Lógica
Aula 7

Leliane Nunes de Barros

2018

leliane@ime.usp.br

Valores Verdade (recordando)

T: "verdadeiro"

F: "falso"

Valoração:

$$v : \mathcal{P} \rightarrow \{T, F\}$$

Exemplo: valorações para $p \vee \neg q$

Função de valoração para fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$

Função de valoração para fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$

Função de valoração para fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \vee \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ ou $v(\beta) = T$

Função de valoração para fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \vee \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ ou $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = T$ sse se $v(\alpha) = T$ então $v(\beta) = T$

Função de valoração para fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \vee \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ ou $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \to \beta) = T$ sse $v(\alpha) = F$ ou $v(\beta) = T$

Função de valoração para fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = F$ sse $v(\alpha) = T$
- $v(\alpha \wedge \beta) = F$ sse $v(\alpha) = F$ ou $v(\beta) = F$
- $v(\alpha \vee \beta) = F$ sse $v(\alpha) = F$ e $v(\beta) = F$
- $v(\alpha \to \beta) = F$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = F$

Tabelas Verdade (recordando)

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ϕ	$\neg\phi$
T	F
F	T

$\top$
T

$\bot$
F

Consequência Lógica

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi$$

$$\Updownarrow$$

Se $v(\varphi_i) = T$, então $v(\psi) = T$

Exemplo (consequência lógica)

"Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula. Teve greve. João não atrasou para a aula."

Podemos concluir que:

"Havia taxi na estação."

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \vDash q$$

Exemplo (consequência lógica)

"Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula. Teve greve. João não atrasou para a aula."

Podemos concluir que:

"Havia taxi na estação."

$$(p \land \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \vDash q$$

Exemplo (consequência lógica)

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \vDash q$$

Exemplo (consequência lógica)

$$(p \land \neg q) \to r, \neg r, p \vDash q$$

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \land \neg q$	$(p \land \neg q) \to r$
F	F	F				
F	F	T				
F	T	F				
F	T	T				
T	F	F				
T	F	T				
T	T	F				
T	T	T				

Exemplo (consequência lógica)

$$(p \wedge \neg q) \to r, \neg r, p \vDash q$$

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \to r$
F	F	F	T			
F	F	T	F			
F	T	F	T			
F	T	T	F			
T	F	F	T			
T	F	T	F			
T	T	F	T			
T	T	T	F			

Exemplo (consequência lógica)

$$(p \land \neg q) \to r, \neg r, p \vDash q$$

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \land \neg q$	$(p \land \neg q) \to r$
F	F	F	T	T		
F	F	T	F	T		
F	T	F	T	F		
F	T	T	F	F		
T	F	F	T	T		
T	F	T	F	T		
T	T	F	T	F		
T	T	T	F	F		

Exemplo (consequência lógica)

$$(p \wedge \neg q) \to r, \neg r, p \vDash q$$

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \to r$
F	F	F	T	T	F	
F	F	T	F	T	F	
F	T	F	T	F	F	
F	T	T	F	F	F	
T	F	F	T	T	T	
T	F	T	F	T	T	
T	T	F	T	F	F	
T	T	T	F	F	F	

Exemplo (consequência lógica)

$$(p \land \neg q) \to r, \neg r, p \models q$$

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \land \neg q$	$(p \land \neg q) \to r$
F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T

Exemplo (consequência lógica)

$$(p \wedge \neg q) \to r, \neg r, p \vDash q$$

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \to r$
F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T

Exemplo (derivação sintática)

Também podemos provar a validade do sequente:

$$(p \wedge \neg q) \to r, \neg r, p \vdash q$$

através de uma prova de derivação sintática, isto é, aplicando as regras da dedução natural!

Relação entre $\vdash$ e $\models$

"$\vdash$"	$\Longrightarrow$	derivação sintática
"$\models$"	$\Longrightarrow$	consequência lógica (semântica)

Relação entre $\vdash$ e $\vDash$

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

significa:

Existe uma derivação de ψ usando as regras da dedução natural, a partir das premissas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Relação entre $\vdash$ e $\vDash$

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

significa:

Existe uma derivação de ψ usando as regras da dedução natural, a partir das premissas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

significa:

Toda valoração que torna $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ verdadeiras, também faz com que ψ seja verdadeira.

Relação entre $\vdash$ e $\models$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica
("*tudo que é derivável é verdade*"):

Relação entre $\vdash$ e $\vDash$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica ("*tudo que é derivável é verdade*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

Relação entre $\vdash$ e $\vDash$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica
("*tudo que é derivável é verdade*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Relação entre $\vdash$ e $\vDash$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica
("*tudo que é derivável é verdade*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

A dedução natural é **completa** em relação à semântica
("*tudo que é verdade é derivável*"):

Relação entre $\vdash$ e $\vDash$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica
("*tudo que é derivável é verdade*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

A dedução natural é **completa** em relação à semântica
("*tudo que é verdade é derivável*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Relação entre $\vdash$ e $\vDash$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica
("*tudo que é derivável é verdade*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

A dedução natural é **completa** em relação à semântica
("*tudo que é verdade é derivável*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

Teorema da correção (soundness)

A dedução natural é **correta** em relação à semântica
("*tudo que é derivável é verdade*"):

Teorema da correção (soundness)

A dedução natural é **correta** em relação à semântica ("*tudo que é derivável é verdade*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

Teorema da correção (soundness)

A dedução natural é **correta** em relação à semântica
("*tudo que é derivável é verdade*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Teorema da correção (soundness)

A dedução natural é **correta** em relação à semântica
("*tudo que é derivável é verdade*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vDash \psi$$

Explicação:

- "*tudo que é derivável é verdade*": Se ψ é sintaticamente derivável de $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ então toda valoração que torna as premissas $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ verdadeiras também torna a conclusão ψ verdadeira.
- Dessa forma o valor verdade é preservado na derivação sintática.
- As regras de derivação sintática são **corretas** uma vez que não é possível derivar conclusões falsas a partir de **premissas verdadeiras**.

Teorema da completude (completeness)

A dedução natural é **completa** em relação à semântica
("*tudo que é verdade é derivável*"):

Teorema da completude (completeness)

A dedução natural é **completa** em relação à semântica ("*tudo que é verdade é derivável*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi$$

Teorema da completude (completeness)

A dedução natural é **completa** em relação à semântica
("*tudo que é verdade é derivável*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

Teorema da completude (completeness)

A dedução natural é **completa** em relação à semântica
("*tudo que é verdade é derivável*"):

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

Explicação:

- "*tudo que é verdade é derivável*": Se ψ é consequência lógica (semântica) de $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ então ψ pode ser sintaticamente derivada das premissas $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$.
- Isso significa que as regras de derivação sintática são capazes de derivar toda e qualquer conclusão semântica.
- Assim, o sistema de dedução natural é completo (isto é, usando o conjunto de 12 regras básicas definidas anteriormente ou regras alternativas que também tornem o sistema completo).

Teorema da Dedução

A dedução natural é **correta e completa** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Provas por indução estrutural

Indução matemática:

- *Queremos provar uma propriedade $M(n)$ que vale para todo $n \in \mathbb{N}$.*

De $M(1)$ e supondo $M(k)$ provamos $M(k+1)$, então $M(n)$ vale para qualquer natural n.

Provas por indução estrutural

Indução matemática:

- *Queremos provar uma propriedade $M(n)$ que vale para todo $n \in \mathbb{N}$.*

De $M(1)$ e supondo $M(k)$ provamos $M(k+1)$, então $M(n)$ vale para qualquer natural n.

Exemplo: $\sum_{i=1}^{n} i = n * (n+1)/2$

Provas por indução estrutural

Indução matemática:

- *Queremos provar uma propriedade $M(n)$ que vale para todo $n \in \mathbb{N}$.*

De $M(1)$ e supondo $M(k)$ provamos $M(k+1)$, então $M(n)$ vale para qualquer natural n.

Exemplo: $\sum_{i=1}^{n} i = n * (n+1)/2$

Indução estrutural:

- *Queremos provar uma propriedade $M(n)$ que vale para toda fórmula (ou prova).*

Para isso, precisamos encontrar a relação entre fórmulas (ou provas) e os naturais.

Provas por indução estrutural

Indução matemática:

- *Queremos provar uma propriedade $M(n)$ que vale para todo $n \in \mathbb{N}$.*

De $M(1)$ e supondo $M(k)$ provamos $M(k+1)$, então $M(n)$ vale para qualquer natural n.

Exemplo: $\sum_{i=1}^{n} i = n * (n+1)/2$

Indução estrutural:

- *Queremos provar uma propriedade $M(n)$ que vale para toda fórmula (ou prova).*

Para isso, precisamos encontrar a relação entre fórmulas (ou provas) e os naturais.

Exemplo: Provar que toda fbf tem o mesmo número de "(" e ")".

Provas por indução estrutural

Indução matemática:

- *Queremos provar uma propriedade $M(n)$ que vale para todo $n \in \mathbb{N}$.*

De $M(1)$ e supondo $M(k)$ provamos $M(k+1)$, então $M(n)$ vale para qualquer natural n.

Exemplo: $\sum_{i=1}^{n} i = n * (n+1)/2$

Indução estrutural:

- *Queremos provar uma propriedade $M(n)$ que vale para toda fórmula (ou prova).*

Para isso, precisamos encontrar a relação entre fórmulas (ou provas) e os naturais.

Exemplo: Provar que toda fbf tem o mesmo número de "(" e ")".

$\Longrightarrow$ Usar altura da árvore de análise sintática!

Provas por indução estrutural (exemplo)

M(n) : Provar que toda fbf tem o mesmo número de “(” e “)”.

Provas por indução estrutural (exemplo)

M(n) : Provar que toda fbf tem o mesmo número de “(” e “)”.

Base: $n = 1$ (átomo)

Provas por indução estrutural (exemplo)

M(n) : Provar que toda fbf tem o mesmo número de "(" e ")".

Base: $n = 1$ (átomo)

Passo indutivo: fbfs com altura até n possuem a propriedade, mostrar para árvore de altura $n+1$

Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos
- Se φ é fbf, então $(\neg\varphi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \vee \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \wedge \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é fbf

Backus Naur Form (BNF)

$$\varphi ::= p|(\neg\varphi)|(\varphi \vee \varphi)|(\varphi \wedge \varphi)|(\varphi \rightarrow \varphi)$$

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Ideia: indução no **comprimento das provas**!

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi$$

Ideia: indução no **comprimento das provas**!

<u>Base:</u> Provas de 1 linha

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi$$

Ideia: indução no **comprimento das provas**!

Base: Provas de 1 linha

Passo indutivo: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$ tem prova de tamanho k.

Suponha que vale correção para provas de tamanho $< k$.

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi$$

Ideia: indução no **comprimento das provas**!

Base: Provas de 1 linha

Passo indutivo: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$ tem prova de tamanho k.

Suponha que vale correção para provas de tamanho $< k$.

Qual a última regra aplicada?

Resumo - regras

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge_i \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge_{e_1} \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge_{e_2} \qquad \frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee_{i_1} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ \vee_{i_2}$$

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \xi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \xi\end{array}}}{\xi}\ \vee_e \qquad \frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\ \to_e \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi}\ \to_i$$

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg_e \qquad \frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg_e \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg_i \qquad \frac{\bot}{\phi}\ \bot_e$$