MAC105 FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA A COMPUTAÇÃO

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Pedro Gigeck Freire **Número USP:** 10737136

Assinatura

Pedro Gigeck Freire

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E37 **Data:** 09/05/2018

SOLUÇÃO

(i) Podemos, a partir da equação $\alpha + \beta = 1$, obter que $n = \lfloor \alpha n \rfloor + \lceil \beta n \rceil$ da seguinte forma:

$\alpha + \beta = 1 \Rightarrow n(\alpha+\beta) = n \Rightarrow \alpha n + \beta n = n \Rightarrow \alpha n = n - \beta n$, aqui, podemos aplicar a função piso. Segue:

$\lfloor \alpha n \rfloor = \lfloor n - \beta n \rfloor$, como $n \in \mathbb{Z}$, podemos "separá-lo" da adição:

$\lfloor \alpha n \rfloor = n + \lfloor -\beta n \rfloor \Rightarrow \lfloor \alpha n \rfloor \underbrace{- \lfloor -\beta n \rfloor} = n$. Consideremos o fato $\underbrace{\lceil x \rceil = - \lfloor -x \rfloor}$

Assim, temos

$$\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \lfloor \alpha n \rfloor + \lceil \beta n \rceil = n.$$

(ii) Vamos testar o caso base ($k=1$)

Temos que provar $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. Para isso, devemos perceber que dois números a e b tem pisos de raízes iguais ($\lfloor \sqrt{a} \rfloor = \lfloor \sqrt{b} \rfloor$) sempre que a e b pertecem ao mesmo intervalo entre potências de dois, que é quando a função $\sqrt[2]{\ }$ aumenta a casa inteira. isto é:

$$\lfloor \sqrt{a} \rfloor = \lfloor \sqrt{b} \rfloor \Rightarrow 2^k \leq a, b < 2^{k+1}, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}$$

Como neste caso $a = \lfloor x \rfloor$ e $b = x$ temos que A diferença entre x e $\lfloor x \rfloor$ é menor que 1, portanto $2^k \leq \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \leq 2^{k+1}$, como definido,

$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$ de fato para $k = 1$.

Agora, suponha que sabemos que a equação em questão vale para $k-1$, vamos provar por indução em k que $A(k-1) \Rightarrow A(k)$ onde A é a ingualdade enunciada.

Temos:

$$\underbrace{\left\lfloor \sqrt{\cdots \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \cdots} \right\rfloor}_{k-1 \text{ vezes}} = \left\lfloor \sqrt[2^{k-1}]{x} \right\rfloor$$

Seja $a = x^{1/2^{k-1}}$

$b = \lfloor \sqrt{\cdots \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \cdots} \rfloor$

Segue que

$A(k-1) \Rightarrow \lfloor a \rfloor = b$, quando aumentamos o k, faremos

$A(k) \to \lfloor \sqrt{a} \rfloor = \lfloor \sqrt{b} \rfloor$, porém, como sei que $\lfloor a \rfloor = b$, temos

$A(k) \to \lfloor \sqrt{a} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor a \rfloor} \rfloor$. Neste caso, conforme explicado no caso de base, se a e $\lfloor a \rfloor$ pertencerem ao mesmo intervalo de potências inteiras de 2, o piso de suas raízes quadradas é igual. isto é

Para algum n, $2^n \leqslant a, \lfloor a \rfloor < 2^{n+1}$

Porém, sabemos que $\underline{2^n} \leqslant \lfloor a \rfloor \leqslant \underline{a <} \lfloor a \rfloor + 1 \leqslant \underline{2^{n+1}}$. Portanto, $2^n \leqslant \lfloor a \rfloor \leqslant a < 2^{n+1}$.

Assim $A(k-1) \Rightarrow A(k)$

O resultado segue pelo princípio de indução.

(iii) Vamos provar por indução em k

Base: $k = 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ que é verdadeiro.

Suponha que sabemos que para $A(k-1)$ é válido, sendo A a igualdade em questão

Temos $\left\lfloor \frac{n}{2^{k-1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{2} \right\rfloor}{\vdots \atop 2} \right\rfloor$ $k-1$ vezes $(*)$

Seja a o lado direito da equação e $b = \frac{n}{2^{k-1}}$

Temos de $(*)$

$\lfloor b \rfloor = a \Rightarrow \left\lfloor \frac{\lfloor b \rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ $(**)$

Quando somamos 1 ao k, obtemos de $(*)$ $\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor \Rightarrow \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$, de $(**)$ obtemos:

$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor b \rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$. Sabemos que $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor$ para quaisquer x e y que estão no intervalo $2m \leqslant x, y < 2(m+1)$, ~~[illegible]~~ para algum m; e $\lfloor b \rfloor$ e b satisfazem tal desigualdade. logo, $A(k-1) \Rightarrow A(k)$. O resultado segue por indução.

Index of comments

1.1 (...) ao mesmo intervalo entre quadrados perfeitos.

2.1 Você fez a prova ao contrário. Deve-se começar de uma equação conhecida e chegar na equação que quer-se provar.