MAC105 FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA A COMPUTAÇÃO

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Pedro Gigeck Freire **Número USP:** 10737136

Assinatura

Pedro Gigeck Freire

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E34 **Data:** 02/05/2018

SOLUÇÃO

(i) A(2) é $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \geq \sqrt{x_1 x_2}$, ELEVANDO AO QUADRADO:

$\frac{1}{4}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) \geq |x_1 x_2|$, COMO x_1 e x_2 SÃO MAIORES ou iguais A 0, $|x_1x_2|$ ... x_1x

Assim, TEMOS $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 4x_1x_2 \Rightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

PORTANTO, A(2) É VERDADEIRO pois TODO número AO QUADRADO é ≥ 0.

(ii) Sejam a e b AS MÉDIAS ARITMÉTICAS ENTRE (x_1 E x_n) E (x_{n+1} E x_{2n}), RESPECTIVAMENTE, TEMOS QUE:

$\frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2n}(x_1 + \cdots + x_{2n})$, A MÉDIA ARITMÉTICA DE x_1 ATÉ x_{2n}

Como A(2) É VERDADEIRO, SEGUE que

$\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab}$ $(*)$

AGORA, PERCEBA que $a = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$ e $b = \frac{1}{n}(x_{n+1} + \cdots + x_{2n})$; ASSIM

como A(n) É VERDADEIRO, SEGUE QUE

$a \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ e $b \geq \sqrt[n]{x_{n+1} \cdots x_{2n}}$

Como a e b SÃO POSITIVOS, POIS x_i é POSITIVO PARA QUALQUER i, TEMOS QUE

$\sqrt{ab} \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\,\sqrt[n]{x_{n+1} \cdots x_{2n}}}$, COLOCANDO TAL DESIGUALDADE EM $(*)$:

$\underline{\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2n}(x_1 + \cdots + x_{2n})} \geq \sqrt{ab} \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n \cdots x_{2n}}} = \underline{\sqrt[2n]{x_1 \cdots x_{2n}}}$

PORTANTO, A(2n) É VERDADEIRO.

(iii) Como queremos provar $A(n-1)$ a partir de $A(n)$, vamos tomar

$x_n = \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$. Assim, da desigualdade segue:

$$\boxed{\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_{n-1}\,x_n}} \Rightarrow \frac{\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}+\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{2} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_{n-1}\cdot x_n} \Rightarrow$$

$$x_n \leftarrow \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_{n-1}}\,\sqrt[n]{x_n} \Rightarrow \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_n}} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_{n-1}} \Rightarrow x_n^{1-1/n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_{n-1}} \Rightarrow$$

$$\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[1-1/n]{\sqrt[n]{x_1\cdots x_{n-1}}} \Rightarrow \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1\cdots x_{n-1}}.$$ Assim, $A(n-1)$ é verdadeiro.

(iiii) Se $A(2n)$ é verdadeiro, podemos tomar uma indução em n com base $n=1$, assim descobrimos que $A(2^k)$ é verdadeiro para todo $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Ademais, sabemos que $A(n-1)$ é verdadeiro, portanto, com os passos de 2^k e a subtração de 1 deste, podemos provar que $A(n)$ vale para qualquer n.

Index of comments

1.1 Você fez a demonstração ao contrário: deve-se começar de uma desigualdade conhecida e concluir a desigualdade que queremos provar.

2.1 ?