MAC239

Lógica de Predicados

(teoria de prova)

Teoria de Prova da Lógica de Predicados

- Regras de dedução natural para lógica de predicados:
  - Regras de prova da lógica proposicional (ainda são válidas)

Teoria de Prova da Lógica de Predicados

- Regras de dedução natural para lógica de predicados:
  - Regras de prova da lógica proposicional (ainda são válidas)
- Precisamos definir algumas regras novas:
  - Regras de prova para igualdade
  - Regras de prova para o quantificador universal
  - Regras de prova para o quantificador existencial

Teoria de Prova da Lógica de Predicados

- Regras de dedução natural para lógica de predicados:
  - Regras de prova da lógica proposicional (ainda são válidas)
- Precisamos definir algumas regras novas:
  - Regras de prova para igualdade
  - Regras de prova para o quantificador universal
  - Regras de prova para o quantificador existencial
- e também algumas equivalências de quantificadores

As regras de dedução da LP servem para a LPO (I)

- Se considerarmos proposições como predicados de aridade 0 (zero), a lógica proposicional é uma *sub-linguagem da lógica de predicados.*
- Podemos traduzir as regras de dedução natural diretamente para a lógica de predicados. Cada uma das regras que aprendemos se aplicam para qualquer fórmula *Φ* e *Ψ* da lógica de predicados.

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\,[\wedge i] \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\,[\wedge e_1] \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\,[\wedge e_2]$$

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\,[\vee i_1] \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\,[\vee i_2] \qquad \frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{matrix}\phi \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}\psi \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}}{\chi}\,[\vee e]$$

As regras de dedução da LP servem para a LPO (II)

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi}\,[\to i] \qquad \dfrac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\,[\to e]$$

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\,[\neg i] \qquad \dfrac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\,[\neg e]$$

$$\dfrac{\bot}{\phi}\,[\bot e] \qquad \dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\,[\neg\neg e]$$

Regras de prova para a igualdade (=e) (=i)

Regras de prova para igualdade:
regra de introdução da igualdade (=i)

$$\frac{\qquad\qquad}{t = t} \; =i$$

- A igualdade é útil para dizer que dois termos são iguais, isto é, que eles correspondem a um mesmo objeto do universo.
- A *regra de introdução da igualdade* diz que não precisamos de premissas para introduzir que um termo é igual a ele mesmo.
- Note que só vale para termos e não para fórmulas (a LPO não permite falar de igualdade entre fórmulas).

Regras de prova para igualdade:
regra de eliminação da igualdade (=e)

$$\frac{t_1 = t_2 \quad \Phi[t_1 / x]}{\Phi[t_2 / x]} \; {=}e$$

- A *regra de eliminação da igualdade* permite substituir um termo t_1 por um termo t_2 , dado que sabemos que $t_1 = t_2$.

Regras de prova para igualdade: *regra de <u>eliminação da igualdade</u>* (=e)

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \overbrace{\Phi[t_1 / x]}^{\Psi'}}{\underbrace{\Phi[t_2 / x]}_{\Psi}} \; {=}\mathrm{e}$$

- A *regra de eliminação da igualdade* permite substituir um termo t_1 por um termo t_2 , dado que sabemos que $t_1 = t_2$.
- Idéia: “para provar a fórmula Ψ , na qual um termo t_2 aparece (1 ou mais vezes) é suficiente provar $t_1 = t_2$ e a fórmula Ψ' (que resulta de Ψ substituindo t_2 por t_1)“

Importante: Quando escrevemos uma substituição na forma $\Phi[t / x]$, assumimos (implicitamente) que t é livre para x em Φ.

Exemplo de uso da regra “=e”

Queremos provar que o seguinte sequente é válido:

$(x+1) = (1+x)\ ,\ (x+1 > 1) \rightarrow (x+1 > 0) \quad \vdash \quad (1+x > 1) \rightarrow (1+x > 0)$

Exemplo de uso da regra "=e"

Queremos provar que o seguinte sequente é válido:

$(x+1) = (1+x)\ ,\ \ (x+1 > 1) \rightarrow (x+1 > 0) \quad \vdash \quad (1+x > 1) \rightarrow (1+x > 0)$

usando a regra =e:

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \Phi[t_1 / x]}{\Phi[t_2 / x]} =e$$

Exemplo de uso da regra “=e”

Queremos provar que o seguinte sequente é válido:

$$(x+1) = (1+x)\ ,\ \ (x+1 > 1) \rightarrow (x+1 > 0) \quad \vdash \quad (1+x > 1) \rightarrow (1+x > 0)$$

usando a regra =e:

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \Phi[t_1 / x]}{\Phi[t_2 / x]} \; =e$$

ψ'

ψ

Exemplo de uso da regra "=e"

Queremos provar que o seguinte sequente é válido:

$$\underbrace{(x+1)}_{t_1} = \underbrace{(1+x)}_{t_2}\ ,\ \underbrace{(x+1 > 1) \to (x+1 > 0)}_{\Psi'} \ \vdash\ \underbrace{(1+x > 1) \to (1+x > 0)}_{\Psi}$$

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \Phi[t_1 / x]}{\Phi[t_2 / x]}\ {=}e$$

Ψ'

Ψ

Exemplo de uso da regra "=e"

Queremos provar que o seguinte sequente é válido:

$$\underbrace{(x+1)}_{t_1} = \underbrace{(1+x)}_{t_2}\,,\ \underbrace{(x+1 > 1) \rightarrow (x+1 > 0)}_{\psi'} \ \vdash\ \underbrace{(1+x > 1) \rightarrow (1+x > 0)}_{\psi}$$

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \Phi[t_1 / x]}{\Phi[t_2 / x]}\ {=}e$$

ψ'

ψ

Prova:

1	$(x+1) = (1+x)$	premissa
2	$(x+1 > 1) \rightarrow (x+1 > 0)$	premissa

Exemplo de uso da regra "=e"

Queremos provar que o seguinte sequente é válido:

$$\underbrace{(x+1)}_{t_1} = \underbrace{(1+x)}_{t_2}\,,\ \underbrace{(x+1 > 1) \rightarrow (x+1 > 0)}_{\psi'} \ \vdash\ \underbrace{(1+x > 1) \rightarrow (1+x > 0)}_{\psi}$$

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \underbrace{\Phi[t_1 / x]}_{\psi'}}{\underbrace{\Phi[t_2 / x]}_{\psi}}\ =e$$

Prova:

1	$(x+1) = (1+x)$	premissa
2	$(x+1 > 1) \rightarrow (x+1 > 0)$	premissa
3	$(1+x > 1) \rightarrow (1+x > 0)$	=e 1,2

$\Phi \equiv (x>1) \rightarrow (x>0)$

Regras de prova para o Quantificador Universal ($\forall$e) ($\forall$i)

Regra de Eliminação do Quantificador Universal ($\forall e$)

$$\frac{\forall x \Phi}{\Phi[t / x]} \, \forall e$$

Condição: t livre para x em Φ

- Uma vez que tenha sido provado $\forall x\Phi$, podemos substituir x por qualquer termo em Φ, dado que t é livre para x em Φ.

Regra de Eliminação do Quantificador Universal ($\forall e$)

$$\frac{\forall x \Phi}{\Phi[t / x]} \; \forall e$$

Condição: t livre para x em Φ

- Uma vez que tenha sido provado $\forall x \Phi$, podemos substituir x por qualquer termo em Φ, dado que t é livre para x em Φ.
- Exemplo: Prove que

  $S(g(pedro)), \forall x(S(x) \rightarrow \neg L(x)) \vdash \neg L(g(pedro))$

Regra de Eliminação do Quantificador Universal ($\forall e$)

$$\frac{\forall x \Phi}{\Phi[t / x]} \; \forall e$$

Condição: t livre para x em Φ

- Uma vez que tenha sido provado $\forall x\Phi$, podemos substituir x por qualquer termo em Φ, dado que t é livre para x em Φ.
- Exemplo: Prove que

$S(g(pedro)), \forall x(S(x) \rightarrow \neg L(x)) \vdash \neg L(g(pedro))$

1	$S(g(pedro))$	premissa
2	$\forall x(S(x) \rightarrow \neg L(x))$	premissa

Regra de Eliminação do Quantificador Universal ($\forall e$)

$$\dfrac{\forall x \Phi}{\Phi[t / x]} \; \forall e$$

Condição: t livre para x em Φ

- Uma vez que tenha sido provado $\forall x \Phi$, podemos substituir x por qualquer termo em Φ, dado que t é livre para x em Φ.
- Exemplo: Prove que

  $S(g(pedro)), \forall x(S(x) \rightarrow \neg L(x)) \vdash \neg L(g(pedro))$

1	$S(g(pedro))$	premissa
2	$\forall x(S(x) \rightarrow \neg L(x))$	premissa
3	$(S(g(pedro)) \rightarrow \neg L(g(pedro))$	$\forall e$ 2

Regra de Eliminação do Quantificador Universal ($\forall e$)

$$\frac{\forall x \Phi}{\Phi[t / x]} \forall e$$

Condição: t livre para x em Φ

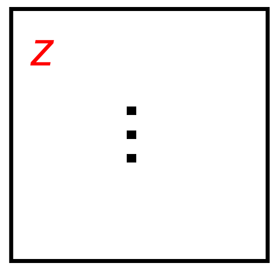
- Uma vez que tenha sido provado $\forall x\Phi$, podemos substituir x por qualquer termo em Φ, dado que t é livre para x em Φ.
- Exemplo: Prove que

  $S(g(pedro)), \forall x(S(x) \rightarrow \neg L(x)) \vdash \neg L(g(pedro))$

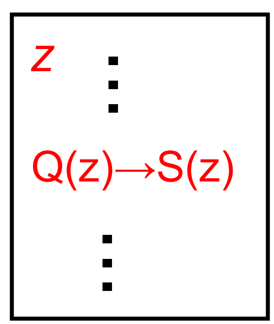
1	$S(g(pedro))$	premissa
2	$\forall x(S(x) \rightarrow \neg L(x))$	premissa
3	$(S(g(pedro)) \rightarrow \neg L(g(pedro))$	$\forall e$ *2*
4	$\neg L(g(pedro))$	$\rightarrow$e 3, 1

Escopo de variável

- Vamos primeiro considerar um novo tipo de caixa, semelhante à que usamos em LP, porém essa caixa marca o *escopo da variável temporária z* (ao invés do escopo de uma hipótese temporária).



- Por exemplo, essa é uma caixa de escopo temporário na qual a variável z pode ser usada em termos como



Regra de Introdução do Quantificador Universal ($\forall i$)

x_0

$\vdots$

$\Phi[x_0 / x]$

------------------ $\forall i$

$\forall x \Phi$

Condição: x_0 é arbitrário e só ocorre dentro da caixa.

- Se selecionamos uma variável nova x_0 em uma caixa de escopo de variável e conseguimos provar uma fórmula em que x_0 aparece, isto é, conseguimos provar $\Phi[x_0 / x]$, então podemos deduzir $\forall x\Phi$.
- x_0 é uma variável arbitrária nova, que *não aparece em nenhum lugar fora da caixa* (nem é introduzida em caixas aninhadas).
- Como não fizemos nenhuma suposição específica sobre x_0, então qualquer termo poderia ter sido usado em seu lugar, por isso concluimos $\forall x\Phi$.

Regra de Introdução do Quantificador Universal ($\forall i$)

- Exemplo 1: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \,,\ \forall x\, P(x) \vdash \forall x Q(x)$

usando a regra $\forall \boldsymbol{i}$:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \Phi[x_0 / x] \end{array}}}{\forall x \Phi}\ \forall i$$

Regra de Introdução do Quantificador Universal ($\forall i$)

- Exemplo 1: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, P(x) \vdash \forall x Q(x)$

x_0

$\vdots$

$\Phi[x_0 / x]$

------------------ $\forall i$

$\forall x \Phi$

usando a regra $\forall i$:

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa
2	$\forall x\, P(x)$	premissa

Regra de Introdução do Quantificador Universal ($\forall i$)

- Exemplo 1: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))\ ,\ \forall x\, P(x) \ \vdash\ \forall x Q(x)$

x_0

$\vdots$

$\Phi[x_0 / x]$

------------------ $\forall i$

$\forall x \Phi$

usando a regra $\forall i$:

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa
2	$\forall x\, P(x)$	premissa

x_0

Regra de Introdução do Quantificador Universal ($\forall i$)

- Exemplo 1: vamos provar

$\forall x(P(x) \to Q(x))$, $\forall x\, P(x) \vdash \forall x Q(x)$

x_0

$\vdots$

$\Phi[x_0 / x]$

------------------ $\forall i$

$\forall x \Phi$

usando a regra $\forall i$:

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	premissa	
2	$\forall x\, P(x)$	premissa	
3	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall e$ *1*	x_0

Regra de Introdução do Quantificador Universal ($\forall i$)

- Exemplo 1: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, $\forall x\, P(x) \vdash \forall x Q(x)$

$$\begin{array}{|l|}\hline x_0 \\ \vdots \\ \Phi[x_0 / x] \\ \hline \end{array}$$
$$\text{-----------------} \quad \forall \boldsymbol{i}$$
$$\forall x \Phi$$

usando a regra $\forall \boldsymbol{i}$:

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa	
2	$\forall x\, P(x)$	premissa	
3	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall e$ *1*	x_0
4	$P(x_0)$	$\forall e$ *2*	

Regra de Introdução do Quantificador Universal ($\forall i$)

- Exemplo 1: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))\ ,\ \forall x\, P(x) \vdash \forall x Q(x)$

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \Phi[x_0 / x] \end{array}}}{\forall x \Phi}\ \forall i$$

usando a regra $\forall \boldsymbol{i}$:

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa	
2	$\forall x\, P(x)$	premissa	
3	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall e\ 1$	x_0
4	$P(x_0)$	$\forall e\ 2$	
5	$Q(x_0)$	$\rightarrow e\ 3, 4$	

Regra de Introdução do Quantificador Universal ($\forall$*i*)

- Exemplo 1: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))\ ,\ \forall x\, P(x) \ \vdash\ \forall x Q(x)$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \vdots \\ \Phi[x_0 / x] \end{array}}}{\forall x \Phi}\ \forall i$$

usando a regra $\forall$***i*** :

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa	
2	$\forall x\ P(x)$	premissa	
3	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall$*e 1*	x_0
4	$P(x_0)$	$\forall$*e 2*	
5	$Q(x_0)$	$\rightarrow$e 3, 4	
6	$\forall x\ Q(x)$	$\forall$*i 3-5*	

Regras de prova para o Quantificador Existencial (∃e) (∃i)

Regra de Introdução do Quantificador Existencial ($\exists i$)

$$\frac{\Phi[t / x]}{\exists x \Phi}\ \exists i$$

Condição: t livre para x em Φ

- Para provar $\exists x \Phi$, é suficiente encontrar um termo t como "testemunha", dado que t é livre para x em Φ.

Exemplo: Prove que $\forall x\ \Phi \vdash \exists x\ \Phi$

- Vamos supor que a fórmula Φ seja P(x). Assim queremos provar que

$$\forall x\ P(x) \vdash \exists x\ P(x)$$

- Assumimos que o conjunto $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ contém pelo menos uma constante c que satisfaz $P(x)$, dado que sabemos que todos os objetos do universo satisfazem P, ou seja, $P(c)$ é verdadeiro e portanto podemos concluir $\exists\ x\ P(x)$.

($\exists i$) Exemplo 1

Prove que $\forall x\ \Phi \vdash \exists x\ \Phi$ (prova geral para qualquer Φ)

1	$\forall x\ \Phi$	premissa
2	$\Phi[t / x]$	$\forall$e 1
3	$\exists x\ \Phi$	$\exists i$ 2

$$\frac{\Phi[t / x]}{\exists x \Phi}\ \exists i$$

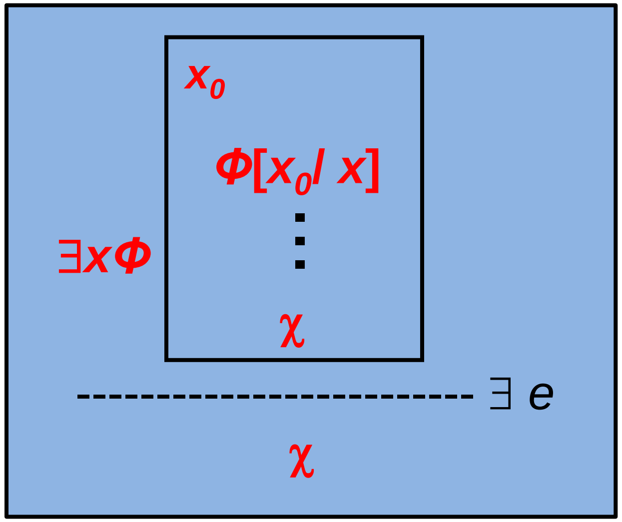
($\exists i$) Exemplo 2

Prove que $\vdash R(a,a) \rightarrow \exists x R(x,x)$

1	$R(a,a)$	hipótese
2	$\exists x R(x,x)$	$\exists i$ 1
3	$R(a,a) \rightarrow \exists x R(x,x)$	$\rightarrow$i 1-2

$$\frac{\Phi[t\,/\,x]}{\exists x \Phi}\ \exists i$$

Regra de Eliminação do Quantificador Existencial ($\exists e$)



Condição: x_0 não aparece fora da caixa.

- Sabemos que $\exists x\Phi$ é verdade, logo sabemos que existe pelo menos um objeto x para o qual Φ é verdade. Chamamos esse elemento de x_0 e assumimos que $\Phi[x_0/x]$ vale dentro da caixa do escopo de x_0 .
- Uma vez que não fizemos nenhuma suposição sobre x_0 e que a partir disso demonstramos χ, podemos concluir que qualquer que seja o x_0 que torne $\Phi[x_0/x]$ verdade, χ vale.

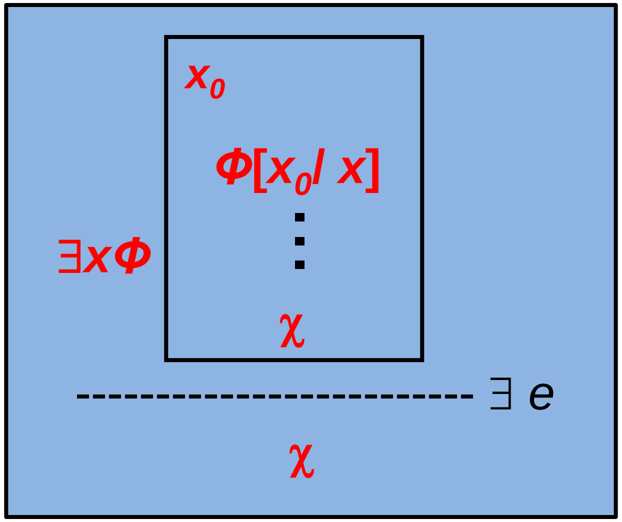
Exemplo: Vamos provar $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, $\exists x\, P(x) \vdash \exists xQ(x)$

Regra de Eliminação do Quantificador Existencial (∃*e*)

- Exemplo: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \exists x\, P(x) \ \vdash\ \exists x Q(x)$

usando a regra ∃ e:



Regra de Eliminação do Quantificador Existencial ($\exists e$)

- Exemplo: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, $\exists x\, P(x) \vdash \exists x Q(x)$

usando a regra $\exists$ e:

$$\frac{\exists x \Phi \qquad \boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad \Phi[x_0/ x] \\ \quad \vdots \\ \quad \chi \end{array}}}{\chi}\ \exists e$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa
2	$\exists x\, P(x)$	premissa

Regra de Eliminação do Quantificador Existencial (∃*e*)

- Exemplo: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) , \exists x\, P(x) \vdash \exists x Q(x)$

usando a regra ∃ e:

$\boldsymbol{x_0}$

$\boldsymbol{\Phi[x_0/ x]}$

$\vdots$

$\exists x \boldsymbol{\Phi}$ $\quad\chi$

------------------------- ∃ *e*

χ

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa
2	$\exists x\, P(x)$	premissa

x_0

Regra de Eliminação do Quantificador Existencial ($\exists e$)

- Exemplo: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \exists x\, P(x) \ \vdash\ \exists x Q(x)$

usando a regra $\exists$ e:

$$\frac{\exists x \Phi \qquad \boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \Phi[x_0/x] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi}\ \exists e$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa	
2	$\exists x\, P(x)$	premissa	
3	$P(x_0)$	hipótese	x_0

Regra de Eliminação do Quantificador Existencial ($\exists e$)

- Exemplo: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))\ ,\ \exists x\, P(x) \quad \vdash \quad \exists x Q(x)$

usando a regra $\exists$ e:

$$\dfrac{\exists x \Phi \qquad \boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \Phi[x_0/x] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi}\ \exists e$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa	
2	$\exists x\, P(x)$	premissa	
3	$P(x_0)$	hipótese	x_0
4	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall$ *e 1*	

Regra de Eliminação do Quantificador Existencial ($\exists e$)

- Exemplo: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))\ ,\ \exists x\, P(x) \ \vdash\ \exists x Q(x)$

usando a regra $\exists$ e:

x_0

$\boldsymbol{\Phi[x_0 / x]}$

$\vdots$

$\exists x \Phi$ $\qquad \chi$

$\exists e$

χ

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa	
2	$\exists x\, P(x)$	premissa	
3	$P(x_0)$	hipótese	x_0
4	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall$ *e 1*	
5	$Q(x_0)$	$\rightarrow$e 4, 3	

Regra de Eliminação do Quantificador Existencial ($\exists e$)

- Exemplo: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \exists x\, P(x) \vdash \exists x Q(x)$

usando a regra $\exists$ e:

$$\frac{\exists x \Phi \qquad \boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \Phi[x_0/ x] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi}\ \exists e$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa	
2	$\exists x\, P(x)$	premissa	
3	$P(x_0)$	hipótese	x_0
4	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall$ *e 1*	
5	$Q(x_0)$	$\rightarrow$e 4, 3	
6	$\exists\, x\, Q(x)$	$\exists$ *i 5*	

Regra de Eliminação do Quantificador Existencial (∃*e*)

- Exemplo: vamos provar

$\forall x(P(x) \to Q(x)) , \exists x\, P(x) \vdash \exists x Q(x)$

usando a regra ∃ e:

$\exists x \Phi$ $\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \Phi[x_0/ x] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}$

------------------------ ∃ *e*

χ

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	premissa	
2	$\exists x\, P(x)$	premissa	
3	$P(x_0)$	hipótese	x_0
4	$P(x_0) \to Q(x_0)$	∀ *e 1*	
5	$Q(x_0)$	→e 4, 3	
6	$\exists\, x\, Q(x)$	∃ *i 5*	
7	$\exists\, x\, Q(x)$	∃ *e 2,3-6*	

Regra de Eliminação do Quantificador Existencial ($\exists e$)

- Exemplo: vamos provar

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))\ ,\ \exists x\, P(x) \ \vdash\ \exists x Q(x)$

x_0

$\Phi[x_0/\ x]$

$\vdots$

$\exists x \Phi$

χ

------------------------ $\exists$ *e*

χ

usando a regra $\exists$ e:

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa	
2	$\exists x\, P(x)$	premissa	
3	$P(x_0)$	hipótese	x_0
4	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall$ *e 1*	
5	$Q(x_0)$	$\rightarrow$e 4, 3	
6	$\exists\, x\, Q(x)$	$\exists$ *i 5*	
7	$\exists\, x\, Q(x)$		

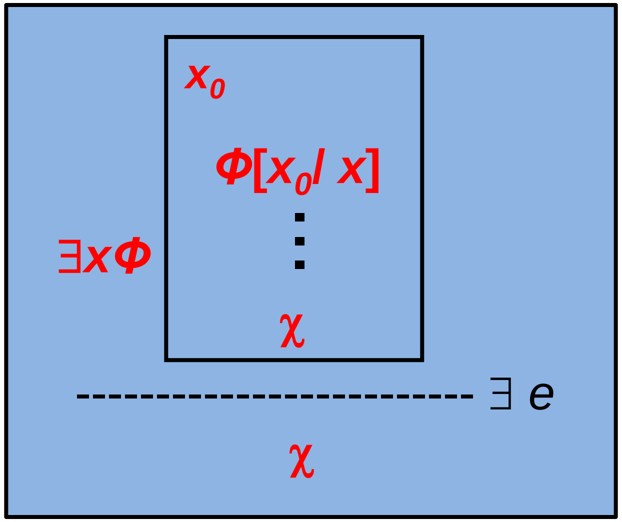
Note que a fórmula $\exists$ x Q(x) dentro da caixa não contém x_0 e desta forma podemos "exportá-la" para fora da caixa.

Regra de Eliminação do Quantificador Existencial (∃*e*)

- Outro exemplo: vamos provar

$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))\ ,\ \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))\ \vdash \exists x\ (P(x) \wedge R(x))$

usando a regra ∃ *e*:

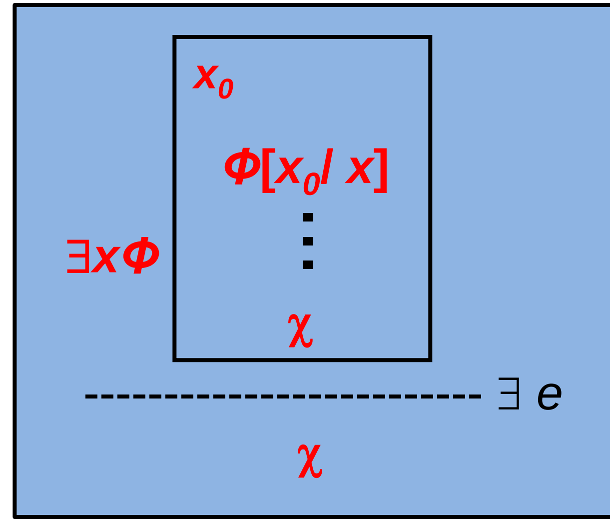


Regra de Eliminação do Quantificador Existencial (∃*e*)

- Outro exemplo: vamos provar

$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$, $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x\,(P(x) \wedge R(x))$

usando a regra ∃ *e*:



1	$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$	premise	
2	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	premise	
3	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	assumption	x_0
4	$Q(x_0) \rightarrow R(x_0)$	$\forall x$ e 1	
5	$Q(x_0)$	$\wedge e_2$ 3	
6	$R(x_0)$	$\rightarrow$ e 4,5	
7	$P(x_0)$	$\wedge e_1$ 3	
8	$P(x_0) \wedge R(x_0)$	$\wedge i$ 7, 6	
9	$\exists x(P(x) \wedge R(x)$	$\exists x$ i 8	
10	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\exists x$ e 2,3–9	

Essa prova está correta?

$\exists x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y Q(y)$

1	$\exists x P(x)$	premise	
2	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$	premise	
3			x_0
4	$P(x_0)$	assumption	x_0
5	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x$ *e* 2	
6	$Q(x_0)$	$\rightarrow$ *e* 5,4	
7	$Q(x_0)$	$\exists x$ *e* 1, 4–6	
8	$\forall y Q(y)$	$\forall y$ *i* 3–7	

Essa prova está correta?

$\exists x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y Q(y)$

1	$\exists x P(x)$	premise	
2	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$	premise	
3			x_0
4	$P(x_0)$	assumption	x_0
5	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x\ e\ 2$	
6	$Q(x_0)$	$\rightarrow e\ 5,4$	
7	$Q(x_0)$	$\exists x\ e\ 1, 4–6$	
8	$\forall y Q(y)$	$\forall y\ i\ 3–7$	

Incorreto! Variáveis devem ser novas!

Essa prova está correta?

$\exists x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y Q(y)$

1	$\exists x P(x)$	premise	
2	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$	premise	
3			y_0
4	$P(x_0)$	assumption	x_0
5	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x\ e\ 2$	
6	$Q(x_0)$	$\rightarrow e\ 5,4$	
7	$Q(y_0)$	$\exists x\ e\ 1, 4–6$	
8	$\forall y Q(y)$	$\forall y\ i\ 3–7$	

Equivalências

Equivalências

Definição [Equivalência] Duas fórmulas da LPO são equivalentes, propriedade denotada por $\Phi \dashv\vdash \Psi$, sse $\Phi \vdash \Psi$ e $\Psi \vdash \Phi$.

Algumas equivalências simples:

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\forall x\phi & \dashv\vdash & \exists x\neg\phi \\
\neg\exists x\phi & \dashv\vdash & \forall x\neg\phi \\
\forall x\forall y\phi & \dashv\vdash & \forall y\forall x\phi \\
\exists x\exists y\phi & \dashv\vdash & \exists y\exists x\phi \\
\forall x\phi \wedge \forall x\psi & \dashv\vdash & \forall x(\phi \wedge \psi) \\
\exists x\phi \vee \exists x\psi & \dashv\vdash & \exists x(\phi \vee \psi)
\end{array}
$$

Outro exemplo interessante de prova da LPO

x_0

$\vdots$

$\Phi[x_0 / x]$

------------------ $\forall i$

$\forall x \Phi$

$\neg \forall x \Phi \vdash \exists x \, \neg \Phi$

1	$\neg \forall x \phi$	premise
2	$\neg \exists x \neg \phi$	assumption
3		x_0
4	$\neg \, \Phi[x_0 / x]$	assumption
5	$\exists x \neg \phi$	$\exists x \; i \; 4$
6	$\bot$	$\neg e \; 5, 2$
7	$\Phi[x_0 / x]$	DPA 4-6
8	$\forall x \phi$	$\forall x \; i \; 3–7$
9	$\bot$	$\neg e \; 8, 1$
10	$\exists x \neg \phi$	DPA 2-9

Próxima aula: semântica da LPO