

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## 1. Nemeuklideszi geometria

Az általános iskolában megismert euklideszi geometriában egy egyenessel egy külső ponton át pontosan egy párhuzamos húzható. Bolyai és Lobacsevszkij a XIX. század elején egymástól függetlenül megalkotta az első nemeuklideszi geometriát, amelyben egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át több párhuzamos is húzható.

Feladata egy matematika tankönyv Geometria c. részének a nemeuklideszi geometriát bemutató fejezetének elkészítése az alábbi leírásnak és a mintának megfelelően. Ehhez használja fel a *nem.txt* UTF-8 kódolású szöveges állományt, valamint a *bolyai.jpg* és a *harom.gif* nevű képeket!

1. Hozza létre szövegszerkesztő program segítségével *nemeukl* nevű dokumentumot a program alapértelmezett formátumában a források felhasználásával! A dokumentumban ne legyenek felesleges szóközök és üres bekezdések!
2. A dokumentum legyen álló tájolású és 17,6×25 cm-es lapméretű! A bal, a jobb, az alsó és a felső margót állítsa 1,5 cm-re!
3. A dokumentum minden karaktere legyen Times New Roman (Nimbus Roman) betűtípusú! Ahol a feladat nem kér mást, a szöveg betűmérete 11 pontos, a bekezdések sorköze egyszeres, a bekezdések előtt 0 pontos, a bekezdések után 6 pontos térköz legyen!
4. A fejezet címe legyen 16 pontos betűméretű, félkövér és dőlt betűstílusú, valamint kövesse 18 pontos térköz! A négy alcím legyen 13 pontos betűméretű, félkövér betűstílusú, előtte 18 pontos, utána 12 pontos térközzel!
5. A főcímet követő bevezető szöveg bal behúzása legyen 2 cm-es, betűstílusa pedig dőlt! Az egyes bekezdések igazítását a mintának megfelelően állítsa be!
6. A mintának megfelelően, a bevezető utáni szövegben az egyes matematikusok vezetéknevének első előfordulását („*Eukleidész*”, „*Bolyai*”, „*Lobacsevszkij*”, „*Saccheri*”, „*Lambert*”, „*Riemann*”, „*Klein*”) állítsa kiskapitális betűstílusúra!
7. A mintának megfelelően alkalmazzon az első alcím alatti részben két bekezdésre felsorolást, a harmadik alcím alatti részben pedig többszintű számozást! A számozott lista elemei között ne jelenjen meg térköz!
8. A nyers szövegben néhány esetben az „*alpha*” szó szerepel az  $\alpha$  szimbólum helyett, továbbá a „*PI*” szó a  $\Pi$ , és a „*pi*” szó a  $\pi$  görög betű helyett. Végezze el a megfelelő cseréket!
9. Szúrja be a mintának megfelelő helyre az oldalarányok megtartásával 4 cm szélesre átméretezve a *bolyai.jpg* képet! A képet igazítsa a bal margóhoz, a képaláírás szövege pedig a mintának megfelelő igazítással, tördeléssel és betűstílussal a „*Bolyai János (1802-1860)*” szöveg legyen!
10. Az utolsó bekezdés utolsó szavához illessze be lábjegyzetként a „*Készítette Hack Frigyes*” szöveget!
11. Szúrja be az utolsó bekezdés után középre igazítva a *harom.gif* képet az oldalarányok megtartásával 12 cm szélesre átméretezve!

*A feladat folytatása a következő oldalon található.*

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

12. Alakítsa ki az élőfejet és az élőlábat a mintának megfelelő módon a páratlan oldalakon jobbra, a páros oldalakon balra zártan! Az élőfej szövege a „Geometria” szó legyen dőlt betűstílussal, az élőlábban pedig az oldalszám szerepeljen 187-tel kezdődően! Az élőfejet vékony fekete vonal válassza el a szövegtörzstől!
13. Alkalmazzon a teljes dokumentumban automatikus elválasztást! Gondoskodjék továbbá arról, hogy a második és harmadik oldal a mintának megfelelő helyen kezdődjön!
14. Hozza létre a szövegszerkesztő program eszközeinek segítségével az első oldal alján szereplő ábrát a mintának és az alábbi leírásnak megfelelően!
- Az ábrán szereplő valamennyi alakzat fekete színű, és a vízszintes egyenes kivételével 1 pontos vonalvastagságú.
  - A vízszintes egyenes 10 cm hosszú és 2-3 pont vonalvastagságú. A rá merőleges függőleges egyenes 6 cm hosszúságú, szaggatott vonalstílusú.
  - Az A-val és B-vel jelölt pontok 0,3 cm átmérőjű, szegély nélküli kitöltött körök, távolságuk 4 és 5 cm között van.
  - A három további egyenes mindegyike átmegy az A-val jelölt ponton, kettő metszi a vízszintes egyenest, egynek pedig nincs vele közös pontja.
  - A szögeket szaggatott körívek jelzik, a felső körív nyílban végződik. Az ívekhez tartozó körök átmérője 2 és 3 cm között van.
  - Az ábrán lévő feliratok valamennyien egy-egy szövegdobozban vannak és félkövér betűstílusúak.

30 pont

Minta:

*Geometria*

**Nemeuklideszi geometria**

*A geometriai rendszerek – geometriák – az alapításban megfogalmazott premisszákban különböznek. Az euklideszi geometria axiómarendszerétől elterelő alapokra épített rendszereket közös néven nemeuklideszi geometriáknak nevezzük. Elemen csak az elsőként felfedezett Bolyai–Lobacssevics-féle geometriát illetik az elnevezéssel, de később újabb geometriákat is találunk.*

**Az euklideszi párhuzamosság**

EUKLEIDÉS az Elenek I. könyvében definiálja az egyenesek párhuzamosságát.

- 23. definíció: Két egyenes párhuzamos, ha azok egy síkban fekszenek és mindkét irányban meghosszabbítva nem metszik egymást.

Az évezredek problémát okozó 5. posztulátum pedig kimondja, hogy:

- Ha egy egyenes úgy metsz két egyenest, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek összege kisebb két derékszögnél, akkor e két egyenes a metszőnek ezen oldalán meghosszabbítva metszi egymást.

**A nemeuklideszi párhuzamosság**

BOLYAI és LOBACSEVICSZI a párhuzamost egy külső pont körül forgatott szelők hatánelyze-teként definiálják. Az AM egyenesen kívül fekvő B pont körül forgatott egyenesek közül az a BC párhuzamos az AM-nel, amelyik elpattan tőle. Más fogalmazásban a forgatott egyenesek közül a párhuzamos az első nem metsző. Bolyai ezt a párhuzamost aszimptotikus párhuzamosnak, vagy egyszerűbben aszimptotának nevezte.

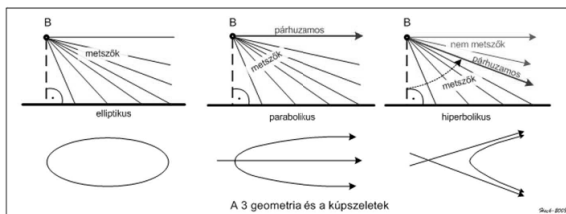
187


## Minta a Nemeuklideszi geometria feladathoz:

### Geometria

#### A három geometria összevetése

Felix KLEINTÖL (1849–1925) származik a háromféle geometria és a kúpszeletek nomenklatúrájának összekapcsolása, mely ez utóbbiak ideális pontjainak száma és az egyeneshez külső pontból húzható párhuzamosok száma közötti analógiára utal. Ennek nyomán használjuk ezeket a jelzőket az Eukleidész (parabolikus), a Bolyai-Lobacsevszkij (hiperbolikus) és a Riemann (elliptikus) nevéhez kapcsolt geometriák megkülönböztetésére<sup>1</sup>.



<sup>1</sup> Készítette Hack Frigyes

### Geometria



Bolyai János  
(1802-1860)

Mivel a forgatott egyenes egyre távolabb metszi az AM egyenest, kísérlettel nem lehet eldönteni, hogy mikor, az  $\alpha$  szög milyen értékénél következik be ez az elpattanás. A két kutató ezt a szöveget a párhuzamosság szögének nevezte. Mindketten eljutottak annak felismeréséig, hogy a párhuzamossági szög a B pont és az AM egyenes közötti távolsággal összefüggésben van:  $\Pi(\alpha)$ .

Kettejük munkája között csupán annyi a lényeges különbség, hogy Lobacsevszkij a definíciót követően szétválasztja a két lehetséges esetet és az euklideszitől eltérő hiperbolikus geometria tételeit, míg Bolyai a két esetet együtt kezelve a kétféle geometria közös részét, az abszolút geometria tételeit dolgozta ki. Az az eredmény is közismert, hogy a háromszögek szögeinek összege is aszerint egyenlő vagy kisebb két derékszögnél, hogy a síkja euklideszi vagy hiperbolikus.

A hiperbolikus elnevezést a párhuzamos egyenes és a hiperbola rokonítása magyarázza. E geometriában a párhuzamosok közötti távolság csökken, aszimptotikusan közelednek egymáshoz. Ugyancsak fontos különbséget jelent, hogy a balra forgatott egyenes által meghatározott párhuzamos nem azonos a jobbra forgatottal.

#### Egy harmadik párhuzamosság

Az 5. posztulátum elhagyásával kapott maradék axiómákból következik (bizonyítható), hogy a párhuzamosság szöge nem lehet derékszögnél nagyobb, s ennek következménye, hogy a háromszögek szögeinek összege sem lehet két derékszögnél nagyobb. A paralellákkal foglalkozó Gerolamo SACCHERI (1667-1733) és Johann Heinrich LAMBERT (1728-1777) eljutottak egy olyan felismerésig, hogy ezt a lehetőséget sem szabad elvetni. Meg kell vizsgálni olyan geometriai rendszerek lehetőségét is, amelyekben a szögösszeg nagyobb  $2\pi$ -nél. Mivel ez a maradék axiómáknak ellentmond, további axiómá(ka):t kell megváltoztatni, elhagyni vagy másokkal helyettesíteni.

Georg Friedrich Bernhard RIEMANN (1826–1866) két ilyen változtatás lehetőségét mutatta meg, s ezzel két újabb nemeuklideszi rendszert konstruált:

- 1) Egyszeres elliptikus geometria:
  - a) Az egyenes nem választja el egymástól a két félsík pontjait.
  - b) Két egyenesnek mindig van egy közös pontja.
- 2) Kétszeres elliptikus geometria:
  - a) Az egyenes elválasztja a két félsík pontjait.
  - b) Két egyenesnek pontosan két közös pontja van.

Az elliptikus geometria az euklideszi gömbfelületén érvényes szférikus geometriával rokon. A hiperbolikus geometria a pszeudoszféra felületi geometriájával modellezhető.