MAC239

Lógica de Predicados

semântica

Semântica da LPO

Como calcular o valor verdade das fórmulas?

Semântica da LPO

Como interpretar uma fórmula da Lógica de Predicados ?

- Atribuimos T ou F às fórmulas atômicas $P(t_1, t_2, ..., t_n)$?
  - $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ é T ou F, dependendo dos termos $t_1, t_2, ..., t_n$
- E os quantificadores $\forall$ e $\exists$?
  - Exemplo: $\forall x \exists y R(x,y)$

- Modelos (interpretações) na Lógica Proposicional:
  2^n possíveis interpretações para n símbolos proposicionais

- $\exists x\ P(x)$:
  - Qual é esse x?
    - Precisamos definir o universo de discurso
  - O que é P(x)?
    - Precisamos atribuir um significado para esse predicado

Por exemplo:

- universo = Naturais; P(x) = “x é par"
- universo = Naturais; P(x) = “x é negativo"
- universo = frutas; P(x) = “x nasce em árvore"
- universo = frutas; P(x) = “x é azul"

Lógica de Predicados como uma linguagem formal (recordação)

O vocabulário define o repertório de símbolos da linguagem da lógica de predicados:

- $\mathcal{P}$ = {p, q, r, ...} é um conjunto de *símbolos de predicados* (cada um com uma aridade fixa);
- $\mathcal{F}$ = {a, a1, b, ... , f, f', g, ...} é um conjunto de *símbolos de funções* (cada um com sua aridade);
- $\mathcal{C}$ = {c_1, c_2, ...} é um conjunto de *símbolos de constantes* (também vistos como uma função de aridade 0); e
- $\mathcal{X}$ = {x, x_1, ..., x', ...y, z, ...} é um conjunto de *símbolos de variáveis*.

Semantica da LPO: Definição de Modelo

Definição [**Modelo**]: Sejam $\mathcal{F}$ o conjunto de símbolos de funções e $\mathcal{P}$ os símbolos de predicados. Um ***modelo*** $\mathcal{M}$ **para (**$\mathcal{F}$**,** $\mathcal{P}$**)** consiste de:

1. um conjunto não-vazio $\mathcal{A}$, chamado de *universo de discurso*;

2. para cada símbolo funcional $f \in \mathcal{F}$ de aridade n=0 (constante), associamos um elemento concreto $f^{\mathcal{M}} \in \mathcal{A}$;

3. para cada símbolo funcional $f \in \mathcal{F}$ de aridade n>0, associamos uma função concreta $f^{\mathcal{M}}: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$;

4. para cada símbolo de predicado $p \in \mathcal{P}$ de aridade n>0, associamos uma função concreta $p^{\mathcal{M}}: \mathcal{A}^n \rightarrow \{F, T\}$; e

5. para cada símbolo de predicado $p \in \mathcal{P}$ de aridade n=0, associamos um valor de $\{F, T\}$.

Semântica da LPO: Exemplo (I)

Vocabulário (símbolos):

Considere o par $(\mathcal{F},\mathcal{P})$ em que $\mathcal{F}=\{e, .\}$ e $\mathcal{P}=\{\leq\}$, sendo e um símbolo de função constante; **.** um símbolo de função de aridade 2; e $\leq$ um predicado binário.

Modelo:

Um modelo $\mathcal{M}$ para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ contém um conjunto de elementos concretos de $\mathcal{A}$.

Semântica da LPO: Exemplo (I)

Vocabulário (símbolos):

Considere o par $(\mathcal{F},\mathcal{P})$ em que $\mathcal{F}=\{e, .\}$ e $\mathcal{P}=\{\leq\}$, sendo e um símbolo de função constante; . um símbolo de função de aridade 2; e $\leq$ um predicado binário.

Modelo $\mathcal{M}_1$

$\mathcal{A}$: conjunto de cadeias de caracteres

$e^{\mathcal{M}}$: cadeia vazia (ε)

$.^{\mathcal{M}}$: concatenação $(.^{\mathcal{M}}(a.b) = ab)$

$\leq^{\mathcal{M}}$: $\{(a,b) \in \mathcal{A}^2 \mid a \text{ é prefixo de } b\}$

Semântica da LPO: Exemplo (I)

Vocabulário (símbolos):

Considere o par $(\mathcal{F},\mathcal{P})$ em que $\mathcal{F}=\{e, .\}$ e $\mathcal{P}=\{\leq\}$, sendo e um símbolo de função constante; **.** um símbolo de função de aridade 2; e $\leq$ um predicado binário.

Modelo $\mathcal{M}_2$

$\mathcal{A}$: conjunto dos naturais $\mathbb{N}$

$e^{\mathcal{M}}$: 1

$.^{\mathcal{M}}$: multiplicação

$\leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

Semantica da LPO: Exemplo (I)

Qual é o valor verdade das sentenças?

$$\forall x \; ((x \leq x.e) \wedge (x.e \leq x))$$

Semantica da LPO: Exemplo (I)

Qual é o valor verdade das sentenças?

$$\forall x \, ((x \leq x.e) \wedge (x.e \leq x))$$

Modelo $\mathcal{M}_1$

$\mathcal{A}$: conjunto de cadeias de caracteres

$e^{\mathcal{M}}$: cadeia vazia (ε)

$.^{\mathcal{M}}$: concatenação ($.^{\mathcal{M}}(a.b) = ab$)

$\leq^{\mathcal{M}}$: $\{(a,b) \in \mathcal{A}^2 \mid a \text{ é prefixo de } b\}$

Semantica da LPO: Exemplo (I)

Qual é o valor verdade das sentenças?

$$\forall x\, ((x \leq x.e) \wedge (x.e \leq x))$$

Modelo $\mathcal{M}_2$

$\mathcal{A}$: $\mathbb{N}$ (conjunto dos naturais)

$e^{\mathcal{M}}$: 1

$.^{\mathcal{M}}$: multiplicação

$\leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

Semantica da LPO: Exemplo (I)

Qual é o valor verdade das sentenças?

$$\exists y\, \forall x\, (y \leq x)$$

$$\forall x\, \exists y\, (y \leq x \wedge y \neq x)$$

Semantica da LPO: Exemplo (I)

Qual é o valor verdade das sentenças?

$$\exists y\ \forall x\ (y \leq x)$$

$$\forall x\ \exists y\ (y \leq x \wedge y \neq x)$$

Modelo $\mathcal{M}_1$

$\mathcal{A}$: conjunto de cadeias de caracteres

$e^{\mathcal{M}}$: cadeia vazia (ε)

$.^{\mathcal{M}}$: concatenação ($.^{\mathcal{M}}(a.b) = ab$)

$\leq^{\mathcal{M}}$: $\{(a,b) \in \mathcal{A}^2 \mid$ a é prefixo de b$\}$

Semantica da LPO: Exemplo (I)

Qual é o valor verdade das sentenças?

$$\exists y \, \forall x \, (y \leq x)$$

$$\forall x \, \exists y \, (y \leq x \land y \neq x)$$

Modelo $\mathcal{M}_2$

$\mathcal{A}$: $\mathbb{N}$ (conjunto dos naturais)

$e^{\mathcal{M}}$: 1

$.^{\mathcal{M}}$: multiplicação

$\leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

Semantica da LPO: Exemplo (II)

Vocabulário (símbolos):

Considere o par $(\mathcal{F},\mathcal{P})$ em que $\mathcal{F}=\{i\}$ e $\mathcal{P}=\{G, R\}$, sendo i um símbolo constante, G um predicado unário e R um predicado binário.

Semantica da LPO: Exemplo (II)

Vocabulário (símbolos):

Considere o par ($\mathcal{F}$,$\mathcal{P}$) em que $\mathcal{F}$ ={i} e $\mathcal{P}$ ={G, R},

sendo i um símbolo constante, G um predicado unário e R um predicado binário.

Um modelo $\mathcal{M}$ para ($\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$) contém um conjunto de elementos concretos de $\mathcal{A}$, por exemplo, um conjunto de estados de um programa de computador, em que:

$i^{\mathcal{M}}$: estado inicial

$G^{\mathcal{M}}$: estado final

$R^{\mathcal{M}}$: transição de estados

Por exemplo, sejam

$\mathcal{A}$= {a, b, c}

$i^{\mathcal{M}}$ = a

$G^{\mathcal{M}}$ = {c}

$R^{\mathcal{M}}$ = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)}

Semantica da LPO: Exemplo (II)

Vocabulário (símbolos):

Considere o par ($\mathcal{F}$,$\mathcal{P}$) em que $\mathcal{F}$ ={i} e $\mathcal{P}$ ={G, R},

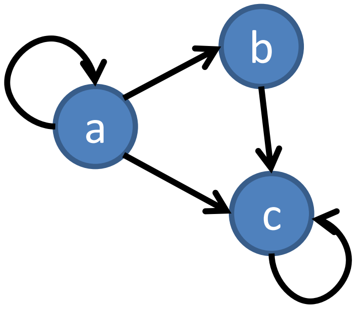
sendo i um símbolo constante, G um predicado unário e R um predicado binário.

Um modelo $\mathcal{M}$ para ($\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$) contém um conjunto de elementos concretos de $\mathcal{A}$, por exemplo, um conjunto de estados de um programa de computador, em que:

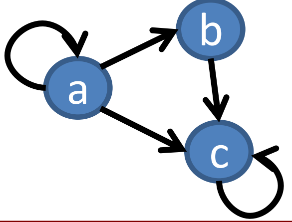
- $i^{\mathcal{M}}$: estado inicial
- $G^{\mathcal{M}}$: estado final
- $R^{\mathcal{M}}$: transição de estados

Por exemplo, sejam

- $\mathcal{A}$= {a, b, c}
- $i^{\mathcal{M}}$ = a
- $G^{\mathcal{M}}$ = {c}
- $R^{\mathcal{M}}$ = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)}



Semantica da LPO: Exemplo (II)



$\mathcal{A}$= {a, b, c},
$i^{\mathcal{M}}$ = a,
$G^{\mathcal{M}}$ = {c}
$R^{\mathcal{M}}$ = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)}

Dado $\mathcal{M}$ para ($\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$) , qual é o valor verdade das fórmulas?

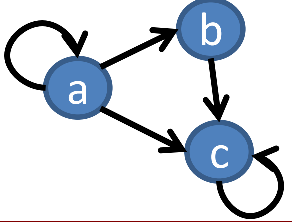
$\exists y\ R(i,y)$

$\neg\ G(i)$

$\forall x \forall y \forall z\ (R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow y = z)$

$\forall x\ \exists y\ R(x,y)$

Semantica da LPO: Exemplo (II)



Dado $\mathcal{M}$ para ($\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$) , qual é o valor verdade das fórmulas?

$\mathcal{A}$= {a, b, c},
$i^{\mathcal{M}}$ = a,
$G^{\mathcal{M}}$ = {c}
$R^{\mathcal{M}}$ = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)}

$\exists y\ R(i,y)$

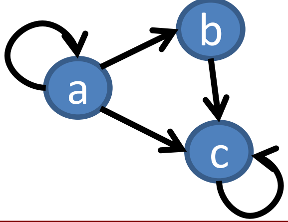
Verdade, uma vez que existem as relações {(a,a), (a,b), (a,c)} em $R^{\mathcal{M}}$

$\neg\ G(i)$

$\forall x \forall y \forall z\ (R(x,y) \land R(x,z) \rightarrow y = z)$

$\forall x\ \exists y\ R(x,y)$

Semantica da LPO: Exemplo (II)



Dado $\mathcal{M}$ para ($\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$) , qual é o valor verdade das fórmulas?

$\mathcal{A}$= {a, b, c},
$i^{\mathcal{M}}$ = a,
$G^{\mathcal{M}}$ = {c}
$R^{\mathcal{M}}$ = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)}

$\exists y\ R(i,y)$

Verdade, uma vez que existem as relações {(a,a), (a,b), (a,c)} em $R^{\mathcal{M}}$

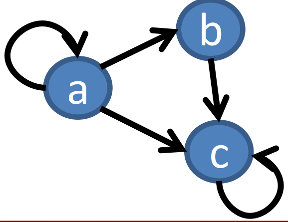
$\neg\ G(i)$

Verdade, uma vez que o estado inicial i não é um dos estados finais.

$\forall x \forall y \forall z\ (R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow y = z)$

$\forall x\ \exists y\ R(x,y)$

Semantica da LPO: Exemplo (II)



Dado $\mathcal{M}$ para ($\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$) , qual é o valor verdade das fórmulas?

$\mathcal{A}$= {a, b, c},
$i^{\mathcal{M}}$ = a,
$G^{\mathcal{M}}$ = {c}
$R^{\mathcal{M}}$ = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)}

$\exists y\ R(i,y)$

Verdade, uma vez que existem as relações {(a,a), (a,b), (a,c)} em $R^{\mathcal{M}}$

$\neg\ G(i)$

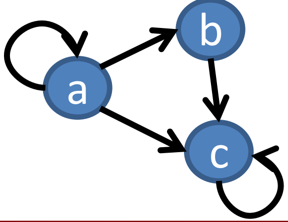
Verdade, uma vez que o estado inicial i não é um dos estados finais.

$\forall x \forall y \forall z\ (R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow y = z)$

Falso, uma vez que {(a,a), (a,b), (a,c)}

$\forall x\ \exists y\ R(x,y)$

Semantica da LPO: Exemplo (II)



Dado $\mathcal{M}$ para ($\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$) , qual é o valor verdade das fórmulas?

$\mathcal{A}$= {a, b, c},
$i^{\mathcal{M}}$ = a,
$G^{\mathcal{M}}$ = {c}
$R^{\mathcal{M}}$ = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)}

$\exists y\ R(i,y)$

Verdade, uma vez que existem as relações {(a,a), (a,b), (a,c)} em $R^{\mathcal{M}}$

$\neg\ G(i)$

Verdade, uma vez que o estado inicial i não é um dos estados finais.

$\forall x \forall y \forall z\ (R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow y = z)$

Falso, uma vez que {(a,a), (a,b), (a,c)}

$\forall x\ \exists y\ R(x,y)$

Verdade, uma vez existe pelo menos uma transição de todo estado para outro (ou ele mesmo).

Igualdade

Interpretação de igualdade

– $a =^{\mathcal{M}} b$ é verdade sse a e b são os **mesmos elementos** no universo $\mathcal{A}$ do modelo $\mathcal{M}$.

Exemplo: Considere o par $(\mathcal{F},\mathcal{P})$ em que $\mathcal{F} = \{z,s\}$ e $\mathcal{P} = \{\leq\}$

Seja o modelo $\mathcal{M}$ para $(\mathcal{F},\mathcal{P})$ definido como:

$\mathcal{A}$: $\mathbb{N}$ (conjunto dos naturais)

$z^{\mathcal{M}}$: 0 (função de aridade 0, i.e., a constante 0);

$s^{\mathcal{M}}$: função soma um, de aridade 1 , sendo $s(n)= n+1$

$\leq^{\mathcal{M}}$: predicado "menor ou igual" de aridade 2, tal que $(n_1 , n_2) \in \leq^{\mathcal{M}}$

Nesse modelo a relação $=^{\mathcal{M}}$ é um subconjunto de $\leq^{\mathcal{M}}$, isto é, $=^{\mathcal{M}} \subseteq \leq^{\mathcal{M}}$, dos pares (n1,n2) tal que $n_1= n_2$

Valor-verdade para fórmulas da LPO

Dada uma fórmula $\forall x \Phi$ (ou $\exists x \Phi$) queremos verificar se ela é válida para todo (ou para algum) valor $a \in \mathcal{A}$ em nosso modelo $\mathcal{M}$. Sabemos como interpretar funções e predicados, mas *como interpretamos os valores das variáveis em nosso modelo?*

- Ideia: uso de uma tabela que associa cada variável x, a um valor no modelo
- Podemos interpretar variáveis fornecendo uma tabela que atribui a cada variável um valor concreto do universo de discurso

$$l: \text{var} \rightarrow \mathcal{A}$$

Chamamos a tabela l de ***tabela de contexto.***

Definição (Tabela de Contexto). Seja a tabela $l: \text{var} \rightarrow \mathcal{A}$, e seja $a \in \mathcal{A}$. Denotamos por $l[x \mapsto a]$ a nova tabela que mapeia x para a e qualquer outra variável y para $l(y)$. Ou seja, a única diferença entre as tabelas $l[x \mapsto a]$ e l é a atribuição de a para a variável x:

$$l[x \mapsto a](x) = a$$

$$l[x \mapsto a](y) = l(y)$$

Satisfação de fórmulas da LPO

Definição: Dado um modelo $\mathcal{M}$ o par $(\mathcal{F},\mathcal{P})$, e dado uma tabela de contexto l, definimos a relação de satisfação:

$$\mathcal{M} \models_{l} \Phi$$

(modelo $\mathcal{M}$ **satisfaz** Φ com relação ao contexto l), para cada fórmula Φ sobre o par $(\mathcal{F},\mathcal{P})$ por indução estrutural sobre Φ :

- Se Φ é da forma $P(t_1, t_2, ..., t_n)$, dizemos que $\mathcal{M} \models_{l} \Phi$ sse $a_1, a_2, ..., a_n$ são resultados da *interpretação* de $t_1, t_2, ..., t_n$ com relação a l e $(a_1, a_2, ..., a_n) \in P^{\mathcal{M}}(a_1, a_2, ..., a_n)$;
- Se Φ é da forma P, dizemos que $\mathcal{M} \models_{l} \Phi$ sse $P \in P^{\mathcal{M}}$;
- Se Φ é da forma $\Psi_1 \vee \Psi_2$, dizemos que $\mathcal{M} \models_{l} \Psi_1 \vee \Psi_2$ sse $\mathcal{M} \models_{l} \Psi_1$ **ou** $\mathcal{M} \models_{l} \Psi_2$
- Se Φ é da forma $\Psi_1 \wedge \Psi_2$, dizemos que $\mathcal{M} \models_{l} \Psi_1 \wedge \Psi_2$ sse $\mathcal{M} \models_{l} \Psi_1$ **e** $\mathcal{M} \models_{l} \Psi_2$
- Se Φ é da forma $\Psi_1 \rightarrow \Psi_2$, dizemos que $\mathcal{M} \models_{l} \Psi_2$ sse $\mathcal{M} \not\models_{l} \Psi_1$ **ou** $\mathcal{M} \models_{l} \Psi_2$

Satisfação de fórmulas da LPO

- Se Φ é da forma $\forall x\ \Psi$, dizemos que $\mathcal{M} \models_{\iota} \forall x\ \Psi$ sse $\mathcal{M} \models_{\iota} \Psi$ para **qualquer** $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M} \models_{\iota[x \mapsto a]} \Psi$
- Se Φ é da forma $\exists\ x\Psi$, dizemos que $\mathcal{M} \models_{\iota} \exists\ x\Psi$ sse $\mathcal{M} \models_{\iota} \Psi$ para **algum** $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M} \models_{\iota[x \mapsto a]} \Psi$
- Se Φ é da forma $\neg\ \Psi$, dizemos que $\mathcal{M} \models_{\iota} \neg\ \Psi$ sse $\mathcal{M} \not\models_{\iota} \Psi$

Exemplo 2.19

- Seja $\mathcal{F}$={lucia} e $\mathcal{P}$={ama}, sendo que lucia é uma constante e ama é um predicado com aridade 2. O modelo $\mathcal{M}$ que escolhemos é $A^{\mathcal{M}}$={a, b, c}, a constante $lucia^{\mathcal{M}}$=a e o predicado $ama^{\mathcal{M}}$={(a,a), (b,a), (c,a)} .
- Queremos verificar se o modelo $\mathcal{M}$ satisfaz

"*Nenhum dos amantes dos amantes de Lucia a ama*"

que em lógica de predicados fica:

$$\forall x \forall y\ (ama(x,lucia) \wedge ama(y,x) \rightarrow \neg\ ama(y,lucia))$$

O modelo $\mathcal{M}$ não satisfaz a fórmula. No entanto se trocarmos a interpretação de ama para $ama^{\mathcal{M}}$={(b,a), (c,b)} , esse modelo novo satisfaz a sentença.

Exemplo de satisfação de fórmula LPO

Modelo $\mathcal{M}$

- $\mathcal{A}$: {1,2,3}
- $R^{\mathcal{M}}$: {(1,2). (2,2), (3,2)}
- $\mathcal{l}$: var $\rightarrow \mathcal{A}$

$$\mathcal{M} \models_{\mathcal{l}} \exists y\ \forall x\ R(x; y)\ ?$$

$\mathcal{M} \models_{\mathcal{l}} \exists y\ \forall x\ R(x; y)$

$\Leftrightarrow$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M} \models_{\mathcal{l}[y \mapsto d1]} \forall x\ R(x, y)$

$\Leftrightarrow$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:

$$\mathcal{M} \models_{\mathcal{l}[y \mapsto d1],\ \mathcal{l}[x \mapsto d2]} R(x; y)$$

$\Leftrightarrow$ existe um d1 $\in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$: $(d_1, d_2) \in R^{\mathcal{M}}$

Seja $d_1 = 2$. Para todo $d_2 \in \mathcal{A}$ vale que $(d_2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

De fato: $(1,2) \in R^{\mathcal{M}}$, $(2,2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(2,2) \in R^{\mathcal{M}}$

Assim, podemos dizer que $\mathcal{M}$ satisfaz a fórmula $\exists y\ \forall x\ R(x; y)$

Definição (Consequência lógica). Seja Φ_1 , Φ_2 , ..., Φ_n, Ψ, fórmulas da LPO. A consequência lógica entre fórmulas: Φ_1 , Φ_2 , ..., $\Phi_n \models \Psi$, requer que para qualquer modelo $\mathcal{M}$ e qualquer tabela de contexto l que satisfazem Φ_1 , Φ_2 , ..., Φ_n , a fórmula Ψ também seja satisfeita.

$$\Phi_1 , \Phi_2 , ..., \Phi_n \models \Psi$$

$$\Updownarrow$$

Se $\mathcal{M} \models_l \Phi_i$ então $\mathcal{M} \models_l \Psi$

Definição (Consequência lógica). Seja Φ_1 , Φ_2 , ..., Φ_n, Ψ, fórmulas da LPO. A consequência lógica entre fórmulas: Φ_1 , Φ_2 , ..., $\Phi_n \models \Psi$, requer que para qualquer modelo $\mathcal{M}$ e qualquer tabela de contexto l que satisfazem Φ_1 , Φ_2 , ..., Φ_n , a fórmula Ψ também seja satisfeita.

Em geral o número de modelos é infinito e por isso, é muito difícil fazer provas em termos da semântica na LPO.

- Note que o símbolo $\models$ tem 2 usos diferentes (*overloaded*):
  - Φ_1 , Φ_2 , ..., $\Phi_n \models \Psi$ que denota ***consequência lógica***
  - $\mathcal{M} \models \Phi$ que denota ***satisfatibilidade*** ($\mathcal{M}$ satisfaz Φ)

Dois usos de |=

1. Para verificar $\mathcal{M} \models \varphi$, se $\mathcal{A}$ for infinito, podemos ter de testar infinitos elementos.
2. Para verificar $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$, temos de verificar **todos** os modelos.

Consequência Lógica na LPO: Exemplo (prova por contra-exemplo)

Considere o argumento:

$$\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

Seja $\mathcal{M}$ um modelo que satisfaz $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$. Se A é o universo de $\mathcal{M}$, um $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{Q}^{\mathcal{M}}$ são as interpretações de P e Q, então

$$\mathcal{M} \models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$$

Duas possibilidades:

1. se $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}$ é igual a A, então $\mathcal{Q}^{\mathcal{M}}$ deve também ser igual a A.
2. se $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}$ não é igual a A então essa implicação não é verdadeira.

Assim, é fácil construir um contra-exemplo.

Seja $A=\{a,b\}$, $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}=\{a\}$, $\mathcal{Q}^{\mathcal{M}}=\{b\}$. Verificamos portanto que

$$\mathcal{M} \models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$$

é verdadeiro e

$$\mathcal{M} \models \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$ não é.