)}$ là một hằng sai.

Giải.

Theorem 1.21 *Hai biểu thức mệnh đề E và F tương đương logic khi và chỉ khi $E \leftrightarrow F$ là một hằng đúng.*

Ví dụ 1.22 Chứng minh rằng

$$(\overline{p} \wedge q) \vee \overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p}$$

Giải.

Định nghĩa 1.23 Biểu thức mệnh đề F được gọi là **hệ quả logic** của biểu thức mệnh đề E nếu $E \to F$ là hằng đúng. Kí hiệu: $E \Rightarrow F$.

Ví dụ 1.24 Chứng minh hệ quả logic sau:

a. $\overline{(p \vee q)} \Rightarrow \overline{p}$.

b. $(p \to (q \to r)) \Rightarrow (p \to q) \to (p \to r)$

Giải.

Các luật logic thường gặp

Phủ định 2 lần:	$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$
DeMorgan:	$\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
	$\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
Giao hoán:	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p; p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Kết hợp:	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r); (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Phân phối:	$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
	$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
Lũy đẳng	$p \wedge p \Leftrightarrow p; p \vee p \Leftrightarrow p$
	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$
	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
	$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0; \quad p \wedge 1 \Leftrightarrow p$
	$p \vee 0 \Leftrightarrow p; \quad p \vee 1 \Leftrightarrow 1$
	$p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow 0; \quad p \vee \overline{p} \Leftrightarrow 1$
	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Ví dụ 1.25 Chứng minh rằng

$$(\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge r$$

Giải.

$$\begin{aligned}
(\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (q \wedge r) &\Leftrightarrow [(\overline{p} \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})] \wedge r \vee (q \wedge r) \\
&\Leftrightarrow [\overline{p} \wedge (q \vee \overline{q})] \wedge r \vee (q \wedge r) \\
&\Leftrightarrow (\overline{p} \wedge 1) \wedge r \vee (q \wedge r) \\
&\Leftrightarrow \overline{p} \wedge r \vee (q \wedge r) \\
&\Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \wedge r \\
&\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge r
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.26 Chứng minh rằng

a. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$

b. $(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee r$

c. $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \wedge (\overline{p} \wedge q)) \Leftrightarrow \overline{p} \wedge q$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

1.3 Qui tắc suy diễn

Định nghĩa 1.27 Nếu biểu thức mệnh đề

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

là một hằng đúng thì ta gọi nó là một **quy tắc suy diễn**.

- Các biểu thức mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$: **giả thiết** (hay **tiền đề**)
- Biểu thức mệnh đề q: **kết luận**.

Ví dụ 1.28 Giả sử ta có các mệnh đề:

- p_1: Nếu An chăm học thì An đạt môn CTRR.
- p_2: Nếu An không đi chơi thì An chăm học.
- p_3: An trượt môn CTRR.

Dùng các tiền đề p_1, p_2, p_3 để suy ra kết luận sau là đúng:

q : An đi chơi.

Giải.

- Đặt các mệnh đề
  p :"An chăm học"; q :"An đi chơi"; r :"An đạt môn CTRR".
- Các mệnh đề trở thành:

$$p_1 = p \rightarrow r; \quad p_2 = \overline{q} \rightarrow p; \quad p_3 = \overline{r}$$

- Chứng minh biểu thức mệnh đề sau đây là một hằng đúng:

$$[(p \rightarrow r) \wedge (\overline{q} \rightarrow p) \wedge \overline{r}] \rightarrow q$$

Ví dụ 1.29 Kiểm tra tính đúng đắn của suy luận sau: "Nếu bạn là một lập trình viên thì bạn thông minh. Bạn thông minh và giàu. Vì vậy, nếu bạn giàu thì bạn là một lập trình viên."

Giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Biểu diễn quy tắc suy diễn

- Cách 1. Biểu thức hằng đúng

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q \Leftrightarrow 1$$

- Cách 2. Dòng suy diễn

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

- Cách 3. Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{rl} & p_1 \\ & p_2 \\ & \vdots \\ & p_n \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Các quy tắc suy diễn

Qui tắc khẳng định (Modus Pones)

Biểu thức hằng đúng	Dạng mô hình
$[(p \to q) \wedge p] \to q$	$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$

Ví dụ 1.30

- Nếu An chăm học thì An đạt 10 điểm môn CTRR.
- An chăm học.

Suy ra: An đạt 10 điểm môn CTRR.

Tam đoạn luận (Syllogism)

Biểu thức hằng đúng	Dạng mô hình
$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$	$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ \hline \therefore & p \to r \end{array}$

Ví dụ 1.31

- Nếu hôm nay là chủ nhật thì Chi ở nhà.
- Nếu Chi ở nhà thì Chi làm bài tập môn CTRR.

Suy ra: ....

Qui tắc phủ định (Modus Tollens)

Biểu thức hằng đúng	Dạng sơ đồ
$[(p \to q) \land \overline{q}] \to \overline{p}$	$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \overline{q} \\ \hline \therefore & \overline{p} \end{array}$

Ví dụ 1.32

- Nếu tôi đi học đầy đủ thì tôi được 10 điểm môn CTRR.
- Tôi không được 10 điểm môn CTRR.

Suy ra: ....

Qui tắc tam đoạn luận rời

Biểu thức hằng đúng	Dạng sơ đồ
$[(p \lor q) \land \overline{p}] \to q$	$\begin{array}{rl} & p \lor q \\ & \overline{p} \\ \hline \therefore & q \end{array}$

Ví dụ 1.33

- An đang viết code hoặc An lên thư viện đọc sách.
- An không lên thư viện đọc sách.

Suy ra:..

Qui tắc cộng

Biểu thức hằng đúng	Dạng sơ đồ
$p \to (p \lor q)$	$\begin{array}{rl} & p \\ \hline \therefore & p \lor q \end{array}$

Ví dụ 1.34 An đang học CTRR.
Suy ra: ....

Qui tắc đơn giản

Biểu thức hằng đúng	Dạng sơ đồ
$p \wedge q \rightarrow p$	$\begin{array}{rl} & p \wedge q \\ \hline \therefore & p \end{array}$

Ví dụ 1.35

- An đang học CTRR và An đang xem Youtube.

Suy ra: ....

Qui tắc nối

Biểu thức hằng đúng	Dạng sơ đồ
$(p) \wedge (q) \rightarrow (p \wedge q)$	$\begin{array}{rl} & p \\ & q \\ \hline \therefore & p \wedge q \end{array}$

Ví dụ 1.36

- An đang học CTRR.
- An đang nghe nhạc.

Suy ra: ....

Qui tắc mâu thuẫn

Ta có tương đương logic

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q] \Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \overline{q}) \rightarrow 0]$$

Nếu thêm $\overline{q}$ vào các tiền đề cho trước mà dẫn đến một mâu thuẫn thì q là hệ quả logic của các tiền đề cho trước.
Ví dụ 1.37 Sử dụng quy tắc mâu thuẫn để chứng minh

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow r \\ & \overline{p} \rightarrow q \\ & q \rightarrow s \\ \hline \therefore & \overline{r} \rightarrow s \end{array}$$

Giải. Phủ định của kết luận tương đương với:

$$\overline{\overline{r} \rightarrow s} \Leftrightarrow \overline{r \vee s} \Leftrightarrow \overline{r} \wedge \overline{s}$$

Thêm $\overline{r} \wedge \overline{s}$ vào các tiền đề và chứng minh suy luận sau là đúng

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow r \\ & \overline{p} \rightarrow q \\ & q \rightarrow s \\ & \overline{r} \wedge \overline{s} \\ \hline \therefore & 0 \end{array}$$

Ta có các bước sau đây:

$$\begin{array}{rll}
& \overline{p} \to q & \\
& q \to s & \\
\hline
\therefore & \overline{p} \to s & \text{(Tam đoạn luận)} \\
& \overline{s} & \\
\hline
\therefore & \overline{\overline{p}} & \text{(Phủ định)} \\
& p \to r & \\
\hline
\therefore & r & \text{(Khẳng định)} \\
& \overline{r} & \\
\hline
\therefore & 0 & \text{(đúng)}
\end{array}$$

Vậy quy tắc suy luận đã cho là đúng.

Qui tắc chứng minh theo từng trường hợp

Dạng biểu thức hằng đúng

$$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r]$$

Ý nghĩa: Nếu một giả thiết có thể tách thành 2 trường hợp p đúng hoặc q đúng, và ta chứng minh được $p \to r$ đúng và $q \to r$ đúng. Khi đó r cũng đúng với cả 2 trường hợp.
Ví dụ 1.38 Chứng minh tích 3 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3.

Giải. ....
....
....
....
....
....

Phản ví dụ

- Để chứng minh một phép suy luận là không đúng, ta chỉ cần tìm một phản ví dụ.
- Để tìm một phản ví dụ, ta chỉ cần tìm một trường hợp về chân trị của các biến mệnh đề sao cho các **tiền đề** trong phép suy luận là **đúng** nhưng **kết luận là sai**.

Ví dụ 1.39 Hãy tìm phản ví dụ cho suy luận dưới đây:
Ông Minh nói rằng nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và vợ ông ấy bị mất việc thì ông Minh phải bán xe. Biết rằng nếu vợ ông Minh thường đi làm trễ thì trước sau gì vợ ông cũng sẽ bị mất việc. Cuối cùng, ông Minh đã được tăng lương. Suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta đã không đi làm trễ.

Giải. Đặt các biến mệnh đề:

- p : Ông Minh được tăng lương.
- q : Ông Minh xin nghỉ việc.
- r : Vợ ông Minh bị mất việc.
- s : Ông Minh bán xe.
- t : Vợ ông Minh đi làm trễ.

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{ll} & \overline{p} \to q \\ & (q \wedge r) \to s \\ & t \to r \\ & p \\ \hline \therefore & \overline{s} \to \overline{t} \end{array}$$

Tìm phản ví dụ sau cho các tiền đề là đúng và kết luận sai

$$\begin{cases} \overline{p} \to q = 1 \\ (q \wedge r) \to s = 1 \\ t \to r = 1 \\ p = 1 \\ \overline{s} \to \overline{t} = 0 \end{cases} \quad \text{do đó} \quad \begin{cases} s = 0 \\ t = 1 \\ p = 1 \\ r = 1 \\ q = 0 \end{cases}$$

Chú ý: Nếu hệ trên vô nghiệm thì suy luận trên là đúng. Nếu hệ trên có nghiệm thì suy luận trên là sai.

Ví dụ 1.40 Kiểm tra tính đúng đắn của các mô hình suy diễn sau

a.
$$\begin{array}{ll} & p \to \overline{q} \\ & p \wedge r \\ & q \vee r \\ \hline \therefore & r \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{ll} & p \vee q \\ & r \to \overline{q} \\ & \overline{p} \\ & (\overline{r} \wedge q) \to s \\ \hline \therefore & s \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{ll} & \overline{q} \to \overline{p} \\ & \overline{r} \to \overline{s} \\ & \overline{p \wedge t} \to \overline{r \wedge q} \\ & t \to \overline{p} \\ \hline \therefore & \overline{s} \vee \overline{p} \end{array}$$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.41 Kiểm tra tính đúng đắn của lập luận sau: Nếu ngày mai tôi đi làm thì tôi phải thức dậy trước 7 giờ sáng. Nếu tôi đi xem phim thì tôi sẽ về nhà trễ. Nếu tôi về nhà trễ và thức dậy trước 7 giờ sáng thì tôi sẽ không ngủ ngon. Tôi muốn ngủ ngon. Vì vậy, ngày mai tôi sẽ không đi làm hoặc tôi sẽ không đi xem phim.
Giải. Đặt các biến mệnh đề

- p : ngày mai tôi sẽ đi làm
- q : tôi phải thức dậy trước 7 giờ sáng
- r : tôi đi xem phim
- s : tôi về nhà trễ
- t : tôi ngủ ngon

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{ll} & p \to q \\ & r \to s \\ & (s \wedge q) \to \overline{t} \\ & t \\ \hline \therefore & \overline{p} \vee \overline{r} \end{array}$$

Giả sử $p \to q, r \to s, (s \wedge q) \to \overline{t}, t$ đều đúng và $\overline{p} \vee \overline{r}$ sai

$$\begin{cases} p \to q = 1 \\ r \to s = 1 \\ (s \wedge q) \to \overline{t} = 1 \\ t = 1 \\ \overline{p} \vee \overline{r} = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} p \to q = 1 \\ r \to s = 1 \\ (s \wedge q) \to \overline{t} = 1 \\ t = 1 \\ \overline{p} = 0 \\ \overline{r} = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} q = 1 \\ s = 1 \\ (s \wedge q) \to \overline{t} = 1 \text{ (mâu thuẫn)} \\ t = 1 \\ p = 1 \\ r = 1 \end{cases}$$

Như vậy, suy luận đã cho là đúng.
Chú ý: Ta có thể dùng bảng giá trị chân lý để kiểm tra tính đúng đắn của suy luận bên trên.
Ví dụ 1.42 Kiểm tra tính đúng đắn của suy luận sau: Tôi không là một lập trình viên. Nếu tôi biết thiết kế web thì tôi là một lập trình viên. Nếu tôi giàu thì tôi biết thiết kế web. Vì vậy, tôi không giàu.
Giải. ....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

1.4 Vị từ và lượng từ

Định nghĩa 1.43 Cho $p(x)$ là một phát biểu liên quan đến biến $x \in D$. Ta nói $p(x)$ là một **vị từ** nếu với mỗi $a \in D$, ta có $p(a)$ là một mệnh đề.
Tổng quát: Một vị từ $p(x_1, x_2, \ldots)$ là một phát biểu liên quan đến các biến $x_i \in D_i$ nếu với mỗi $a_i \in D_i$, ta có $p(a_1, a_2, \ldots)$ là một mệnh đề.

Ví dụ 1.44

1. $p(n)$: "n là một số nguyên tố" (n là số tự nhiên).
2. $p(x)$: "$x^2 + 2x^2 + 1 < 0$" (x là số thực).
3. $p(x, y)$: "$x + y < 0$" (x, y là các số thực).

Định nghĩa 1.45 Cho các vị từ $p(x), q(x)$ theo biến $x \in D$. Ta có các phép toán:

Phủ định:	$\overline{p(x)}$
Phép hội:	$p(x) \wedge q(x)$
Phép tuyển:	$p(x) \vee q(x)$
Phép kéo theo:	$p(x) \to q(x)$
Phép kéo theo 2 chiều:	$p(x) \leftrightarrow q(x)$

Ví dụ 1.46 Cho các vị từ

- $p(x)$: "x^2 là một số hữu tỉ"
- $q(x)$: "x là một số hữu tỉ"

Khi đó

- $\overline{p(x)}$: "x^2 **không** là một số hữu tỉ"
- $p(x) \wedge q(x)$: "x^2 là một số hữu tỉ **và** x là một số hữu tỉ"

- $p(x) \vee q(x)$: "x^2 là một số hữu tỉ **hoặc** x là một số hữu tỉ"
- $p(x) \to q(x)$: "**Nếu** x^2 là một số hữu tỉ **thì** x là một số hữu tỉ"
- $p(x) \leftrightarrow q(x)$: "x^2 là một số hữu tỉ **khi và chỉ khi** x là một số hữu tỉ"

Cho một vị từ $p(x)$ với $x \in A$.

- TH1: Với mọi $a \in A$, mệnh đề $p(a)$ là luôn đúng.
- TH2: Có một vài $a \in A$ sao cho mệnh đề $p(a)$ là đúng với.

Nếu TH1 xảy ra thì ta có mệnh đề "với mọi $x \in A, p(x)$" là đúng. Kí hiệu

$$\forall x \in x, p(x).$$

Nếu TH2 xảy ra thì ta có mệnh đề "tồn tại $x \in A, p(x)$" là đúng. Kí hiệu

$$\exists x \in A, p(x).$$

- Các mệnh đề "$\forall x \in A, p(x)$" và "$\exists x \in A, p(x)$" được gọi là các **lượng từ hóa** của vị từ $p(x)$.
- Kí hiệu $\forall$: **lượng từ phổ dụng**;
- Kí hiệu $\exists$: **lượng từ tồn tại**.

Ví dụ 1.47 Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 > 0$ ....
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 \neq 0$ ....
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x - 4 = 0$ ....
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0$ ....

Xét một vị từ theo 2 biến $p(x, y)$ với $x \in A, y \in B$. Ta có 4 mệnh đề:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$$

$$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$$

$$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$$

$$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$$

Ví dụ 1.48 Cho vị từ $p(x, y) : x + y = 1$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề

a. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 1$

b. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 1$

Giải. a. Cho x là một số thực bất kì, ta có thể lấy $y = 1 - x$, khi đó $x + y = 1$. Do đó mệnh đề đã cho là đúng.
b. Giả sử mệnh đề đã cho là đúng, tức là có một số y_0 nào đó sao cho $x + y_0 = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vì mệnh đề trên đúng với mọi x nên mệnh đề vẫn đúng khi cho $x = 0$ hoặc $x = 1$, tức là $0 + y_0 = 1$ và $1 + y_0 = 1$. Điều này suy ra $y_0 = 1$ và $y_0 = 0$, đây là một điều vô lí. Do đó, mệnh đề đã cho là sai.

Định lý 1.49 Cho $p(x, y)$ là một vị từ theo hai biến x, y. Các phát biểu sau là đúng

$$[\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)] \Leftrightarrow [\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)]$$

$$[\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)] \Leftrightarrow [\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)]$$

$$[\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)] \Rightarrow [\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)]$$

Phủ định mệnh đề lượng từ hóa

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ $\overline{p(x, y, \ldots)}$ có được bằng các thay $\forall$ bằng $\exists$, thay $\exists$ bằng $\forall$ và vị từ $p(x, y, \ldots)$ thành $\overline{p(x, y, \ldots)}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\forall x \in A, p(x)} &\Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{p(x)}\\
\overline{\exists x \in A, p(x)} &\Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{p(x)}\\
\overline{\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)} &\Leftrightarrow \exists x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x, y)}\\
\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)} &\Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x, y)}\\
\overline{\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)} &\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x, y)}\\
\overline{\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)} &\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x, y)}
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.50 Phủ định mệnh đề $\qquad A = "\forall x \in \mathbb{R}, 4x + 2 < 0"$

là ....

Ví dụ 1.51 Cho mệnh đề

$$B = "\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \to (x = y)"$$

Hãy cho biết chân trị của mệnh đề B.

Giải. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, chọn $y = x$, khi đó

$$\begin{aligned}
(x^2 = y^2) \to (x = y) &\Leftrightarrow (x^2 = x^2) \to (x = x)\\
&\Leftrightarrow 1 \to 1\\
&\Leftrightarrow 1
\end{aligned}$$

Như vậy $B = 1$ (hay B đúng).

Ví dụ 1.52 Viết dạng phủ định của mệnh đề A và cho biết chân trị của dạng phủ định đó

a. $A = "\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \to (x = y)"$

b. $A = "\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (xy < 0) \to (x + y = 1)"$

c. $A = "\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (xy < 0) \to (x + y \neq 1)"$

Giải. a. Dạng phủ định

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= \overline{\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \to (x = y)}\\
&= \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \overline{(x^2 = y^2) \to (x = y)}\\
&= \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \wedge \overline{(x = y)}\\
&= \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \wedge (x \neq y)
\end{aligned}$$

Lấy $x \in \mathbb{R}$, chọn $y = x$, khi đó

$$\begin{aligned}
&(x^2 = y^2) \to (x \neq y)\\
\Leftrightarrow &(x^2 = x^2) \wedge (x \neq x)\\
\Leftrightarrow &1 \wedge 0\\
\Leftrightarrow &0
\end{aligned}$$

Vậy $\overline{A} = 0$.

b. $A =$ "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (xy < 0) \to (x + y = 1)$"
Dạng phủ định

$$\overline{A} = \text{"}\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (xy < 0) \wedge (x + y \neq 1)\text{"}$$

Xác định chân trị của A.
Với mọi $x \in \mathbb{R}$, lấy $y = x$, khi đó

$$\begin{aligned}
&(xy < 0) \to (x + y = 1) \\
\Leftrightarrow&(xx < 0) \to (x + x = 1) \\
\Leftrightarrow&0 \to (x + x = 1) \\
\Leftrightarrow&1
\end{aligned}$$

Do đó $A = 1$.
Xác định chân trị của $\overline{A}$.
Giả sử $\overline{A} = 1$, tức là có một số $x_0 \in \mathbb{R}$ nào đó thỏa mãn $x_0 y < 0$ và $x_y + y \neq 1$.

- Chọn $y = 1$, khi đó $x_0 < 0$ và $x_0 \neq 0$
- Chọn $y = -1$, khi đó $x_0 > 0$ và $x_0 \neq 2$

Điều này cho ta một mâu thuẫn. Do đó $\overline{A} = 0$.

1.5 Nguyên lí qui nạp

Cho $n_0 \in \mathbb{N}$ và $p(n)$ là một vị từ theo biến $n \in \mathbb{N}$. Để chứng minh tính đúng đắn của mệnh đề

$$\forall n \geq n_0, p(n)$$

ta có thể dùng các dạng nguyên lý quy nạp như sau:

Nguyên lý quy nạp yếu (giả thiết đúng với k)

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{ll}
\text{(cơ sở)} & p(n_0) \\
\text{(giả thiết quy nạp)} & \forall k \geq n_0, p(k) \to p(k+1) \\
\hline
 & \therefore \forall n \geq n_0, p(n)
\end{array}$$

Nguyên lý quy nạp mạnh (giả thiết đúng đến k)

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{ll}
\text{(cơ sở)} & p(n_0) \\
\text{(giả thiết quy nạp)} & \forall k \geq n_0, (p(n_0) \wedge p(n_0+1) \wedge \ldots \wedge p(k)) \to p(k+1) \\
\hline
 & \therefore \forall n \geq n_0, p(n)
\end{array}$$

Ví dụ 1.53 Chứng minh $6^n + 7^n - 1 \vdots 3$ với mọi số $n \in \mathbb{N}$.

Giải.

Ví dụ 1.53 Chứng minh $6^n + 7^n - 1 \vdots 3$ với mọi số $n \in \mathbb{N}$.

BÀI TẬP

Bài 1.1 Lập bảng chân trị của các biểu thức mệnh đề sau:

a. $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ b. $(p \to q) \vee \overline{q}$ c. $\overline{p} \leftrightarrow (p \wedge q)$

d. $(p \vee r) \to (r \vee \overline{p})$ e. $\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$

Bài 1.2 Chứng minh các sự tương đương logic

a. $(p \vee q) \wedge \overline{\overline{p} \wedge q} \wedge \overline{p \wedge \overline{q}} \Leftrightarrow p \wedge q$ b. $[(p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})] \vee q \Leftrightarrow p \vee q$

c. $\overline{p \vee q} \vee [(\overline{p} \wedge q) \vee \overline{q}] \Leftrightarrow \overline{p \wedge q}$ d. $(p \to q) \wedge [\overline{q} \wedge (r \vee \overline{q})] \Leftrightarrow \overline{q \vee p}$

e. $(p \wedge q\overline{\wedge r}) \Leftrightarrow (\overline{p \to q}) \vee (p \wedge \overline{r})$ f. $(p \to q) \wedge \overline{q} \wedge (q \to r) \Leftrightarrow (\overline{q} \wedge \overline{p})$

g. $(p \wedge \overline{q \wedge r}) \Leftrightarrow \overline{p \to q} \vee (p \wedge \overline{r})$ h. $(\overline{p} \vee q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow p \to (q \wedge r)$

i. $(p \to q) \wedge \overline{q} \wedge (q \to r) \Leftrightarrow \overline{q} \wedge \overline{p}$ j. $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \to \overline{q}) \wedge \overline{r}$

k. $[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to (p \to q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q \vee \overline{r}$

Bài 1.3 Dùng các luật logic để kiểm tra các biểu thức mệnh đề sau là hằng đúng

a. $[(p \vee q) \to r] \leftrightarrow [\overline{r} \to \overline{p \vee q}]$ b. $(p \to q) \wedge \overline{q} \to \overline{p}$

c. $[p \to (q \to r)] \to (p \wedge q \to r)$ d. $(p \to r) \wedge (q \to r) \to (p \vee q \to r)$

e. $\overline{(\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}} \vee \overline{p}$ f. $\overline{(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee r)} \vee \overline{p} \vee r$

g. $[(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [p \to (q \to r)]$ h. $[(p \to \overline{q}) \wedge (\overline{q} \to r) \wedge p] \to (\overline{r} \to s)$

Bài 1.4 Chứng minh suy luận sau đây là đúng:

a. $\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ s \vee r \\ r \to \overline{q} \\ \hline \therefore s \vee t \end{array}$ b. $\begin{array}{l} (\overline{p} \vee q) \to r \\ r \to (s \vee t) \\ \overline{s} \\ \overline{u} \\ \overline{u} \to \overline{t} \\ \hline \therefore p \end{array}$ c. $\begin{array}{l} p \to q \\ \overline{r} \vee s \\ p \vee r \\ \hline \therefore \overline{q} \to s \end{array}$

d. $\begin{array}{l} p \to q \\ \overline{r} \\ \overline{q} \\ \hline \therefore \overline{p \vee r} \end{array}$ e. $\begin{array}{l} (p \to q) \to r \\ r \to s \\ \overline{s} \\ \hline \therefore p \to \overline{q} \end{array}$ f. $\begin{array}{l} p \vee q \\ p \to r \\ \overline{r} \\ \hline \therefore q \end{array}$

h. $\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ (s \wedge q) \to (p \wedge t) \\ t \to \overline{p} \\ \hline \therefore \overline{p} \vee \overline{r} \end{array}$ i. $\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ (s \vee q) \to t \\ \overline{t} \\ \hline \therefore \overline{p} \wedge \overline{r} \end{array}$ j. $\begin{array}{l} p \to (q \wedge r) \\ p \\ q \\ r \to (s \vee t) \\ \overline{s} \\ \hline \therefore t \end{array}$

Bài 1.5 Suy luận sau đúng hay sai: Nếu Rita thông minh và chăm học thì cô ấy sẽ có công việc tốt. Nếu cô ấy có công việc tốt thì cô ấy sẽ hạnh phúc. Do đó, nếu Rita không hạnh phúc thì cô ấy không chăm học hoặc cô ấy không thông minh.

Bài 1.6 Suy luận sau đúng hay sai. Nếu bò sữa nhiều và sữa tốt thì sẽ được cho ăn thêm nhiều cỏ non. Bò ăn thêm nhiều cỏ non thì sẽ mập lên. Nhưng thực tế bò không mập lên. Kết luận bò không cho nhiều sữa hoặc không cho sữa tốt.

Bài 1.7 Suy luận sau đúng hay sai: Nếu chương trình hiệu quả, nó sẽ thực thi nhanh chóng. Chương trình có hiệu quả hoặc có lỗi. Tuy nhiên, các chương trình không thực hiện nhanh chóng. Vì vậy, nó có một lỗi.

Bài 1.8 Suy luận sau đúng hay sai: Nếu Chi chăm học thì cô ấy sẽ thi đậu. Nếu Chi không chơi game nhiều thì cô ấy sẽ học. Chi không thi đậu. Do đó, chi chơi gamen nhiều.

Bài 1.9 Suy luận sau đúng hay sai: Shelly học ngành trí tuệ nhân tạo hoặc ngành khoa học máy tính. Nếu Shelly học khoa học máy tính thì cô ấy phải học môn Cấu trúc rời rạc. Do đó, Shelly học ngành trí tuệ nhân tạo hoặc cô ấy phải học môn Cấu trúc rời rạc.

Bài 1.10 Hãy viết dạng phủ định của mệnh đề A và cho biết chân trị của dạng phủ định đó:
a. $A =$ "$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 < 9) \rightarrow (0 < x < 3)$"
b. $A =$ "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy = x$"
c. $A =$ "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (xy < 0) \rightarrow (x + y = 1)$"
d. $A =$ "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x^2y^2 = 1) \vee (xy = 1)$"
e. $A =$ "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x + 2y = 1) \vee (2x - y = 1)$"
f. $A =$ "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x + 2y = 1) \rightarrow (2x - y = 1)$"
g. $A =$ "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)$"
h. $A =$ "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y) \rightarrow (x = y)$"

Bài 1.11 Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, ta có
a. $7^n - 1$ chia hết cho 6.
b. $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.
c. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
d. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.
e. $n^2 < 2^n$ với mọi $n \geq 5$
f. $2n + 1 < n^3$ với mọi $n \geq 2$
g. $n! \geq 2^n$ với mọi $n \geq 4$

Chương 2: Các phương pháp đếm

Nguyễn Minh Trí

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Ngày 18 tháng 2 năm 2024

2.1 Tập hợp

- Tập hợp (tập) là một khái niệm cơ bản của toán học, không được định nghĩa. Tập hợp được mô tả như là sự tụ tập của một số đối tượng nào đó.
- Kí hiệu tập hợp: $A, B, X, Y, \ldots$.
- Phần tử: Những đối tượng tạo thành tập hợp, kí hiệu : $a, b, c, x, y, \ldots$

Ví dụ 2.1 $\mathbb{N}$ tập các số tự nhiên. $\mathbb{Z}$ tập các số nguyên. $\mathbb{Q}$ tập các số hữu tỉ. $\mathbb{R}$ tập các số thực

- Khi nói "x là một phần tử của tập X" hay "x thuộc vào tập X" ta viết $x \in X$.
- Nếu y không là phần tử của tập hợp X hay "y không thuộc tập X" ta viết $y \notin X$.
- Tập rỗng là tập hợp không có chứa phần tử nào. Kí hiệu $\emptyset$.
- Tập hợp A được gọi là **tập con** của tập hợp B khi và chỉ khi mọi phần tử thuộc A đều thuộc B. Kí hiệu $A \subseteq B$.
- Hai tập hợp A và B được gọi là **bằng nhau** nếu chúng cùng chứa những phần tử giống nhau. Kí hiệu $A = B$.

Ví dụ 2.2 Tập các số tự nhiên là một tập con của tập các số nguyên.
Nhận xét.

- Nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$ thì $A = B$.
- Nếu $A \subseteq B$ và $A \neq B$ thì ta nói A là một **tập con thực sự** của B, kí hiệu $A \subset B$.
- Tập rỗng là con của mọi tập hợp.
- Mọi tập hợp đều là con của chính nó.

Các cách xác định tập hợp

Liệt kê các phần tử

Các phần tử được liệt kê giữa hai dấu ngoặc móc {} và cách nhau bằng dấu phẩy ",".

Ví dụ 2.3

- Tập hợp các ước nguyên dương của 30
$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$
- Tập hợp các bội nguyên dương của 30
$$B = \{30, 60, 90, 120, \ldots\}$$
- Tập hợp các số nguyên dương nhỏ hơn 100
$$\{1, 2, \ldots, 99, 100\}.$$

Nêu tính chất đặc trưng của các phần tử

$$X = \{x \mid x \text{ có tính chất } T\}$$

Ví dụ 2.4

- Tập hợp các ước nguyên dương của 30
$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 30\}$$
- Tập hợp các số nguyên dương nhỏ hơn 100
$$\{n \in \mathbb{Z} \mid 0 < n < 300\}$$

Định nghĩa 2.5 Tập tất cả các tập con của một tập X được gọi là **tập lũy thừa** của X, kí hiệu là $P(X)$.
Ví dụ 2.6 Cho $X = \{0, 1, 2\}$. Khi đó
$$P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, X\}$$

Chú ý.

- Nếu $X \subseteq Y$ thì $P(X) \subseteq P(Y)$
- Nếu tập X có n phần tử thì $P(X)$ có 2^n phần tử.

Định nghĩa 2.7 Cho X, Y là hai tập hợp.

X hợp Y :	$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ hoặc } x \in Y\}$
X giao Y :	$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ và } x \in Y\}$
X hiệu Y :	$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ và } x \notin Y\}$
Tích Descartes:	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ và } b \in B\}$.

Nếu $Y \subseteq X$ thì $X \setminus Y$ được gọi là phần bù của Y trong X và kí hiệu $\overline{Y}$.

Ví dụ 2.8 Cho $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$. Khi đó

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Nhận xét.

- $A \times B \neq B \times A$
- $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$
- $A \times A$ được viết lại A^2.

Định nghĩa 2.9 Tích Descartes của n tập hợp tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n > 1)$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Ví dụ 2.10 Cho $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$ và $C = \{x, y\}$. Khi đó

$$\begin{aligned} A \times B \times C = &\{(1, a, x), (1, a, y), (1, b, x), (1, b, y), (1, c, x), (1, c, y), \\ &(2, a, x), (2, a, y), (2, b, x), (2, b, y), (2, c, x), (2, c, y)\} \end{aligned}$$

- Ta viết A^n thay cho $A \times A \times \ldots \times A$ (n lần).
- Số phần tử của một tập hợp hữu hạn A được ký hiệu là $|A|$ và gọi là **lực lượng** của tập A.
- Nếu tập hợp A không hữu hạn thì ta nói A là một tập vô hạn và viết $|A| = \infty$.
- Quy ước $|\emptyset| = 0$.

Tính chất các phép toán

Cho $A, B \subseteq X$ là các tập hợp.

- $A \cap B = B \cap A; \quad A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cup \emptyset = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset; \quad A \cup \overline{A} = X.$
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B); \quad X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- $A \cup X = X; \quad A \cap X = A$

Định lý 2.11 Cho A, B là các tập hợp hữu hạn. Khi đó

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
2. $|A \times B| = |A|.|B|$
3. $|P(A)| = 2^{|A|}$

Biểu diễn các tập hợp trên máy tính
Cho X là một tập hợp với $|X| = n$ và $A \subseteq X$. Đánh số các phần tử của $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ta có thể biểu diễn tập A trên máy tính bằng một chuỗi bit có chiều dài n, trong đó bit thứ i là 1 nếu $a_i \in A$, bit thứ j là 0 nếu $a_j \notin A$.

Ví dụ 2.12 Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Khi đó

- Chuỗi bit biểu diễn tập con $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ là 11111000; chuỗi bit biểu diễn tập con $B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ là 10101011.
- Chuỗi bit của $A \cup B$ là 11111011
- Chuỗi bit của $A \cap B$ là 10101000
- Chuỗi bit của $A \setminus B$ là 01010000
- Chuỗi bit của $\overline{A}$ là 00000111

2.2 Các nguyên lý

Định nghĩa 2.13 (**Nguyên lý cộng**) Giả sử để làm công việc A có hai trường hợp.

- Trường hợp 1 : có n cách làm.
- Trường hợp 2 : có m cách làm (không có cách nào trùng lặp với một cách làm của trường hợp 1).

Khi đó số cách làm công việc A là $n + m$.
Ví dụ 2.14 Bạn Ngọc có 5 cái áo sơ mi và 6 cái áo thun. Ngọc chọn 1 cái áo để mặc. Hỏi Ngọc có bao nhiêu cách chọn?
Giải. Trường hợp 1 : có 5 cách chọn áo sơ mi.
Trường hợp 2 : có 6 cách chọn áo thun.
Vậy Ngọc có $5 + 6 = 11$ cách chọn áo.
Định nghĩa 2.15 (**Nguyên lý nhân**) Một công việc A được chia làm 2 giai đoạn.

- Có n cách thực hiện giai đoạn thứ nhất
- Có m cách thực hiện giai đoạn thứ hai.

Khi đó số cách thực hiện công việc A là $n \times m$.
Ví dụ 2.16 Cho các chữ số 1,2,3,4. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau được lập nên từ 4 chữ số đó?
Giải.

- Giai đoạn 1. Chọn chữ số hàng trăm: có 4 cách chọn.
- Giai đoạn 2. Chọn chữ số hàng chục: có 3 cách chọn
- Giai đoạn 3. Chọn chữ số hàng đơn vị: có 2 cách chọn

Như vậy có thể được 24 số.

Định nghĩa 2.17 (**Nguyên lý bù trừ**) Cho A và B là hai tập hữu hạn. Khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ví dụ 2.18 Trong một lớp ngoại ngữ Anh Pháp. Có 24 sinh viên học Tiếng Pháp, 26 sinh viên học Tiếng Anh và 15 sinh viên học cả Tiếng Anh và Tiếng Pháp. Hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên?

Giải. Số sinh viên của lớp là

$$24 + 26 - 15 = 35.$$

Định nghĩa 2.19 (**Nguyên lý chuồng bồ câu (Dirichlet)**)

- Nếu đặt n vật vào k hộp $(k < n)$ thì có một hộp chứa ít nhất 2 vật.
- Nếu đặt n vật vào k hộp thì có một hộp chứa ít nhất là $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ vật.

Chú ý. Kí hiệu $\lfloor a \rfloor$ để chỉ số nguyên dương bé nhất lớn hơn hoặc bằng a.

Ví dụ 2.20 $\left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 2 \ \ [5] = 5; \ \lfloor 0,4 \rfloor = 1.$

Ví dụ 2.21 Có 20 chim bồ câu ở trong một chuồng có 7 ô. Khi đó sẽ có một ô chứa ít nhất $\left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor = 3$ con bồ câu.

Ví dụ 2.22 Số sinh viên của một lớp học ít nhất là bao nhiêu để có hai sinh viên có tháng sinh giống nhau?

Phân tích.

- Số sinh viên: n
- Số tháng: $k = 12$

Tìm số n nhỏ nhất thỏa mãn $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor = 2.$

Giải. Theo nguyên lý chuồng bồ câu, ta có

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor = 2 \\ \Leftrightarrow &1 < \frac{n}{12} \leq 2 \\ \Leftrightarrow &12 < n \leq 24 \end{aligned}$$

Số n nhỏ nhất thỏa điều kiện là 13.

Ví dụ 2.23 Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Chứng minh rằng nếu chọn 4 số phân biệt từ A thì có ít nhất hai số trong 4 số có tổng bằng 7.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.24 Cho một hình vuông có cạnh 2cm. Lấy ngẫu nhiên 5 điểm trong hình vuông. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2 điểm có khoảng cách không lớn hơn $\sqrt{2}$cm.
Giải. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2.3. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

Định nghĩa 2.25 Cho một tập hợp A gồm $n > 1$ phần tử. Một **hoán vị** của n phần tử này là một cách sắp thứ tự của n phần tử đó.
Ví dụ 2.26 Các hoán vị của 3 phần tử của tập hợp $A = \{a, b, c\}$ là

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, b, a), (c, a, b)$$

Số các hoán vị của n phần tử:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1 = n!$$

Định nghĩa 2.27 Một tập hợp gồm n phần tử. Một nhóm gồm $k \leq n$ phần tử lấy ra từ tập trên theo một thứ tự nào đó được gọi là một **chỉnh hợp** chập k của n.
Ví dụ 2.28 Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$. Tất cả các chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử của A là

$$(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)$$

$$(b, a), (c, a), (d, a), (c, b), (d, b), (d, c)$$

Có tất cả 12 chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử.
Số chỉnh hợp chập k của n:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Định nghĩa 2.29 Một tập hợp gồm n phần tử. Một nhóm gồm $k \leq n$ phần tử lấy ra từ tập trên và không kể thứ tự được gọi là một **tổ hợp** chập k của n.
Ví dụ 2.30 Một tổ SV gồm 5 người A, B, C, D, E. Chọn 3 sinh viên từ 5 sinh viên này là một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử. Các tổ hợp chập 3 của 5 như sau:

$$(A, B, C), (A, B, D), (A, B, E), (A, C, D), (A, C, E),$$
$$(A, D, E), (B, C, D), (B, C, E), (B, D, E), (C, D, E)$$

Có 10 tổ hợp chập 3 của 5 phần tử.
Số tổ hợp chập k của n phần tử là:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Tính chất

1. $C_n^k = C_n^{n-k}, 0 \leq k \leq n$
2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$
3. $C_n^0 = C_n^n = 1$
4. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

Ví dụ 2.31 Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi A có tất cả bao nhiêu tập con chỉ có 3 phần tử?
Giải. Cho A là một tập có 5 phần tử. Mỗi tập con gồm 3 phần tử của A là một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử. Số tập con của A là $C_5^3 = 10$.

Công thức nhị thức Newton

Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và n là một số nguyên dương. Khi đó

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$$

Ví dụ 2.32 Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $(x^2 - 2)^5$.
Giải. Ta có

$$(x^2 - 2)^5 = \sum_{i=0}^{5} C_5^i (x^2)^i (-2)^{5-i}$$

Từ $(x^2)^i = 4$ suy ra $i = 2$. Như vậy, hệ số của x^4 là

$$C_5^2 (-2)^{5-2} = -80.$$

Định nghĩa 2.33 (**Hoán vị lặp**) Cho n vật trong đó có n_i vật loại i giống hệt nhau $(i = 1, 2, \ldots, k; n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$. Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n vật đã cho được gọi là một **hoán vị lặp** của n.
Số hoán vị của n vật, trong đó có

- n_1 vật giống nhau thuộc loại 1,
- n_2 vật giống nhau thuộc loại 2,
- ...
- n_k vật giống nhau thuộc loại k,

là

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Ví dụ 2.34 Có bao nhiêu chuỗi ký tự khác nhau nhận được bằng cách sắp xếp lại các ký tự của chuỗi: YAMAHAM?

Giải.

- Số ký tự có trong chuỗi là: $n = 7$
- Có 3 ký tự A
- Có 2 ký tự M
- Có 1 ký tự Y
- Có 1 ký tự H

Số chuỗi có được là $\frac{7!}{3!2!1!1!} = 420.$

Nhị thức Newton mở rộng

Cho $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$$

Ví dụ 2.35 Tìm hệ số của $uv^2w^2t^3$ trong khai triển $(u + v + w + t)^8$.

Giải. Ta có

$$(u + v + w + t)^8 = \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=8} \frac{8!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} u^{n_1} v^{n_2} w^{n_3} t^{n_4}$$

Từ giả thiết, ta có $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3.$

Hệ số cần tìm là

$$\frac{8!}{1!2!2!3!} = 1680.$$

Định nghĩa 2.36 (Tổ hợp lặp) Mỗi cách chọn ra k vật không phân biệt thứ tự từ n loại vật khác nhau (mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là **tổ hợp lặp** chập k của n.

Số các tổ hợp lặp chập k của n

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Ví dụ 2.37 Có 3 loại nón A, B, C. An mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?

Giải. Mỗi cách chọn là mỗi tổ hợp lặp chập 2 của 3. Cụ thể

$$AA, AB, AC, BB, BC, CC$$

Như vậy có 6 cách chọn.

Ví dụ 2.38 Có bao nhiêu cách xếp k viên kẹo giống nhau vào n hộp phân biệt?

Giải.

- Ta biểu diễn n cái hộp bằng $n+1$ gạch thẳng đứng, còn các viên kẹo biểu diễn bằng các ngôi sao *

$$|**|*|\dots|**||$$

- Ngoài cùng là các vạch thẳng đứng, còn lại $n-1$ vạch thẳng đứng và k viên kẹo được sắp xếp theo thứ tự tùy ý.
- Số cách sắp xếp khác nhau bằng số cách chọn k vật trong tập hợp $n+k-1$ vật (gồm vạch và ngôi sao) đó chính là C^k_{n+k-1}.
- Mỗi cách sắp xếp là một tổ hợp lặp chập k của n. Số cách xếp là K^k_n.

Ví dụ 2.39 Xét phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k(*)$$

với $x_i \in \mathbb{N}$. Phương trình $(*)$ có bao nhiêu nghiệm?

Giải.

- Mỗi nghiệm là một bộ n số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa $(*)$.
- Một nghiệm là một cách xếp k vật vào n hộp phân biệt (mỗi x_i là một hộp).
- Số nghiệm của $(*)$ là số tổ hợp lặp chập k của n. Như vậy, số nghiệm của phương trình đã cho là C^k_{n+k-1}.

Ví dụ 2.40 Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad (1)$$

thỏa $x_1 \leq 3, x_2 \geq 2, x_3 > 4(*)$

Giải. Điều kiện $(*)$ được viết lại

$$x_1 \leq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 5(*)$$

Xét các điều kiện sau:

$$x_2 \geq 2, x_3 \geq 5(**)$$

$$x_1 \geq 4, x_2 \geq 2, x_3 \geq 5(***)$$

Gọi p, q, r lần lượt là số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa các điều kiện $(*), (**), (***)$. Ta có:

$$p = q - r$$

Tìm q. Đặt

$$y_1 = x_1; y_2 = x_2 - 2; y_3 = x_3 - 5, y_4 = x_4$$

Phương trình (1) trở thành

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13 \quad (2)$$

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện $(**)$ bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2).
Số nghiệm của (2) là $K^{13}_4 = C^{13}_{4+13-1} = C^{13}_{16} =$ hay $q = C^{13}_{16}$
Lí luận tương tự, ta có $r = C^9_{12}$
Suy ra $\quad p = q - r = C^{13}_{16} - C^9_{12} = 340$
Số nghiệm nguyên không âm của (1) thỏa điều kiện $(*)$ là 340.

Ví dụ 2.41 Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32 \quad (1)$$

thỏa $x_1 \geq 4, x_2 \geq 5, x_3 \geq 6, x_4 \geq 7 (*)$

Giải.

Ví dụ 2.42 Có thể chia 18 quyển sách giống nhau cho 6 đứa trẻ theo bao nhiêu cách biết rằng mỗi đứa trẻ được ít nhất 2 quyển sách.

Giải.

Định nghĩa 2.43 Mỗi cách chọn ra k vật (có thứ tự) từ n loại vật (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là một **chỉnh hợp lặp** chập k của n.
Số chỉnh hợp lặp chập k của n là

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Ví dụ 2.44 Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số được tạo thành bởi các chữ số 1,2,3,4.

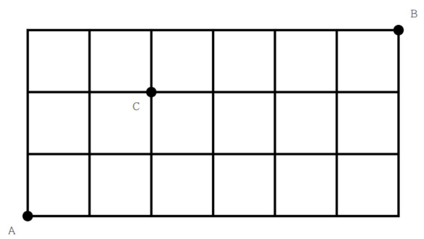
Giải. Mỗi số tự nhiên có 3 chữ số là một cách chọn 3 chữ số có thứ tự từ 4 chữ số đã cho (có thể chọn lặp lại). Số các số cần tìm là

$$\overline{A}_4^3 = 4^3.$$

Bài tập

Bài 2.1 Một mật khẩu có độ dài từ 7 đến 8 kí tự. Trong đó có 1 chữ cái hoa tiếng anh (trong số 26 chữ cái) hoặc 1 chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất 1 chữ số. Có bao nhiêu mật khẩu có thể có?
Bài 2.2 Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 8 hoặc bắt đầu bằng 1 hoặc bắt đầu bằng 00?
Bài 2.3 Lỗi máy in có liên quan đến ba loại sự cố: phần cứng, phần mềm và kết nối điện. Một nhà sản xuất máy in đã tính được các xác suất sau từ cơ sở dữ liệu về kết quả kiểm tra. Xác suất xảy ra sự cố liên quan đến phần cứng, phần mềm hoặc kết nối điện lần lượt là 0,1, 0,6 và 0,3. Xác suất lỗi máy in khi có sự cố phần cứng là 0,9, do sự cố phần mềm là 0,2 và do sự cố về điện là 0,5. Nếu một khách hàng thấy máy in của mình có lỗi thì nguyên nhân có khả năng nhất của sự cố là gì?
Bài 2.4 Chứng minh rằng có ít nhất 6 cách chọn 3 số từ 1 đến 10 sao cho tất cả các cách chọn đó đều có tổng bằng nhau.
Bài 2.5 Chọn 51 số tự nhiên trong các số tự nhiên từ 1 đến 100. Chứng minh rằng tồn tại hai số sao cho số này là ước của số kia.

Bài 2.6 Có bao nhiêu cách chọn 4 số trong các số từ 1 đến 7 và các số đó được xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn?
Bài 2.7 Tìm hệ số của x^3y^4 trong khai triển của $(2x - y + 4)^8$.
Bài 2.8 Hãy tìm hệ số của
a. xyz^2 trong khai triển của $(x + y + 2z)^4$
b. xyz^2 trong khai triển của $(x + 3y - z + t)^4$
Bài 2.9 Chứng minh rằng
a. $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$
b. $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}$
Bài 2.10 Tìm số đường đi khác nhau có khoảng cách ngắn nhất từ A đến B trong lưới không đi qua C.



Bài 2.11 Chọn 4 bi từ mộ hộp gồm 5 bi trắng và 7 bi đen.
a. Tính số cách chọn 4 bi.
b. Tính số cách chọn 4 bi có 2 bi trắng và 2 bi đen.
c. Tính số cách chọn chỉ gồm toàn bi trắng hoặc toàn bi đen.
d. Tính số cách chọn có nhiều hơn 1 bi trắng hoặc nhiều hơn 1 bi đen.

Bài 2.12 a. Có bao nhiêu hoán vị của các chuỗi ký tự CAUTRUCROIRAC?
b. Trong các chuỗi bên trên, có bao nhiêu chuỗi bắt đầu bằng chữ C?
Bài 2.13 Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau lớn lớn 20000 và nhỏ hơn 50000 được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6?
Bài 2.14 Xếp 5 bi trắng và 6 bi đen thành một hàng.
a. Có bao nhiêu cách xếp sao cho các bi trắng và các bi đen được xếp cạnh nhau?
b. Có bao nhiêu cách xếp sao cho không có bi trắng nào được xếp cạnh nhau?
Bài 2.15 Tám bức tranh cổ giống hệt nhau được bán tại một cuộc đấu giá cho 3 người đấu giá.
a. Có bao nhiêu cách có thể phân phối 8 bức tranh cho những người tham gia đấu giá?
b. Có bao nhiêu cách phân phát 8 bức tranh nếu người thầu A chỉ nhận được 1 bức tranh?
Bài 2.16 Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa $x_3 \geq 3$.
Bài 2.17 Có 10 viên kẹo được chia cho 7 em bé.
a. Có bao nhiêu cách chia kẹo?
b. Có bao nhiêu cách chia kẹo sao cho em nào cũng có kẹo?

Chương 3: Quan hệ hai ngôi

Nguyễn Minh Trí

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Ngày 18 tháng 2 năm 2024

3.1 Quan hệ hai ngôi và các tính chất

Định nghĩa 3.1

- Một **quan hệ hai ngôi** (quan hệ) R từ tập A đến tập B là tập con của $RA \times B$.
- Ta viết aRb thay cho $(a,b) \in R$; nếu $(a,b) \notin R$ thì ta viết $a\overline{R}b$.
- Quan hệ hai ngôi từ A đến A được gọi là quan hệ hai ngôi trên A.

Ví dụ 3.2 Cho $A = \{1,2,3,4\}$ và R, S, T là các quan hệ (hai ngôi) trên A xác định bởi
a. $R = \{(a,b) \in A^2 \mid a$ là ước của $b\}$.
b. $S = \{(a,b) \in A^2 \mid a \leq b\}$.

c. $T = \{(a,b) \in A^2 \mid a+b \,\vdots\, 3\}$.
Khi đó

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$$

$$S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Định nghĩa 3.3 (**Tính phản xạ**) Quan hệ hai ngôi R trên tập A có tính phản xạ nếu và chỉ nếu với mọi $a \in A$, ta có aRa.

Ví dụ 3.4 Trên tập $A = \{1,2,3,4\}$, xét các quan hệ hai ngôi

- Quan hệ $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$ không có tính phản xạ vì $(3,3) \notin R$.
- Quan hệ $S = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$ có tính phản xạ vì ....

. . . .

Ví dụ 3.5

- Quan hệ $\leq$ trên tập $\mathbb{Z}$ có tính phản xạ vì . . . .
- Quan hệ $<$ trên tập $\mathbb{Z}$ không có tính phản xạ vì . . . .
- Quan hệ "là ước" trên tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ có tính phản xạ vì . . . .

  . . . .

Định nghĩa 3.6 (**Tính đối xứng**) Quan hệ hai ngôi R trên tập A có tính đối xứng nếu và chỉ nếu

$$\forall x, y \in A, xRy \Rightarrow yRx$$

Ví dụ 3.7

- Quan hệ $R = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ trên tập $A = \{1,2,3,4\}$ có tính đối xứng.
- Quan hệ $\leq$ trên tập $\mathbb{Z}$ không có tính đối xứng vì . . . .

  . . . .
- Quan hệ "là ước" trên tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ không có tính đối xứng vì . . . .

  . . . .

Định nghĩa 3.8 (**Tính phản đối xứng**) Quan hệ hai ngôi R trên tập A có tính chất phản đối xứng nếu và chỉ nếu

$$\forall x, y \in A, (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y.$$

Ví dụ 3.9

- Quan hệ $R = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ trên tập $A = \{1,2,3,4\}$ có tính phản đối xứng.
- Quan hệ $\leq$ trên tập $\mathbb{Z}$ có tính phản đối xứng vì . . . .

  . . . .
- Quan hệ "là ước" trên tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ có tính phản đối xứng . . . .

  . . . .

  . . . .

Định nghĩa 3.10 (**Tính bắc cầu**) Quan hệ hai ngôi R trên tập A có tính bắc cầu nếu và chỉ nếu

$$\forall x, y, z \in A, (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

Ví dụ 3.11

- Quan hệ $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),(2,3)\}$ trên tập $A = \{1,2,3,4\}$ có tính bắc cầu.
- Quan hệ $\leq$ trên tập $\mathbb{Z}$ có tính bắc cầu . . . .

  . . . .
- Quan hệ "là ước" trên tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ có tính phản đối xứng vì . . . . . .

  . . . .

  . . . .

Ví dụ 3.12 Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và R là một quan hệ trên A như sau

$$R = \{(a, b) \in A^2 \mid a + b \text{ là số lẻ}\}.$$

Xác định các phần tử và các tính chất của R.
Giải. Dạng định nghĩa của R là

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$$

Ta thấy

- R không có tính phản xạ vì $(1, 1) \notin R$
- R có tính đối xứng vì với mọi $a, b \in A$ nếu "$a + b$ là số lẻ" thì "$b + a$ là số lẻ."
- R không có tính phản đối xứng vì $(1, 2) \in R$ và $(2, 1) \in R$ nhưng $1 \neq 2$.
- R không có tính bắc cầu vì $(1, 2) \in R$ và $(2, 3) \in R$ nhưng $(1, 3) \notin R$.

3.2 Biểu diễn quan hệ hai ngôi

Định nghĩa 3.13 Cho R là một quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ đến $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Ma trận biểu diễn của R là $M_R = [m_{ij}]_{m\times n}$ trong đó

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0 \text{ nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Ví dụ 3.14 Cho R là một quan hệ từ $A = \{a, b, c\}$ đến $B = \{s, t, u, v\}$ như sau

$$R = \{(a, s), (a, v), (b, v), (c, t), (c, u), (c, v)\}.$$

Ma trận biểu diễn của R là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nhận xét.

- Cho R là một quan hệ trên tập A. Khi đó M_R là ma trận vuông.
- Quan hệ R có tính phản xạ khi và chỉ khi tất cả các phần tử trên đường chéo của M_R đều bằng 1, tức là $m_{ii} = 1$ với mọi i.
- Quan hệ R có tính đối xứng khi và chỉ khi M_R là ma trận đối xứng.
- Quan hệ R có tính phản đối xứng khi và chỉ khi $m_{ij} = 0$ hoặc $m_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$.

Ví dụ 3.15 Giả sử quan hệ R được biểu diễn bởi ma trận

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Quan hệ R có tính phản xạ vì . . . .

  . . . .
- Quan hệ R có tính đối xứng vì . . . .

  . . . .
- Quan hệ R .... tính phản đối xứng vì . . . .

  . . . .

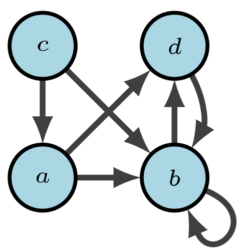
Định nghĩa 3.16 Một đồ thị có hướng (digraph) bao gồm một tập hợp V các đỉnh (hoặc các nút) cùng với một tập hợp E các cặp phần tử có thứ tự của V được gọi là các cạnh (hoặc các cung). Đỉnh a gọi là đỉnh đầu của cạnh (a, b), đỉnh b gọi là đỉnh cuối của cạnh này.

- Một cạnh của dạng (a, a) được biểu diễn bằng một cung từ đỉnh a quay lại chính nó. Một cạnh như vậy được gọi là một **vòng** (loop).
- Một quan hệ hai ngôi R trên một tập hữu hạn A có thể được biểu diễn bởi một đồ thị có hướng trong đó các phần tử của A là các đỉnh, các cặp $(a, b) \in R$ là các cạnh từ a đến b.

Ví dụ 3.17 Cho $A = \{a, b, c, d\}$ và quan hệ hai ngôi R trên A như sau

$$R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b)\}$$

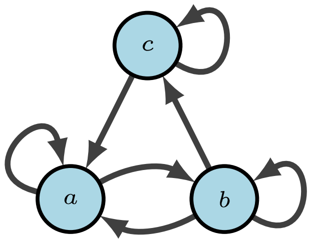
Đồ thị biểu diễn quan hệ R như sau



Nhận xét:

- Quan hệ hai ngôi R có tính phản xạ khi và chỉ khi các đỉnh của đồ thị có hướng đều có vòng.
- Quan hệ hai ngôi R có tính phản xạ khi và chỉ khi mỗi cạnh giữa các đỉnh phân biệt đều có cạnh theo hướng ngược lại.
- Quan hệ hai ngôi R có tính phản đối xứng khi và chỉ khi không tồn tại các cạnh có hướng ngược nhau giữa hai đỉnh.
- Quan hệ hai ngôi R có tính bắc cầu khi và chỉ khi nếu có một cạnh từ đỉnh x đến đỉnh y và cạnh từ đỉnh y đến đỉnh z thì có một cạnh từ đỉnh x đến đỉnh z.

Ví dụ 3.18 Xét các tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu của các quan hệ hai ngôi sau:



- R có tính phản xạ vì ....

  ....
- R không có tính đối xứng vì ....

  ....
- R không có tính phản đối xứng vì ....

  ....
- R không có tính bắc cầu vì ....

  ....

Ví dụ 3.19 Cho $A = \{a, b, c, d\}$ và quan hệ hai ngôi

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (d, d)\}$$

- R có tính phản xạ vì ....

  ....
- R không có tính đối xứng vì ....

  ....
- R không có tính phản đối xứng vì ....

  ....
- R không có tính bắc cầu vì ....

  ....

Ví dụ 3.20 Xét các tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu của các quan hệ hai ngôi sau:
a. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, xRy \Leftrightarrow x = y^2$
b. Cho $A = \{a, b, c, d, e\}$ và

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

Giải. ....

....

....

....

....

....

3.3 Quan hệ tương đương

Định nghĩa 3.21 Quan hệ hai ngôi R trên tập A được gọi là **quan hệ tương đương** nếu nó có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ví dụ 3.22 Cho R là một quan hệ trên $A = \{1, 2, 3, 4\}$ như sau

$$R = \{(a, b) \in A^2 \mid a + b \text{ là số chẵn}\}.$$

Khi đó R là một quan hệ tương đương.

Giải.

Ví dụ 3.23 Cho R là một quan hệ trên $\mathbb{Z}$ như sau

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, aRb \Leftrightarrow a - b \,\vdots\, 5$$

Khi đó R là một quan hệ tương đương. Quan hệ R được gọi là quan hệ đồng dư modulo 5.

Giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định nghĩa 3.24 Cho R là một quan hệ tương đương trên tập A và $a \in A$.

- **Lớp tương đương** của a, kí hiệu $[a]_R$ hoặc $\overline{a}$,

$$[a]_R = \{x \in A \mid xRa\}.$$

- Mỗi phần tử $x \in [a]_R$ được gọi là một **phần tử đại diện** của lớp tương đương $[a]_R$.
- **Tập thương** của A theo quan hệ R, ký hiệu là A/R, là tập tất cả các lớp tương đương của các phần tử thuộc A, nghĩa là

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}.$$

Ví dụ 3.25 Xét R là quan hệ đồng dư theo modulo 5 trên tập $\mathbb{Z}$.

- Lớp tương đương của 0, 1

$$[0]_R = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$$

$$[1]_R = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$$

- Ta có $[0]_R = [5]_R = [10]_R$ và $[1]_R = [6]_R = [11]_R$

Định lý 3.26 Cho R là một quan hệ tương đương trên tập A và $x, y \in A$. Các điều sau đây là tương đương

1. xRy
2. $[x]_R = [y]_R$
3. $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$

Nhận xét. Các lớp tương đương trên A tạo nên một phân hoạch trên A, nghĩa là chúng chia tập A thành các tập con rời nhau.

Ví dụ 3.27 Quan hệ R là quan hệ đồng dư theo modulo 5 trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$ phân hoạch $\mathbb{Z}$ thành 5 tập con $[0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R, [4]_R$.

Nhận xét. Ngược lại, cho $\{A_1, A_2, \ldots\}$ là một phân hoạch của A gồm các tập con không rỗng, rời nhau. Khi đó có duy nhất quan hệ tương đương trên A sao cho mỗi A_i là một lớp tương đương.

Thật vậy, với mỗi $a, b \in A$, ta đặt aRb nếu có tập con A_i sao cho $a, b \in A_i$.

Dễ dàng chứng minh rằng R là quan hệ tương đương trên A và $[a]_R = A_i$ nếu $a \in A_i$.

Ví dụ 3.28 Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập số thực $\mathbb{R}$ như sau

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow x + x^3 = y + y^3.$$

a. Chứng minh R là một quan hệ tương đương.

b. Tìm các lớp tương đương của $-1, 0, 1$ và tìm tập thương.

Giải. ....

Ví dụ 3.29 Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ như sau

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow 4x - y \ \vdots\ 3.$$

a. Chứng minh R là một quan hệ tương đương.
b. Tìm các lớp tương đương của $-1, 0, 1$ và tìm tập thương.
Giải.

Ví dụ 3.30 Cho R là một quan hệ tương đương trên tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ với các lớp tương đương
a. $\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$
b. $\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$
Liệt kê các phần tử của quan hệ R.
Giải.

Ví dụ 3.31 Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ như sau

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}$$

a. Chứng minh R là một quan hệ tương đương.
b. Tìm các lớp tương đương và tập thương.
Giải.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3.4 Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 3.32 (**Quan hệ thứ tự**) Quan hệ hai ngôi R trên tập A được gọi là **quan hệ thứ tự** nếu nó có các tính chất: phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu.

- Kí hiệu: $\prec$.
- Cặp $(X, \prec)$ được gọi là một **tập sắp thứ tự** hay **poset**.

Ví dụ 3.33 Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ như sau

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+, xRy \Leftrightarrow x \text{ là ước của } y$$

Khi đó R là một quan hệ thứ tự.
Giải. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Ví dụ 3.34 Trên tập các số thực $\mathbb{R}$, cho quan hệ hai ngôi R xác định như sau

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow x \leq y$$

Khi đó R là một quan hệ thứ tự.

Giải.

Ví dụ 3.35 Cho tập hợp A, trên tập lũy thừa $\mathcal{P}(A)$ của A, cho quan hệ hai ngôi R xác định như sau

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(A), XRY \Leftrightarrow X \subset Y.$$

Khi đó R là một quan hệ thứ tự.

Giải.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Ví dụ 3.36 Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và R là một quan hệ hai ngôi trên A như sau:

$$R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (5, 5)\}$$

Chứng minh R là một quan hệ thứ tự.

Giải.

- R có tính phản xạ vì . . . .
- R có tính phản đối xứng
- R có tính bắc cầu vì $(2, 1), (1, 1)$ và $(2, 4), (4, 4)$ và $(3, 1), (1, 1)$ và $(3, 2), (2, 1), (3, 1)$ và $(3, 2), (2, 4), (3, 4)$ và $(3, 2), (2, 2)$ và $(3, 4), (4, 4)$ và $(3, 5), (5, 5)$ thuộc R.

Định nghĩa 3.37

- Hai phần tử $a, b \in (X, \prec)$ gọi là **so sánh được** nếu $a \prec b$ hoặc $b \prec a$. Ngược lại, ta nói a, b không so sánh được.
- Nếu hai phần tử tùy ý của một poset $(X, \prec)$ đều so sánh được với nhau thì ta gọi $(X, \prec)$ là một **tập sắp thứ tự toàn phần** hay **sắp thứ tự tuyến tính**.
- Nếu poset $(X, \prec)$ không là một tập sắp thứ tự toàn phần thì ta gọi nó là **tập sắp thứ tự bán phần**.

Ví dụ 3.38

- Quan hệ "$\leq$" trên tập số thực là thứ tự toàn phần.
- Quan hệ "là ước" trên tập hợp số nguyên dương không là thứ tự toàn phần, vì các số 5 và 7 là không so sánh được.
- Với tập A cho trước, tập $P(A)$ với quan hệ $\subset$ là một tập sắp thứ tự. Nếu A có nhiều hơn 1 phần tử thì $P(A)$ không là sắp thứ tự toàn phần.

3.5 Biểu đồ Hasse

- Mỗi tập hữu hạn sắp thứ tự có thể được biểu diễn bởi một đồ thị mà ta gọi là biểu đồ Hasse[1] (Hasse diagram).

Định nghĩa 3.39

- Trong poset $(X, \prec)$, phần tử b được gọi là **trội** của phần tử a nếu $a \prec b$. Ta cũng nói a là **được trội bởi** b.
- Phần tử b được gọi là **trội trực tiếp** của a nếu b là trội của a và không tồn tại trội c sao cho

$$a \prec c \prec b, a \neq c \neq b.$$

Ví dụ 3.40 Xét $\prec$ là quan hệ "là ước" trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Khi đó $2, 3, 4$ là các trội của 1; các trội trực tiếp của 1 là $2, 3$.

Định nghĩa 3.41 (Biểu đồ Hasse) Biểu đồ Hasse của poset $(X, \prec)$ là một đồ thị:

1. Mỗi phần tử của X được biễu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng.
2. Nếu b là trội trực tiếp của a thì vẽ một cung đi từ a đến b .

Xây dựng biểu đồ Hasse của một tập sắp thứ tự như sau

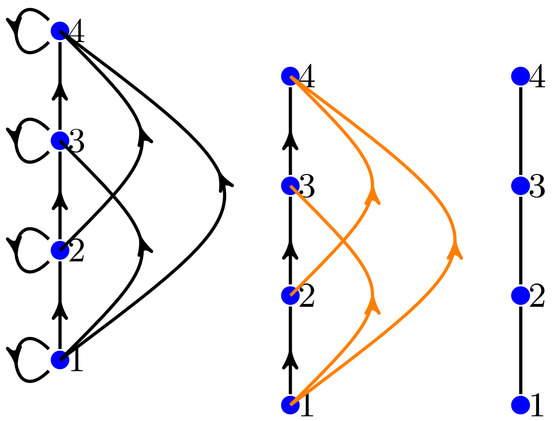
1. Biểu diễn quan hệ thứ tự bằng đồ thị có hướng G.
2. Bỏ các khuyên tại các đỉnh của G.
3. Bỏ các cạnh mà chúng được suy ra từ tính bắc cầu.
4. Sắp xếp các cạnh sao cho đỉnh đầu ở dưới đỉnh cuối và bỏ các mũi tên trên các cạnh.

[1] Helmut Hasse (1898-1979) - một nhà toán học người Đức

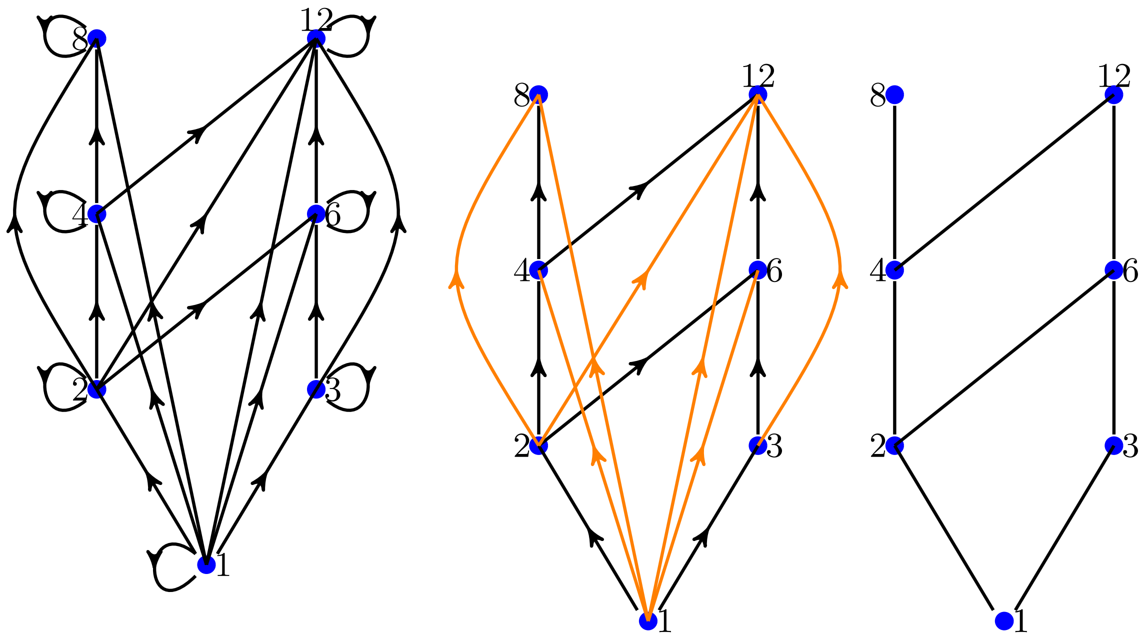
Chú ý: Ta không vẽ mũi tên với qui ước mỗi cung đều đi từ dưới lên trên.

Ví dụ 3.42 Vẽ biểu đồ Hasse của poset $(A, \prec)$ với $\prec$ là quan hệ "là ước" trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Giải.



Ví dụ 3.43 Xây dựng biểu đồ Hasse cho quan hệ "là ước" trên tập $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.



3.5 Các phần tử đặc biệt

Định nghĩa 3.44 (**Phần tử nhỏ nhất - phần tử lớn nhất**) Cho $(S, \prec)$ là một tập sắp thứ tự.

- Phần tử $a \in S$ được gọi là **phần tử nhỏ nhất** của S, kí hiệu $a = \min(S)$, nếu với mọi $x \in S$, ta có $a \prec x$.
- Phần tử $a \in S$ được gọi là **phần tử lớn nhất** của S, kí hiệu $a = \max(S)$, nếu với mọi $x \in S$, ta có $x \prec a$.

Ví dụ 3.45 Trong tập $X = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 < 100\}$ với quan hệ thứ tự $\leq$, ta có

$$\min X = -9, \max X = 9.$$

Ví dụ 3.46 Trong tập sắp thứ tự $(A, \leq)$ với $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 10\}$ không có phần tử nhỏ nhất và cũng không có phần tử lớn nhất.

Thật vậy, giả sử $a = \max A$. Khi đó $a \in \mathbb{R}$ và $a < 10$. Đặt $b = \dfrac{a+10}{2}$, ta thấy $b \in A$ nhưng $b > a$. Do đó A không có phần tử lớn nhất.

Tương tự, giả sử $c = \min A$ và đặt $d = \dfrac{c-10}{2}$. Ta thấy $d \in A$ và $d < c$. Do đó A không có phần tử nhỏ nhất.

Định nghĩa 3.47 (**Thứ tự tốt**) Một tập hợp có thứ tự được gọi là có thứ tự tốt (hay được sắp tốt) nếu mọi tập con khác rỗng đều có phần tử nhỏ nhất.

Ví dụ 3.48

- Tập hợp có thứ tự $(\mathbb{N}, \leq)$ là một tập hợp được sắp tốt.
- Tập hợp có thứ tự $(\mathbb{Z}, \leq)$ không phải là một tập hợp sắp tốt vì $\mathbb{Z}$ không có phần tử nhỏ nhất.

Định nghĩa 3.49 (**Phần tử tối tiểu và phần tử tối đại**) Một phần tử $a \in (S, \prec)$ được gọi là:

- **Phần tử tối tiểu** nếu không tồn tại $x \in S$ sao cho $x \neq a$ và $x \prec a$.
- **Phần tử tối đại** nếu không tồn tại $x \in S$ sao cho $x \neq a$ và $a \prec x$.

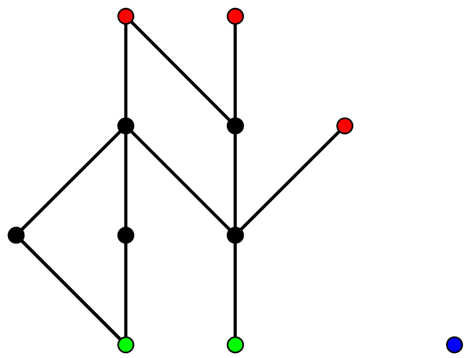
Nhận xét.

- Phần tử tối tiểu (tối đại) của một tập có thứ tự không nhất thiết là duy nhất.
- Phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của một tập có thứ tự (nếu có) là phần tử tối đại (tối tiểu) duy nhất của tập hợp đó.
- Trong một poset X hữu hạn, phần tử tối đại và phần tử tối tiểu luôn luôn tồn tại.

Ví dụ 3.50 Xét $\prec$ là quan hệ "là ước" trên tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Phần tử tối tiểu của A là 1 vì 1 là ước của mọi phần tử $x \in A$.
- Số 4 là phần tử tối đại vì không tồn tại $x \in A, x \neq 4$ sao cho 4 là ước của x.
- Tương tự, các số 5, 6 là các phần tử tối đại của A.

Ví dụ 3.51 Cho $(S, \prec)$ có biểu đồ Hasse như hình vẽ



- Mỗi đỉnh màu đỏ là tối đại.
- Mỗi đỉnh màu xanh lá là tối tiểu.
- Mỗi đỉnh màu xanh dương là vừa tối đại, vừa tối tiểu.
- Không có cung nào xuất phát từ điểm tối đại.
- Không có cung nào kết thúc ở điểm tối tiểu.

Ví dụ 3.52 Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và R là quan hệ trên A

$$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,4), (5,5)\}.$$

Quan hệ R có là một quan hệ thứ tự không? Nếu R là một quan hệ thứ tự, hãy vẽ biểu đồ Hasse cho (A, R).

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.53 Cho $X = \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 16, 15, 20, 30, 36, 40, 60\}$. Trên X cho quan hệ R là quan hệ "ước số của".

a. Vẽ biểu đồ Hasse cho (X, R).

b. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất của X.

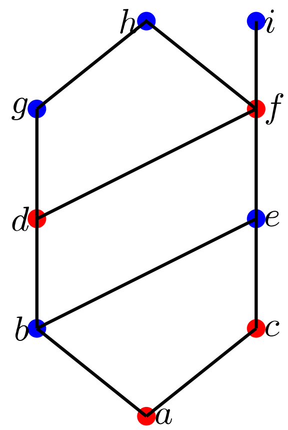
Giải.

Định nghĩa 3.54 Cho $(X, \prec)$ là một tập sắp thứ tự và $A \subseteq X$.

- Phần tử $u \in X$ được gọi là một chặn trên (upper bound) của A nếu với mọi $a \in A$, ta có $a \prec u$.
- Phần tử $v \in X$ được gọi là một chặn dưới (lower bound) của A nếu với mọi $a \in A$, ta có $v \prec a$.

Ví dụ 3.55 Tìm các chặn trên và chặn dưới của $A = \{a, c, d, f\}$ trong tập sắp thứ tự có biểu đồ Hasse bên phải.

- Các chặn trên của A là f, h, i.
- Các chặn dưới của A là a.

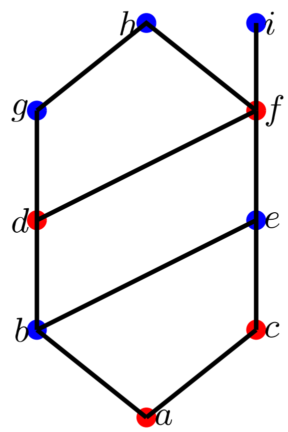


Định nghĩa 3.56 Cho $(X, \prec)$ là một tập sắp thứ tự và $A \subseteq X$.

- Phần tử $x \in X$ được gọi là chặn trên nhỏ nhất (the least upper bound) của A nếu x là phần tử nhỏ nhất trong các chặn trên của A.
- Phần tử $y \in X$ được gọi là chặn dưới lớn nhất (the greatest lower bound) của A nếu y là phần tử lớn nhất trong các chặn dưới của A.

Ví dụ 3.57 Tìm chặn trên nhỏ nhất và chặn dưới lớn nhất của $A = \{a, c, d, f\}$ trong tập sắp thứ tự có biểu đồ Hasse bên phải.

- Các chặn trên của A là f, h, i.
- Các chặn dưới của A là a.
- Chặn trên nhỏ nhất của A là f.
- Chặn dưới lớn nhất của A là a.



Ví dụ 3.58 Tìm chặn trên nhỏ nhất và chặn dưới lớn nhất của tập $A = \{3, 9, 12\}$ trong tập sắp thứ tự $\mathbb{N}^*$ với quan hệ "là ước".

Giải.

- Một số tự nhiên x khác 0 là một chặn trên của A nếu 3,9 và 12 đều là ước của x. Do đó x chia hết cho bội chung nhỏ nhất của 3,9 và 12, tức là x chia hết cho 36. Vì 36 là ước của các chặn trên của A nên chặn trên nhỏ nhất của A là 36.
- Một số tự nhiên y khác 0 là một chặn dưới của A nếu y là ước của 3,9 và 12. Do đó y là ước của ước chung lớn nhất của 3,9 và 12, tức là y là ước của 3. Suy ra y là 1 hoặc 3. Vì 1 là ước của 3 nên 3 là chặn dưới lớn nhất của $\{3, 9, 12\}$.

BÀI TẬP

Bài 3.1 Kiểm tra các tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu của các quan hệ hai ngôi sau:
a. $\forall x, y \in \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow |x - y| < 0,005$.
b. $\forall x, y \in \mathbb{R}, xSy \Leftrightarrow xy \geq 0$.
c. $\forall x, y \in \mathbb{R}, xTy \Leftrightarrow |x| = |y|$.
d. $\forall x, y \in \mathbb{Q}, xVy \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.
Bài 3.2 Cho tập $A = \{1, 2, 3\}$, Kiểm tra các tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu
a. $R = \{(1, 3), (3, 3), (3, 1), (2, 2), (2, 3), (1, 1), (1, 2)\}$
b. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3)\}$
c. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$
Bài 3.3 Biểu diễn các quan hệ trên tập $\{1, 2, 3, 4\}$ dưới đây bằng ma trận 0 - 1 (với các phần tử được liệt kê theo thứ tự tăng dần).
a. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
b. $\{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 1)\}$
c. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
d. $\{(2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$
Bài 3.4 Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập $\mathcal{P}(A)$ với $A = \{1, 2, 3\}$

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(A), XRY \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset.$$

Kiểm tra các tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu của quan hệ R.

Bài 3.5 Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ như sau

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow x = y^2$$

a. Liệt kê các phần tử của R.
b. Biểu diễn R bằng đồ thị có hướng.
Bài 3.6 Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ như sau

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow |x - y| < 2$$

a. Liệt kê các phần tử của R.
b. Biểu diễn R bằng đồ thị có hướng.
c. Kiểm tra các tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu của quan hệ R.
Bài 3.7 Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ như sau

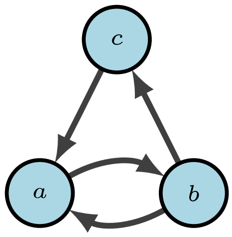
$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

a. Liệt kê các phần tử của R.
b. Biểu diễn R bằng đồ thị có hướng.
c. Kiểm tra các tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu của quan hệ R.
Bài 3.8 Cho $A = \{(1, 3), (2, 4), (24, 28), (3, 9), (1, 5), (3, 6)\}$ và quan hệ hai ngôi R trên A như sau: với mọi $(a, b), (c, d) \in A$,

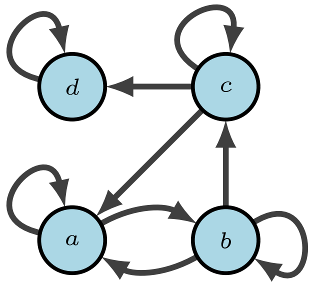
$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Kiểm tra các tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu của quan hệ R.
Bài 3.9 Hãy liệt kê các cặp được sắp trong các quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị có hướng. Kiểm tra các tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu của các quan hệ.

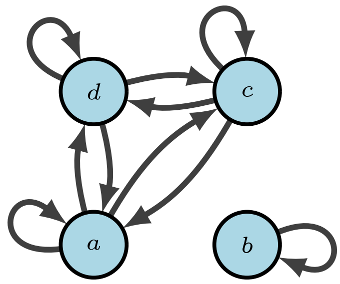
a.



b.



c.



Bài 3.10 Liệt kê các cặp được sắp trong quan hệ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ tương ứng với các ma trận dưới đây (trong đó các cột và hàng tương ứng với các số nguyên được liệt kê theo thứ tự tăng). Kiểm tra các tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu của các quan hệ.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 3.11 Cho các ma trận biểu diễn các quan hệ hai ngôi trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (trong đó các cột và hàng tương ứng với các số nguyên được liệt kê theo thứ tự tăng).

a. $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Liệt kê các phần tử của quan hệ R. Biểu diễn ma trận M^2 bằng ma trận 0-1, trong đó các số chẵn trong M^2 được viết là 0, các số lẻ trong M^2 được viết là 1. Sau đó, biểu diễn các phần tử của quan hệ S có ma trận biểu diễn là M^2.
Hỏi S có là con của R không và quan hệ R có tính bắc cầu không?

Bài 3.12 Trên $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, cho quan hệ hai ngôi R xác định như sau:

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow 2x + y \,\vdots\, 3.$$

a. Chứng minh R là một quan hệ tương đương.
b. Tìm các lớp tương đương và tập thương.
Bài 3.13 Trên $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, cho quan hệ hai ngôi R xác định như sau:

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 \,\vdots\, 2.$$

a. Chứng minh R là một quan hệ tương đương.
b. Tìm các lớp tương đương và tập thương.
Bài 3.14 Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập số thực $\mathbb{R}$ như sau

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow (x = 0 = y) \vee (xy > 0)$$

a. Chứng minh R là một quan hệ tương đương.
b. Tìm các lớp tương đương của $-1, 0, 1$ và tìm tập thương.
Bài 3.15 Cho $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ và quan hệ R trên A xác định như sau: Với mọi $(a, b), (c, d) \in A$,

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a = d = b + c.$$

a. Chứng minh R là một quan hệ tương đương.
b. Tìm các lớp tương đương của $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.

Bài 3.16 Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập $\mathcal{P}(A)$ với $A = \{1, 2, 3\}$

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(A), XRY \Leftrightarrow |X| = |Y|.$$

a. Chứng minh R là một quan hệ tương đương.
b. Tìm các lớp tương đương của $\mathcal{P}(A)$ và tìm tập thương.
Bài 3.17 Cho quan hệ R trên tập $A = \{a, b, c, d\}$ như sau

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (c, a), (a, d), (c, d), (b, c), (b, d), (b, a)\}.$$

a. Chứng minh R là một quan hệ thứ tự.
b. Quan hệ R có là toàn phần không? Vì sao?
Bài 3.18 Cho tập $X = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ và quan hệ thứ tự R trên X như sau:

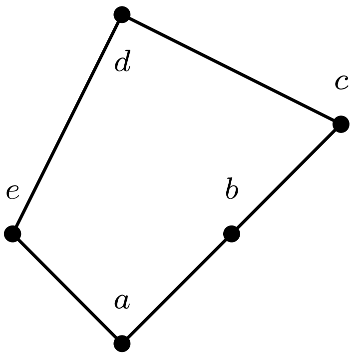
$$\forall x, y \in X, xRy \Leftrightarrow x \text{ là ước của } y$$

a. Vẽ biểu đồ Hasse của (X, R).
b.Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất của (X, R).
Bài 3.19 Cho tập $X = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18\}$ và quan hệ thứ tự R trên X như sau:

$$\forall x, y \in X, xRy \Leftrightarrow x \text{ là ước của } y$$

a. Vẽ biểu đồ Hasse của (X, R).
b.Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất của (X, R).

Bài 3.20 Cho biểu đồ Hasse của tập sắp thứ tự (X, R)



Biểu diễn các phần tử của R.
Bài 3.21 Cho tập $X = \{2, 3, 5, 12, 18\}$ và quan hệ thứ tự R trên X như sau:

$$\forall x, y \in X, xRy \Leftrightarrow x \text{ là ước của } y$$

a. Vẽ biểu đồ Hasse của (X, R).
b.Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất của (X, R).