1.3.2 La función Logarítmica

Con el uso de los logaritmos, los procesos de multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces entre números reales pueden simplificarse notoriamente.

El proceso de multiplicación es reemplazado por una suma; la división, por una sustracción; la elevación a potencias, por una simple multiplicación, y la extracción de raíces, por una división.

Muchos cálculos algebraicos, que son difíciles o imposibles por otros métodos, son fáciles de desarrollar por medio de los logaritmos.

La igualdad $N = a^x$, donde N es un número real y a^x es una expresión potencial, da lugar a dos problemas fundamentales:

1. Dada la base a y el exponente x, encontrar N.
2. Dados N y a, encontrar x.

El primero de ellos puede solucionarse , en algunos casos, aplicando las leyes de los exponentes. Para el segundo, la propiedad E11 del teorema 1 garantiza que siempre existe un número real x tal que $N = a^x$, cuando N y a son reales positivos y $a \neq 1$.

Lo anterior da lugar a la siguiente definición:

Definición

Sea a un real positivo fijo, $a \neq 1$ y sea x cualquier real positivo; entonces:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

La función que hace corresponder a cada número real positivo su logaritmo en base $a \neq 1$, denotada $y = \log_a x$, se llama: **función logarítmica de base** $\boldsymbol{a}$, y el número $\log_a x$, se llama **logaritmo de** $\boldsymbol{x}$ **en la base** $\boldsymbol{a}$**.**

Lo anterior se expresa también diciendo que: el logaritmo de un número, en una base dada, es el **exponente** al cual se debe elevar la **base** para obtener el número.

El uso adecuado de la definición anterior, se ilustra en los ejercicios resueltos 5 y 6.

En el teorema siguiente, se presentan las propiedades mas importantes de los logaritmos.

Teorema 2. (Propiedades de los logaritmos)

Si $a > 0$, y b es cualquier real positivo, x e y reales positivos, entonces:

L1. $\log_a\left(a^b\right) = a^{\log_a b} = b$

L2. $\log_a a = 1$

L3. $\log_a 1 = 0$

L4. $\log_a\left(x \cdot y\right) = \log_a x + \log_a y$

L5. $\log_a\left[\dfrac{x}{y}\right] = \log_a x - \log_a y$

L6. $\log_a\left(x^n\right) = n \cdot \log_a x \quad n \in R$

L7. Cuando $a > 1$, si $0 < x < y$, entonces, $\log_a x < \log_a y$. Es decir, la función logarítmica de base $a > 1$ es estrictamente creciente en su dominio.

L8. Cuando $0 < a < 1$, si $0 < x < y$, entonces, $\log_a x > \log_a y$. Esto es la función logarítmica de base entre 0 y 1; es estrictamente decreciente en su dominio.

L9. Para todo número real y_0, existe un único número real x_0 tal que $\log_a x_0 = y_0$. Esta propiedad indica que la función logarítmica es sobreyectiva.

L10. $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$, $b \neq 1$

L11. $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

L12. Si $\log_b m = x$, y, $\alpha \neq 0$, entonces $\log_{b\ a} m^\alpha = x$. (Invarianza)

Demostración

Para demostrar las propiedades de los logaritmos, se hace uso de la definición y de las propiedades de la función exponencial, presentadas en la sección anterior.

A manera de ilustración, se demuestran las propiedades L1, L4 y L7. Se dejan las restantes como ejercicio para el lector.

L1. Sea $y = \log_a\left(a^b\right)$. De acuerdo con la definición de logaritmo y de la propiedad 9 del teorema 3, se tiene:

$$y = \log_a\left(a^b\right) \Leftrightarrow a^y = a^b \Leftrightarrow y = b$$

Esto es, $b = \log_a\left(a^b\right)$ (1)

En segundo lugar, nuevamente por definición, $y = \log_a\left(a^b\right)$.

Es decir, $a^{\log_a b} = b$ (2)

De (1) y (2), se concluye que $\log_a\left(a^b\right) = a^{\log_a b} = b$

L4. Sea $\alpha = \log_a x$ y $\beta = \log_a y$, entonces:

$$\log_a x = a \Leftrightarrow a^a = x \quad (1)$$
$$\log_a y = \beta \Leftrightarrow a^\beta = y \quad (2)$$

De (1) y (2), se sigue que: $a^\alpha \cdot a^\beta = x \cdot y \Leftrightarrow a^{\alpha+\beta} = x \cdot y \Leftrightarrow \log_a(x \cdot y) = \alpha + \beta$. Es decir, $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

L7. Se supone que $a > 1$ y $0 < x < y$. Sean: $\alpha = \log_a x$ y $\beta = \log_a y$. Se prueba que $\alpha < \beta$.

En efecto, si $\alpha \geq \beta$, y como $a > 1$, se tendría por la propiedad 7 del teorema 3 que $a^\alpha \geq a^\beta$, es decir, $x \geq y$ en contradicción con la hipótesis.

Análogamente, se razona para el caso $0 < a < 1$.

Observaciones.

i) La igualdad $\log_a a^b = b$, dada en la propiedad 1, es también válida para $b < 0$.

ii) La propiedad L3. indica analíticamente que todas las funciones logarítmicas de la forma: $y = \log_a x$ pasan por el punto (1, 0).

iii) Las propiedades L7 y L8 de los logaritmos, conjuntamente con las propiedades E7 y E8 de los exponentes, ponen de manifiesto el comportamiento similar que presentan las funciones exponenciales y logarítmicas en una misma base. Es decir, si una de ellas es continua y creciente (continua y decreciente), la otra también lo es.

En las figuras 3 y 4, aparecen las gráficas de las funciones $y = \log_2 x$ e $y = \log_{1/2} x$, en concordancia con las propiedades establecidas en el teorema inmediatamente anterior.

En la figura 5, se han trazado conjuntamente las curvas $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$. Allí pueden visualizarse los comentarios hechos en la observación ii). Puede notarse, además, que las curvas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

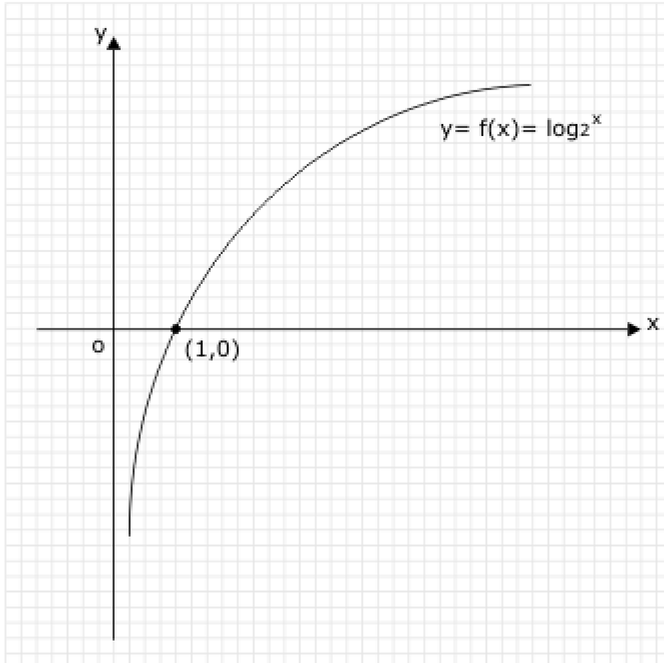

fig. 3

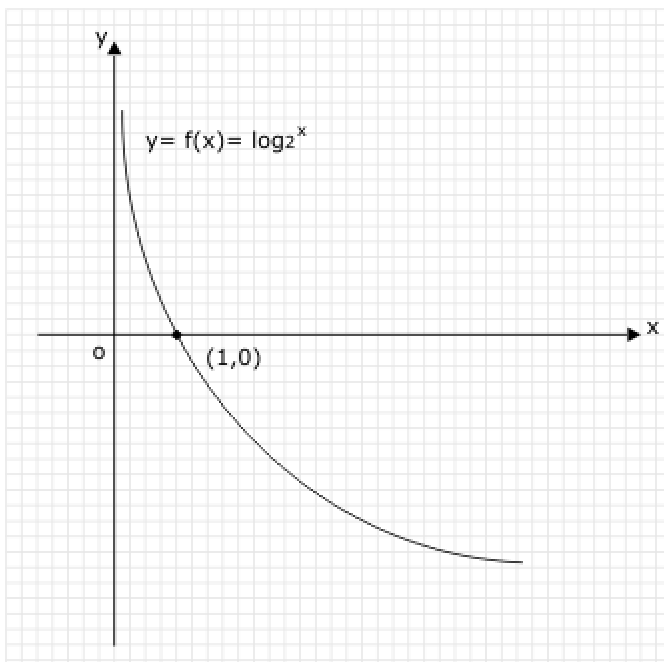

fig. 4

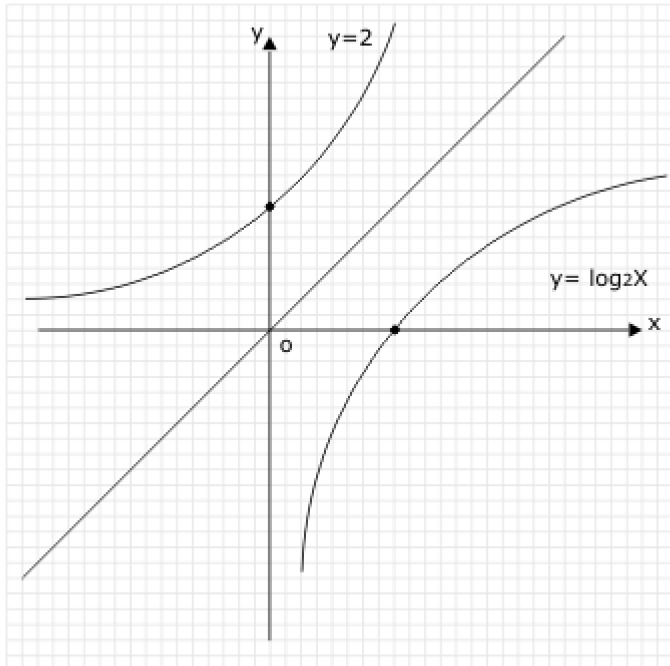

fig. 5

iv) La base más frecuentemente utilizada para las funciones exponenciales y logarítmicas es el llamado **número** e (número de EULER). Los logaritmos de **base *e*** son llamados **logaritmos Naturales o Neperianos** y se denotan **Ln**. Sin embargo, los que más a menudo se encuentran tabulados y que se utilizan en la práctica, son los correspondientes a la base 10, los cuales son llamados logaritmos **decimales o vulgares** y se denotan $\log_{10} x$ o, simplemente, $\log x$.