

PEDRO GIGECK FREIRE

10737136

14/06/2021

EXERCÍCIO EM CLASSE 09

TERMO DE COMPROMETIMENTO

Eu me comprometo a manter uma conduta ética e adequada durante a realização desta tarefa. Exemplos de conduta inadequada são fornecer e/ou receber auxílio de outras pessoas, consultar material não autorizado (que não consta na página do curso ou na literatura recomendada), entre outras

Pedro Gigeck Freire

X_1, X_2, \dots, X_n n.a. identicamente distribuídas e independentes

$$E(X_i) = \mu, \quad \text{Var}(X_i) = \sigma^2$$

$$\bar{X} := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad e \quad \hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

a) Calcule $E(\bar{X})$ e $\text{Var}(\bar{X})$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n} [E(X_1) + \dots + E(X_n)]$$

pela linearidade da esperança

$$= \frac{1}{n} (\mu + \dots + \mu)$$

$$= \frac{1}{n} n \cdot \mu = \boxed{\mu}$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} (\text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)) + 0 \quad (\text{pois } X_i \text{ são independentes})$$

$$= \frac{n \cdot \text{Var}(X)}{n^2} = \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}$$

b) Calcule $E(\hat{\sigma}^2)$

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right]\right)$$

$$= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) \quad (\text{pela linearidade})$$

$$= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right)$$

$$= \frac{1}{n} \left[E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) - E\left(\sum_{i=1}^n 2X_i\bar{X}\right) + E\left(\sum_{i=1}^n \bar{X}^2\right) \right] \quad (\text{pela linearidade})$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - 2E\left(\sum_{i=1}^n X_i\bar{X}\right) + E\left(\sum_{i=1}^n \bar{X}^2\right) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(n \cdot E(X_i^2) - 2E\left(\sum_{i=1}^n X_i\bar{X}\right) + E\left(\sum_{i=1}^n \bar{X}^2\right) \right)$$

$$= \dots \quad (\text{acabou o tempo 'n'})$$

$$= \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad (\text{exercício 8 lista 7})$$