NGUYỄN MINH TRÍ

CẤU TRÚC RỜI RẠC

PHẦN 2

02 - 2024

UIT.EDU.VN

Chương 4: Đại số Boole

Nguyễn Minh Trí

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Ngày 28 tháng 3 năm 2024

- **Đại số Boole:** Một cấu trúc đại số liên quan đến hệ nhị phân
- George Boole (1815-1864), một nhà toán học người Anh, đã phát minh ra nó vào năm 1854 để **phân tích các quy luật của logic** và **các phương pháp suy diễn mệnh đề**.
- Năm 1938, Claude Shannon đã chứng tỏ rằng có thể dùng các quy tắc cơ bản của đại số Boole để thiết kế các mạch điện.

4.1 Đại số Boole

Định nghĩa 4.1 Một đại số Boole (Boolean algebra) $(A, \wedge, \vee, \bar{}, 0, 1)$ là một tập hợp $A \neq \emptyset$ với các phép toán $\vee, \wedge, \bar{}$, tức là các ánh xạ:

$$\begin{aligned} \vee : A \times A &\to A \\ (x, y) &\mapsto x \vee y \end{aligned} \; ; \quad \begin{aligned} \wedge : A \times A &\to A \\ (x, y) &\mapsto x \wedge y \end{aligned} \; ; \quad \begin{aligned} \bar{} : A &\to A \\ x &\mapsto \overline{x} \end{aligned}$$

thỏa 5 tính chất sau:

1. Tính kết hợp: với mọi $x, y, z \in A$, ta có
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$
2. Tính giao hoán: với mọi $x, y \in A$, ta có
$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \wedge y = y \wedge x$$
3. Tính phân phối: với mọi $x, y, z \in A$, ta có
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \wedge z)$$

4. Phần tử trung hòa 0 và 1: với mọi $x \in A$, ta có

$$x \vee 0 = x, \quad x \wedge 1 = x$$

5. Phần tử bù: với mọi $x \in A$ tồn tại $\overline{x} \in A$ sao cho

$$x \wedge \overline{x} = 0, \quad x \vee \overline{x} = 1$$

Ví dụ 4.2 Cho X là một tập hợp. Trên tập $\mathcal{P}(X)$, xét phép $\wedge$ là phép $\cap$; phép $\vee$ là phép $\cup$; phép $^{-}$ là phép lấy phần bù, phần tử 0 là $\emptyset$; phần tử 1 là X. Khi đó $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, ^{-}, \emptyset, X)$ là một đại số Boole.

Ví dụ 4.3 Xét F là tập hợp tất cả các biểu thức mệnh đề theo n biến với phép hội $\wedge$, phép tuyển $\vee$, phép phủ định $^{-}$, phần tử 0 là **hằng sai 0**; phần tử 1 là **hằng đúng 1**. Khi đó $(F, \wedge, \vee, ^{-}, 0, 1)$ là một đại số Boole.

Ví dụ 4.4 Trên $B = \{0, 1\}$, ta định nghĩa các phép toán $+, \cdot$ và lấy phần bù như sau

$+$	0	1
0	0	0
1	0	1

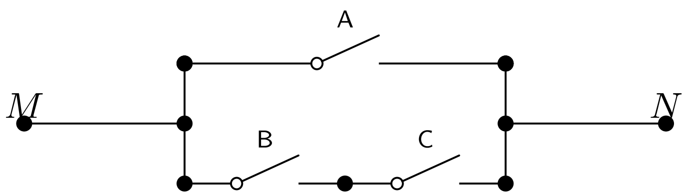
$\cdot$	0	1
0	0	1
1	1	1

và $\overline{0} = 1; \overline{1} = 0.$

Khi đó, $(B, \cdot, +, ^{-}, 0, 1)$ trở thành một đại số Boole.

4.2 Hàm Boole

Xét mạch điện như gồm 3 cầu dao



Tùy theo các cầu dao A, B, C được đóng hay mở mà ta có dòng điện đi từ M đến N. Để biết các cầu dao điều khiển việc cho dòng điện đi qua hay không, ta xét bảng liệt kê tất cả các trường hợp bên dưới. Quy ước: cầu dao nhận giá trị 1 nếu nó đóng và 0 nếu nó mở.

A	B	C	MN
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Câu hỏi. Khi mạch điện gồm nhiều cầu dao, làm sao biết được khi nào có dòng điện chạy qua mạch điện?

- Ta lấy giá trị 1 nếu cầu dao đóng và 0 nếu cầu dao mở. Trong ví dụ trên có 3 cầu dao nên ta xem như đó là 3 biến a, b, c, toàn mạch điện liên kết với một biến f lấy giá trị 1 nếu có dòng điện đi qua và 0 nếu không có dòng điện đi qua. Ta có thể liệt kê các trường hợp trong bảng giá trị như sau:
- Nếu số cầu dao lớn thì việc lập bảng giá trị là không thực tế.
- Ta cần tìm một công thức cho phép biểu diễn hàm $f(a, b, c)$ theo các biến a, b, c như là một hàm đa thức.

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Bảng giá trị trên giống như bảng giá trị chân lí của các biểu thức mệnh đề.
- Có thể đồng nhất biểu thức mệnh đề $E(p, q, r, \ldots)$ với bảng giá trị chân lí của nó Ta xem hàm $E(p, q, r, \ldots)$ theo các biến $p, q, r, \ldots$ trong đó $p, q, r, \ldots$ chỉ nhận giá trị $0, 1$. Đó là các hàm Boole.

Định nghĩa 4.5

- Cho tập $B = \{0, 1\}$ và $B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$ là tập hợp tất cả các bộ gồm n phần thành mà mỗi thành phần là 0 hoặc 1.
- Một biến x được gọi là biến Boole (Boolean variable) nếu nó chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1.
- Một ánh xạ $f : B^n \to B$ được gọi là một **hàm Boole bậc** n (Boolean function of degree n).

- Ký hiệu F_n để chỉ tập các hàm Boole n biến.

Ví dụ 4.6 Cho ánh xạ $f : B^2 \to B$ xác định bởi $f(x, y) = x\overline{y}$ là một hàm Boole bậc 2 với

$$f(0,0) = 0;\ f(0,1) = 0;\ f(1,0) = 1;\ f(1,1) = 0.$$

Ta có thể biểu diễn giá trị của f trong bảng dưới đây

x	y	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

- Để mô tả hàm Boole f, ta có thể lập bảng gồm 2^n hàng ghi tất cả các giá trị của f. Ta gọi đây là bảng chân trị của f.

Ví dụ 4.7 Xét kết quả f trong việc thông qua một quyết định dựa vào 3 phiếu bầu x, y, z. Mỗi phiếu chỉ lấy một trong hai giá trị: 1 (đồng ý) hoặc 0 (không đồng ý). Kết quả f là 1 (thông qua) nếu được đa số phiếu tán thành, là 0 (không thông qua) nếu đa số phiếu bác bỏ.
Khi đó f là hàm Boole theo 3 biến x, y, z. Bảng chân trị của f

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Một hàm Boole có thể được biểu diễn từ các biến Boole và các phép toán Boole.

Định nghĩa 4.8 Một biểu thức Boole (Boolean expression) của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được định nghĩa như sau

1. $0, 1, x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các biểu thức Boole.
2. Nếu G, H là hai biểu thức Boole thì $G + H; GH; \overline{G}$ là các biểu thức Boole.

Ví dụ 4.9 Các biểu thức Boole

- $xyz + x\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z}$
- $(xy + \overline{x}y)z + x\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z}$

Ví dụ 4.10 Tìm bảng chân trị của hàm Boole

$$f(x, y, z) = xy + x\overline{y}\,\overline{z}$$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

Hàm Boole bên trên có thể được biểu diễn bởi

$$f^{-1}(1) = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

Định nghĩa 4.11

- Hai hàm Boole n biến f, g được gọi là bằng nhau nếu

  $$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

  với mọi $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B^n$.
- Các biểu thức Boole biểu diễn cho một hàm Boole được gọi là **tương đương**.

Ví dụ 4.12 Các biểu thức Boole $xy; xy + 0$ là tương đương.

Các đẳng thức của Đại số Boole

1. $\overline{\overline{x}} = x$
2. $x + x = x$ và $xx = x$
3. $x + 0 = x$ và $x.1 = x$
4. $x + 1 = 1$ và $x.0 = 0$
5. $x + y = y + x$ và $xy = yx$
6. $(x + y) + z = x + (y + z)$ và $(xy)z = x(yz)$
7. $x + yz = (x + y)(x + z)$ và $x(y + z) = xy + xz$
8. $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$ và $\overline{x + y} = \overline{x}.\overline{y}$
9. $x + xy = x$ và $x(x + y) = x$
10. $x + \overline{x} = 1$
11. $x\overline{x} = 0$

Ví dụ 4.13 Rút gọn các biểu thức Boole

a. $xy(\overline{y}z + xz)$

b. $(x + \overline{y} + \overline{z})(x + \overline{y} + z)(x + y + \overline{z})$

Giải. a. Dùng các đẳng thức Boole

$$\begin{aligned} xy(\overline{y}z + xz) &= x(y\overline{y})z + xyxz \\ &= x0z + xxyz \\ &= 0 + xyz \\ &= xyz \end{aligned}$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4.3 Biểu diễn các hàm Boole

Hai vấn đề quan trọng của Đại số Boole sẽ được đề cập đến trong phần này

1. Cho các giá trị của một hàm Boole. Tìm biểu thức biểu diễn hàm Boole
2. Trong các cách biểu diễn của hàm Boole, có một tập nhỏ hơn gồm các phép toán mà ta có thể dùng để biểu diễn hàm Boole không?

Ví dụ 4.14 Tìm các biểu thức Boole biểu diễn các hàm Boole $f(x, y, z)$ và $g(x, y, z)$ có các giá trị cho trong bảng

x	y	z	f	g
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

Giải. Tìm hàm Boole f. Ta cần một biểu thức có giá trị 1 khi $x = z = 1$ và $y = 0$ và có giá trị bằng 0 trong các trường hợp còn lại. Do đó

$$f(x, y, z) = x\overline{y}z.$$

Tương tự, hàm $g(x, y, z) = \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}\overline{z} + xy\overline{z}$.

Định nghĩa 4.15 Xét tập hợp các hàm Boole F_n theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- Mỗi biến Boole x_i hay $\overline{x_i}$ được gọi là **từ đơn** (literal).
- **Đơn thức** là tích khác không của một số hữu hạn từ đơn.
- **Từ tối tiểu** (minterm) là tích khác không của đúng n từ đơn.
- **Dạng nối rời chính tắc** (disjunctive normal form) hay SOP (sum-of-products) là công thức biểu diễn hàm Boole thành tổng của các từ tối tiểu

$$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i m_i$$

trong đó m_i là từ tối tiểu thứ i và f_i là giá trị của hàm f tương ứng với từ tối tiểu thứ i.

Ví dụ 4.16 Xét tập hợp F_3 theo 3 biến x, y, z.

- $x, y, \overline{y}, z$ là các từ đơn;
- $xyz, x\overline{y}z, \overline{x}yz$ là các từ tối tiểu.
- $f = xyz + x\overline{y}z + \overline{x}yz$ là dạng nối rời chính tắc.
- Hàm $f = xyz + x\overline{y}z + \overline{x}yz$ có thể được biểu diễn dưới dạng

$$f(x, y, z) = 111 + 101 + 011 = \sum(7, 5, 3)$$

Trong thực tế có những trường hợp một vài giá trị của f không xảy ra. Do đó, giá trị của hàm tương ứng với các trường hợp này có thể là 0 hay 1 đều được, người ta gọi đó là những trường hợp **tùy định** (don't care), viết tắt là d.

Ví dụ 4.17 Cho hàm Boole $f(x, y) = \sum(0, 2) + d(1)$. Bảng chân trị của f là

x	y	f
1	1	0
1	0	1
0	1	d
0	0	1

Bài toán. Tìm dạng nối rời chính tắc của hàm Boole.

Cách 1. Bổ sung từ đơn còn thiếu vào các đơn thức.

1. Khai triển hàm Boole thành tổng của các đơn thức.
2. Với mỗi đơn thức thu được ở bước 1, ta nhân đơn thức đó với các tổng của những từ đơn bị thiếu và phần bù của nó trong đơn thức đó.

- Tiếp tục khai triển hàm thu được ở bước 2 và loại bỏ những đơn thức bị trùng. Công thức đa thức thu được chính là dạng nối rời chính tắc của hàm Boole ban đầu.

Ví dụ 4.18 Tìm dạng nối rời chính tắc của hàm $f(x, y, z) = (x + y)\overline{z}$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x\overline{z} + y\overline{z} \\ &= x(y + \overline{y})\overline{z} + (x + \overline{x})y\overline{z} \\ &= xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} \\ &= x\overline{y}\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} \end{aligned}$$

Đa thức cuối cùng là dạng nối rời chính tắc của f.

Cách 2. Dùng bảng chân trị.

- Lập bảng chân trị của f.
- Xét các dòng mà f bằng 1.
- Dựa vào các dòng ở bước 2. Dạng nối rời chính tắc của f là tổng của các đơn thức tối tiểu trong đó mỗi đơn thức tối tiểu là tích của các từ x_i (nếu $x_i = 1$) và $\overline{x_j}$ (nếu $x_j = 0$).

Ví dụ 4.19 Tìm dạng nối rời chính tắc của hàm $f(x, y, z) = (x + y)\overline{z}$

Giải. Bảng chân trị của hàm f.

x	y	z	$x+y$	$\overline{z}$	f
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Dạng nối rời chính tắc của f là $f(x, y, z) = \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + xy\overline{z}$.

Ví dụ 4.20 Tìm dạng nối rời chính tắc của hàm

$$f(x, y, z) = x\overline{y} + y(\overline{x} + z)$$

Giải. ....

....

....

....

....

....

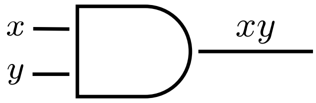
....

....

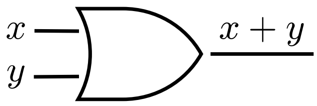
4.4 Mạch logic biểu diễn hàm Boole

Đại số Boole được sử dụng trong mô hình của các thiết bị điện. Mỗi đầu vào và đầu ra của một thiết bị điện có thể xem là một phần tử của tập $\{0, 1\}$. Một máy tính và các thiệt bị điện tử khác được tạo nên từ nhiều mạch điện. Mỗi mạch điện được thiết kế sử dụng các quy luật của đại số Boole. Thành phần cơ bản của mạch điện được gọi là các **cổng** (gate).

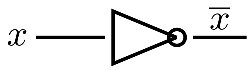
- Cổng AND: Đầu vào (input) của cổng này là 2 hay nhiều giá trị của của các biến Boole. Đầu ra (output) là tích các giá trị của chúng



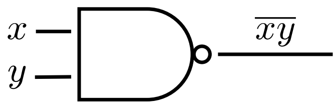
- Cổng OR: Đầu vào của cổng này là 2 hay nhiều giá trị của các biến Boole. Đầu ra là tổng của chúng.



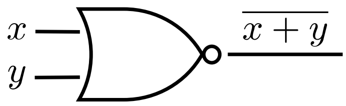
- Cổng NOT: Đầu vào là một giá trị của biến Boole. Đầu ra là phần bù của nó.



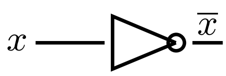
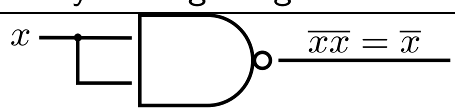
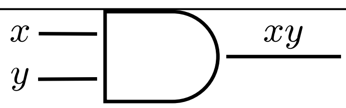
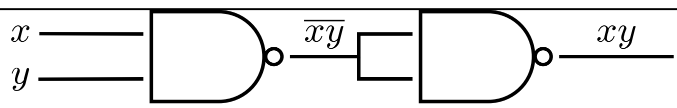
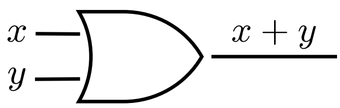
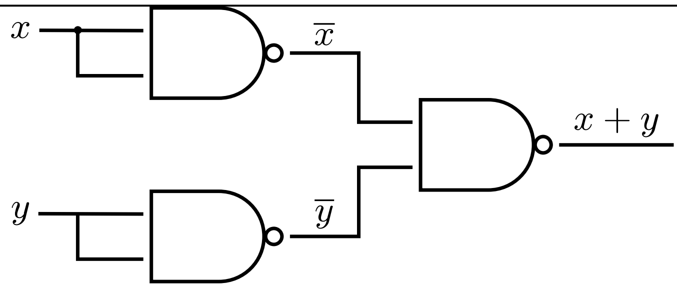
- Cổng NAND: Đầu vào là 2 hay nhiều hơn các giá trị của các biến Boole. Đầu ra là phần bù của tích của chúng



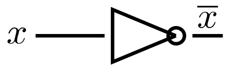
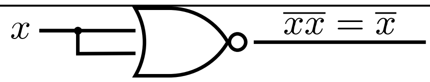
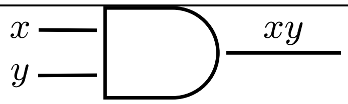
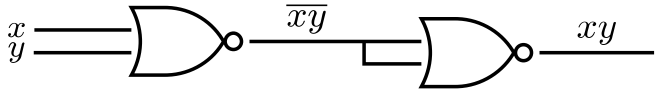
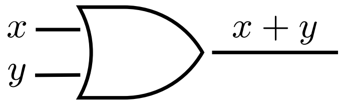
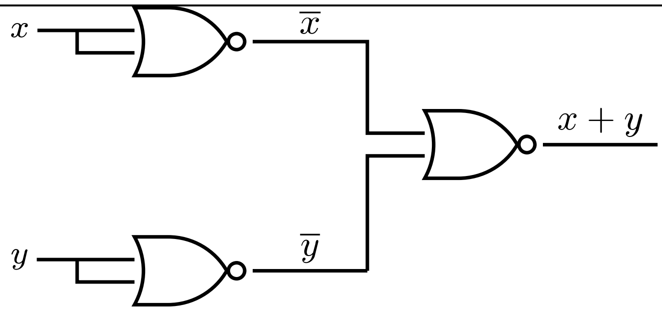
- Cổng NOR: Đầu vào là 2 hay nhiều giá trị của các biến Boole. Đầu ra là phần bù của tích của chúng.



Sự chuyển đổi giữa các cổng cơ bản sang cổng NAND

Cổng cơ bản	Chuyển sang cổng NAND
	
	
	

Sự chuyển đổi giữa các cổng cơ bản sang cổng NOR

<table>
<tr><th>Cổng cơ bản</th><th>Chuyển sang cổng NOR</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Ta kết hợp các cổng để thiết kế nên các mạch điện.

Ví dụ 4.21 Thiết kế các mạch điện có đầu ra là

a. $(x+y)\overline{x}$

b. $\overline{\overline{x}(y+\overline{z})}$

c. $(x+y+z)(\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z})$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

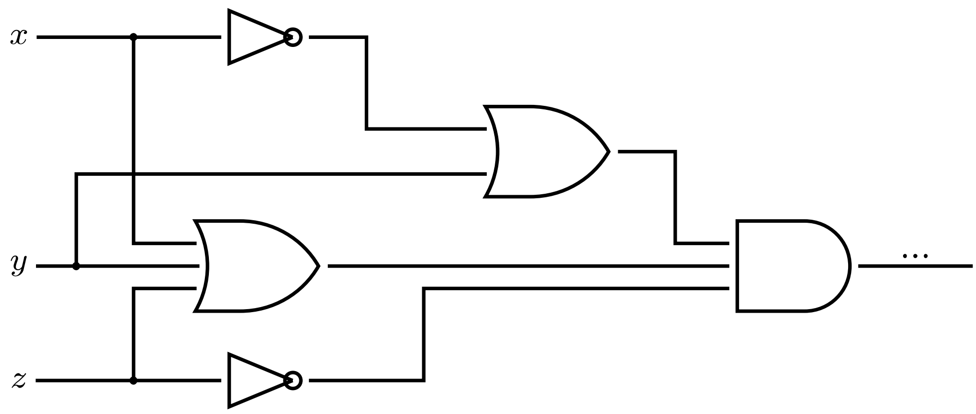
....

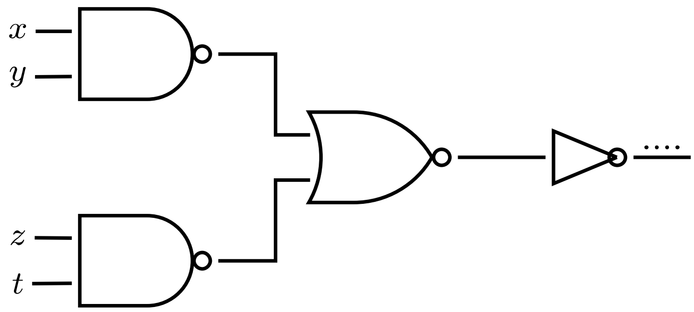
....

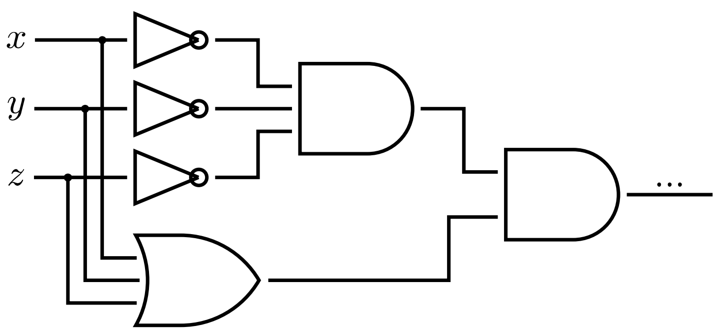
....

....

Ví dụ 4.22 Viết lại biểu thức đầu ra của các mạch







Ví dụ 4.23 Một ngôi nhà có 3 công tắc, người chủ nhà muốn bóng đèn sáng khi cả 3 công tắc đều đóng. Khi có 1 công tắc mở và 2 công tắc đóng thì đèn tắt. Khi 2 công tắc mở và 1 công tắc đóng thì đèn sáng. Hãy thiết kế mạch logic trên.

Giải.

Bước 1.

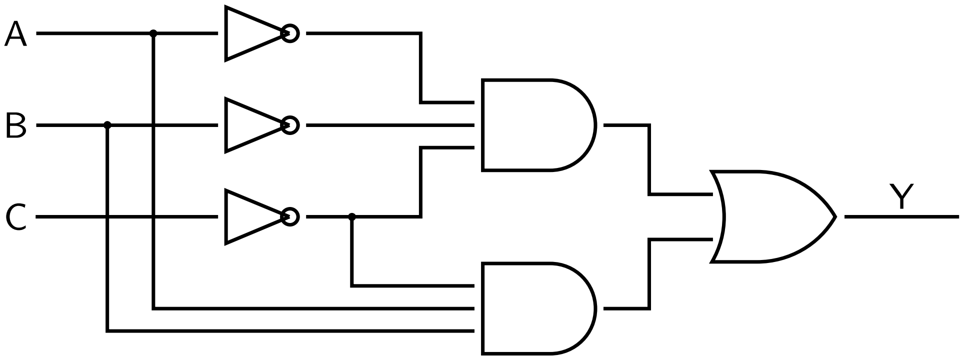
- Gọi các công tắc lần lượt là A,B,C; bóng đèn là Y
- Công tắc đóng là 1, hở là 0.
- Bóng đèn sáng là 1, tắt là 0

Bước 2. Từ yêu cầu của bài toán, ta có bảng chân trị

Bước 3. Từ bảng chân trị, ta có $Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C}$

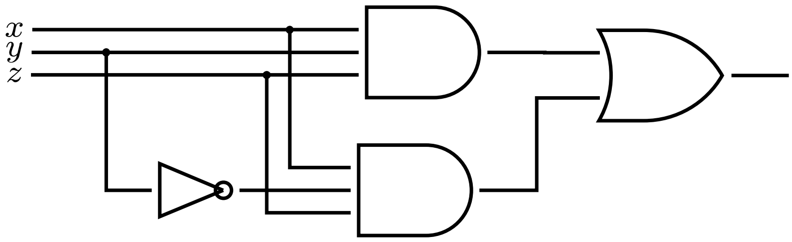
Bước 4. Mạch logic tương ứng

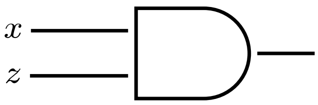
A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



Chúng ta dùng biểu thức logic (dạng nối rời chính tắc) để tìm các cổng và biểu diễn các mạch logic. Tuy nhiên, nếu thiết kết mạch logic theo dạng nối rời chính tắc thì có thể cần nhiều cổng logic. Trong một số trường hợp, ta có thể đơn giản hóa biểu thức logic để thiết kế mạch điện trở nên "tối tiểu", tức là dùng ít nhất các cổng logic có thể.

Ví dụ 4.24 Xét hai mạch logic tương ứng với hai biểu thức logic $xyz + x\overline{y}z$ và xz





Ta thấy mạch logic thứ 2 sử dụng ít cổng hơn mạch 1. Tuy nhiên, khi xét hai biểu thức logic đã cho

$$
\begin{aligned}
xyz + x\overline{y}z &= x(y+\overline{y})z \\
&= x1z = xz
\end{aligned}
$$

Do đó, xz là một biểu thức Boole với ít hơn các phép toán mà ta có thể sử dụng để thiết kế mạch điện. Mạch thứ hai sử dụng 1 cổng AND trong khi mạch thứ nhất sử dụng 2 cổng AND, 1 cổng NOT và 1 cổng OR.

- Việc kết hợp các từ tối tiểu trong dạng nối rời chính tắc của hàm Boole có thể giúp ta có một biểu thức đơn giản hơn cho mạch điện.
- Chúng ta sẽ tìm **biểu diễn tối tiểu** của hàm Boole (minimization of the Boolean function), tức là biểu diễn hàm Boole thành tổng Boole của các tích Boole với ít nhất các tích Boole và các tích này chứa ít nhất các từ đơn có thể.
- Tối tiểu hóa một hàm Boole giúp ta có thể xây dựng một mạch điện cho hàm này mà sử dụng ít cổng nhất và ít đầu vào nhất cho cổng logic.
- Cho đến đầu những năm 1960, các cổng logic là các thành phần riêng lẻ. Để giảm chi phí, người ta sử dụng ít cổng nhất để tạo ra kết quả mong muốn. Tuy nhiên, vào giữa những năm 1960, công nghệ mạch tích hợp đã được phát triển giúp kết hợp các cổng trên một chip đơn lẻ. Mặc dù, hiện tại có thể xây dựng các mạch tích hợp ngày càng phức tạp trên chip với chi phí thấp, nhưng việc tối thiểu hóa các hàm Boole vẫn rất quan trọng.
- Việc giảm số lượng cổng trên các chip có thể dẫn đến một mạch đáng tin cậy hơn và có thể giảm chi phí sản xuất chip. Ngoài ra, việc tối tiểu hóa giúp ta có thể lắp nhiều mạch hơn trên cùng một con chip. Hơn nữa, nó làm giảm số lượng đầu vào cho các cổng trong một mạch. Điều này làm giảm thời gian được sử dụng bởi một mạch để tính toán đầu ra của nó.
- Đầu tiên, chúng ta sẽ giới thiệu **biểu đồ Karnaugh** (hoặc K-map), được thiết kế vào những năm 1950 để giúp giảm thiểu các mạch điện. Biểu đồ Karnaugh rất hữu ích trong việc giảm thiểu các mạch có tối đa sáu biến.

- Phương pháp mà chúng ta sẽ mô tả được Maurice Karnaugh giới thiệu vào năm 1953. Phương pháp của ông dựa trên công trình trước đó của E. W. Veitch (Phương pháp này thường chỉ được áp dụng khi hàm có từ sáu biến trở xuống).
- Biểu đồ Karnaugh cung cấp cho chúng ta một phương pháp trực quan để đơn giản hóa dạng nối rời chính tắc.
- Ta sẽ minh họa cách sử dụng biểu đồ Karnaugh để tối tiểu hóa dạng nối rời chính tắc của các hàm Boole theo tối đa 4 biến.

4.5 Biểu đồ Karnaugh

- Biểu đồ Karnaugh của một hàm Boole f có thể xem là hình ảnh biểu diễn của bảng chân trị của hàm Boole f, ký hiệu Kar(f).
- Mỗi hàm Boole n biến $(n \leq 6)$ sẽ được biểu diễn bởi một hình vẽ gồm 2^n ô vuông, trong đó mỗi ô vuông tương ứng với một giá trị của hàm Boole khi các biến Boole nhận các giá trị Boole khác nhau.

Trường hợp f là hàm Boole theo 2 biến x, y

$y \backslash x$	0	1
0	$\overline{x}\overline{y}$	$x\overline{y}$
1	$\overline{x}y$	xy

Trường hợp f là hàm Boole theo 3 biến x, y, z.

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z}$	$xy\overline{z}$	$x\overline{y}\overline{z}$
1	$\overline{x}\overline{y}z$	$\overline{x}yz$	xyz	$x\overline{y}z$

Trường hợp f là hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t.

$zt \backslash xy$	00	01	11	10
00	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$\overline{x}y\overline{z}\overline{t}$	$xy\overline{z}\overline{t}$	$x\overline{y}\overline{z}\overline{t}$
01	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}t$	$\overline{x}y\overline{z}t$	$xy\overline{z}t$	$x\overline{y}\overline{z}t$
11	$\overline{x}\overline{y}zt$	$\overline{x}yzt$	$xyzt$	$x\overline{y}\overline{z}\overline{t}$
10	$\overline{x}\overline{y}z\overline{t}$	$\overline{x}yz\overline{t}$	$xyz\overline{t}$	$x\overline{y}z\overline{t}$

Ví dụ 4.25 Vẽ biểu đồ Karnaugh của hàm Boole

$$f(x,y,z) = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}z$$

Giải. Ta thấy $x = y = z = 1$ thì $f(1,1,1) = 1$. Do đó, tại ô xyz sẽ có giá trị bằng 1. Tương tự, các ô $xy\overline{z}, x\overline{y}z, \overline{xy}z$ có giá trị bằng 1. Các ô còn lại có giá trị bằng 0.

z \ xy	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

Ví dụ 4.26 Cho hàm Boole xác định bởi

$$f^{-1}(1) = \{1010, 1011, 1001, 1000, 1110, 1101, 1100, 0110, 0111, 0100, 0011, 0000\}$$

Biểu đồ Karnaugh của hàm f

zt \ xy	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	1	1
11	1	1	0	1
10	0	1	1	1

Ví dụ 4.27 Tìm dạng nối rời chính tắc của f và vẽ biểu đồ Karnaugh

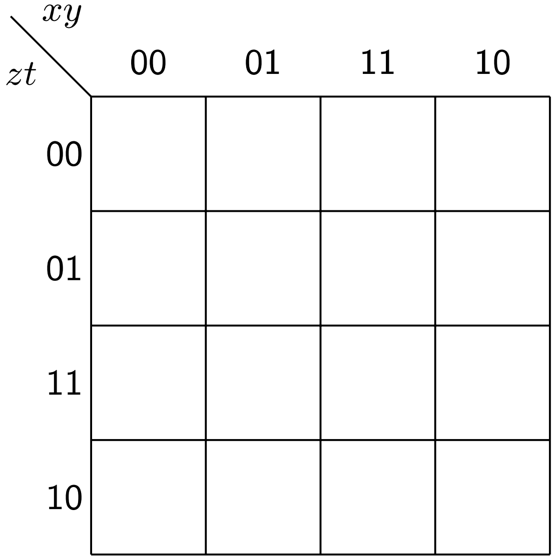
$$f = zt + \overline{x}yt + \overline{yz}\overline{t} + xy\overline{t}$$

Giải. ....

Ví dụ 4.28 Vẽ biểu đồ Karnaugh của hàm Boole

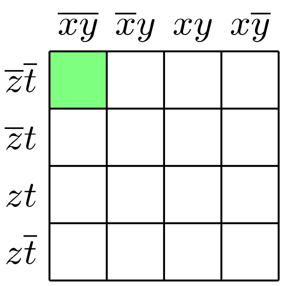
$$f(x,y,z,t) = (x+y+\overline{z}+t)(\overline{x}+y+\overline{z}+t)(\overline{x}+\overline{y}+z+\overline{t})(x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})$$

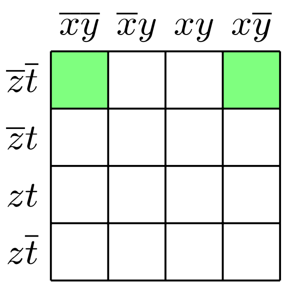
HD: vì $x+y+\overline{z}+t$ là một thừa số trong biểu thức của f nên nếu $x=y=t=0$ và $z=1$ thì $f(0,0,1,0)=0$

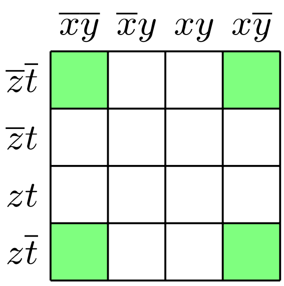


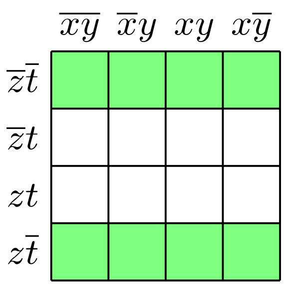
. . . .

Ví dụ 4.29 Tìm hàm Boole tương ứng với các biểu đồ Karnaugh

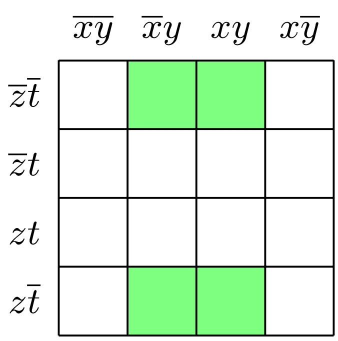








. . . .



. . . .

Định nghĩa 4.30 Hai ô được gọi là **kề nhau** (theo nghĩa rộng) nếu chúng là hai ô **liền nhau** hoặc chúng là **ô đầu và ô cuối** của cùng một hàng (cột) nào đó.

Định nghĩa 4.31 Một **tế bào** trong một biểu đồ Karnaugh là một hình chữ nhật (theo nghĩa rộng) gồm 2^k ô kề nhau.

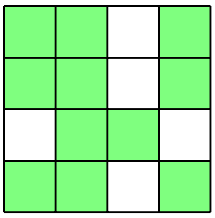
- Nếu T là một tế bào thì T là biểu đồ Karnaugh của một đơn thức duy nhất m.
- Cách xác định m: lần lượt chiếu T lên các cạnh, nếu toàn bộ hình chiếu nằm trọn trong một từ đơn nào thì từ đơn đó xuất hiện trong m.

Định nghĩa 4.32 Ta nói T là một **tế bào lớn** của Kar(f) nếu T thoả hai tính chất sau:

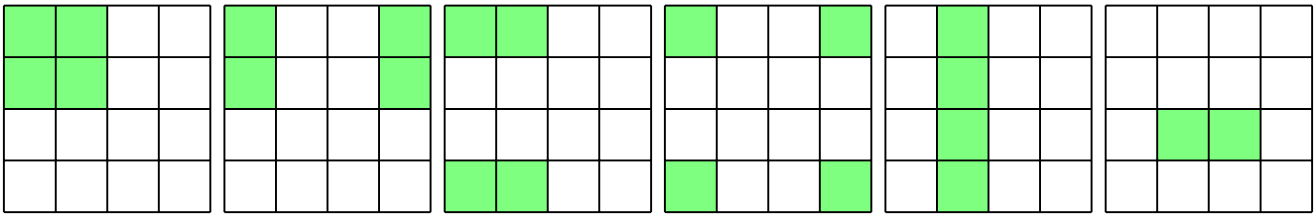
a. T là một tế bào và $T \subset$ Kar(f).

b. Không tồn tại tế bào T' nào thỏa $T' \neq T$ và $T \subset T' \subset \text{Kar}(f)$.

Ví dụ 4.33 Xét biểu đồ Karnaugh của một hàm Boole f theo 4 biến x, y, z, t



Các tế bào lớn



....

Ví dụ 4.34 Tìm các tế bào lớn của biểu đồ Karnaugh sau

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1

$zt \backslash xy$	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	0

4.6 Tối tiểu hóa hàm Boole

Định nghĩa 4.35 Cho hai biểu thức Boole cùng biểu diễn một hàm Boole

$$f = m_1 + m_2 + \ldots + m_p \qquad (F)$$
$$f = M_1 + M_2 + \ldots + M_q \qquad (G)$$

Ta nói biểu thức F đơn giản hơn biểu thức G

1. nếu $p < q$;
2. nếu $p = q$ thì bằng một cách sắp xếp thứ tự các M_i, ta có số từ đơn của m_i không nhiều hơn số từ đơn của M_i.

Ví dụ 4.36 Cho hai biểu thức Boole cùng biểu diễn một hàm Boole

$$f = xz + \overline{y}z + xt + \overline{y}\overline{t} + \overline{x}yz (F)$$
$$f = xz + \overline{y}z + xt + x\overline{y}\overline{t} + \overline{x}yz (G)$$

Biểu thức F đơn giản hơn biểu thức G.

Định nghĩa 4.37 Biểu thức F của hàm Boole f được gọi là tối tiểu nếu không tồn tại biểu thức G của hàm Boole f đơn giản hơn F.

Chú ý: Một hàm Boole có thể được biểu diễn bởi nhiều biểu thức tối tiểu.

Định nghĩa 4.38 Cho $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ là một họ các tập con của tập X.

- Nếu $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ thì ta nói S là một **phủ** của X.
- Cho S là một phủ của X và $S \setminus \{X_i\}$ không là một phủ của X với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ thì S được gọi là **phủ tối tiểu** của X.

Ví dụ 4.39 Cho $X = \{a, b, c, d\}, A = \{a, b\}, B = \{c, d\}, C = \{a, d\}$ và $D = \{b, c\}$.

- $\{A, B, C, D\}, \{A, B, C\}, \{A, C, D\}$ là các phủ của X nhưng không tối tiểu.
- $\{A, B\}, \{C, D\}$ là các phủ tối tiểu của X.
- $\{B, D\}$ không là phủ của X.

Phương pháp tìm biểu thức tối tiểu

B 1. Vẽ biểu đồ Karnaugh của hàm Boole f.

B 2. Tìm tất cả các tế bào lớn của Kar(f). Ghi số của các tế bào lớn vào từng ô thuộc Kar(f) trong bảng mã, gọi là bảng "tổng hợp".

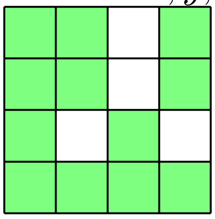
B 3. Tìm từ trái sang phải, từ trên xuống dưới những ô chỉ có duy nhất một tế bào lớn chứa nó. Chọn tế bào lớn đó vào danh sách S.

B 4. Nếu S là một phủ của Kar(f) thì ta sang bước 5. Nếu không,
a. Chọn một ô trong Kar(f) chưa được S phủ. Tiếp đến, chọn một tế bào lớn chứa ô đó và cho vào danh sách S.
b. Kiểm tra xem có thể bỏ bớt tế bào lớn nào ra khỏi danh sách S mà không ảnh hưởng đến hợp của các tế bào lớn trong S hay không.
c. Quay lại đầu bước 4.

B 5. S là một phủ tối tiểu của Kar(f).

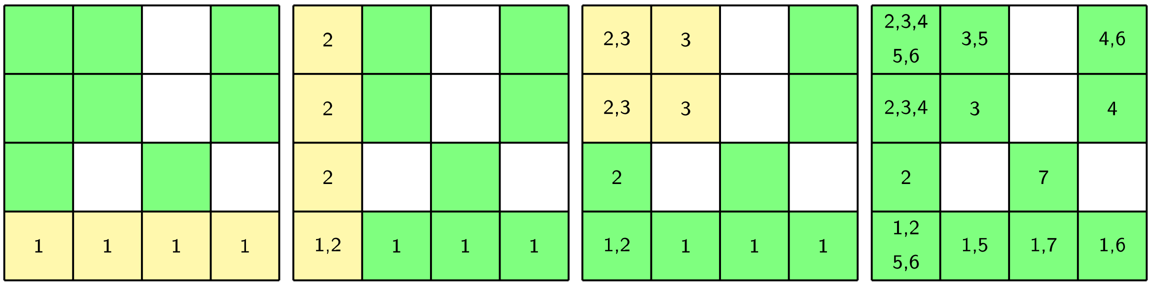
- Từ các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của Kar(f) tìm được ở bước 5, ta xác định được các biểu thức đa thức tương ứng.
- Loại bỏ các biểu thức mà có một biểu thức nào đó đơn giản hơn chúng.
- Các biểu thức còn lại là các biểu thức tối tiểu của f.

Ví dụ 4.40 Cho một hàm Boole f theo 4 biến x, y, z, t có biểu đồ Karnaugh

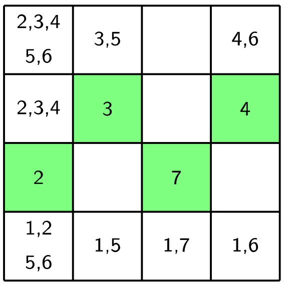


Tìm biểu thức tối tiểu của f.

Giải. Bước 1. Xác định các tế bào lớn và đánh số vào những ô thuộc cùng một tế bào lớn



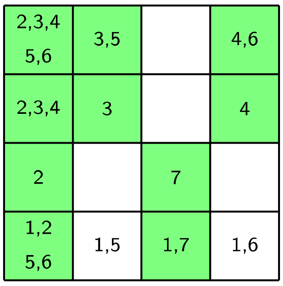
Bước 2.



- Ô (3,1) chỉ bị phủ bởi T_2.
- Ô (2,2) chỉ bị phủ bởi T_3.
- Ô (3,3) chỉ bị phủ bởi T_7.
- Ô (2,4) chỉ bị phủ bởi T_4.

Khi đó $S = \{T_2, T_3, T_7, T_4\}$.

Bước 3.



- Hợp của các tế bào lớn trong S.
- Còn các ô (4,2), (4,4) lần lượt được phủ bởi T_1, T_5 và T_1, T_6.
- Chọn T_1 vào danh sách S, ta được $S_1 = \{T_2, T_3, T_7, T_4, T_1\}$ phủ Kar(f).
- Hoặc chọn T_5 vào S và $S2 = \{T_2, T_3, T_7, T_4, T_5\}$ chưa phủ Kar(f). Chọn thêm T_6, khi đó $S_2 = \{T_2, T_3, T_7, T_4, T_5, T_6\}$ phủ Kar(f).

- Hai danh sách S_1 và S_2 đều không thể rút gọn được. Do đó, chúng là các phủ tối tiểu của kar(f).
- Từ hai phủ S_1, S_2, ta được các công thức đa thức thu gọn

$$f = x\overline{y} + xz + \overline{x}y\overline{z} + \overline{y}z + \overline{z}\overline{t} \tag{1}$$

$$f = x\overline{y} + xz + \overline{x}y\overline{z} + \overline{y}z + x\overline{t} + \overline{y}\overline{t} \tag{2}$$

- Ta thấy công thức (1) đơn giản hơn công thức (2). Do đó công thức (1) là công thức đa thức tối tiểu của f.

Ví dụ 4.41 Cho hàm Boole 4 biến như sau

$$f(x, y, z, t) = \overline{x}y\overline{z}t + yzt + \overline{xyz}\overline{t} + \overline{y}zt + xyz\overline{t} + x\overline{z}\overline{t}$$

a. Tìm dạng nối rời chính tắc của f.

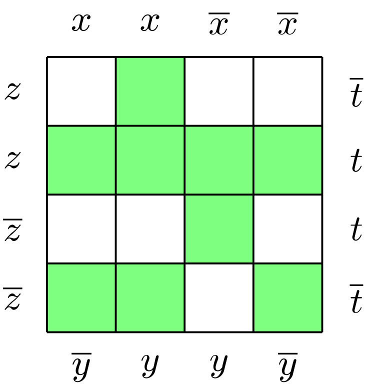
b. Tìm công thức đa thức tối tiểu của hàm f.

Giải. a. Dạng nối rời chính tắc

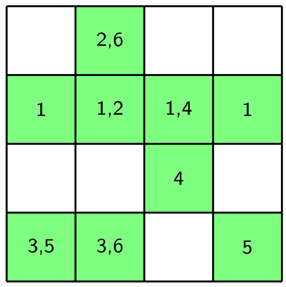
$$\begin{aligned}
f &= \overline{x}y\overline{z}t + yzt + \overline{xyz}\,\overline{t} + \overline{y}zt + xyz\overline{t} + x\overline{z}\overline{t}\\
&= \overline{x}y\overline{z}t + (x+\overline{x})yzt + \overline{xyz}\,\overline{t} + (x+\overline{x})\overline{y}zt + xyz\overline{t} + x(y+\overline{y})\overline{z}\overline{t}\\
&= \overline{x}y\overline{z}t + xyzt + \overline{x}yzt + \overline{xyz}\,\overline{t} + x\overline{y}zt + \overline{xy}zt + xyz\overline{t} + xy\overline{z}\overline{t} + x\overline{y}\overline{z}\overline{t}\\
&= \overline{x}y\overline{z}t + xyzt + \overline{x}yzt + \overline{xyz}\,\overline{t} + x\overline{y}zt + \overline{xy}zt + xyz\overline{t} + xy\overline{z}\overline{t} + x\overline{y}\overline{z}\overline{t}
\end{aligned}$$

b. Tìm công thức đa thức tối tiểu của f.

- Biểu đồ karnaugh của f



- Các tế bào lớn



$T_1 = zt; T_2 = xyz, T_3 = x\overline{z}\overline{t},$
$T_4 = \overline{x}yt, T_5 = \overline{xyz}\,\overline{t}, T_6 = xy\overline{t}$

- Các phủ của kar(f)

$$S_1 = \{T_1, T_4, T_5, T_6\} \quad (3)$$
$$S_2 = \{T_1, T_4, T_5, T_2, T_6\} \quad (4)$$
$$S_3 = \{T_1, T_4, T_5, T_3, T_2\} \quad (5)$$

S_2 không là phủ tối tiểu (loại).
S_1 và S_3 là các phủ tối tiểu.

- Các công thức đa thức của f là

$$f = zt + \overline{x}yt + \overline{yz}\,\overline{t} + xy\overline{t} \quad (6)$$
$$f = zt + \overline{x}yt + \overline{yz}\,\overline{t} + x\overline{z}\overline{t} + xyz \quad (7)$$

- Công thức (6) đơn giản hơn (7). Do đó, công thức đa thức tối tiểu của f là (6).

Ví dụ 4.42 Tìm đa thức tối tiểu của hàm Boole và vẽ mạch điện tương ứng với đa thức tìm được

a. $f(x,y,z) = xyz + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{xyz} + \overline{xy}z$

b. $f(x,y,z,t) = x\overline{y} + xyz + \overline{xyz} + \overline{x}yz\overline{t}$

c. $f(x,y,z,t) = \sum(0,1,2,4,8,9,10,11,13) + d(3,12)$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP

Bài 4.1 Chứng minh các đẳng thức sau
a. $(xy + wz)(x + \overline{z})(xy + w\overline{y}) = x(y + wz)$
b. $\overline{xy} + \overline{x}z + y\overline{z} + x\overline{yz} = \overline{x} + \overline{z}$
c. $(\overline{x} + y)(x + y + z)\overline{z} = y\overline{z}$
Bài 4.2 Tìm dạng nối rời chính tắc cho các hàm Boole sau đây
a. $f(x, y, z) = \overline{x} + \overline{y} + x(y + z)$
b. $f(x, y, z, t) = (xy + zt)(x + z))(xz + yt)(xt + yz)$
c. $f(x, y, z) = (\overline{x} + yz)(\overline{y} + xz)(\overline{z} + xy)$
Bài 4.3 Vẽ mạch logic của các biểu thức logic sau
a. $x\overline{y} + \overline{x}y$
b. $yz + x(\overline{y}z + y\overline{z})$
c. $x(y + z) + yz$
Bài 4.4 Cho hàm Boole 4 biến x, y, z, t

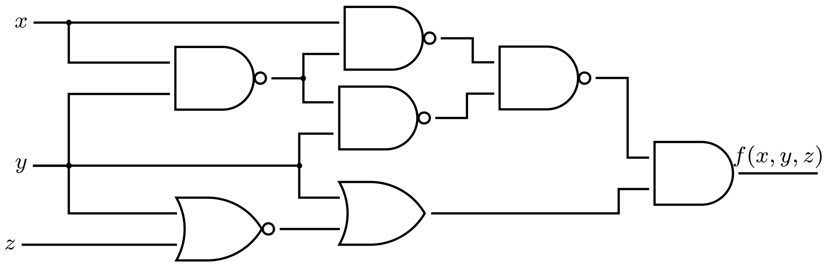
$$f = xz\overline{t} + x\overline{y}t + yt + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{z}t + \overline{x}y\overline{z}\,\overline{t}$$

a. Tìm dạng nối rời chính tắc của f.
b. Tìm công thức đa thức tối tiểu của hàm f.
c. Vẽ sơ đồ mạch logic cho công thức đa thức tối tiểu của hàm f vừa tìm được.
Bài 4.5 Cho biểu thức Boole như sau

$$f(x, y, z, t) = xyzt + x\overline{y}\,\overline{z}t + \overline{x}yzt + xyz\overline{t} + \overline{x}\,\overline{y}z\overline{t} + \overline{x}y\overline{z}\,\overline{t} + x\overline{y}z\overline{t} + \overline{x}y\overline{z}t$$

a. Vẽ biểu đồ Karnaugh của f.
b. Tìm công thức đa thức tối tiểu của f.

Bài 4.6 Tìm công thức đa thức tối tiểu của hàm f và vẽ sơ đồ mạch logic cho công thức đa thức tối tiểu của hàm f vừa tìm được.
a. $f(x,y,z) = xyz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
b. $f(x,y,z) = xyz + x\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
c. $f(x,y,z,t) = \sum(0,2,5,7,8,10,13,15)$
d. $f(x,y,z,t) = \sum(0,1,3,5,14) + d(8,15)$
Bài 4.7 Cho mạch điện



a. Lập bảng chân trị của hàm f và rút gọn đầu ra của f dưới dạng SOP
b. Thiết kế lại mạch điện chỉ dùng 1 loại cổng NAND.
Bài 4.8 Cho hàm Boole như sau

$$f(x,y,z,t) = \sum(0,1,2,4,8,9,10,11,13) + d(3,12)$$

a. Tìm dạng tối tiểu của hàm f bằng cách sử dụng biểu đồ Karnaugh.
b. Vẽ mạch điện tương ứng với câu a.

Chương 5: Lý thuyết đồ thị

Nguyễn Minh Trí

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

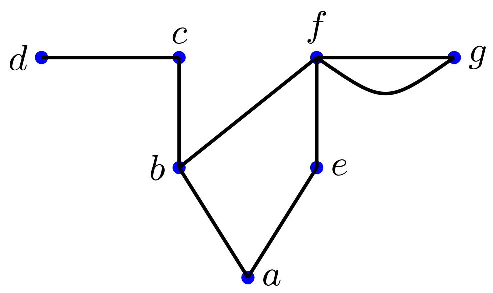
Ngày 28 tháng 3 năm 2024

5.1 Các khái niệm và thuật ngữ cơ bản

Định nghĩa 5.1 Một đồ thị vô hướng (undirected graph) $G = (V, E)$ là một bộ gồm 2 tập hợp: $V \neq \emptyset$ được gọi là tập các **đỉnh/nút** (vertices/nodes) và E được gọi là tập các **cạnh** (edges). Mỗi cạnh có một hoặc hai đỉnh được liên kết với nhau được gọi là các **đỉnh đầu mút** (endpoints). Một cạnh được gọi là **liên thuộc** (connect) với các đỉnh đầu mút của nó.

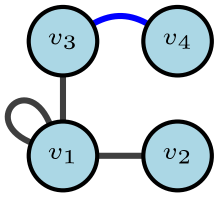
Nhận xét

- Tập các đỉnh V của một đồ thị G có thể là tập vô hạn.
- Một đồ thị với vô hạn đỉnh hay vô hạn cạnh được gọi là đồ thị vô hạn (infinite graph).
- Một đồ thị có hữu hạn đỉnh và hữu hạn cạnh được gọi là đồ thị hữu hạn (finite graph).
- Trong toàn bộ chương trình học, ta chỉ xét các đồ thị hữu hạn.
- Biểu diễn các đỉnh của đồ thị bằng các điểm, các cạnh của đồ thị được biểu diễn bởi các đoạn thẳng/cong.



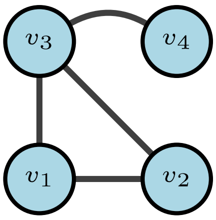
- Mỗi cạnh $e \in E$ nối tương ứng một cặp đỉnh $u, v \in V$, kí hiệu $e = uv$
- Nếu $e = uv$ thì ta nói u, v là hai đỉnh kề nhau (liên kết nhau), e liên thuộc với u và v. Các đỉnh u, v được gọi là đầu mút của cạnh e.
- Nếu $u \equiv v$ thì cạnh uu được gọi là một khuyên (loop) hay vòng tại u.

Ví dụ 5.2

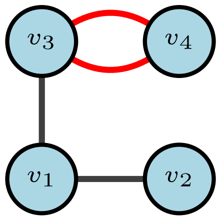


- Đồ thị $G = (V, E)$
- Tập các đỉnh $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
- Tập các cạnh $E = \{v_1v_1, v_1v_2, v_1v_3, v_3v_4\}$

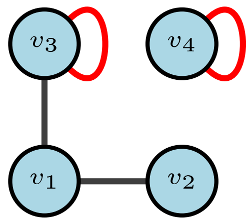
- Nếu có nhiều cạnh cùng nối với hai đỉnh thì chúng được gọi là các cạnh bội (multiple edges) hay các cạnh song song.
- Một đồ thị được gọi là đơn đồ thị (simple graph) nếu nó không có khuyên và cạnh bội. Ngược lại, ta gọi là đa đồ thị (multigraph).
- Nếu có m cạnh khác nhau từ đỉnh u đến đỉnh v thì ta nói uv là một cạnh có bội m.



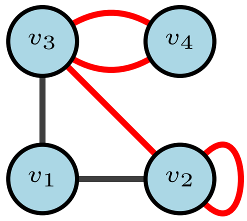
Đơn đồ thị



Đa đồ thị có cạnh bội



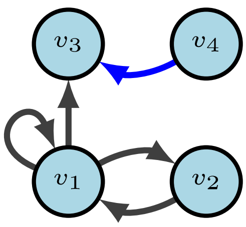
Đa đồ thị có khuyên



Đa đồ thị có cạnh bội

Định nghĩa 5.3 Một đồ thị có hướng (directed graph/digraph) $G = (V, E)$ gồm một tập khác rỗng các đỉnh V và một tập các cạnh có hướng hay cung (arc) E. Mỗi cạnh có hướng được liên kết với một cặp đỉnh có thứ tự. Cạnh có hướng liên kết với cặp thứ tự (u, v) được gọi là bắt đầu (start) tại u và kết thúc (end) tại v.

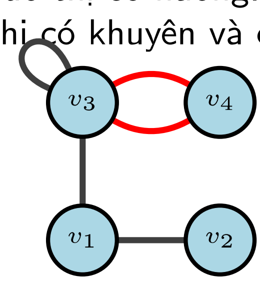
- Khi vẽ đồ thị có hướng, ta dùng các mũi tên từ u đến v để chỉ hướng của một cạnh bắt đầu từ u và kết thúc tại v.
- Một đồ thị có hướng có thể chứa các khuyên và các cạnh song song.
- Một đồ thị có hướng có thể chứa các cạnh có hướng mà chúng nối các đỉnh u và v theo hướng ngược nhau.



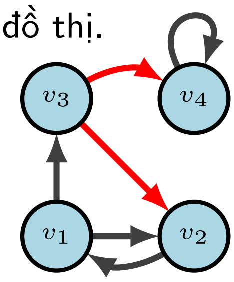
- Đồ thị có hướng $G = (V, E)$
- Tập các đỉnh $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
- Tập các cạnh $E = \{v_1v_1, v_1v_2, v_2v_1, v_1v_3, v_4v_3\}$

Định nghĩa 5.4

1. Một đồ thị có hướng không có khuyên và không có cạnh bội có hướng được gọi là một đơn đồ thị có hướng.
2. Một đồ thị có khuyên và cạnh bội được gọi là một giả đồ thị.



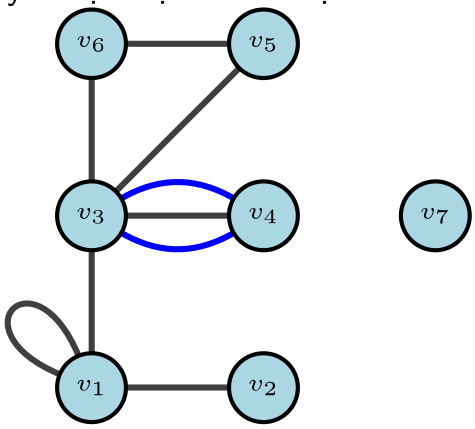
Giả đồ thị vô hướng



Giả đồ thị có hướng

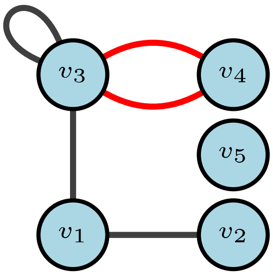
Định nghĩa 5.5

- Tập tất cả các đỉnh kề của u được kí hiệu là $N(u)$ và được gọi là lân cận của u.
- Bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng, ký hiệu $\deg(v)$, là số đỉnh kề với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó.



- $\deg(v_1) = 4, \deg(v_2) = 1,$
  $\deg(v_3) = 6; \deg(v_4) = 3,$
  $\deg(v_5) = 2, \deg(v_6) = 2,$
  $\deg(v_7) = 0$
- $N(v_2) = \{v_1\}$.
- $N(v_3) = \{v_1, v_4, v_5, v_6\}$.
- $N(v_7) = \emptyset$.

- Đỉnh v gọi là đỉnh treo (pendant) nếu $\deg(v) = 1$ và gọi là đỉnh cô lập (isolated) nếu $\deg(v) = 0$.
- Cạnh treo là cạnh có đầu mút là đỉnh treo.



- Đỉnh cô lập: v_5
- Đỉnh treo: v_2
- Cạnh treo: v_1v_2

Định lý 5.6 (Handshaking Theorem) Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có m cạnh. Khi đó

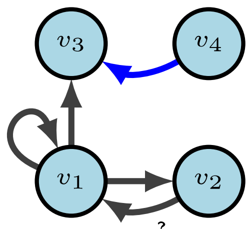
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m.$$

Ví dụ 5.7 Có bao nhiêu cạnh trong một đồ thị vô hướng có 10 đỉnh đều có bậc 6?
Giải. Tổng bậc của các đỉnh là $6.10 = 60$. Nếu đặt m là số cạnh của đồ thị thì $2m = 60$. Do đó $m = 30$.
Nhận xét. Trong một đồ thị vô hướng ta có:

1. Số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.
2. Tổng bậc của các đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

Định lý 5.8 Trong mọi đơn đồ thị vô hướng, nếu số đỉnh nhiều hơn 1 thì có ít nhất hai đỉnh cùng bậc.
Định lý 5.9 Trong mọi đơn đồ thị vô hướng, nếu số đỉnh nhiều hơn 2 và có đúng hai đỉnh cùng bậc thì hai đỉnh này không đồng thời có bậc bằng 0 hoặc $n - 1$.
Định nghĩa 5.10

- Trong một đồ thị có hướng, nếu uv là một cạnh có hướng thì ta nói u là đỉnh đầu và v là đỉnh cuối của cạnh uv.
- Bậc vào tại $u \in V$, kí hiệu $\deg^-(u)$, là số cạnh có đỉnh cuối là u.
- Bậc ra tại $u \in V$, kí hiệu $\deg^+(u)$, là số cạnh có đỉnh đầu là u.



- $\deg^-(v_1) = 2, \deg^+(v_1) = 3$
- $\deg^-(v_2) = 1, \deg^+(v_2) = 1$
- $\deg^-(v_3) = 2, \deg^+(v_3) = 0$
- $\deg^-(v_4) = 0, \deg^+(v_4) = 1$

Định lý 5.11 Tổng bậc vào của các đỉnh bằng tổng bậc ra và bằng số cạnh của đồ thị có hướng

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|.$$

Định nghĩa 5.12 Một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ được gọi là cân bằng nếu

$$\deg^-(v) = \deg^+(v)$$

với mọi $v \in V$.

Chứng minh và giải toán bằng phương pháp đồ thị

1. Xây dựng đồ thị mô tả đầy đủ thông tin của bài toán
   - Mỗi đỉnh là một đối tượng của bài toán
   - Mỗi cạnh là một quan hệ giữa các đối tượng
   - Vẽ đồ thị mô tả bài toán
2. Sử dụng các định nghĩa, tính chất, định lý,... suy ra điều cần phải chứng minh

Ví dụ 5.13 Chứng minh rằng trong một cuộc họp tùy ý có ít nhất 2 đại biểu tham gia trở lên, luôn có ít nhất hai đại biểu mà họ có số người quen bằng nhau trong các đại biểu đến dự họp.

Giải. Mô hình bài toán về đồ thị:

- Mỗi đại biểu là một đỉnh.
- Nếu hai đại biểu quen nhau thì sẽ có 1 cạnh nối giữa 2 đỉnh đại diện cho 2 đại biểu đó.

Như vậy, ta thu được một đơn đồ thị vô hướng có ít nhất 2 đỉnh nên đồ thị có ít nhất 2 đỉnh cùng bậc. Bậc của mỗi đỉnh là số người quen của đại biểu tương ứng với đỉnh đó. Nghĩa là có ít nhất hai đại biểu mà họ có số người quen bằng nhau trong các đại biểu đến dự họp.

Ví dụ 5.14 Chứng minh rằng số người mà mỗi người đã có một số lẻ lần bắt tay nhau trên trái đất là một con số chẵn.

Giải. Mô hình bài toán về đồ thị:

- Mỗi người là một đỉnh
- Nếu hai người bắt tay nhau thì sẽ có 1 cạnh nối giữa 2 đỉnh đại diện cho 2 người đó.

Như vậy, ta thu được một đồ thị vô hướng nên có số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn, nghĩa là số người mà mỗi người đã có một số lẻ lần bắt tay nhau trên trái đất là một con số chẵn.

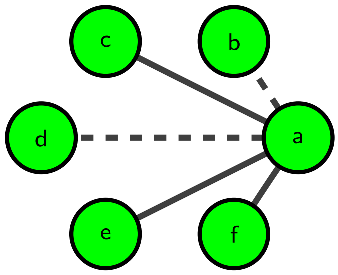
Ví dụ 5.15 Chứng minh rằng trong một bàn tròn có 6 người, có ba người đều biết nhau hoặc ba người không biết ai trong số hai người còn lại.

Giải. Mô hình bài toán về đồ thị:

- Mỗi người được biểu diễn bằng một đỉnh
- Nối hai đỉnh bằng một cạnh liền nếu những người tương ứng biết nhau và bằng một cạnh nét đứt nếu hai người không biết nhau.

Ta sẽ chỉ ra rằng luôn tồn tại một tam giác gồm các cạnh liền hoặc tam giác cạnh nét đứt.

- Cho a là một đỉnh bất kỳ. Khi đó phải có đúng năm cạnh kề với a, nét liền hoặc nét đứt, và do đó ít nhất ba trong số các cạnh này phải cùng loại.
- Ta giả sử rằng có ba cạnh liền nét (xem hình); trường hợp có ít nhất ba nét đứt cũng tương tự.



- Nếu những người tương ứng với các đỉnh c và e biết nhau thì a, c và e tạo thành một tam giác liền theo yêu cầu.
- Tương tự, nếu những người tương ứng với các đỉnh c và f, hoặc các đỉnh e và f biết nhau thì chúng ta lại thu được một tam giác liền.
- Nếu không có hai người tương ứng với các đỉnh c, e và f biết nhau thì c, e và f từ một tam giác nét đứt theo yêu cầu.

Ví dụ 5.16 Có thể xây dựng một đơn đồ thị có 4 đỉnh và 7 cạnh không?

Giải. Ta thấy rằng một đơn đồ thị có n đỉnh thì có tối đa $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cạnh.

Do đó, một đơn đồ thị có 4 đỉnh sẽ có tối đa 6 cạnh.
Như vậy, ta không thể xây dựng một đơn đồ thị có 4 đỉnh và 7 cạnh.

Ví dụ 5.17 Có thể xây dựng một đơn đồ thị có 4 đỉnh và 7 cạnh không?

Giải. Ta thấy rằng một đơn đồ thị có n đỉnh thì có tối đa $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cạnh.

Do đó, một đơn đồ thị có 4 đỉnh sẽ có tối đa 6 cạnh.
Như vậy, ta không thể xây dựng một đơn đồ thị có 4 đỉnh và 7 cạnh.

Ví dụ 5.18 Chứng minh rằng không tồn tại một đơn đồ thị có dãy bậc các đỉnh như sau

a. 0, 2, 2, 3, 4   b. 1, 1, 2, 3   c. 2, 2, 3, 4, 5, 5   d. 2, 2, 4, 6

Giải.

....

....

....

....

Ví dụ 5.19 Chứng minh rằng không tồn tại một đồ thị có dãy bậc của các đỉnh là 6, 6, 6, 6, 4, 3, 3, 0.

Giải. Giả sử tồn tại một đồ thị có dãy các bậc của các đỉnh là 6, 6, 6, 6, 4, 3, 3, 0
Sau khi xóa 1 đỉnh có bậc 6, ta có một đồ thị có dãy các đỉnh là 5, 5, 5, 3, 2, 2, 0
Xóa tiếp 1 đỉnh bậc 5, ta có một đồ thị có dãy các đỉnh là ....
Xóa tiếp 1 đỉnh bậc ...., ta có một đồ thị có dãy các đỉnh là ....

....

....

Ví dụ 5.20 xây dựng một đồ thị có dãy bậc các đỉnh 6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2.

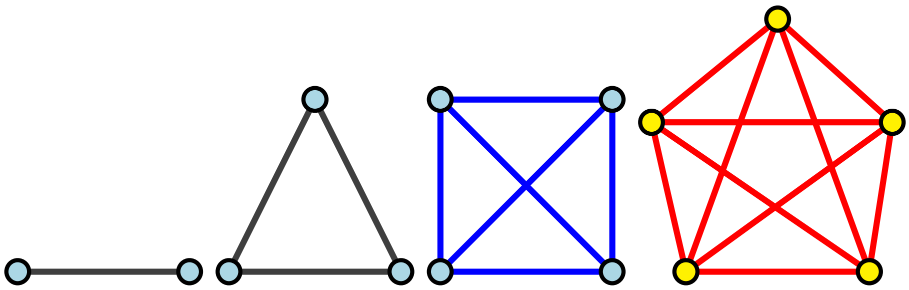
Giải.

- Xóa đỉnh bậc 6 (trừ 1 bậc của 6 đỉnh tiếp theo)	: 4, 4, 3, 2, 2, 1, 2, 2
- Sắp xếp lại dãy các bậc	: 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 1
- Xóa 1 đỉnh bậc 4 (trừ 1 bậc của 4 đỉnh kế tiếp)	: 3, 2, 1, 1, 2, 2, 1
- Sắp xếp lại dãy các bậc	: 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1
- Xóa 1 đỉnh bậc 3 (trừ 1 bậc của 3 đỉnh tiếp theo)	: 1, 1, 1, 1, 1, 1

5.2 Một số đồ thị đặc biệt

5.2.1 Đồ thị đầy đủ

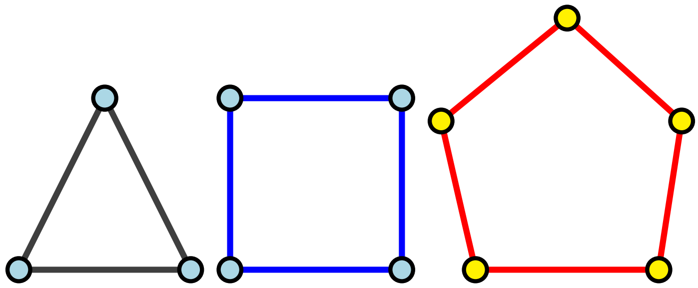
- Đồ thị $G = (V, E)$ có n đỉnh được gọi là đầy đủ, ký hiệu là K_n, là đơn đồ thị mà hai đỉnh phân biệt bất kỳ của nó luôn liền kề.
- $\deg(v) = n - 1$ với mọi $v \in V$.
- Số cạnh $|E| = \dfrac{n(n-1)}{2}$.



- Một đồ thị có hướng được gọi là đầy đủ nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là đầy đủ.

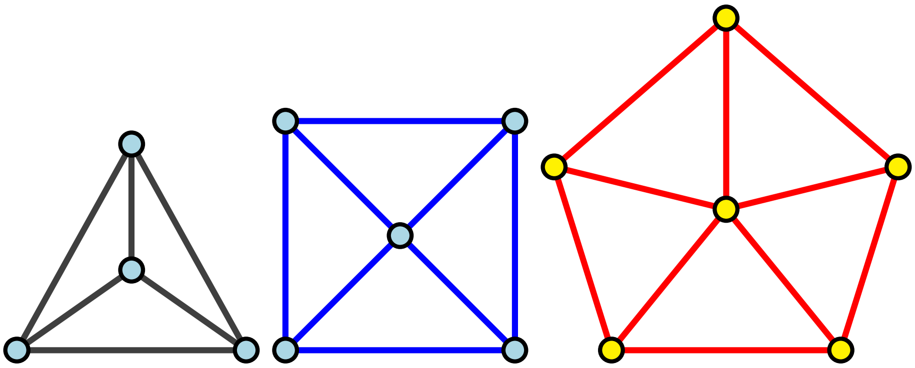
5.2.2 Đồ thị vòng

- Đồ thị $G = (V, E)$ có $n > 2$ đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và n cạnh $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ được gọi là đồ thị vòng, ký hiệu C_n.
- $\deg(v) = 2$ với mọi $v \in V$.
- Số cạnh $|E| = n$.



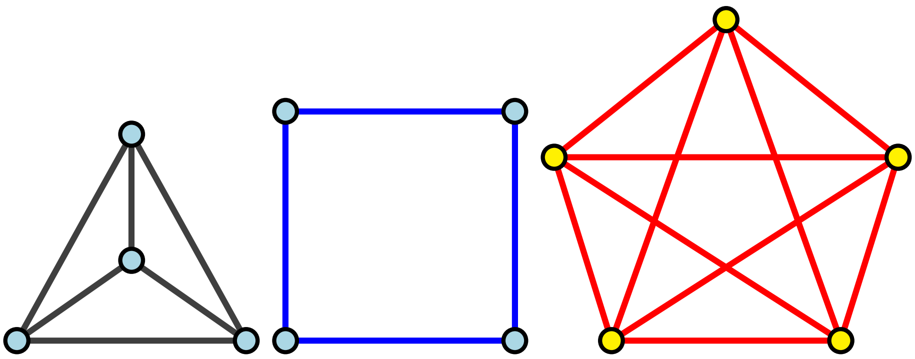
5.2.3 Đồ thị bánh xe

- Đồ thị $G = (V, E)$ có $n + 1$ đỉnh được gọi là bánh xe, ký hiệu là W_{n+1}, là đồ thị vòng C_n và đỉnh v_{n+1} nối với tất cả các đỉnh của C_n.
- $\deg(v_i) = 3$ với mọi $v_i \in V \setminus \{v_{n+1}\}$.
- $\deg(v_{n+1}) = n$
- Số cạnh $|E| = 2n$.



5.2.4 Đồ thị đều

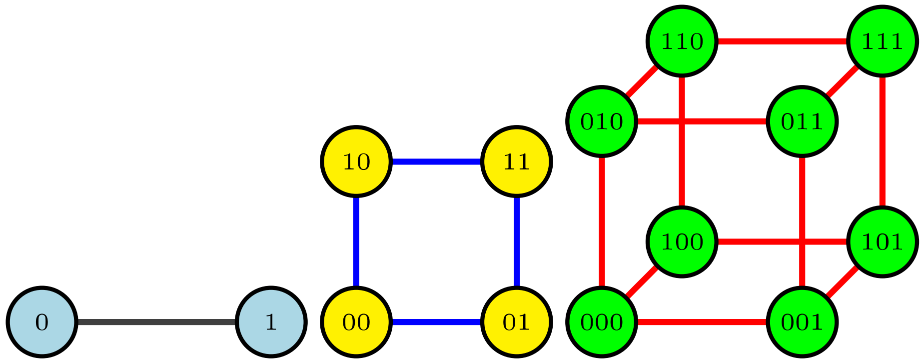
- Đồ thị G được gọi là đồ thị đều (regular) bậc k nếu các đỉnh của G đều có bậc bằng k.



Chú ý: - Đồ thị K_n là đồ thị đều bậc $n - 1$
- Đồ thị C_n là đồ thị đều bậc 2.

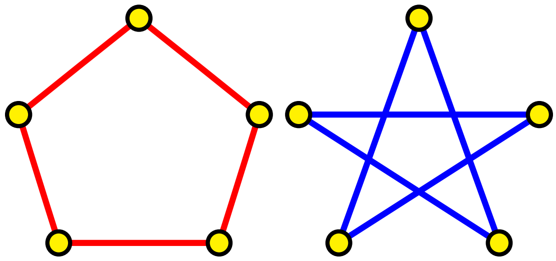
5.2.5 Đồ thị khối

- Đồ thị khối n chiều $(n \geq 1)$, kí hiệu Q_n, là đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng xâu nhị phân có độ dài n.
- Hai đỉnh là liền kề khi và chỉ khi các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng một bit.
- Bậc của mỗi đỉnh trong Q_n là n.
- Số cạnh của Q_n là $n.2^{n-1}$



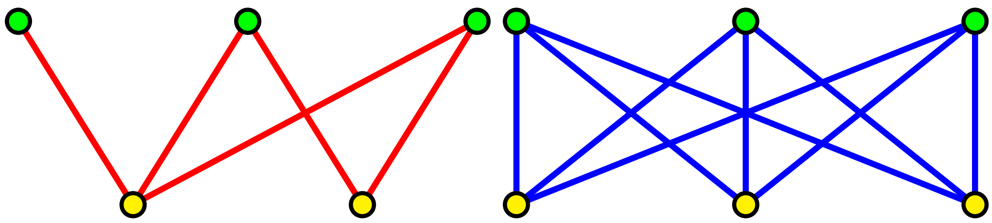
5.2.6 Đồ thị bù

- Hai đơn đồ thị G và G' được gọi là bù nhau nếu chúng có chung các đỉnh và cạnh nào thuộc G thì không thuộc G'.
- Kí hiệu $G' = \overline{G}$.

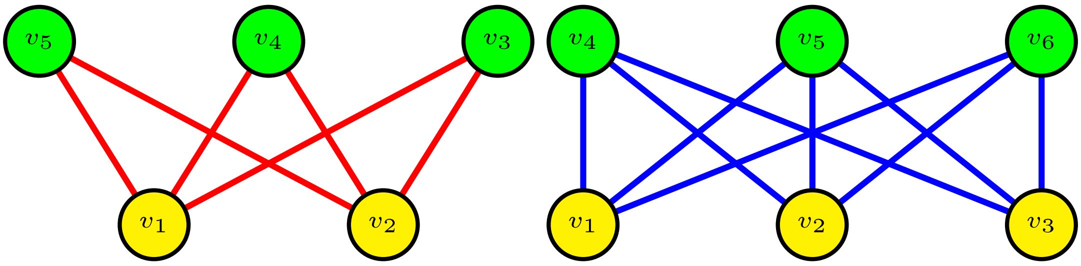


5.2.7 Đồ thị lưỡng phân

- Một đồ thị G được gọi là đồ thị lưỡng phân (bipartite) nếu tập các đỉnh của G có thể phân thành 2 tập hợp không rỗng, rời nhau sao cho mỗi cạnh của G nối một đỉnh thuộc tập này đến một đỉnh thuộc tập kia.

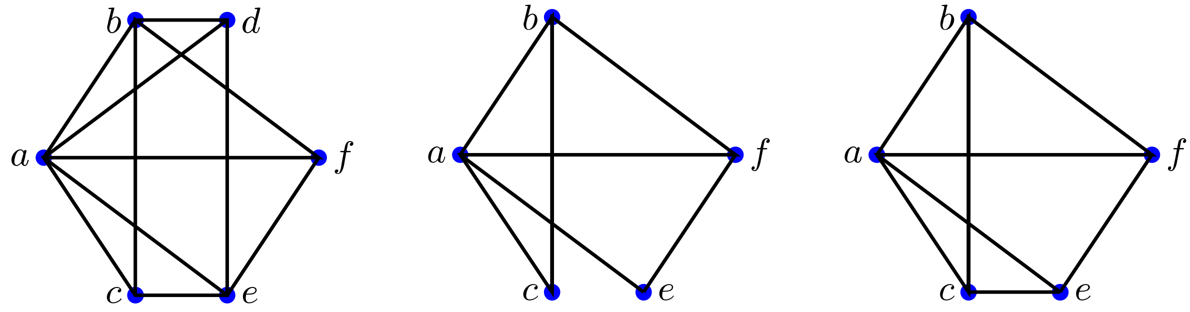


- Một đồ thị lưỡng phân đầy đủ $K_{m,n}$ (complete bipartite) là một đồ thị mà các đỉnh của nó được chia thành hai tập con lần lượt có m, n đỉnh và bất kì đỉnh nào của tập này đều kề với các đỉnh của tập kia.



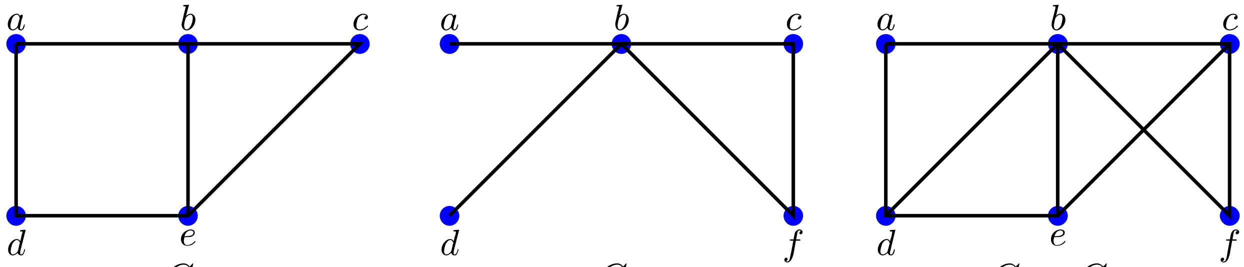
Định nghĩa 5.21 Một đồ thị con (subgraph) của một đồ thị $G = (V, E)$ là một đồ thị $H = (W, F)$ trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$. Một đồ thị con H của G là đồ thị con thực sự nếu $H \neq G$.

Định nghĩa 5.22 Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị. Một đồ thị con cảm sinh bởi một tập con W của V là một đồ thị (W, F) trong đó tập cạnh F chứa một cạnh của E nếu và chỉ nếu cả hai điểm đầu mút của cạnh đó thuộc W.



$G = (V, E)$ Đồ thị con Đồ thị con cảm sinh

Định nghĩa 5.23 Hợp của hai đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đơn đồ thị với tập đỉnh $V_1 \cup V_2$ và tập cạnh $E_1 \cup E_2$. Kí hiệu hợp hai đồ thị là $G_1 \cup G_2$.

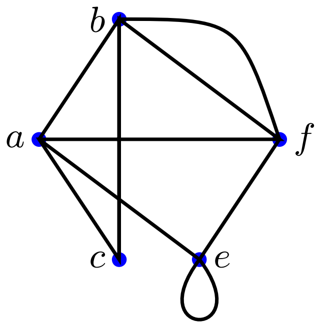


G_1 G_2 $G_1 \cup G_2$

5.3 Biểu diễn đồ thị

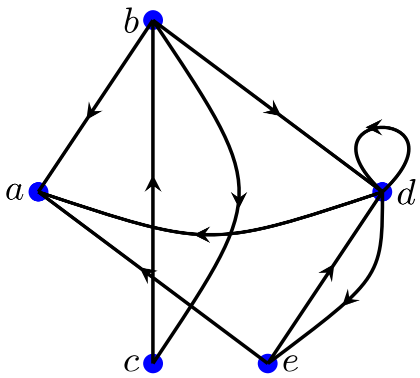
Biểu diễn đồ thị bằng danh sách các đỉnh kề

Ví dụ 5.24 Bảng danh sách các đỉnh kề của đồ thị vô hướng.



Đỉnh	Các đỉnh kề
a	b, c, e, f
b	a, c, f, f
c	a, b
e	a, e, f
f	a, b, e

Ví dụ 5.25 Bảng danh sách đỉnh kề của đồ thị có hướng



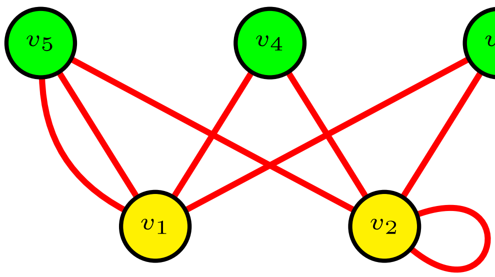
Đỉnh	Các đỉnh kề
a	
b	a, c, d
c	b
d	a, d, e
e	a, d

Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề

Cho một đồ thị $G = (V, E)$ có n đỉnh. Ma trận kề (adjacency matrix) của G là $A = [a_{ij}]$ trong đó

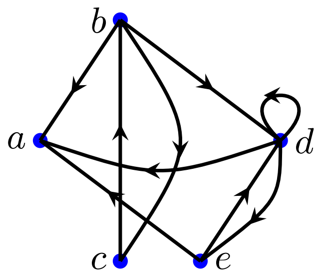
$$a_{ij} = \text{ số cạnh nối đỉnh } i \text{ và đỉnh } j.$$

Ví dụ 5.26 Ma trận kề của đồ thị vô hướng



$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ví dụ 5.27 Ma trận kề của đồ thị có hướng

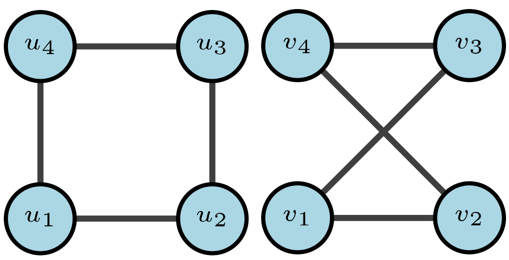


$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Định nghĩa 5.28 Hai đồ thị $G = (V, E)$ và $G' = (V', E')$ được gọi là đẳng cấu (isomorphism), kí hiệu $G \cong G'$, nếu

1. tồn tại một song ánh $f : V \to V'$ và
2. cạnh $uv \in E$ khi và chỉ khi cạnh $f(u)f(v) \in E'$ (bảo toàn quan hệ liền kề).

Ví dụ 5.29 Xét sự đẳng cấu của hai đồ thị sau:



$G = (V, E)$ $\qquad$ $G' = (V', E')$

Ta có $G \cong G'$ vì có song ánh

$$\begin{aligned} f : V &\to V' \\ u_1 &\mapsto v_1 \\ u_2 &\mapsto v_2 \\ u_3 &\mapsto v_4 \\ u_4 &\mapsto v_3 \end{aligned}$$

bảo toàn quan hệ liền kề.

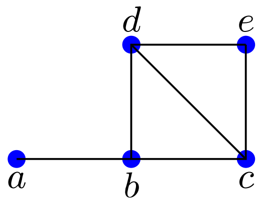
Định lý 5.30 Nếu $G \cong G'$ thì $|V| = |V'|, |E| = |E'|$ và $\deg(v) = \deg(f(v))$ với mọi $v \in V$.

Điều kiện cần để hai đồ thị đẳng cấu:

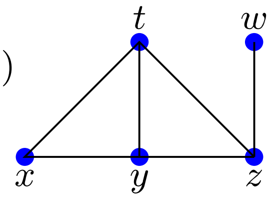
1. Cả hai đồ thị có cùng số đỉnh.
2. Cả hai đồ thị có cùng cố cạnh.
3. Cả hai đồ thị có cùng số đỉnh có bậc giống nhau.

Ví dụ 5.31 Chứng minh rằng hai đồ thị dưới đây đẳng cấu

$G = (V, E)$



$H = (V', E')$



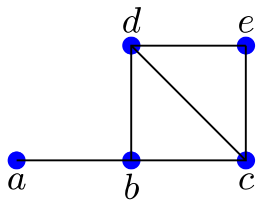
Giải. Cả hai đồ thị đều có 5 đỉnh và 6 cạnh.

Bậc các đỉnh của G	Bậc các đỉnh của H
$\deg(a) = 1$	$\deg(w) = 1$
$\deg(b) = 3$	$\deg(z) = 3$
$\deg(c) = 3$	$\deg(y) = 3$
$\deg(d) = 3$	$\deg(t) = 3$
$\deg(e) = 2$	$\deg(x) = 2$

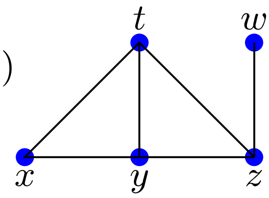
Ta xây dựng ánh xạ $f : V \to V'$ với tương ứng như sau

$$a \mapsto w; b \mapsto z; c \mapsto y; d \mapsto t; e \mapsto x$$

$G = (V, E)$



$H = (V', E')$



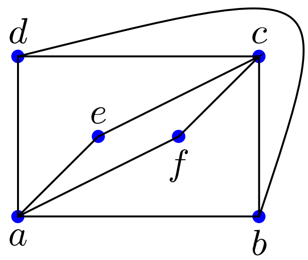
Khi đó, ta có các sự tương ứng giữa các cạnh của hai đồ thị như sau

$$ab - wz; bc - zy; cd - yt; db - tz; de - tx; ec - xy$$

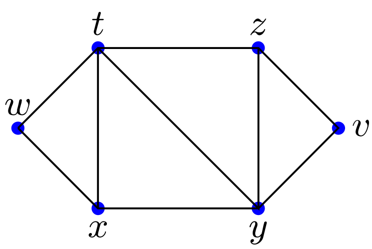
Như vậy G đẳng cấu với H.

Ví dụ 5.32 Hai đồ thị dưới đây có đẳng cấu không?

$G = (V, E)$



$H = (V', E')$



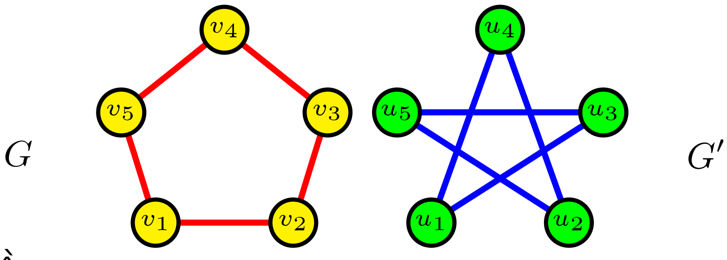
Giải.

- Hai đồ thị đều có 6 đỉnh và 9 cạnh.
- Hai đồ thị có 2 đỉnh bậc 2, 2 đỉnh bậc 3 và 2 đỉnh bậc 4.
- Trong đồ thị H, hai đỉnh bậc 4 kề nhau (đỉnh y và t). Tuy nhiên, hai đỉnh bậc 4 của G không kề nhau (đỉnh a và đỉnh c)

Như vậy hai đồ thị đã cho không đẳng cấu.

Định lý 5.33 Hai đồ thị có ma trận liền kề (theo một thứ tự nào đó của các đỉnh) bằng nhau thì đẳng cấu với nhau.

Ví dụ 5.34 Hai đồ thị



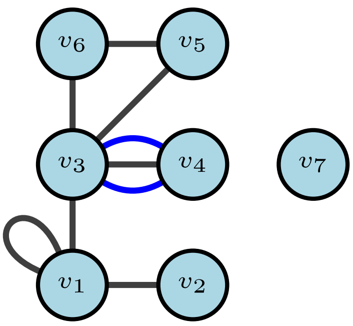
có các ma trận liền kề

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
=
\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_2 \\ u_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_3 & u_5 & u_2 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

5.4 Sự liên thông

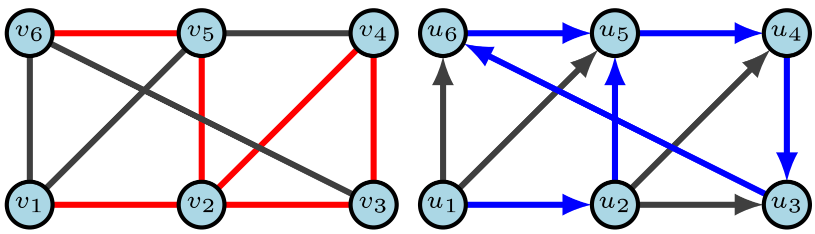
Định nghĩa 5.35 Cho một đồ thị $G = (V, E)$. Một đường đi (path) có độ dài k là một dãy k cạnh liên tiếp. Kí hiệu $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k, v_kv_{k+1}$ hoặc $v_1v_2 \ldots v_kv_{k+1}$ trong đó v_1 được gọi là đỉnh đầu, v_{k+1} được gọi là đỉnh cuối.

Ví dụ 5.36



- Đường đi $v_1v_3v_4v_3v_6$
- Đường đi $v_2v_1v_3v_1v_1v_2$
- Đường đi $v_3v_5v_6v_3$.

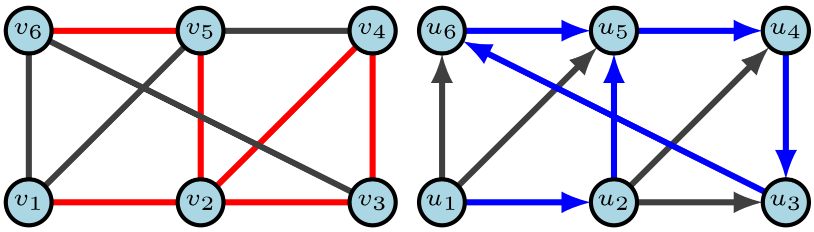
- Đường đi đơn (simple path) là đường đi không qua cạnh nào quá một lần.



- Đường đi đơn: $v_1v_2v_3v_4v_2v_5v_6$; $u_1u_2u_5u_4u_3u_6u_5$

- Chu trình (circuit) là một đường đi có điểm đầu và cuối trùng nhau.
- Chu trình đơn là chu trình không chứa cạnh nào quá 1 lần.

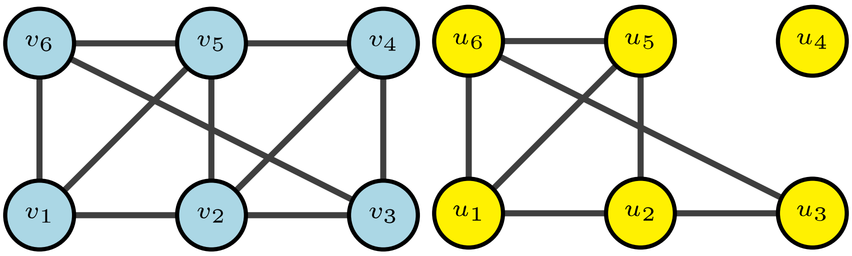
Ví dụ 5.37



- Chu trình đơn $v_1v_2v_3v_4v_2v_5v_6v_1$

Định nghĩa 5.38 Một đồ thị vô hướng được gọi là liên thông (connected) nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.

Ví dụ 5.39



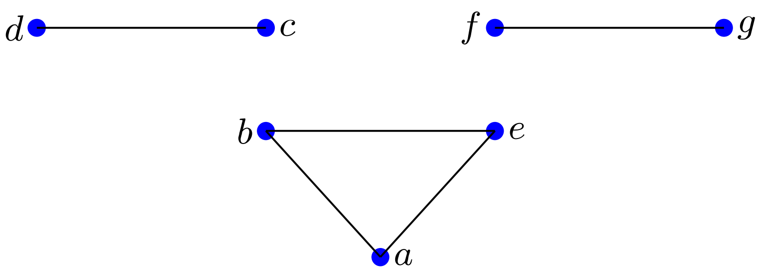
G $\qquad\qquad$ G'

G là đồ thị liên thông, G' là đồ thị không liên thông.

- Một đồ thị không liên thông là hợp của hai hay nhiều đồ thị con liên thông, mỗi cặp các đồ thị con này không có đỉnh chung.

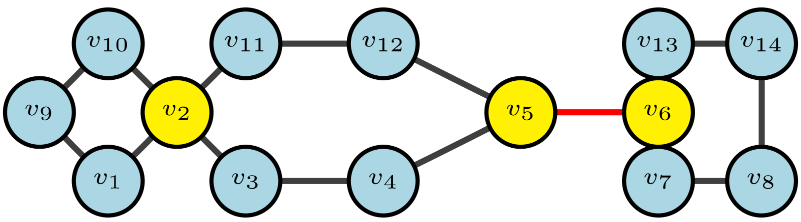
- Các đồ thị con liên thông rời nhau như vậy được gọi là các thành phần liên thông (connected component) của đồ thị đang xét.
- Một đồ thị là liên thông khi và chỉ khi nó chỉ có một thành phần liên thông.

Ví dụ 5.40 Đồ thị dưới đây có 3 thành phần liên thông



Định nghĩa 5.41

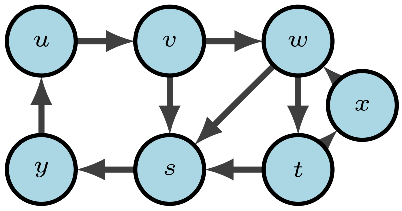
- Đỉnh u trong một đồ thị được gọi là đỉnh cắt (cut vertex) nếu số thành phần liên thông tăng lên khi bỏ u và các cạnh liên thuộc với nó.
- Cạnh e trong một đồ thị được gọi là cầu (bridge) nếu số thành phần liên thông tăng lên khi bỏ cạnh e.



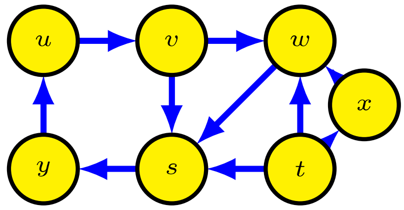
- Các đỉnh cắt: v_2, v_5, v_6
- Cầu v_5v_6.

Định lý 5.42 Mọi đơn đồ thị n đỉnh $(n \geq 2)$ có tổng bậc của hai đỉnh tuỳ ý không nhỏ hơn n đều là đồ thị liên thông.
Nhận xét. Đơn đồ thị mà bậc của mỗi đỉnh của nó không nhỏ hơn một nửa số đỉnh là đồ thị liên thông.
Định lý 5.43 Nếu một đồ thị liên thông có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì có một đường đi nối chúng.
Định nghĩa 5.44

- Đồ thị có hướng được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tồn tại đường đi giữa hai đỉnh phân biệt bất kỳ.
- Đồ thị có hướng được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông.



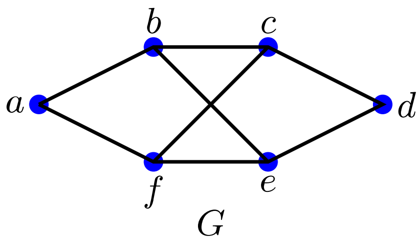
liên thông

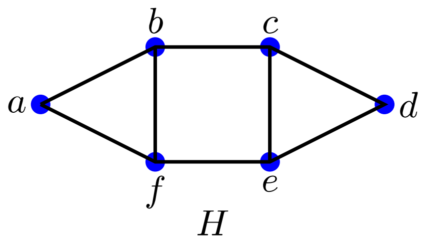


liên thông yếu

Định lý 5.45 Trong một đồ thị đơn luôn tồn tại một đường đi từ một đỉnh bậc lẻ này đến một đỉnh bậc lẻ khác.
Nhận xét. Nếu hai đồ thị đơn $G \cong H$ và đồ thị G có một đường đi (hoặc chu trình) có độ dài k thì H cũng có một đường đi (hoặc chu trình) có độ dài k.

Ví dụ 5.46 Kiểm tra sự đẳng cấu giữa hai đồ thị

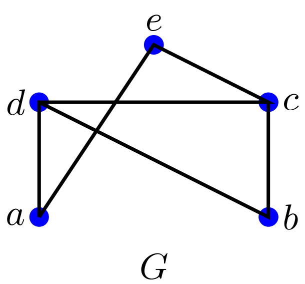


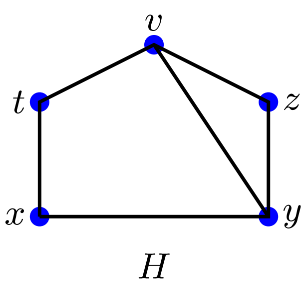


Giải.

- Hai đồ thị đều có 6 đỉnh, 8 cạnh.
- Mỗi đồ thị có 2 đỉnh bậc 2 và 4 đỉnh bậc 3.
- H có chu trình độ dài 3 là $abfa$ nhưng G không có chu trình có độ dài 3.
- Như vậy G và H không đẳng cấu.

Ví dụ 5.47 Hai đồ thị sau có đẳng cấu không?





Nhận xét. Hai đồ thị có số đỉnh, số cạnh bằng nhau. Chúng đều có 2 đỉnh bậc 3 và 3 đỉnh bậc 2. Cả hai đồ thị đều có chu trình đơn có độ dài 3, một chu trình độ dài 4 và chu trình đơn độ dài 5. Dự đoán hai đồ thị này đẳng cấu.

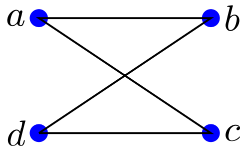
Giải. Để xây dựng một đẳng cấu, ta có thể dùng hai đường đi qua tất cả các đỉnh tương ứng có cùng bậc của hai đồ thị. Ví dụ trong đồ thị G có đường đi $adbce$ và đồ thị H có đường đi tương ứng $tvzyx$ (từ đỉnh có bậc 2, qua đỉnh có bậc 3, tiếp đến đỉnh có bậc 2, qua đỉnh có bậc 3 và kết thúc ở đỉnh có bậc 2). Theo đường đi này, ta xây dựng ánh xạ f

$$f(a) = t; f(d) = v; f(b) = z; f(c) = y; f(e) = x.$$

Ta kiểm tra được f là một song ánh và bảo toàn quan hệ liền kề.

Định lý 5.48 Cho G là một đồ thị có ma trận kề A với các đỉnh theo thứ tự $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Số đường đi khác nhau có độ dài r từ đỉnh v_i đến v_j bằng với hệ số tại vị trí (i, j) của ma trận A^r.

Ví dụ 5.49 Có bao nhiêu đường đi có độ dài 4 từ a đến d trong đồ thị dưới đây



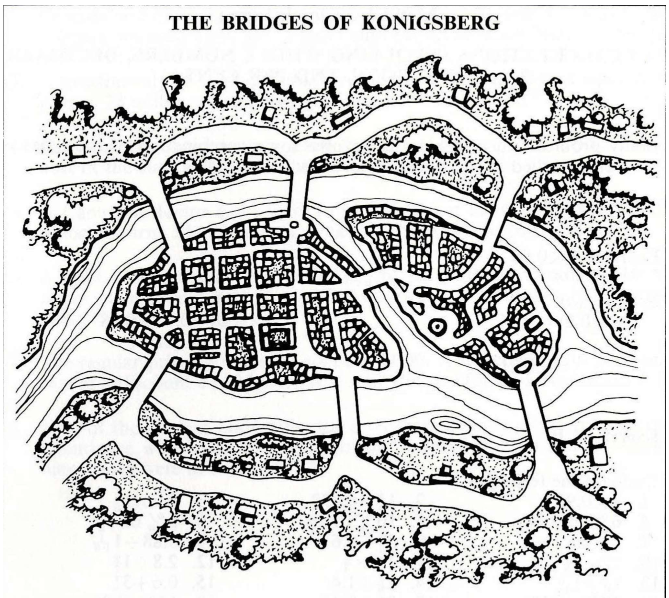
Giải. Ma trận kề của đồ thị với các đỉnh theo thứ tự a, b, c, d là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } A^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & \mathbf{8} \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Số đường đi có độ dài 4 từ a đến d là 8.

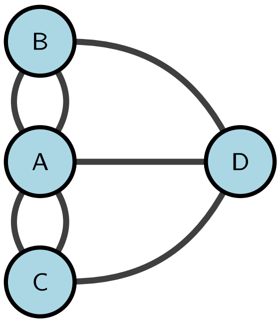
5.5 Chu trình và đường đi Euler

Thành phố Konigsberg thuộc Phổ (nay gọi là Kaliningrad thuộc Nga) được chia thành bốn vùng bằng các nhánh sông Pregel, các vùng này gồm hai vùng bên bờ sông, đảo Kneiphof và một miền nằm giữa hai nhánh của sông Pregel. Vào thế kỷ 18, người ta xây bảy chiếc cầu nối các vùng này với nhau.



Bài toán. Có thể xuất phát tại một điểm nào đó trong thành phố, đi qua tất cả 7 cây cầu, mỗi cây một lần, rồi trở về điểm xuất phát được không?

- Nếu ta coi mỗi khu vực A, B, C, D như một đỉnh và mỗi cầu qua lại hai khu vực là một cạnh nối hai đỉnh thì ta có sơ đồ của Konigsberg là một đa đồ thị G như hình dưới

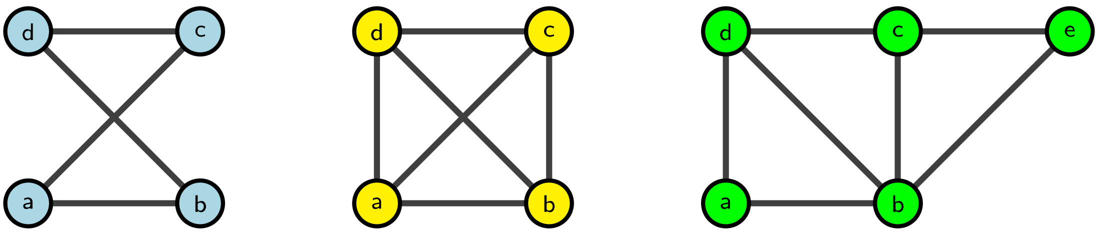


- Bài toán tìm đường đi qua tất cả các cầu, mỗi cầu chỉ qua một lần có thể được phát biểu lại bằng mô hình này như sau: Có tồn tại chu trình đơn trong đa đồ thị G chứa tất cả các cạnh?
- Leonhard Euler (1707-1783) đã tìm ra lời giải cho bài toán vào năm 1736.

Định nghĩa 5.50

- Đường đi Euler trong đồ thị là đường đi của đồ thị đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần.
- Chu trình Euler trong đồ thị là một chu trình đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần và có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối.
- Đồ thị Euler là đồ thị có chứa ít nhất một chu trình Euler.

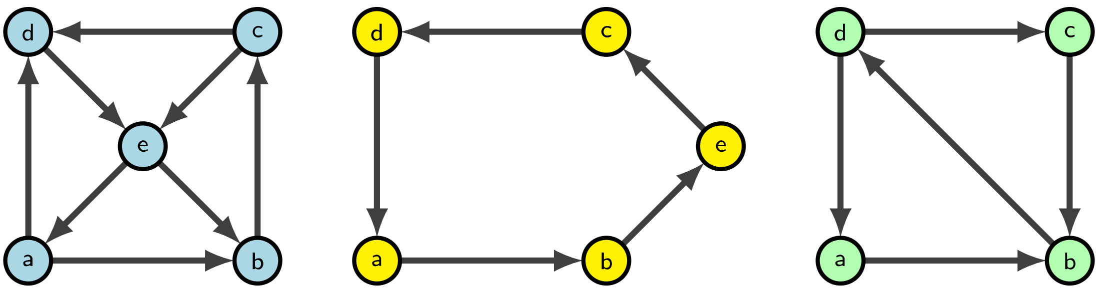
Ví dụ 5.51



G_1 G_2 G_3

Đồ thị G_1 là đồ thị Euler vì nó có chu trình Euler abdca. Đồ thị G_2 không có chu trình và đường đi Euler. Đồ thị G_3 không có chu trình Euler nhưng có đường đi Euler dabdcbec.

Ví dụ 5.52

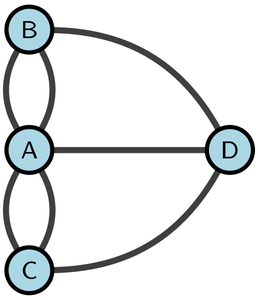


Đồ thị H_1 không có đường đi Euler, không có chu trình Euler. Đồ thị H_2 có chu trình Euler. Đồ thị H_3 có đường đi Euler dabdcb nhưng không có chu trình Euler.

Định lý 5.53 Một đa đồ thị liên thông với ít nhất hai đỉnh có một chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

Định lý 5.54 Đồ thị liên thông có đường đi Euler, không có chu trình Euler khi và chỉ khi nó có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.

Bài toán 7 cây cầu: Có thể xuất phát tại một điểm nào đó trong thành phố, đi qua tất cả 7 cây cầu, mỗi cây một lần, rồi trở về điểm xuất phát được không?

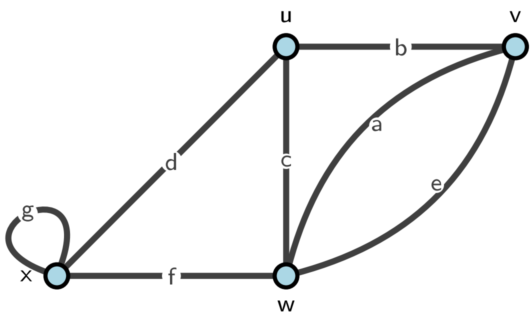


Giải. Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị có các đỉnh bậc lẻ. Do đó không tồn tại chu trình Euler trong đồ thị này. Như vậy, không tồn tại một đường đi thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Sự tồn tại của đường đi (chu trình) Euler tùy thuộc vào bậc của các đỉnh. Để xác định đường đi (chu trình) Euler, ta chú ý các đặc điểm:

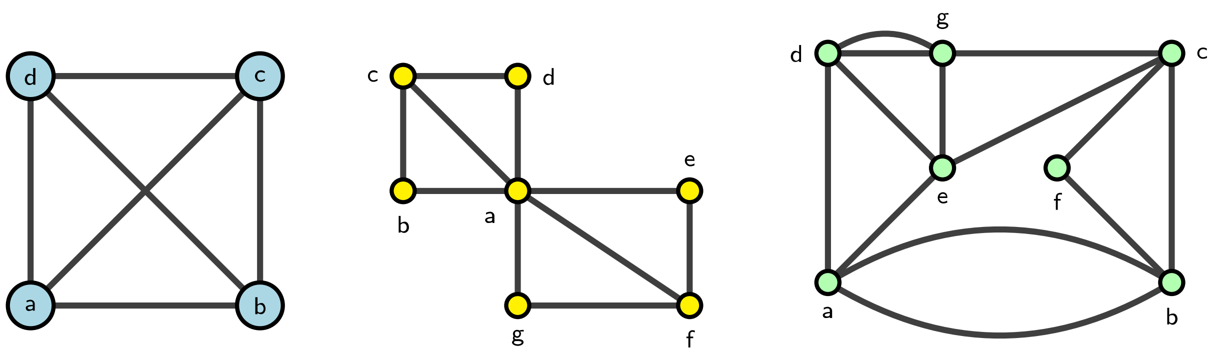
1. Nếu có đỉnh bậc 0 thì đồ thị không liên thông và do đó không có đường đi và chu trình Euler.
2. Nếu tất cả các đỉnh có bậc chẵn thì đồ thị có đường đi và chu trình Euler.
3. Nếu chỉ có 2 đỉnh bậc lẻ thì đồ thị có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler.

Ví dụ 5.55 Chứng minh rằng đồ thị dưới đây có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler



Giải. Ta có $\deg(u) = \deg(v) = 3$ và $\deg(x) = \deg(w) = 4$. Vì đồ thị chỉ có 2 đỉnh bậc lẻ nên nó có một đường đi Euler và không có chu trình Euler. Đường đi Euler cần tìm là b-a-c-d-g-f-e.

Ví dụ 5.56 Đồ thị nào sau đây có đường đi (chu trình) Euler?



H_1 H_2 H_3

Giải. Đồ thị H_1 : mỗi đỉnh đều có bậc .... do đó ....

....

Đồ thị H_2 : ....

....

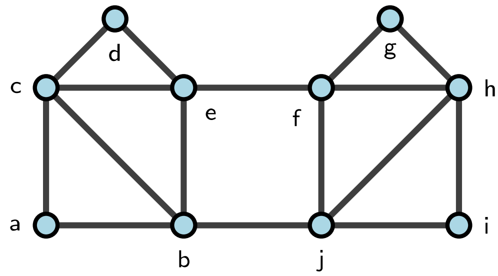
Đồ thị H_3 : ....

....

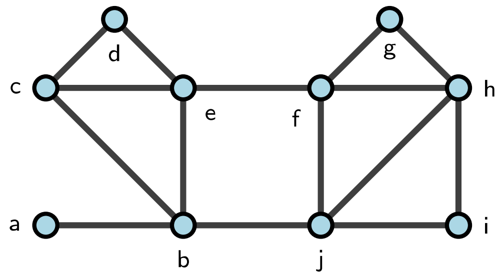
Thuật toán Fleury tìm chu trình/đường đi Euler của đồ thị (trong đồ thị vô hướng)

1. Kiểm tra xem đồ thị có 0 hoặc 2 đỉnh bậc lẻ.
2. Nếu đồ thị có 0 đỉnh bậc lẻ thì bắt đầu tại một đỉnh bất kỳ. Nếu đồ thị có 2 đỉnh bậc lẻ thì bắt đầu tại một đỉnh bậc lẻ.
3. Đi theo các cạnh một lần. Nếu có sự lựa chọn giữa cạnh cầu và cạnh không là cầu thì luôn chọn cạnh không là cầu.
4. Xóa các cạnh đã đi qua và các đỉnh cô lập.
5. Dừng lại khi đã đi hết qua tất cả các cạnh.

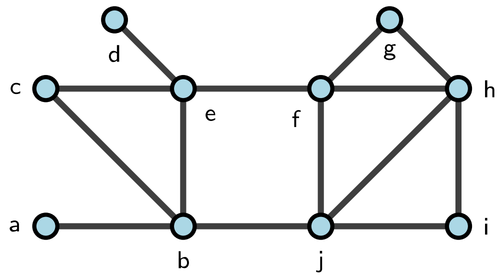
Ví dụ 5.57 Dùng thuật toán Fleury, tìm chu trình Euler của đồ thị



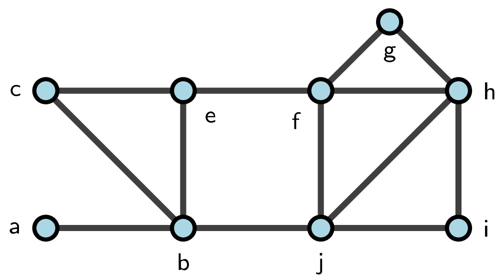
Giải. Các đỉnh đều có bậc chẵn nên đồ thị có chu trình Euler.



Chọn đỉnh a. Chọn cạnh ac (có thể chọn ab).
Ta có đường đi ac

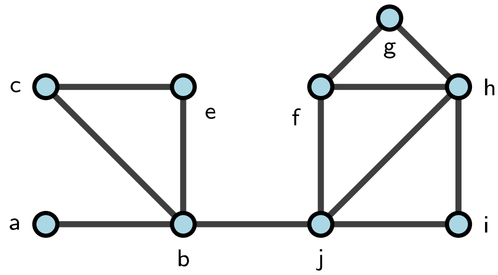


Chọn cạnh cd (có thể chọn cd hoặc cb).
Ta có đường đi acd

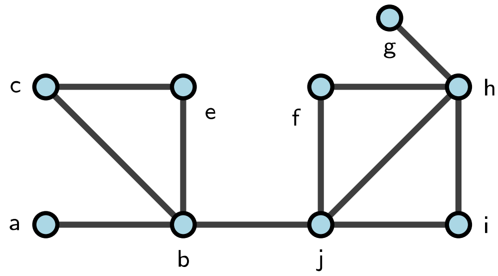


Chọn cạnh de.
Ta có đường đi acde

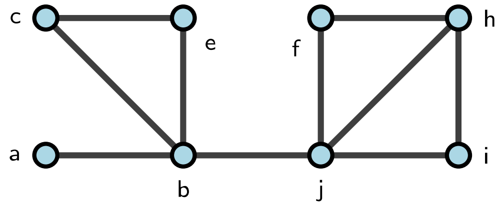
Chọn cạnh ef (có thể chọn ec, eb).
Ta có đường đi acdef



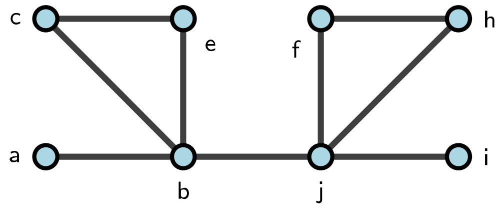
Chọn cạnh fg (có thể chọn fh, fj, fg).
Ta có đường đi acdefg



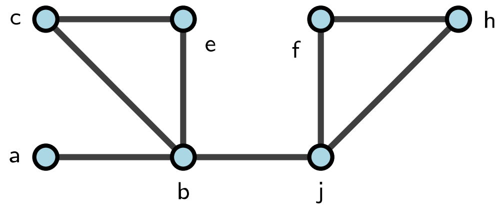
Chọn cạnh gh.
Ta có đường đi acdefgh



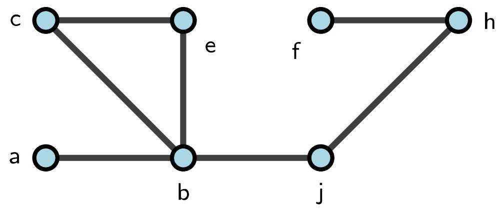
Chọn cạnh hi (hoặc hf, hj).
Ta có đường đi acdefghi



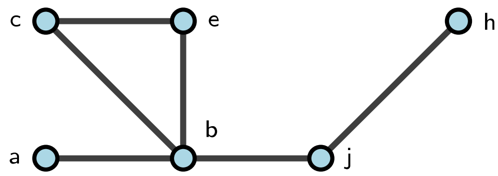
Chọn cạnh ij.
Ta có đường đi acdefghij



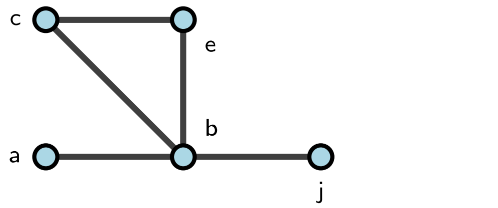
Chọn cạnh jf (hoặc jh, không chọn jb).
Ta có đường đi acdefghijf



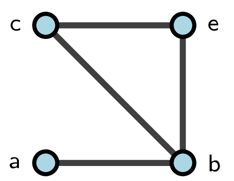
Chọn cạnh fh.
Ta có đường đi acdefghijfh



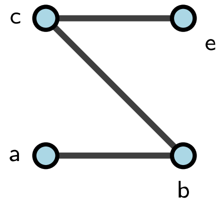
Chọn cạnh hj.
Ta có đường đi acdefghijfhj



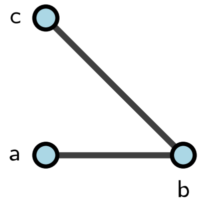
Chọn cạnh jb.
Ta có đường đi acdefghijfhjb



Chọn cạnh be (hoặc bc, không chọn ba).
Ta có đường đi acdefghijfhjbe



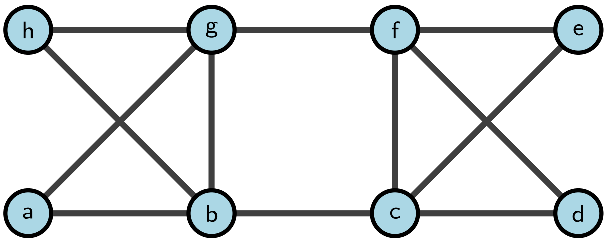
Chọn cạnh ec.
Ta có đường đi acdefghijfhjbec



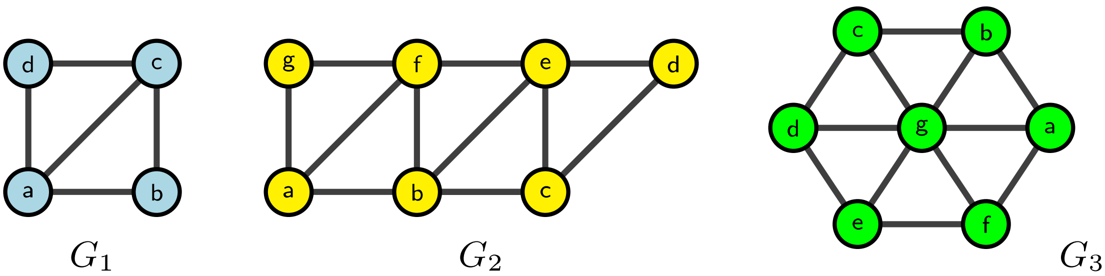
Chọn cạnh cb.
Ta có đường đi acdefghijfhjbecb

Chọn cạnh ba.
Ta có chu trình Euler acdefghijfhjbecba

Ví dụ 5.58 Tìm chu trình Euler của đồ thị



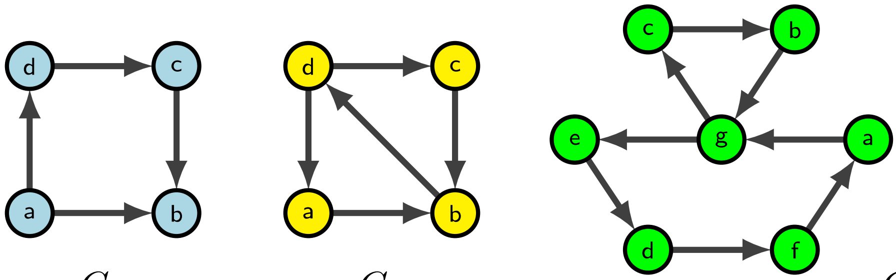
Ví dụ 5.59 Đồ thị nào có đường đi Euler?



- Đồ thị G_1 có đúng 2 đỉnh có bậc lẻ (đỉnh a, c). Do đó nó có đường đi Euler: **abcadc**
- Đồ thị G_2 có đúng 2 đỉnh có bậc lẻ (đỉnh a,c). Do đó nó có đường đi Euler: **abcdebfagfec**
- Đồ thị G_3 có nhiều hơn 2 đỉnh bậc lẻ (6 đỉnh có bậc lẻ). Do đó nó không có đường đi Euler.

Định lý 5.60 Đồ thị có hướng $G = (V, E)$ có chu trình Euler khi và chỉ khi G là liên thông mạnh và $\deg^+(v) = \deg^-(v)$ với mọi $v \in V$.

Ví dụ 5.61 Đồ thị nào có chu trình Euler?

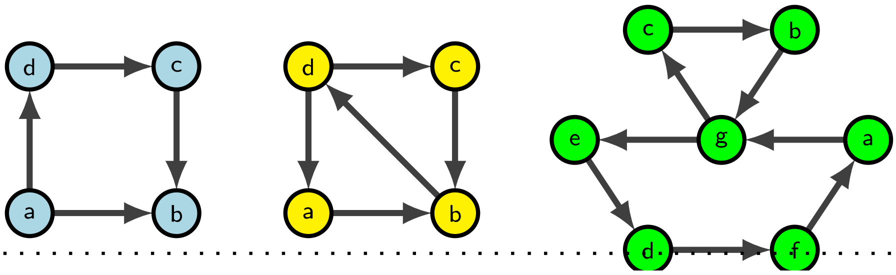


G_1 G_2 G_3

Định lý 5.62 Đồ thị có hướng $G = (V, E)$ có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi G thỏa các điều kiện sau

1. G liên thông yếu
2. Tồn tại duy nhất $v \in V$ sao cho $\deg^+(v) = \deg^-(v) + 1$
3. Tồn tại duy nhất $u \in V$ sao cho $\deg^+(u) = \deg^-(u) - 1$
4. $\deg^+(x) = \deg^-(x)$ với mọi $x \in V \setminus \{u, v\}$.

Ví dụ 5.63 Đồ thị nào có đường đi Euler?

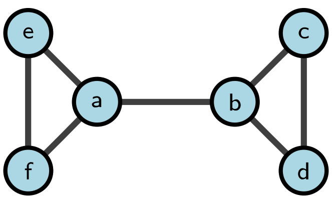


5.6 Chu trình và đường đi Hamilton

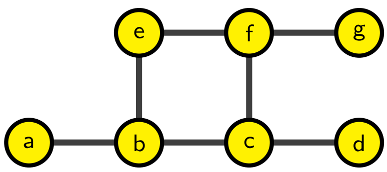
Định nghĩa 5.64

- Chu trình bắt đầu từ một đỉnh v nào đó qua tất cả các đỉnh còn lại mỗi đỉnh đúng một lần rồi quay trở về v được gọi là chu trình Hamilton.
- Đồ thị Hamilton là đồ thị có chứa chu trình Hamilton.

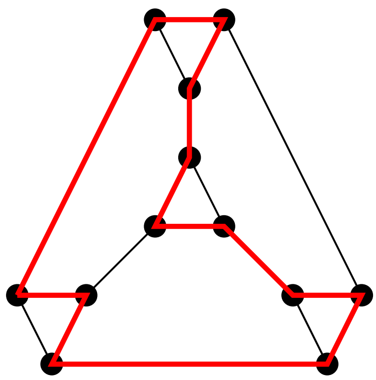
Ví dụ 5.65



efabdc



Không có đường đi Hamilton



- **Định lý Ore:** Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị có $n \geq 3$ đỉnh và $\deg(v) + \deg(w) \geq n$ với mọi cặp đỉnh không liền kề v, w. Khi đó G có chu trình Hamilton.
- **Định lý Dirac:** Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị có $n \geq 3$ đỉnh và $\deg(v) \geq \dfrac{n}{2}$ với mọi $v \in V$. Khi đó G có chu trình Hamilton.
- **Định lý Pósa:** Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị có $n \geq 3$ đỉnh và thỏa mãn
  1. $|\{v \in V \mid \deg(v) \leq k\}| \leq k - 1$ với mọi $k \in [1, (n-1)/2)$

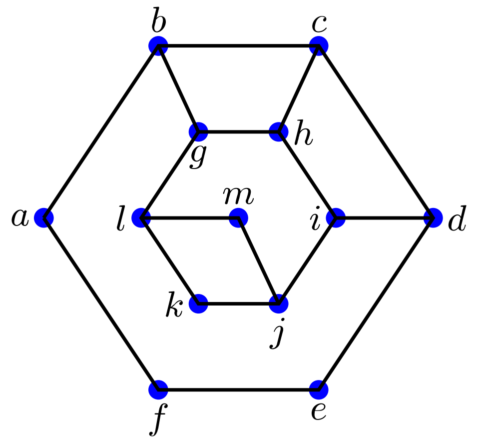
- 2. $|\{v \in V \mid \deg(v) \leq \frac{n-1}{2}\}| \leq \frac{n-1}{2}$ với n lẻ

  Khi đó G có chu trình Hamilton.

Đồ thị Hamilton thỏa mãn các điều kiện sau

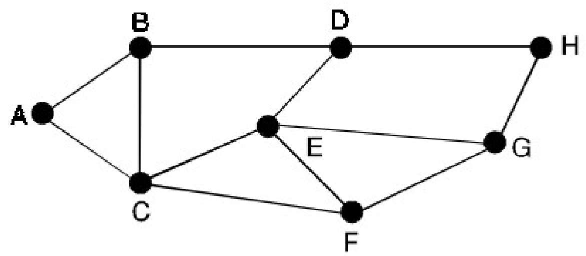
1. Nếu tồn tại một đỉnh v của G có $\deg(v) \leq 1$ thì đồ thị G không có chu trình Hamilton.
2. Nếu $\deg(v) = 2$ thì cả 2 cạnh nối với v đều phải thuộc chu trình Hamilton.
3. Mỗi đỉnh của chu trình Hamilton chỉ được nối với 2 cạnh.
4. Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, sau khi đã lấy 2 cạnh nối với một đỉnh v đặt vào chu trình Hamilton thì không thể lấy thêm cạnh nào tới v nữa, do đó có thể xóa mọi cạnh còn lại tới v.
5. Chu trình Hamilton không chứa bất kỳ chu trình con thực sự nào.

Ví dụ 5.66 Tìm một chu trình Hamilton



Giải. Theo điều kiện 2, các cạnh $ab, af, fe, lk, kj, ml, mj$ thuộc chu trình Hamilton. Tuy nhiên, các cạnh lk, kj, ml, mj tạo thành một chu trình con. Điều này mâu thuẫn với điều kiện 5 (không tồn tại chu trình con trong chu trình Hamilton). Như vậy đồ thị đã cho không có chu trình Hamilton.

Ví dụ 5.67 Tìm một chu trình Hamilton

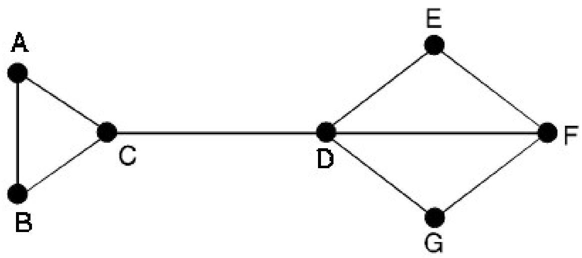


Giải. Chọn đỉnh A để bắt đầu. Tiếp theo, đi đến B hoặc C, chọn B. Tiếp tục đi đến D (không đi đến C vì nếu đi đến C sẽ có một chu trình). Xóa đỉnh B và các cạnh AB, BD, BC. Đi đến H (hoặc E). Xóa đỉnh D và cạnh DH, DE. Tiếp đến, đi đến G, xóa cạnh GH, đỉnh H. Sau đó đến F (hoặc E), xóa cạnh GF và đỉnh G. Tiếp tục đi đến F. Cuối cùng đi đến C và về A. Như vậy chu trình Hamilton là ABDHGEFCA.

Định nghĩa 5.68 Đường đi Hamilton là đường đi sơ cấp đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị (đi qua mỗi đỉnh đúng một lần).

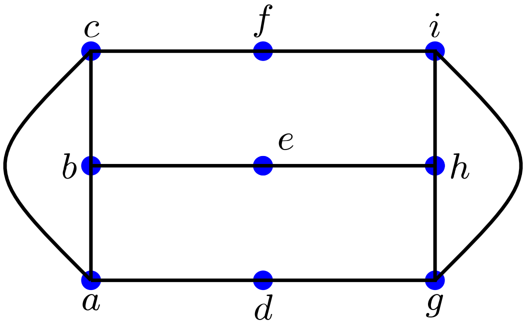
Định lý Kōnig: Mọi đồ thị có hướng đầy đủ (đồ thị vô hướng tương ứng là đầy đủ) đều có đường đi Hamilton.

Ví dụ 5.69 Tìm chu trình (đường đi) Hamilton của đồ thị



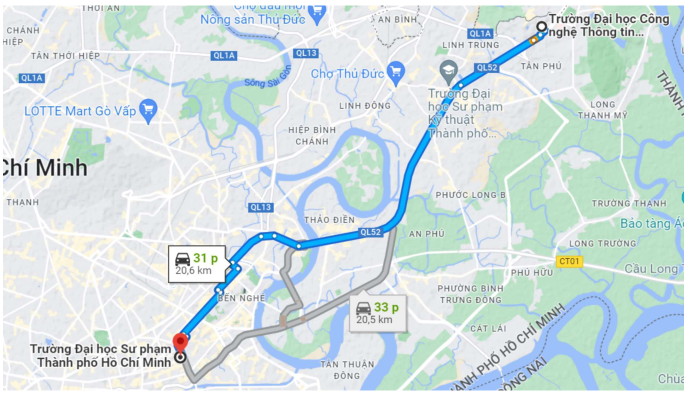
Giải. Bắt đầu từ đỉnh A. Không nên đi đến C vì bước tiếp theo không thể đến B hoặc D. Do đó, đi đến B. Tiếp theo, đi đến C và đi đến D. Ta có một phần đường đi ABCD. Tiếp theo, đi đến E (hoặc G, không đến F). Các bước tiếp theo đi đến F và G. Như vậy, ta có đường đi Hamilton ABCDEFG.

Ví dụ 5.70 Chứng minh đồ thị sau có đường đi Hamilton nhưng không có chu trình Hamilton.



5.7 Bài toán đường đi ngắn nhất

Mở đầu. Nhiều bài toán không chỉ quan tâm tồn tại hay không đường đi giữa 2 đỉnh mà còn lựa chọn đường đi ngắn nhất (với chi phí ít nhất).



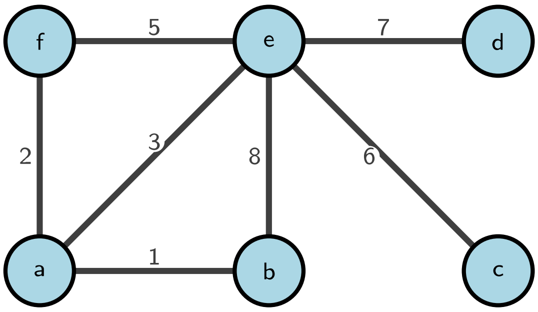
Có thể coi sơ đồ của đường đi từ A đến B trong thành phố là một đồ thị, với đỉnh là các giao lộ (A và B coi như giao lộ), cạnh là đoạn đường nối hai giao lộ. Trên mỗi cạnh của đồ thị này, ta gán một số dương, ứng với chiều dài của đoạn đường, thời gian đi đoạn đường hoặc cước phí vận chuyển trên đoạn đường đó, ...

Định nghĩa 5.71 Đồ thị có trọng số là đồ thị $G = (V, E)$ mà mỗi cạnh (hoặc cung) $e \in E$ được gán bởi một số thực $w(e)$, gọi là trọng số của cạnh (hoặc cung) e.

- Trọng số của mỗi cạnh được xét là một số dương và còn gọi là chiều dài của cạnh đó.
- Mỗi đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v, có chiều dài là $w(u, v)$, bằng tổng chiều dài các cạnh mà nó đi qua.

- Khoảng cách $d(u,v)$ giữa hai đỉnh u và v là chiều dài đường đi ngắn nhất (theo nghĩa $w(u,v)$ nhỏ nhất) trong các đường đi từ u đến v.

Ví dụ 5.72 Xét đồ thị có trọng số bên dưới



- Độ dài đường đi abec là $1+8+6=15$.
- Độ dài đường đi afec là $2+5+6=13$.
- Độ dài đường đi aec là $3+6=9$.

Bài toán. Cho đơn đồ thị liên thông, có trọng số $G=(V,E)$. Tìm khoảng cách $d(a,v)$ từ một đỉnh a cho trước đến một đỉnh v bất kỳ của G và tìm đường đi ngắn nhất từ a đến v.

Kí hiệu:

- Nhãn của đỉnh v, kí hiệu $L(v) := d(a,v)$
- S là tập các đỉnh mà đường đi ngắn nhất từ a đến chúng đã xác định.
- Nếu u,v là hai đỉnh không kề nhau thì đặt $w(u,v)=\infty$.

Thuật toán Dijkstra

Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất từ a đến v

Bước 1. Khởi tạo các nhãn

$$L(a) := 0, L(u) := \infty (u \neq a), S := \emptyset$$

Bước 2. Trong khi $v \notin S$

Bước 3. Chọn đỉnh
- Chọn đỉnh u không thuộc S sao cho $L(u)$ là nhỏ nhất.
- Đặt $S := S \cup \{u\}$

Bước 4. Sửa nhãn: Với mỗi đỉnh $z \notin S$

$$\text{nếu } L(u)+w(u,z) < L(z) \text{ thì } L(z) := L(u)+w(u,z)$$

(thêm một đỉnh có nhãn nhỏ nhất vào S và sửa nhãn các đỉnh không thuộc S)

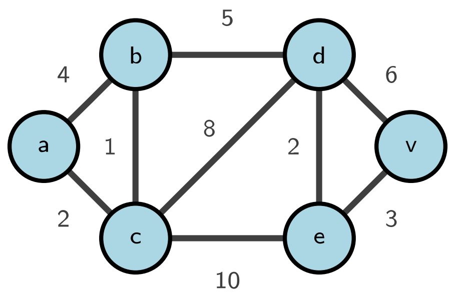
Bước 5. Quay lại Bước 2 nếu $v \notin S$.

Định lý 5.73 Thuật toán Dijkstra tìm được đường đi ngắn nhất giữa 2 đỉnh trong đơn đồ thị liên thông, có trọng số.

Nhận xét.

- Chỉ đúng cho đồ thị có trọng số không âm.
- Nhãn sau cùng của mỗi đỉnh là độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh xuất phát đến nó.

Ví dụ 5.74 Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến v



- Kí hiệu $L(x)$ là độ dài từ đỉnh a đến đỉnh x.
- Kí hiệu cặp $(L(x), u)$ trong đó u là đỉnh kề với x sao cho $L(x)$ là nhỏ nhất.
- Đánh dấu * vào đỉnh có đường đi ngắn nhất từ a.

Phân tích.

1. Khởi tạo
$$S := \emptyset; L(a) := (0, a); L(u) := (\infty, a) \text{ với } u \neq a$$
2. Bổ sung vào $S : S := S \cup \{a\} = \{a\}$. Vì $v \notin S$ nên sửa các nhãn
$L(a) + w(a, b) = 4 < L(b) \Rightarrow L(b) := L(a) + w(a, b) = 4$
$L(a) + w(a, c) = 2 < L(c) \Rightarrow L(c) := L(a) + w(a, c) = 2$
$L(a) + w(a, d) = \infty = L(d)$; tương tự $L(e) = \infty; L(v) = \infty$

Bước lặp	S	a	b	c	d	e	v
Khởi tạo	$\emptyset$	$(0, a)$*	(∞, a)	(∞, a)	(∞, a)	(∞, a)	(∞, a)
1	$\{a\}$	-	$(4, a)$	$(2, a)$*	(∞, a)	(∞, a)	(∞, a)

3. Bổ sung vào $S : S := S \cup \{c\} = \{a, c\}$. Vì $v \notin S$ nên sửa các nhãn
$L(c) + w(c, b) = 3 < L(b) = 4 \Rightarrow L(b) := L(c) + w(c, b) = 3$
$L(c) + w(c, d) = 10 < L(d) \Rightarrow L(d) := L(c) + w(c, d) = 10$
$L(c) + w(c, e) = 12 < L(e) \Rightarrow L(e) := L(c) + w(c, d) = 12$

$L(c) + w(c, v) = \infty = L(v)$.

Bước lặp	S	a	b	c	d	e	v
2	$\{a, c\}$	-	$(3, c)^*$	-	$(10, c)$	$(12, c)$	(∞, a)

4. Bổ sung vào $S : S := S \cup \{b\} = \{a, c, b\}$. Vì $v \notin S$ nên sửa các nhãn
$L(b) + w(b, d) = 8 < L(d) = 10 \Rightarrow L(d) := L(b) + w(b, d) = 8$
$L(b) + w(b, e) = \infty > L(e) \Rightarrow$ không sửa nhãn $L(e) = 12$
$L(b) + w(b, v) = \infty = L(v)$.

Bước lặp	S	a	b	c	d	e	v
3	$\{a, c, b\}$	-	-	-	$(8, b)^*$	$(12, c)$	(∞, a)

5. Bổ sung vào $S : S := S \cup \{d\} = \{a, c, b, d\}$. Vì $v \notin S$ nên sửa các nhãn
$L(d) + w(d, e) = 10 < L(e) = 12 \Rightarrow L(e) := L(d) + w(d, e) = 10$
$L(d) + w(d, v) = 14 < L(v) \Rightarrow L(v) := 14$.

Bước lặp	S	a	b	c	d	e	v
4	$\{a, c, b, d\}$	-	-	-	-	$(10, d)^*$	$(14, d)$

6. Bổ sung vào $S : S := S \cup \{e\} = \{a, c, b, d, e\}$. Vì $v \notin S$ nên sửa các nhãn
$L(e) + w(e, v) = 13 < L(v) = 14 \Rightarrow L(v) := 13$.

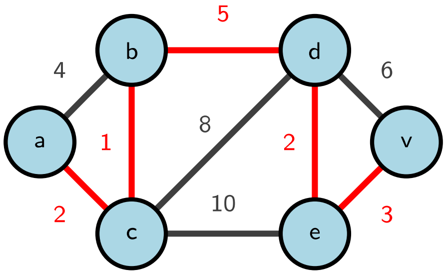
Bước lặp	S	a	b	c	d	e	v
5	$\{a, c, b, d, e\}$	-	-	-	-	-	$(13, e)^*$

7. Bổ sung vào S : $S := S \cup \{v\} = \{a, c, b, d, e, v\}$. Vì $v \in S$ nên thuật toán dừng tại đây.

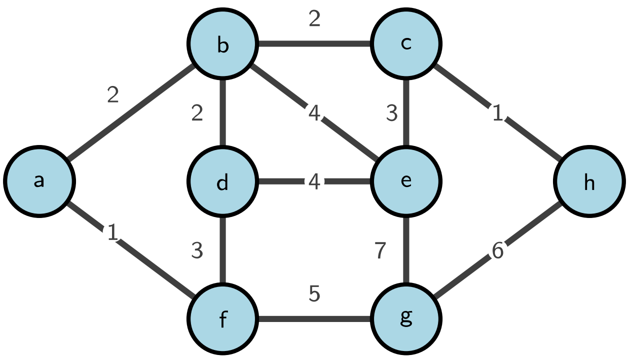
Giải.

Bước lặp	S	a	b	c	d	e	v
Khởi tạo	$\emptyset$	$(0,a)$*	(∞,a)	(∞,a)	(∞,a)	(∞,a)	(∞,a)
1	$\{a\}$	-	$(4,a)$	$(2,a)$*	(∞,a)	(∞,a)	(∞,a)
2	$\{a,c\}$	-	$(3,c)^*$	-	$(10,c)$	$(12,c)$	(∞,a)
3	$\{a,c,b\}$	-	-	-	$(8,b)^*$	$(12,c)$	(∞,a)
4	$\{a,c,b,d\}$	-	-	-	-	$(10,d)^*$	$(14,d)$
5	$\{a,c,b,d,e\}$	-	-	-	-	-	$(13,e)^*$
6	$\{a,c,b,d,e,v\}$	-	-	-	-	-	-

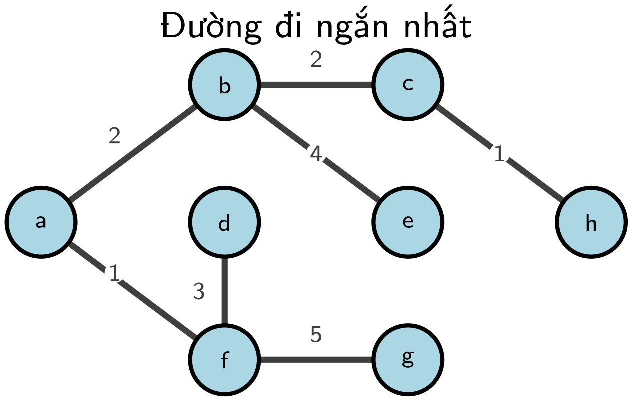
Đường đi ngắn nhất từ a đến v là $acbdev$.



Ví dụ 5.75 Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến các đỉnh còn lại.

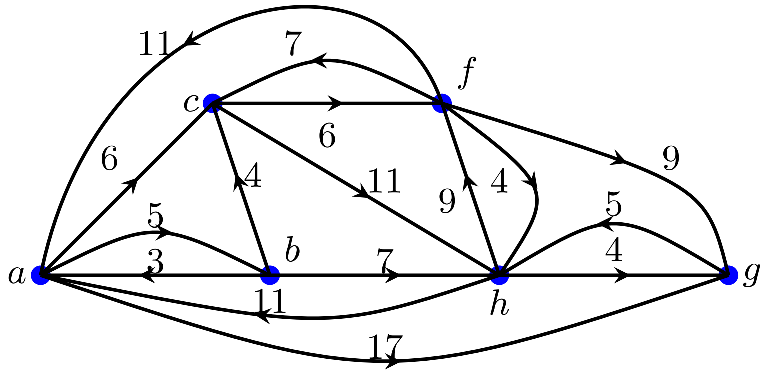


Bước lặp	a	b	c	d	e	f	g	h
Khởi tạo	**0,a***	∞,a	∞,a	∞,a	∞,a	∞,a	∞,a	∞,a
1	-	2,a	∞,a	∞,a	∞,a	**1,a***	∞,a	∞,a
2	-	**2,a***	∞,a	4,f	∞,a	-	6,f	∞,a
3	-	-	**4,b***	4,f	6,b	-	6,f	∞,a
4	-	-	-	**4,f***	6,b	-	6,f	5,c
5	-	-	-	-	6,b	-	6,f	**5,c***
6	-	-	-	-	**6,b***	-	6,f	-
7	-	-	-	-	-	-	**6,f***	-
	0,a	2,a	4,b	4,f	6,b	1,a	6,f	5,c



- a đến b là ab độ dài bằng 2
- a đến c là abc độ dài bằng 4
- a đến d là afd độ dài bằng 4
- a đến e là abe độ dài bằng 6
- a đến f là af độ dài bằng 1
- a đến g là afg độ dài bằng 6
- a đến h là abch độ dài bằng 5

Ví dụ 5.76 Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh c đến các đỉnh khác của đồ thị



Phân tích. Khởi tạo $S := \emptyset$ và nhãn $L(c) = (0, c)$ và các nhãn khác bằng (∞, c)

- Bổ sung c vào S, đặt $S := S \cup \{c\} = \{c\}$.

- Xét các đỉnh không thuộc S và sửa nhãn
$L(c) + w(c, a) = \infty = L(a)$
$L(c) + w(c, b) = \infty = L(b)$
$L(c) + w(c, f) = 6 < L(f) \Rightarrow L(f) := 6$
$L(c) + w(c, g) = \infty = L(g)$
$L(c) + w(c, h) = 11 < L(h) \Rightarrow L(h) := 11$

Bước lặp	S	c	a	b	f	g	h
Khởi tạo	$\emptyset$	0,c*	∞, c	∞, c	∞, c	∞, c	∞, c
1	$\{c\}$	-	∞, c	∞, c	$6, c$*	∞, c	$11, c$

- Bổ sung thêm đỉnh $S := S \cup \{f\} = \{c, f\}$

- Xét các đỉnh không thuộc $S = \{c, f\}$ và sửa nhãn
$L(f) + w(f, a) = 17 < L(a) \Rightarrow L(a) := 17$
$L(f) + w(f, b) = \infty = L(b)$
$L(f) + w(f, g) = 15 < L(g) \Rightarrow L(g) := 15$
$L(f) + w(f, h) = 10 < L(h) \Rightarrow L(h) := 10$

Bước lặp	S	c	a	b	f	g	h
2	$\{c, f\}$	-	$17, f$	∞, c	-	$15, f$	$10, f$*

- Bổ sung thêm đỉnh $S := S \cup \{h\} = \{c, f, h\}$

- Xét các đỉnh không thuộc $S = \{c, f, h\}$ và sửa nhãn
  $L(h) + w(h, a) = 21 > L(a) = 17 \Rightarrow$ không sửa nhãn
  $L(h) + w(h, b) = \infty = L(b)$
  $L(h) + w(h, g) = 14 < L(g) \Rightarrow L(g) := 14$

Bước lặp	S	c	a	b	f	g	h
3	$\{c, f, h\}$	-	$17, f$	∞, c	-	$14, h*$	-

- Bổ sung thêm đỉnh $S := S \cup \{g\} = \{c, f, h, g\}$
- Xét các đỉnh không thuộc $S = \{c, f, h, g\}$ và sửa nhãn
  $L(g) + w(g, a) > L(a) = 17 \Rightarrow$ không sửa nhãn
  $L(g) + w(g, b) = \infty = L(b)$

Bước lặp	S	c	a	b	f	g	h
4	$\{c, f, h, g\}$	-	$17, f*$	∞, c	-	-	-

- Bổ sung thêm đỉnh $S := S \cup \{a\} = \{c, f, h, g, a\}$
- Xét các đỉnh không thuộc $S = \{c, f, h, g, a\}$ và sửa nhãn
  $L(a) + w(a, b) = 22 < L(b) \Rightarrow L(b) := 22$

Bước lặp	S	c	a	b	f	g	h
5	$\{c, f, h, g, a\}$	-	-	$22, a*$	-	-	-

- Bổ sung thêm đỉnh $S := S \cup \{b\} = \{c, f, h, g, a, b\}$

Giải.

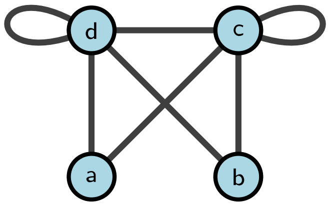
Bước lặp	S	c	a	b	f	g	h
Khởi tạo	$\emptyset$	0,c*	∞, c	∞, c	∞, c	∞, c	∞, c
1	$\{c\}$	-	∞, c	∞, c	6,c*	∞, c	$11, c$
2	$\{c, f\}$	-	$17, f$	∞, c	-	$15, f$	10,f*
3	$\{c, f, h\}$	-	$17, f$	∞, c	-	14,h*	-
4	$\{c, f, h, g\}$	-	17,f*	∞, c	-	-	-
5	$\{c, f, h, g, a\}$	-	-	22,a*	-	-	-
6	$\{c, f, h, g, a, b\}$	-	-	-	-	-	-

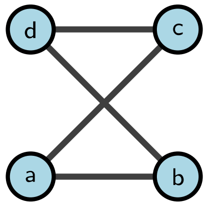
Đường đi ngắn nhất

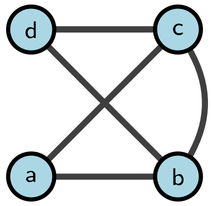
- từ c đến a là cfa độ dài bằng 17
- từ c đến b là cfab độ dài bằng 22
- từ c đến f là cf độ dài bằng 7
- từ c đến g là abe độ dài bằng 14
- từ c đến h là cfh độ dài bằng 10

BÀI TẬP

Bài 5.1 Xác định tập các đỉnh và các cạnh của các đồ thị sau

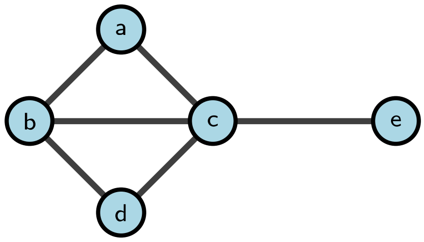




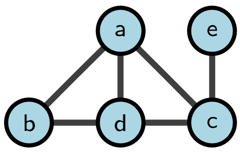


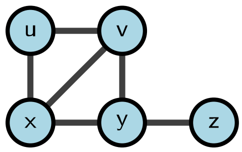
G_2 G_1 G_3

Bài 5.2 Tìm 3 đồ thị con có cùng số đỉnh và không đẳng cấu với nhau của đồ thị



Bài 5.3 Chứng minh rằng hai đồ thị sau đẳng cấu



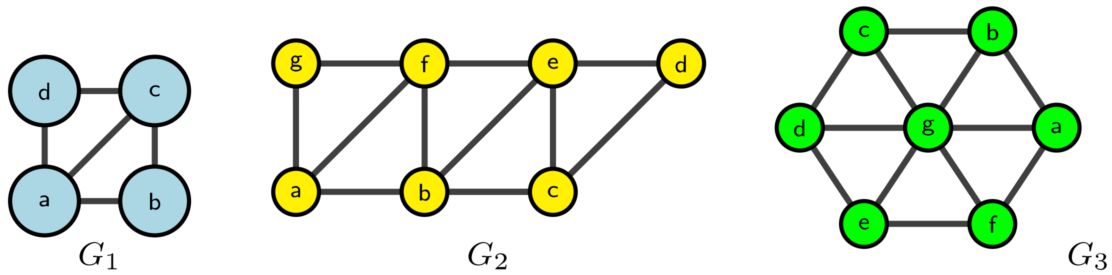


Bài 5.4 Một nước có 10 thành phố. Hãy thiết lập một mạng đường hàng không thỏa 2 điều kiện:

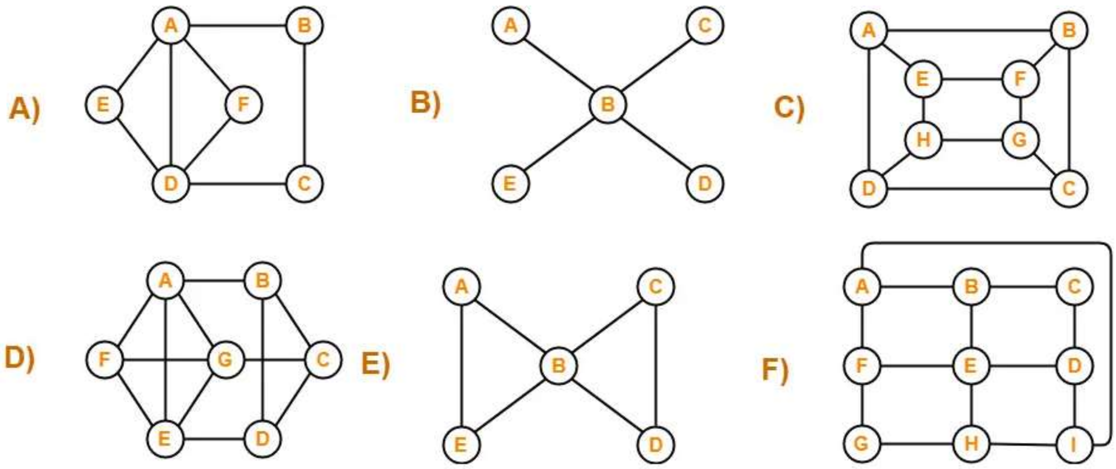
- Mỗi thành phố có đường hàng không nối trực tiếp với đúng 3 thành phố khác
- Từ mỗi thành phố có đường hàng không đi tới một thành phố tùy ý sao cho trên đường hành trình tới đích có thể đi qua các thành phố khác, mỗi thành phố đi qua đúng một lần.

Bài 5.5 Cho đồ thị liên thông G có 6 đỉnh với bậc lần lượt là 2, 2, 3, 4, 4, 5. Hãy vẽ phác họa G trong các trường hợp:
a. G là đơn đồ thị.
b. G là đa đồ thị không có vòng.
c. G là đa đồ thị không có cạnh bội.
d. G là đa đồ thị có vòng và có cạnh bội.
Bài 5.6 Cho G là một đồ thị liên thông vô hướng có 6 đỉnh với bậc lần lượt là 1, 2, 2, 3, 3, 3. Hãy vẽ phác họa đồ thị G (1 trường hợp đơn đồ thị, 1 trường hợp đa đồ thị).
Bài 5.7 Hãy vẽ các đồ thị vô hướng (nếu có) trong các trường hợp
a. Đồ thị đơn có 6 đỉnh và bậc các đỉnh là 1, 2, 3, 3, 4, 5
b. Có 6 đỉnh và bậc các đỉnh là 1, 2, 3, 3, 4, 5
c. Đồ thị đơn, có 6 đỉnh và bậc các đỉnh là 1,2, 2, 3, 3, 5
d. Đa đồ thị có 6 đỉnh và bậc các đỉnh là 2, 2, 4, 4, 6,6
Bài 5.8 Xác định số đỉnh của các đồ thị vô hướng trong các trường hợp sau
a. Tổng số bậc là 28, có 2 đỉnh bậc 5, 1 đỉnh bậc 7, các đỉnh còn lại có bậc lớn hơn 1.
b. Tổng số bậc là 54, có ít nhất 6 đỉnh bậc 7, còn lại là các đỉnh có bậc lớn hơn 1.
c. Tổng số bậc là 20, có ít nhất 2 đỉnh bậc 5, các đỉnh còn lại có bậc lẻ
Bài 5.9 Có thể tồn tại một nhóm gồm 9 người trong đó mỗi người đều chỉ quen biết đúng 5 người khác trong nhóm hay không?

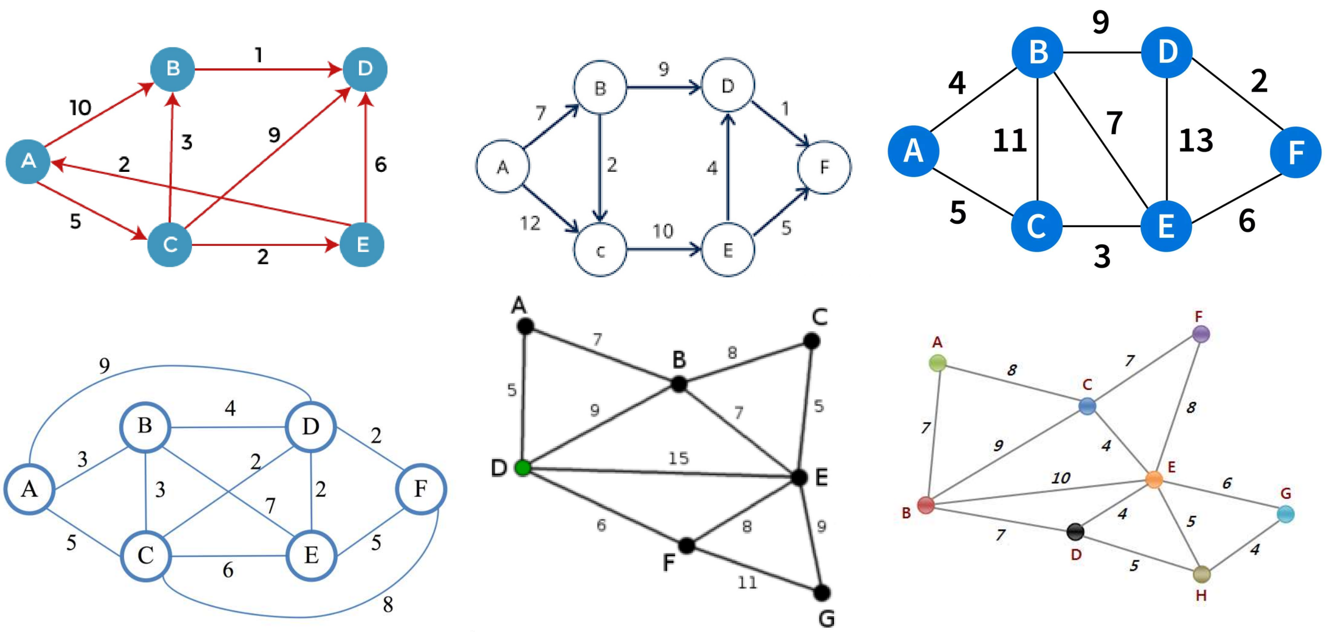
Bài 5.10 Đồ thị nào có đường đi (chu trình) Euler? Vì sao?



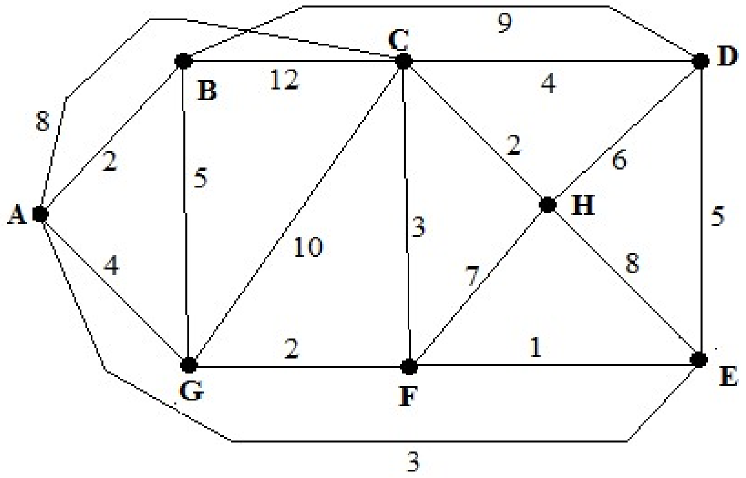
Bài 5.11 Tìm chu trình (đường đi) Hamilton/Euler của các đồ thị

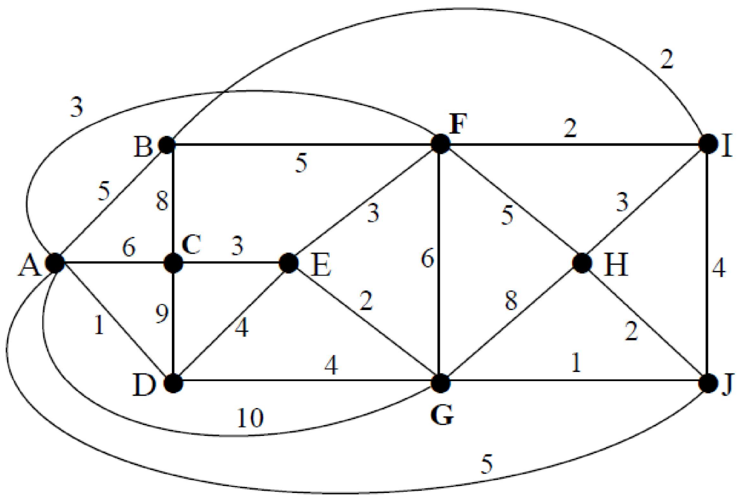


Bài 5.12 Dùng thuật toán Dijkstra để tìm đường đi ngắn nhất từ A đến các đỉnh khác của đồ thị



Bài 5.13 Cho G là một đồ thị vô hướng, có trọng số như sau:
a. Đồ thị có chu trình (đường đi) Euler không? Tại sao? Nếu có, hãy chỉ ra một chu trình (đường đi) Euler của đồ thị.
b. Hãy chỉ ra một chu trình (đường đi) Hamilton của đồ thị (nếu có).
c. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh F đến các đỉnh còn lại của đồ thị (chỉ rõ thuật toán).


A
B
C
D
E
F
G
H
12
9
4
8
2
5
10
3
2
6
4
7
8
5
2
1
3


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
3
2
5
2
5
8
6
3
3
6
5
3
4
1
9
4
2
8
2
4
1
10
5

Chương 6: Cây

Nguyễn Minh Trí

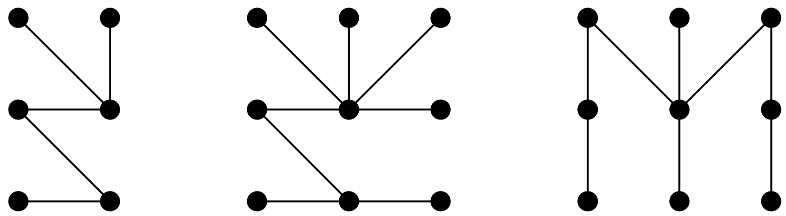
Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Ngày 28 tháng 3 năm 2024

6.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 6.1

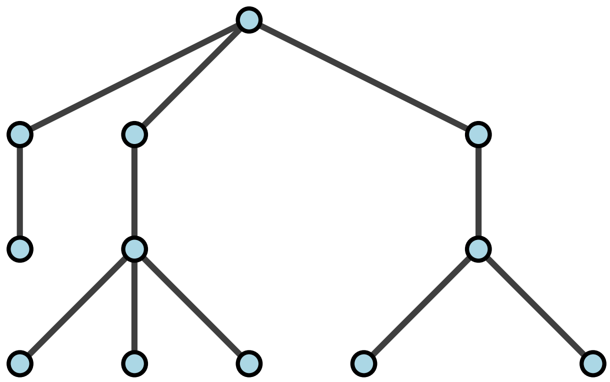
1. Cây (tree) là một đồ thị liên thông và không có chu trình.
2. Rừng là một đồ thị vô hướng và không có chu trình.



- Cây là đơn một đồ thị không có cạnh song song và không có vòng.
- Rừng có thể có nhiều thành phần liên thông
- Mỗi thành phần liên thông là một cây

Định lý 6.2 Một đồ thị vô hướng G là một cây khi và chỉ khi mọi cặp đỉnh của G luôn tồn tại một đường đi sơ cấp duy nhất.

Định nghĩa 6.3 Cây có gốc (rooted tree) là cây trong đó có một đỉnh được chọn là gốc (root) và mỗi cạnh được định hướng trùng với hướng đi của đường đi đơn duy nhất từ gốc tới mỗi đỉnh.

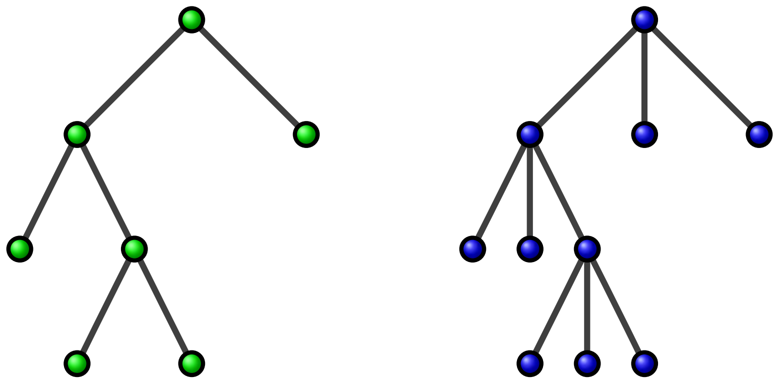


- Cùng một cây, nếu chọn gốc khác nhau thì cây có gốc thu được sẽ khác nhau.
- Trong một cây có gốc, nếu có một cạnh đi từ đỉnh x đến đỉnh y thì đỉnh x được gọi là cha (parent) của đỉnh y, y là con (child) của x.
- Hai đỉnh cùng cha được gọi là anh em (sibling), đỉnh không có con được gọi là **lá** hay đỉnh ngoài, đỉnh không là lá được gọi là **đỉnh trong**.
- Số cạnh trên đường đi từ gốc tới mỗi đỉnh được gọi là **mức** (level) của đỉnh ấy.

Định nghĩa 6.4

1. Một cây T được gọi là m-phân nếu nó là một cây có gốc và tất cả các đỉnh có không quá m con.
2. Một cây T được gọi là m-phân đầy đủ nếu nó là một cây có gốc và tất cả các đỉnh khác lá có đúng m con.
3. Cây 2-phân được gọi là cây nhị phân.

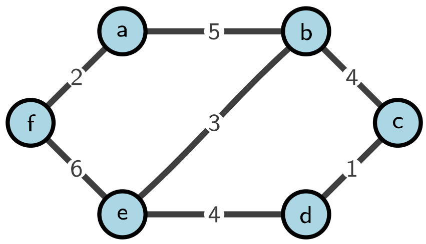
Các tính chất của cây



1. Nếu một cây có v đỉnh thì nó có $v-1$ cạnh.
2. Nếu một cây có v đỉnh $(v \geq 2)$ thì nó có ít nhất 2 đỉnh treo.
3. Cây m-phân đầy đủ với v đỉnh trong có $mv+1$ đỉnh.
4. Cho cây m-phân đầy đủ có v đỉnh, có i đỉnh trong và l lá. Khi đó
   - $i = \dfrac{v-1}{m}$
   - $l = \dfrac{(m-1)v+1}{m}$
   - $l = (m-1)i+1$
   - $v = l+i$

6.2 Cây khung

Bài toán: Giả sử ta muốn xây dựng một hệ thống đường sắt nối n thành phố sao cho giữa hai thành phố bất kỳ đều có thể thông thương với nhau. Nếu biết trước chi phí xây dựng các tuyến đường thì bài toán đặt ra là phải xây dựng những tuyến đường nào để tổng chi phí xây dựng là ít nhất.
Nếu ta coi các thành phố là đỉnh và các tuyến đường nối các thành phố là cạnh kèm theo chi phí xây dựng thì ta có một đồ thị có trọng số.



Định nghĩa 6.5 Cây khung (spanning tree) của một đơn đồ thị G là cây đồ thị con của G chứa tất cả các đỉnh của G.
Một đồ thị có nhiều cây khung.
Định lý 6.6 Một đơn đồ thị là liên thông khi và chỉ khi nó có cây khung.
Định nghĩa 6.7 Cây khung nhỏ nhất (minimun spanning tree) của một đồ thị liên thông, có trọng số là một cây khung có tổng trọng số trên các cạnh của nó là nhỏ nhất.

Thuật toán Prim (tìm cây khung nhỏ nhất)

- Bắt đầu bằng việc chọn một đỉnh bất kỳ, đặt nó vào cây khung T.
- Nếu cây khung T có ít hơn n đỉnh thì ghép vào T cạnh có trọng số nhỏ nhất liên thuộc với một đỉnh của T mà không tạo ra chu trình trong T.

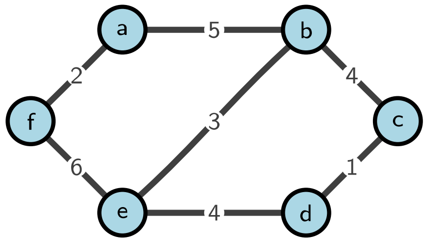
Chú ý.

- Thuật toán dừng lại khi T có đủ n đỉnh hay $(n-1)$ cạnh.
- Có nhiều hơn một cây khung nhỏ nhất ứng với một đồ thị liên thông có trọng số.

Các bước của thuật toán Prim

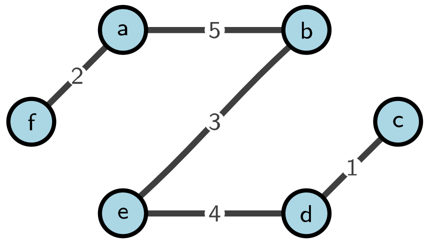
- Khởi tạo
  - Tập đỉnh $V_T := \{s\}$, tập cạnh $E_T := \emptyset$
  - $d_s = 0; v \notin V_T, d_v = w(s,v)$ nếu v kề $s, d_v = \infty$ nếu v không kề với s.
- Tìm cạnh
  - Tìm u sao cho $d_u = \min\{d_v \mid v \notin V_T\}$
  - $V_T := V_T \cup \{u\}$
  - $E_T := E_T \cup \{e\}$ với e là cạnh nối u với một đỉnh của T có trọng số d_u
  - Nếu $V_T = V$ thì dừng
- Cập nhật nhãn
$$d_v = \min\{d_v, w(u,v)\}$$
  với $v \notin V_T$.

Ví dụ 6.8 Tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị sau



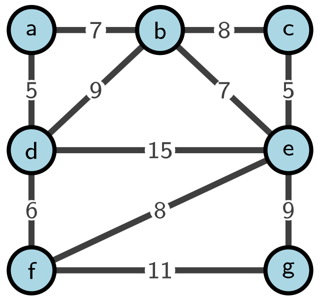
V_T	E_T	a	b	c	d	e	f
a	$\emptyset$	0	5a	∞	∞	∞	2a
f	af	-	5a	∞	∞	6f	-
b	ab	-	-	4b	∞	3b	-
e	be	-	-	4b	4e	-	-
d	ed	-	-	1d	-	-	-
c	dc	-	-	-	-	-	-

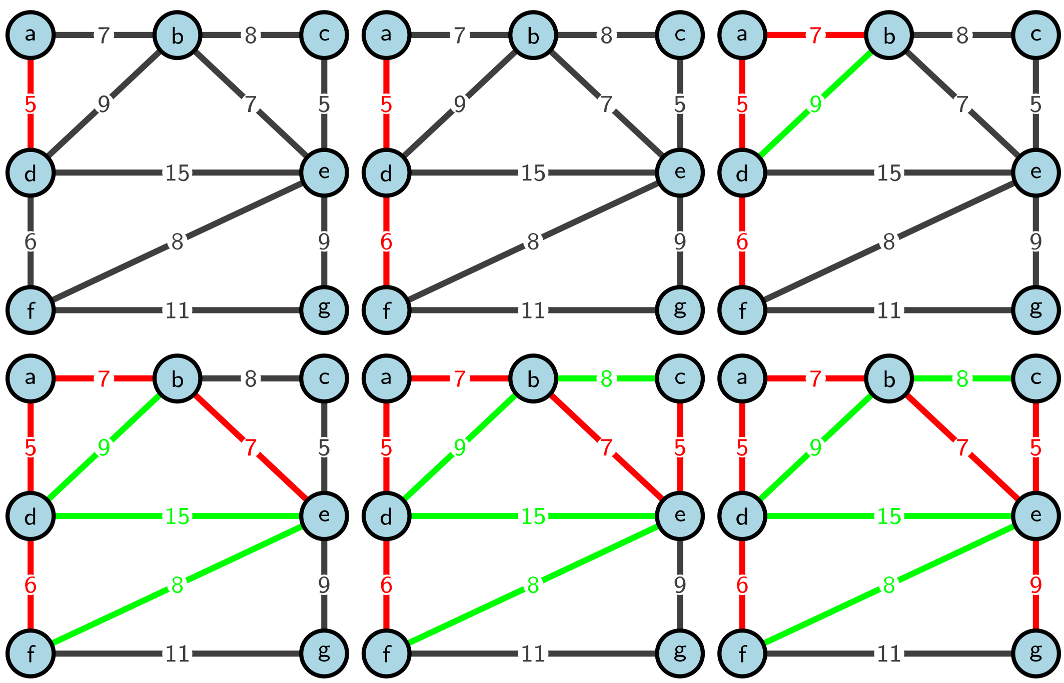
Cây khung nhỏ nhất T của G



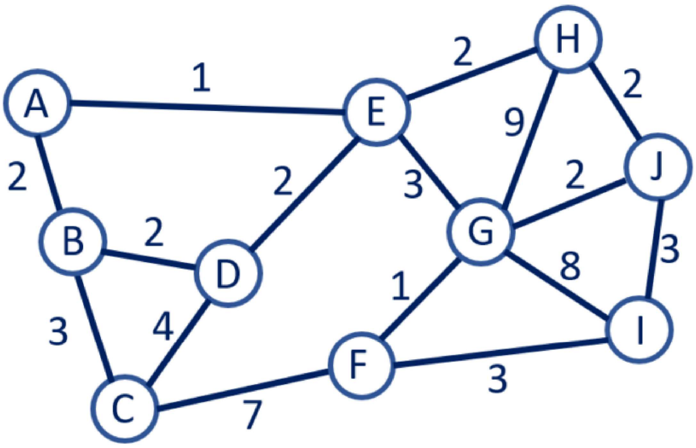
trọng số của T bằng 15.

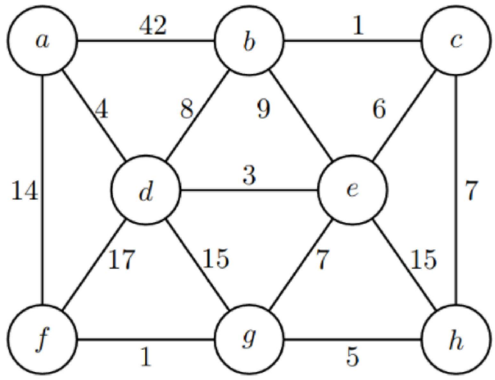
Ví dụ 6.9 Tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị





Ví dụ 6.10 Tìm cây khung nhỏ nhất

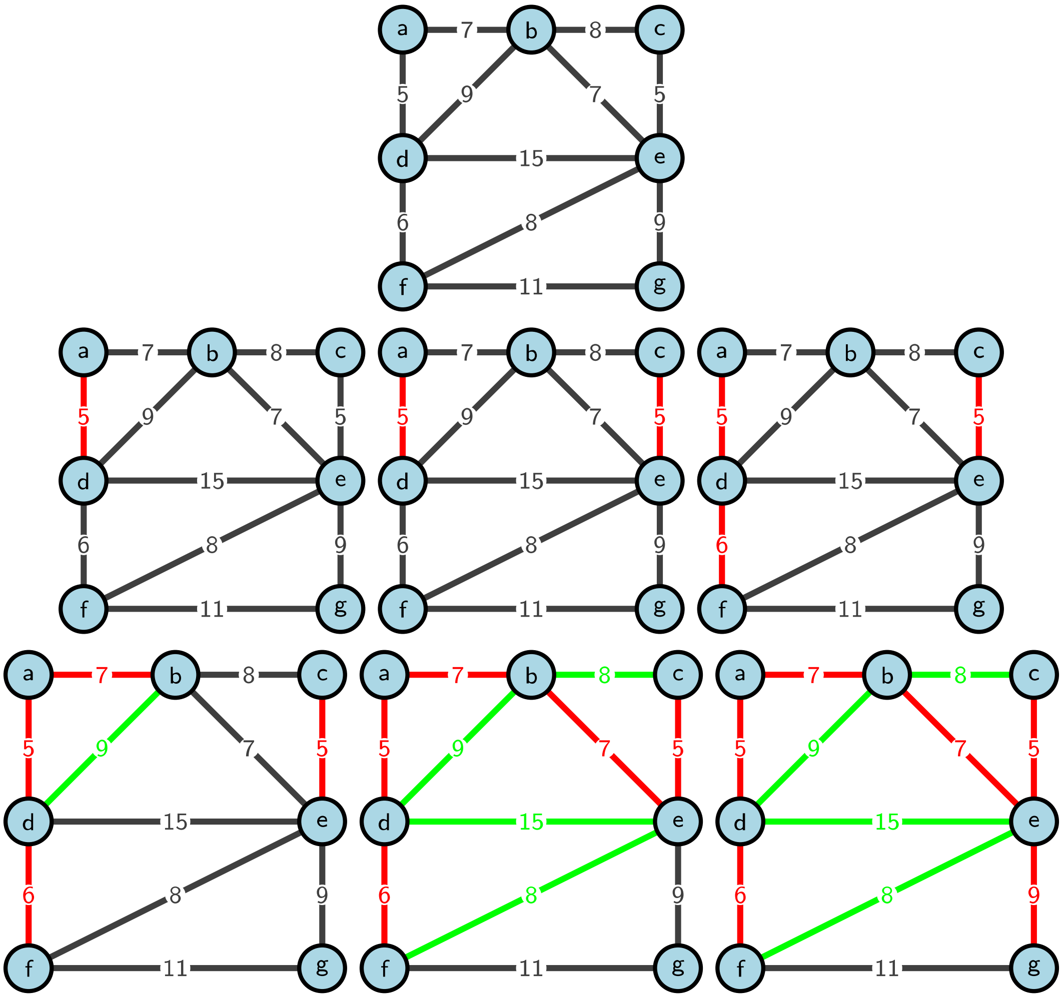




Thuật toán Kruskal

- Bắt đầu bằng việc chọn một cạnh có trọng số nhỏ nhất, đặt nó vào cây khung T.
- Nếu cây khung T có ít hơn $(n-1)$ cạnh thì ghép vào T cạnh có trọng số nhỏ nhất và không tạo ra chu trình trong T.

Ví dụ 6.11 Tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị

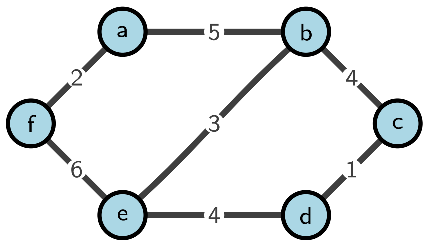


1. Sắp xếp các cạnh của G theo thứ tự có trọng số không giảm

$$w(e_1) \leq w(e_2) \ldots\ldots \leq w(e_n)$$

   $E_T = \{e_1\}$
2. Tìm $k = \min\{j \mid E_T \cup \{e_j\}$ không có chu trình$\}$ và $E_T := E_T \cup \{e_k\}$
3. $i := i + 1$
   Nếu $i = n - 1$ thì dừng.
   Nếu $i < n - 1$ thì quay lại bước 2.

Ví dụ 6.12 Tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị bằng thuật toán Kruskal



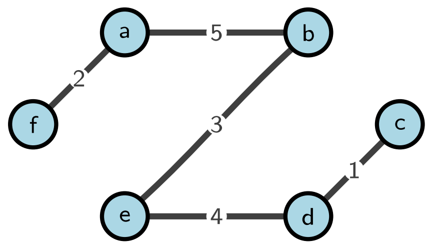
Sắp xếp các cạnh của đồ thị theo thứ tự có trọng số không giảm

$$cd, af, be, de, bc, ab, ef$$

E_T	Trọng số
cd	1
af	2
be	3
bc	4
ab	5

E_T	Trọng số
cd	1
af	2
be	3
de	4
ab	5

Cây khung nhỏ nhất T của đồ thị là

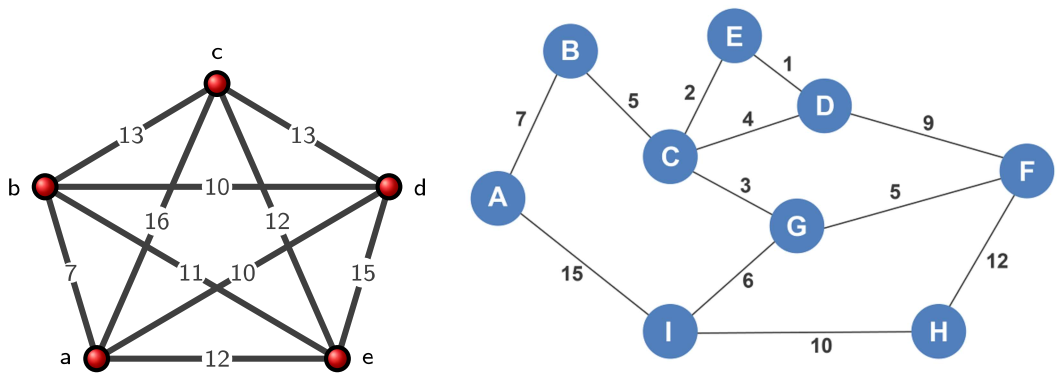


Trọng số của T là 15.

So sánh Prim và Kruskal

- Prim chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất liên thuộc với một đỉnh đã thuộc cây và không tạo ra chu trình
- Kruskal chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất miễn là không tạo ra chu trình
- Thuật toán Prim hiệu quả hơn đối với các đồ thị dày (số cạnh nhiều)

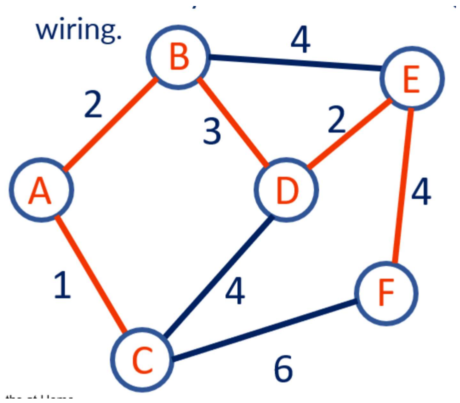
Ví dụ 6.13 Tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị bằng 2 thuật toán khác nhau



Với bài toán tìm cây khung nhỏ nhất, chúng ta có thể áp dụng để giải quyết và tối ưu rất nhiều bài toán trong thực tế.
Ví dụ với bài toán lắp đặt hệ thống mạng cho 1 trường học:

- Tất cả các phòng cần có kết nối internet.
- Biết trước khoảng cách giữa 2 phòng bất kỳ
- Bài toán: Làm sao lắp đặt hệ thống mạng cho trường học này với chi phí tối thiểu (giả sử chi phí tỉ lệ thuận với khoảng cách).

Ví dụ: Các nút bên dưới đại diện cho các loại bóng đèn khác nhau và các cạnh đại diện cho chiều dài của hệ thống dây điện được sử dụng để kết nối chúng tính bằng mét. Tìm cách nối các bóng đèn sao cho sử dụng ít dây điện nhất.



6.3 Phép duyệt cây nhị phân

Định nghĩa 6.14 Duyệt cây là liệt kê tất cả các đỉnh của cây theo một thứ tự xác định, mỗi đỉnh một lần.
Định nghĩa 6.15 Duyệt tiền tự (prefix) là phép duyệt theo thứ tự như sau

1. Duyệt nút gốc
2. Duyệt tiền tự con trái
3. Duyệt tiền tự con phải

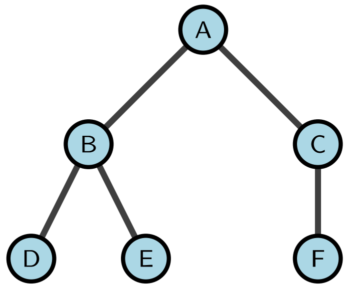
Định nghĩa 6.16 Duyệt trung tự (infix) là phép duyệt theo thứ tự như sau:

1. Duyệt trung tự con trái
2. Duyệt nút gốc
3. Duyệt trung tự con phải

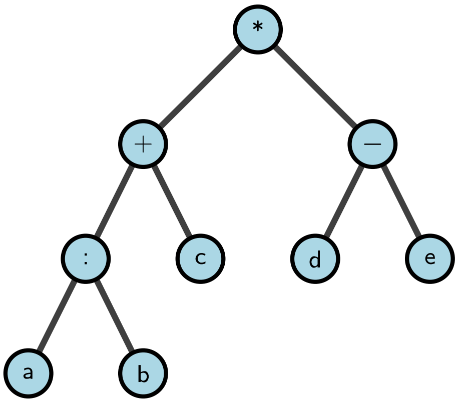
Định nghĩa 6.17 Duyệt hậu tự (postfix) là phép duyệt theo thứ tự như sau:

1. Duyệt hậu tự con trái
2. Duyệt hậu tự con phải
3. Duyệt nút gốc

- Duyệt tiền tự A B D E C F
- Duyệt trung tự D B E A C F
- Duyệt hậu tự D E B F C A



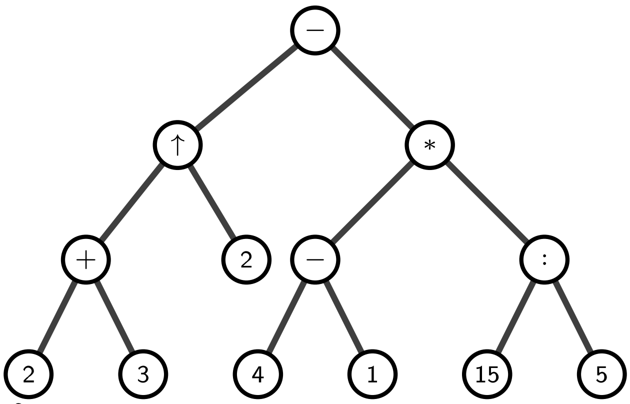
Định nghĩa 6.18 Cây biểu thức số học là cây nhị phân mà các toán hạng được lưu trữ ở lá, các phép toán được lưu ở mỗi đỉnh trong, mỗi nhánh là một biểu thức con.



$$(a : b + c) * (d - e)$$

Ký hiệu các phép toán số học: + (cộng), - (trừ), * (nhân), : (chia), ↑ (lũy thừa)

Duyệt cây biểu thức số học



- Biểu thức tiền tố (duyệt tiền tự)

$$- \uparrow + 2\,3\,2 * - 4\,1 : 15\,5$$

- Biểu thức trung tố (duyệt trung tố)

$$2 + 3 \uparrow 2 - 4 - 1 * 15 : 5$$

- Biểu thức hậu tố (duyệt hậu tố)

$$2\,3 + 2 \uparrow 4\,1 - 15\,5 : * -$$

Biểu thức được duyệt ở dạng hậu tố còn được gọi là ký pháp nghịch đảo Ba Lan (Reverse Polish Notation - RPN).

- Biểu thức ở dạng hậu tố được sử dụng để tính giá trị biểu thức trên máy tính
- Tính từ trái qua phải
- Không sử dụng dấu ngoặc
- Dùng một stack (ngăn) để lưu trữ kết quả trung gian

Thuật toán tính giá trị biểu thức RPN

- Đọc một ký hiệu
- Nếu ký hiệu là số thì đưa vào stack
- Ngược lại, nếu ký hiệu là toán tử thì lấy 2 số (toán hạng) từ trong stack ra → tính giá trị theo toán tử của hai toán hạng → đưa kết quả vào Stack.

Ví dụ 6.19 Tính giá trị biểu thức

$$(2+3) \uparrow 2 - (4-1) * (15:5)$$

- Nhập biểu thức dưới dạng ký pháp RPN

$$2\ 3\ +\ 2\ \uparrow\ 4\ 1\ -\ 15\ 5\ :\ *\ -$$

- Quá trình lưu trữ của cấu trúc stack như sau

16
-
9
$*$
3
:
5
15
3
-
1
4
25
↑
2
5
+
3
2

Ví dụ 6.20 Tính giá trị biểu thức tiền tố (duyệt tiền tự) và biểu diễn cây nhị phân tương ứng

$$+\ -\ *\ 2\ 3\ 5\ /\ \uparrow\ 2\ 3\ 4$$

Ví dụ 6.21 a. Tìm biểu thức hậu tố (duyệt hậu tự) và biểu diễn cây nhị phân tương ứng

$$((x+y)\uparrow 2)+((x-4)/3)$$

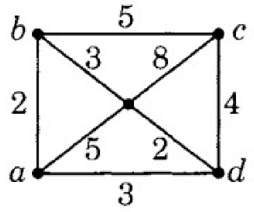
b. Tính giá trị của biểu thức hậu tố

$$7\ 2\ 3\ *\ -\ 4\ \uparrow\ 9\ 3\ +$$

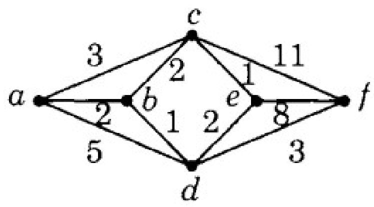
BÀI TẬP

Bài 6.1 Dùng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất của các đồ thị

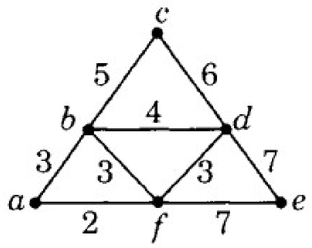
1.



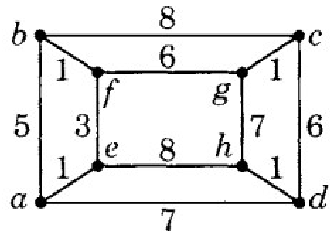
2.



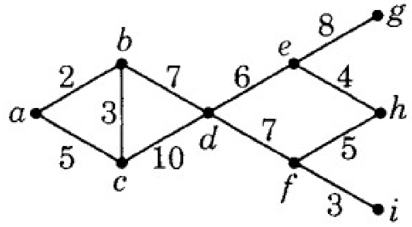
3.



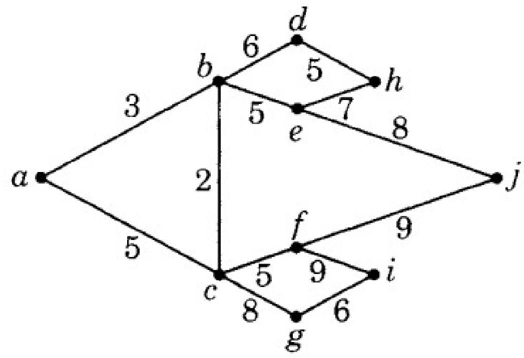
4.



5.



6.



Bài 6.2 Dùng thuật toán Kruskal tìm cây khung nhỏ nhất của các đồ thị của bài 6.1.

Bài 6.3 a. Biểu diễn biểu thức $((x+2)\uparrow 3)+(y-(3+x))-5$ bằng cây nhị phân

b. Viết biểu thức tiền tố

c. Viết biểu thức trung tố

d. Viết biểu thức hậu tố

Bài 6.4 Vẽ cây nhị phân tương ứng với các biểu thức số học được viết dưới dạng tiền tố. Sau đó, viết lại chúng dưới dạng trung tố

a. + * + - 5 3 2 1 4

b. ↑ + 2 3 - 5 1

c. * / 9 3 + * 2 4 -7 6

Bài 6.5 Tính giá trị của các biểu thức tiền tố

a. - * 2 / 8 4 3

b. ↑ - * 3 3 * 4 2 5

c. + - ↑ 3 2 ↑ 2 3 / 6 - 4 2

Bài 6.6 Tính giá trị của các biểu thức hậu tố

a. 5 2 1 - - 3 1 4 + + *

b. 9 3 / 5 + 7 2 + - *

c. 3 2 * 2 ↑ 5 3 - 8 4 / * -

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HỒ CHÍ MINH
ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN - LÝ

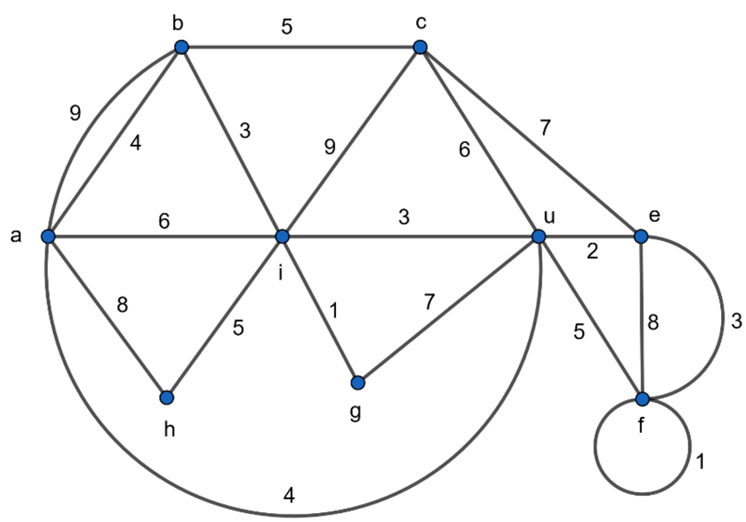
ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN CTRR
Học kỳ I, năm 2016 – 2017
Ngày thi: /   /2016
Thời gian làm bài: 90 phút
Không được sử dụng tài liệu

Câu 1. *(4 điểm)* Cho hàm Boole: $f(x,y,z,t) = yzt + xy\overline{t} + x\overline{z}t + \overline{y}\,\overline{z}(\overline{x}t + x\overline{t}) + \overline{x}\,\overline{y}zt$

a) Tìm dạng nối rời chính tắc của hàm *f*.
b) Tìm các công thức đa thức tối tiểu của hàm *f*.
c) Hãy vẽ sơ đồ mạch cho một công thức đa thức tối tiểu của hàm *f* vừa tìm được.

Câu 2. *(1 điểm)* Cho G là một đồ thị liên thông vô hướng có 6 đỉnh với bậc lần lượt là 1, 2, 2, 3, 3, 3. Hãy vẽ phác họa đồ thị G (1 trường hợp đơn đồ thị, 1 trường hợp đa đồ thị)

Câu 3. *(5 điểm)* Cho đồ thị liên thông có trọng số G như sau:



G

a) Hỏi G có chu trình (đường đi) Euler không? Tại sao? Nếu có, hãy chỉ ra một chu trình (đường đi) Euler của G.
b) Hãy chỉ ra một chu trình (đường đi) Hamilton của G nếu có.
c) Dùng thuật toán Dijktra (thể hiện các bước biến đổi trên 1 bảng) để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới tất cả các đỉnh còn lại trong G và chiều dài các đường đi đó.
d) Tìm cây khung nhỏ nhất T của G (chỉ rõ thuật toán) và tính trọng số của T.

---------------HẾT---------------

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN – LÝ

ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN CTRR

Học kỳ I, năm học 2017-2018
Ngày thi: /01/2018
Thời gian làm bài: 90 phút
Không được sử dụng tài liệu

Câu 1. *(4.0 điểm)* Cho hàm Boole $f(x, y, z, t)$, biết

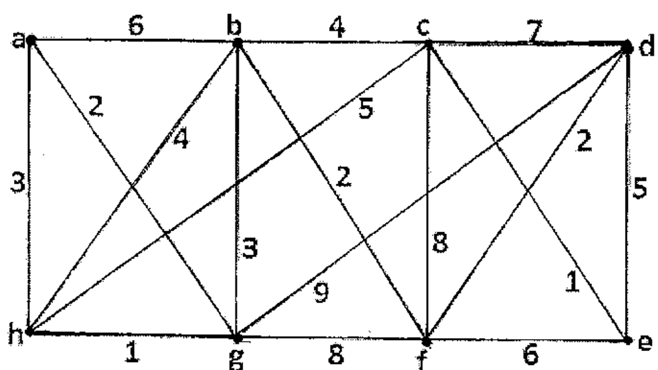
$$f^{-1}(0) = \{0010, 1011, 1111, 0001, 0000\}.$$

a) Tìm dạng nối rời chính tắc của hàm f.
b) Tìm các công thức đa thức tối tiểu của hàm f.
c) Hãy vẽ sơ đồ mạch cho một công thức đa thức tối tiểu của hàm f vừa tìm được.

Câu 2. *(2.0 điểm)* Cho ví dụ về:

a) Đồ thị có chu trình vừa là chu trình Euler vừa là chu trình Hamilton (chỉ rõ chu trình).
b) Đồ thị có chu trình Euler và chu trình Hamilton nhưng hai chu trình này không trùng nhau (chỉ rõ các chu trình).
c) Đồ thị có chu trình Euler (chỉ rõ chu trình) nhưng không có chu trình Hamilton.
d) Đồ thị có chu trình Hamilton (chỉ rõ chu trình) nhưng không có chu trình Euler.

Câu 3. *(4.0 điểm)* Cho G là đơn đồ thị liên thông có trọng số như sau:



G

a) Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a tới tất cả các đỉnh còn lại trong G và chiều dài các đường đi đó (chỉ rõ thuật toán).
b) Tìm cây khung nhỏ nhất T của G (chỉ rõ thuật toán) và tính trọng số của T.

Hết

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN – LÝ

ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN CTRR
Học kỳ II, năm học 2017-2018
Ngày thi: / /2018
Thời gian làm bài: **90** phút
Không được sử dụng tài liệu

Câu 1. *(4 điểm)* Cho hàm Boole 4 biến $f(x,y,z,t)$, biết

$$f^{-1}(0) = \{0110, 0011, 1001, 0001, 1100, 0111\}.$$

a) Hãy tìm dạng nối rời chính tắc của hàm f.

b) Hãy tìm các công thức đa thức tối tiểu của hàm f.

c) Hãy vẽ sơ đồ mạch cho một công thức đa thức tối tiểu của hàm f vừa tìm được.

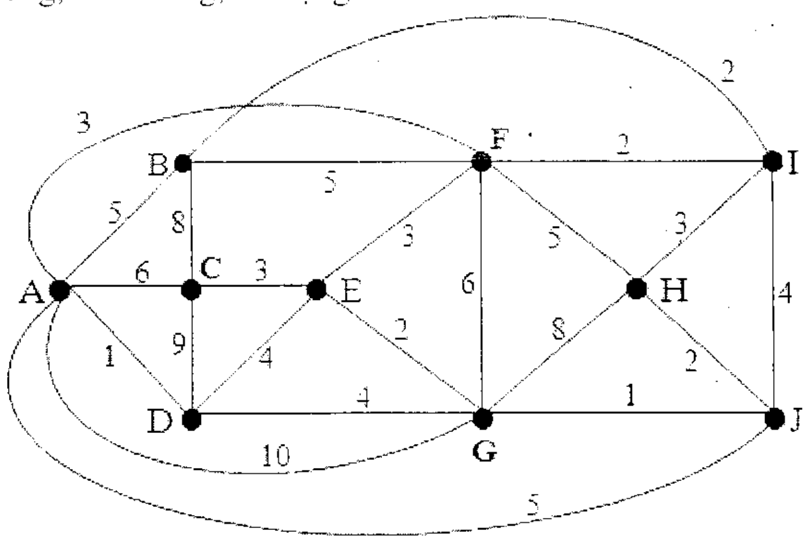
Câu 2. *(1 điểm)*

a) Có một nhóm gồm 14 game thủ thi đấu vòng tròn một lượt cùng một game. Biết rằng khi 2 game thủ bất kỳ thi đấu với nhau thì không có kết quả hòa. Hỏi sau khi có kết quả thi đấu của nhóm, có trường hợp bất kỳ game thủ nào cũng thắng đúng 7 game thủ khác trong nhóm không? Tại sao?

b) Tìm số đỉnh của đồ thị, biết đồ thị có 25 cạnh, có 4 đỉnh bậc 3; 2 đỉnh bậc 5; còn lại là các đỉnh bậc 2, bậc 7.

Câu 3. *(5 điểm)*

Cho đồ thị vô hướng, liên thông, có trọng số như sau:



a) Đồ thị có chu trình (đường đi) Euler không? Tại sao? Nếu có hãy chỉ ra một chu trình (đường đi) Euler của đồ thị.

b) Hãy chỉ ra một chu trình (đường đi) Hamilton của đồ thị nếu có.

c) Hãy tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh **C** đến các đỉnh còn lại của đồ thị (chỉ rõ thuật toán).

d) Hãy tìm cây khung có trọng số lớn nhất T của đồ thị (chỉ rõ thuật toán) và tính trọng số của T.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm