MAP 0217 - Cálculo Diferencial

MAT0311 - Cálculo Diferencial e Integral V

1ª Prova

Pedro Gigeck Freire
10737136

Questão 1: Mostre que se $F \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto, então $F \setminus A$ é fechado.

Precisamos mostrar que $(F \setminus A)^c$ é aberto.

Lembramos que $F \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in F \text{ e } x \notin A\}$

Logo, o complementar é o conjunto dos $x \in \mathbb{R}^n$ que não satisfazem essa condição, ou seja

$$(F \setminus A)^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin F \text{ ou } x \in A\} = F^c \cup A.$$

Como F é fechado, por definição F^c é aberto.

Portanto $(F \setminus A)^c$ é a união de dois conjuntos abertos, pelos resultados vistos em aula, uma união finita de abertos é aberto.

Então $F \setminus A$ é fechado.

Questão 2 Na tabela abaixo $M = \mathbb{R}$ ou $M = \mathbb{R}^2$ conforme indicado, e X é um subconjunto de M. Considere $\bigcup_n A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Complete as lacunas com os subconjuntos correspondentes:

(Dividi a tabela para caber)

M	$X \subseteq M$	X°	∂X
$\mathbb{R}$	$\bigcap_n \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$	$(0,1)$	$\{0,1\}$
$\mathbb{R}$	$\bigcup_n \left[\frac{1}{3n}, \frac{1}{3n-1}\right]$	$\bigcup_n \left(\frac{1}{3n}, \frac{1}{3n-1}\right)$	$\bigcup_n \{1/3n, 1/3n-1\}$
$\mathbb{R}^2$	$\bigcup_n \left(B_{\frac{1}{3n}}[0] \setminus B_{\frac{1}{3n+1}}(0)\right)$	X sem as fronteiras $\bigcup_n \left(B_{1/3n}(0) \setminus B_{1/3n+1}[0]\right)$	contorno das bolas: $\bigcup_n \left(S_{1/3n}[0] \cup S_{1/3n+1}[0]\right)$

M	$X \subseteq M$	X'	$\overline{X}$	X é aberto ?	X é fechado ?
$\mathbb{R}$	$\bigcap_n \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$	$[0,1]$	$[0,1]$	Não	Sim
$\mathbb{R}$	$\bigcup_n \left[\frac{1}{3n}, \frac{1}{3n-1}\right]$	X	X	Não	Sim
$\mathbb{R}^2$	$\bigcup_n B_{\frac{1}{3n}}[0] \setminus B_{\frac{1}{3n+1}}(0)$	X	X	Não	Sim

Questão 3 Na tabela abaixo, considere M como espaço métrico com a métrica discreta. Complete as lacunas com os subconjuntos correspondentes.

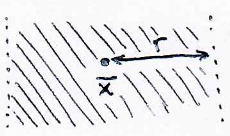
M	$X \subseteq M$	X°	∂X	X'	$\overline{X}$	X é aberto ?	X é fechado ?
$\mathbb{R}$	$\bigcap_n \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$	$[0,1] = X$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[0,1]$	Sim	Sim
$\mathbb{R}$	$\bigcup_n \left[\frac{1}{3n}, \frac{1}{3n-1}\right]$	$\bigcup_n \left[\frac{1}{3n}, \frac{1}{3n-1}\right] = X$	$\emptyset$	$\emptyset$	X	Sim	Sim
$\mathbb{R}^2$	$\bigcup_n B_{\frac{1}{3n}}[0] \setminus B_{\frac{1}{3n+1}}(0)$	$\emptyset = X$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	Sim	Sim

Questão 4 Seja $M = \mathbb{R}^2$ com métrica $\tilde{d}(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, d_*(x_2, y_2)\}$, onde d_* é a métrica discreta

Vamos, primeiro, entender como são as bolas nesse espaço métrico

Se $r \geq 1$

$B_r(\bar{x}) =$ Faixa do plano



Se $r < 1$

$B_r(\bar{x}) =$ Apenas a linha, onde $x_2 = y_2$

Considere os subconjuntos de M dados, responda.

$X \subseteq M$	X é aberto?	Justificativa	X é limitado?	Justificativa
$(0,1)\times(0,1)$	Sim	$\varepsilon = \frac{\min\{x_1, 1-x_1\}}{2}$, $\varepsilon < 1$. $\Rightarrow (x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon) \in (0,1)$. $\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq (0,1)^2 \ \forall x \in X$.	Sim	$r = 2$ $\bar{x} = (1/2, 1/2)$ $B_r(\bar{x}) \supseteq X$.
$[0,1]\times[0,1]$	Não	Nenhuma bola centrada em $(0,0)$ está contida em X pois $\forall r>0$, $(-\frac{r}{2},0)\in B_r(0)$ mas $(-\frac{r}{2},0) \notin X$.	Sim	$r = 2$ $\bar{x} = (1/2, 1/2)$ $B_r(\bar{x}) \supseteq X$.
$[0,1]\times(0,1)$	Não	Nenhuma bola centrada em $(0,1/2)$ está em X. Pois $\forall r>0$, $(-\frac{r}{2},1/2)\in B_r((0,1/2))$ mas $(-\frac{r}{2},1/2)\notin X$.	Sim	$r = 2$ $\bar{x} = (1/2, 1/2)$ $B_r(\bar{x}) \supseteq X$.
$(0,1)\times[0,1]$	Sim	$\varepsilon = \frac{\min\{x_1, 1-x_1\}}{2}$, $\varepsilon < 1$. $B_\varepsilon(x) = (x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon)\times\{x_2\} \Rightarrow$ $B_\varepsilon(x) \subseteq X \ \forall x \in X$.	Sim	$r = 2$ $\bar{x} = (1/2, 1/2)$ $B_r(\bar{x}) \supseteq X$.
$\mathbb{N}\times(0,1)$	Não	Nenhuma bola centrada em $(1,1/2)$ está em X. $\forall r>0$, $(1-r/2, 1/2)\in B_r((1,1/2))$ mas $(1-r/2, 1/2)\notin X$.	Não	Nenhuma bola contem X. $\forall r>0$, $\forall x\in X$, $B_r(x)$ não contem o ponto $(\lceil x+r\rceil, 1/2)$, então $B_r(x) \not\supseteq X$.
$(0,1)\times\mathbb{N}$	Sim	Pegamos a mesma bola de raio $\varepsilon = \frac{\min\{x_1, 1-x_1\}}{2}$, $B_\varepsilon(x) = (x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon)\times\{x_2\}$ Mas $0 < x_1-\varepsilon < x_1+\varepsilon < 1$ Então $B_\varepsilon(x) \subset X$.	Sim	$r = 2$ $\bar{x} = (1/2, 1)$ $B_r(\bar{x}) \supseteq X$.

$X \subseteq M$	X é aberto?	Justificativa	X é limitado?	Justificativa
$\mathbb{N} \times [0,1]$	Não	Nenhuma bola de centro em $(1, 1/2)$ está em X. $\forall r > 0$, $((1 - r/2, 1/2)) \in B_r(1, 1/2)$ mas $(1 - r/2, 1/2) \notin X$.	Não	Nenhuma bola de centro em $\bar{x}$, raio r qualquer contém X pois $(\lceil \bar{x} + r \rceil, 1/2)$ não está na bola.
$[0,1] \times \mathbb{N}$	Não	Nenhuma bola centrada em $(0,1)$ está contida em X. pois $\forall r > 0$, $(-\frac{r}{2}, 1) \in B_r(0,1)$ mas $(-\frac{r}{2}, 1) \notin X$.	Sim	$r = 2$ $\bar{x} = (1/2, 1)$ $B_r(\bar{x}) \supseteq X$.

Questão 5 Decida se cada uma das sequências abaixo converge em $\mathbb{R}^3$ e em caso afirmativo, calcule seu limite. Justifique suas afirmações.

(a) $x_n = \left(\frac{1}{n} + e^{-n}, \frac{\sin n}{n}, a + a^2 + a^3 + \dots + a^n\right), n \in \mathbb{N}$, onde $a \in (-1, 1)$

x_n converge. Seu limite é $\left(0, 0, \frac{a}{1-a}\right)$

Pelo exercício 6, sabemos que $x_n \to \bar{x} \Leftrightarrow x_n^i \to \bar{x}_i$, então vamos verificar cada componente.

(i) $x_n^1 = (1/n + e^{-n}) \longrightarrow 0 = \bar{x}^1$

Para qualquer $\varepsilon > 0$, tomamos $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} + |\ln(\varepsilon/2)| + 1 \right\rceil$.

De fato, se $n \geq n_\varepsilon$, então

$$n \geq \lceil 2/\varepsilon + |\ln(\varepsilon/2)| + 1 \rceil \geq 2/\varepsilon + |\ln(\varepsilon/2)| + 1 > 2/\varepsilon + |\ln(\varepsilon/2)|$$

Logo, $n > 2/\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon/2$ e

$$n > |\ln(\varepsilon/2)| \geq -\ln(\varepsilon/2) \Rightarrow -n < \ln(\varepsilon/2) \Rightarrow e^{-n} < \varepsilon/2$$

Então $d(x_n, 0) = |x_n - 0| = |x_n| = \left|\frac{1}{n} + e^{-n}\right| = \frac{1}{n} + e^{-n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\left(d(x_n, 0) < \varepsilon\right)$

Portanto $x_n \to 0$.

(ii) $x_n^2 = \dfrac{\sin n}{n} \longrightarrow 0 = \bar{x}^2$

Sabemos que $0 \leqslant d(x_n^2, 0) = \left|\dfrac{\sin n}{n}\right| \leqslant \dfrac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Mas, $\dfrac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, então, pelo teorema do confronto, $d(x_n^2, 0) \to 0$, então x_n^2 converge para $0 = \bar{x}^2$.

(iii) $x_n^3 = a + a^2 + \cdots + a^n \longrightarrow \dfrac{a}{1-a} = \bar{x}^3$.

Como $|a| < 1$, sabemos de cursos anteriores que a soma da p.g. $\left(\sum_{i=1}^{n} a^i\right)$ tende a $\dfrac{a}{1-a}$, pois $\sum_{i=1}^{n} a^i = \dfrac{a(a^n-1)}{a-1}$ e $a^n \to 0$.

Portando $x_n^1 \to \bar{x}^1$, $x_n^2 \to \bar{x}^2$ e $x_n^3 \to \bar{x}^3$, logo $x_n \to \bar{x}$.

(b) $x_n = \left(ne^{-n}, \cos(1/n), (-1)^n\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

x_n não converge, pois a terceira componente não converge.

Dem:

Suponha, por absurdo, que x_n^3 converge para $\bar{x}$.

Então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. se $n \geqslant n_\varepsilon$ então $d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$.

Então seja $n \geqslant n_\varepsilon$, $d(x_n^3, \bar{x}) < \varepsilon \Rightarrow |(-1)^n - \bar{x}| < \varepsilon \Rightarrow (-1)^n - \bar{x} < \varepsilon$

Se n é par $1 - \bar{x} < \varepsilon$, então $n+1 \geqslant n_\varepsilon$ é impar, logo $-1 - \bar{x} < \varepsilon$,

Portanto $\begin{cases} 1 - \bar{x} < \varepsilon \\ -1 - \bar{x} < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow 2 + (-\bar{x} - (-\bar{x})) < \varepsilon - \varepsilon \Rightarrow 2 < 0$, absurdo. Logo, x_n^3 diverge.

(c) $x_n = \left(2, \dfrac{\sin n}{n}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

x_n não converge, pois a terceira componente não converge.

Podemos demonstrar isso com conhecimentos de cursos anteriores, pois a série harmônica $\sum_{i=1}^{n} 1/i$ não converge, já que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} 1/i > \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\lceil \log i \rceil} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$, que diverge.

Questão 6 Mostre que em $\mathbb{R}^k$ toda sequência de Cauchy é convergente.

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^k$.

- Vamos mostrar que (x_n) é limitada

Vamos escolher, por conveniência $\varepsilon = 1$, então existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$d(x_n, x_n) < 1$ para todos $n, m \geq n_\varepsilon$.

Em particular $d(x_n, x_{n_\varepsilon}) < 1$

Então tomamos uma bola centrada em x_{n_ε} de raio 1, temos que

$B_1(x_{n_\varepsilon}) \supseteq \{x_n : n \geq n_\varepsilon\}$.

Então a parte da sequência após n_ε é limitada, mas a parte antes de n_ε é finita, podemos tomar

$r = \max\{d(x_1, x_{n_\varepsilon}), d(x_2, x_{n_\varepsilon}), \dots, d(x_{n_\varepsilon - 1}, x_{n_\varepsilon})\}$

De modo que $B_r(x_{n_\varepsilon}) \supseteq \{x_n : n < n_\varepsilon\}$

Assim, seja $r' = \max(r, 1)$, temos que

$B_r(x_{n_\varepsilon}) \subseteq B_{r'}(x_{n_\varepsilon})$ e

$B_1(x_{n_\varepsilon}) \subseteq B_{r'}(x_{n_\varepsilon})$

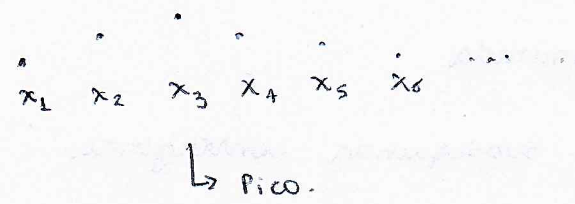
Logo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_{r'}(x_{n_\varepsilon})$.

Então (x_n) é limitada.

- Agora, vamos mostrar que existe uma subsequência de x_n que é monótona, ou seja existe uma subsequência (x_{n_k}) tal que se $n_i > n_j$ então $\|x_{n_i}\| \geq \|x_{n_j}\|$ (monótona crescente) ou

$\|x_{n_l}\| \leqslant \|x_{n_j}\|$ (monótona decrescente)

<u>Def</u>: Um termo x_k é um <u>pico</u> se $\forall\, n \geqslant k$, $\|a_k\| \geqslant \|a_n\|$



Se (x_n) tem infinitos picos, x_{n_k}, então a sequência dos picos (x_{n_k}) é monótona.

Se (x_n) tem um número finito de picos, então

seja x_k o último pico (pico de maior índice k)

Tomamos $s_1 = k + 1$

Então x_{s_1} não é um pico, logo, existe $s_2 > s_1$ tq $x_{s_1} < x_{s_2}$.

Mas x_{s_2} também não é um pico, então existe $s_3 > s_2$ tq $x_{s_2} < x_{s_3}$.

Então definimos indutivamente a sequência (x_{s_i}) que é monótona decrescente.

Então para toda sequencia (x_n) existe uma subsequência monótona (x_{n_k}).

• Agora, vamos mostrar que toda ~~seq~~ sequência limitada tem uma subsequencia ~~l~~ convergente.

Como toda sequência (x_n) tem uma subsequencia (x_{n_k}) monótona, e (x_n), pela hipótese, é limitada, então (x_{n_k}) é limitada.

E uma sequência monótona e limitada é convergente.

- Por fim, vamos recapitular

Seja (x_n) uma sequência de cauchy.

Vimos que (x_n) é limitada

Então (x_n) tem uma subsequencia convergente.

Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) convergente, com

$$(x_{n_k}) \xrightarrow[n_k \to \infty]{} L.$$

- Dado $\varepsilon > 0$, como x_{n_k} é convergente, tomamos $n_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{n_k}, L) < \varepsilon/2 \quad \forall\, n_k \geq n_{\varepsilon/2}.$$

- Como (x_n) é de Cauchy, existe $n'_{\varepsilon/2}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \quad \forall\, n, m \geq n'_{\varepsilon/2}$$

Portanto, tomamos $l \geq n_{\varepsilon/2}$ tal que $n_l \geq n'_{\varepsilon/2}$, então $\forall\, n \geq n'_{\varepsilon/2}$

$$\| x_n - L \| = \| x_n - x_{n_l} + x_{n_l} - L \| \underset{\substack{\text{Desigualdade} \\ \text{Triangular}}}{\leq} \| x_n - x_{n_l} \| + \| x_{n_l} - L \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, dado qualquer ε, existe $n_\varepsilon = n'_{\varepsilon/2}$ tq

$d(x_n, L) < \varepsilon$, então x_n é convergente.

QUESTÃO 8 Seja $M = C([0,1])$ com a norma $\| \, \|_1$ e considere em M a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $f_n(t) = t^n$. Seja $\bar{f} \in M$ a função nula.

Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Com a métrica dada por $\| \|_1$, a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\bar{f}$.

Verdadeiro, pois para qualquer $\varepsilon > 0$, tomamos

$$n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$, de modo que se $n \geq n_\varepsilon$

$$n \geq \lceil 1/\varepsilon \rceil \geq 1/\varepsilon > 1/\varepsilon - 1 = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$n\varepsilon > 1 - \varepsilon \Rightarrow n\varepsilon + \varepsilon > 1 \Rightarrow \varepsilon(n+1) > 1 \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{n+1}$$

Mas $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n \, dt = \| f_n \|_1 = \| f_n - \bar{f} \|$

Ou seja $d(f_n, \bar{f}) < \varepsilon$.

Então (f_n) converge para $\bar{f}$.

(b) Com a métrica dada por $\| \|_2$, a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\bar{f}$.

Verdadeiro, pois para qualquer $\varepsilon > 0$, tomamos

$$n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil$$, de modo que se $n \geq n_\varepsilon$

$$n \geq n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil \geq \frac{1}{\varepsilon^2} > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 > \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)\Big/ 2 \Rightarrow$$

$$2n > 1/\varepsilon^2 - 1 \Rightarrow 2n + 1 > 1/\varepsilon^2 \Rightarrow \varepsilon^2 > 1/(2n+1) \Rightarrow$$

$$\sqrt{\varepsilon^2} > \sqrt{1/2n+1} \Rightarrow$$

$$\varepsilon > \sqrt{1/2n+1} = \sqrt{1/2n+1 - 0/2n+1} = \sqrt{\left.\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1} = \sqrt{\int_0^1 t^{2n} \, dt} = \sqrt{\int_0^1 (t^n)^2 \, dt}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 f_n^2(t) \, dt} = \| f_n \|_2 = \| f_n - \bar{f} \|_2 = d(f_n, \bar{f}).$$

Portanto, se $n \geq n_\varepsilon$, $d(f_n, \bar{f}) < \varepsilon$.

Então f_n converge para $\bar{f}$.

(c) Com a métrica dada por $\| \|_\infty$, a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\bar{f}$.

Falso, pois $d(f_n, \bar{f}) = \| f_n - \bar{f} \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |t^n| = 1$.

Portanto, se $\varepsilon < 1$, não existe n_ε tal que $d(f_n, \bar{f}) < \varepsilon$ para $n \geq n_\varepsilon$.

Então f_n não converge para $\bar{f}$.

Podemos ainda aferir, como $d(f_n, \mathbf{1}) = \mathbf{0}$, então f_n converge para $\bar{1}$ (função constante $= 1$).

Questão 9

Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, e justifique

"A função $H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^4+y^4}, & \text{se } \cancel{(x,y)} \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$

Falso.

Pelo teorema visto em aula, se $H(x,y)$ fosse contínua em $(0,0)$

Então qualquer sequência (x_n, y_n) convergente para $(0,0)$ implicaria que $f(x_n, y_n)$ convergiria para $f(0,0) = (0)$.

Porém, seja $(x_n, y_n) \to (0,0)$, podemos considerar o caso particular em que $x_n = y_n$: então $f(x_n, y_n) = \dfrac{x_n y_n^3}{x_n^4 + y_n^4} = \dfrac{x_n^4}{2x_n^4} = \dfrac{1}{2}$.

Portanto $f(x_n, y_n)$ não converge para (0)

Então f não é contínua em $(0,0)$.

Questão 10 Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, e justifique

"A função $G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} & , \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Verdadeira

Seja $(x_n, y_n) \longrightarrow (0,0)$, podemos supor s.p.g que $x_n, y_n \neq 0$.

Então $f(x_n, y_n) = \dfrac{x_n y_n^2 \sin\left(1/x_n^2+y_n^2\right)}{x_n^2 + y_n^2}$

Mas sabemos que $\dfrac{y_n^2}{x_n^2+y_n^2}$ é uma sequencia limitada e

$\sin\left(\dfrac{1}{x_n^2+y_n^2}\right)$ é também uma sequência limitada, então o produto é limitado.

Portanto $f(x_n, y_n) = x_n \left(\dfrac{y_n^2}{x_n^2+y_n^2}\right) \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ é o produto de uma sequência limitada com uma que tende a 0.

Pelo teorema do confronto, $f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Portanto $f(x_n, y_n) \longrightarrow f(0,0)$,

Pelo teorema visto em aula, isso é suficiente para mostrar que f é contínua em $(0,0)$.