CAP 14 . exercício 8

(b) Mostre que esse método tem acurácia de primeira ordem.

Vamos partir do método (ii), assim poderemos aplicar o teorema do erro da interpolação, visto nos caps anteriores

$$f(x) - p(x) = f[x_{-1}, x_0, x_1, x](x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)$$

$$f'(x) - p'(x) = \frac{d}{dx} f[x_{-1}, x_0, x_1, x](x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + f[x_{-1}, x_0, x_1, x]\Big[(x - x_0)(x - x_1) + (x - x_{-1})(x - x_1) + (x - x_{-1})(x - x_0)\Big]$$

$$f''(x) - p''(x) = \frac{d}{d^2x} f^2[x_{-1}, x_0, x_1, x](x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + \frac{d}{dx} f[x_{-1}, x_0, x_1, x]\Big[(x - x_0)(x - x_1) + (x - x_{-1})(x - x_1) + (x - x_{-1})(x - x_0)\Big]$$

$$+ \frac{d}{dx} f[x_{-1}, x_0, x_1, x]\Big((x - x_0)(x - x_1) + (x - x_{-1})(x - x_1) + (x - x_{-1})(x - x_0)\Big) +$$

$$f[x_{-1}, x_0, x_1, x]\big(x - x_1 + x - x_0 + x - x_1 + x - x_{-1} + x - x_0 + x - x_{-1}\big)$$

Aplicando essa expressão em x_0, anulando vários termos, temos:

$$f''(x_0) - p''(x_0) = \frac{d}{dx} f[x_{-1}, x_0, x_1, x_0]\Big((x_0 - x_{-1})(x_0 - x_1) + (x_0 - x_{-1})(x_0 - x_1)\Big) + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_0](4x_0 - 2x_{-1} - 2x_1)$$

$$= \frac{d}{dx} f[x_{-1}, x_0, x_1, x_0]\, 2h_0(-h_1) + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_0](2h_0 - 2h_1)$$

Para facilitar a notação, sabemos que $f[x_{-1}, x_0, x_1, x_0]$ é equivalente a $f'''(\xi)$ para algum $\xi \in [x_{-1}, x_1]$. Então

$$f''(x_0) - p''(x_0) = 2\big(f'''(\xi)(h_0 - h_1) - f^{iv}(\xi)\, h_0 h_1\big)$$

Assim, para valores de h_0, h_1 pequenos, temos que o termo dominante do erro é de ordem 1, $(h_0 - h_1)$ com expoente 1 (Linear).