Lógica
Aula 4

Leliane Nunes de Barros

2018

leliane@ime.usp.br

(recordando) Dedução Natural - Regras da conjunção

Introdução

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_i$$

Eliminação

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge_{e_1} \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge_{e_2}$$

(recordando) Regras da dupla negação

Eliminação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg_e$$

(recordando) Regras da dupla negação

Eliminação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg_e$$

Introdução

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg_i$$

(recordando) Regras de eliminação da implicação

Modus Ponens (MP)

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to_e$$

Modus Tollens (MT)

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi} \; MT$$

(recordando) Introdução da Implicação

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi} \to_i$$

Regras da disjunção

Introdução

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_1} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_2}$$

Regras da disjunção

Introdução

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_1} \qquad\qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_2}$$

Eliminação

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \xi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \vdots \\ \xi\end{array}}}{\xi} \vee_e$$

- ϕ (fi)
- ψ (psi)
- ξ (csi)

Exemplos

- $p \vee q \vdash q \vee p$ (comutativa da disj.)

Exemplos

- $p \vee q \vdash q \vee p$ (comutativa da disj.)
- $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$

Exemplos

- $p \vee q \vdash q \vee p$ (comutativa da disj.)
- $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$
- $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributiva da conj. sobre a disj.)

Exemplos

- $p \vee q \vdash q \vee p$ (comutativa da disj.)
- $q \to r \vdash p \vee q \to p \vee r$
- $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributiva da conj. sobre a disj.)
- $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$ (associativa da disj.)

Equivalências

- $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Equivalências

- $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \rightarrow q \dashv\vdash \neg p \vee q$???

Equivalências

- $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \rightarrow q \dashv\vdash \neg p \vee q$???
- precisamos de mais regras da DN !

Lei do Terceiro Excluído (Tertium non datur)

Ou "lei da exclusão mútua" permite incluir a fórmula $(\phi \vee \neg\phi)$ em qualquer ponto de uma prova.

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi}\ LTE$$

Voltamos para provar um dos argumentos do nosso exemplo:

$$p \to q \vdash \neg p \vee q$$

Contradições

Contradições são expressões da forma:

$$(\phi \wedge \neg\phi) \text{ ou } (\neg\phi \wedge \phi)$$

também denotadas por $\perp$ (*bottom* ou "falso sintático").

Exemplos:

Contradições

Contradições são expressões da forma:

$$(\phi \land \neg\phi) \text{ ou } (\neg\phi \land \phi)$$

também denotadas por $\bot$ (*bottom* ou "falso sintático").

Exemplos:

$$(p \to q) \land \neg(p \to q)$$

Contradições

Contradições são expressões da forma:

$$(\phi \land \neg\phi) \text{ ou } (\neg\phi \land \phi)$$

também denotadas por $\bot$ (*bottom* ou "falso sintático").

Exemplos:

$$(p \to q) \land \neg(p \to q)$$
$$(r \land (s \lor t)) \land \neg(r \land (s \lor t))$$

Contradições

Contradições são expressões da forma:

$$(\phi \land \neg\phi) \text{ ou } (\neg\phi \land \phi)$$

também denotadas por $\perp$ (*bottom* ou "falso sintático").

Exemplos:

$$(p \to q) \land \neg(p \to q)$$
$$(r \land (s \lor t)) \land \neg(r \land (s \lor t))$$

Todas as contradições são equivalentes!

Regras da Negação

Eliminação

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg_e$$

Eliminação

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg_e$$

Introdução

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg_i$$

Regras da Negação

Eliminação

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg_e$$

Eliminação do $\bot$

$$\frac{\bot}{\phi}\ \bot_e$$

Introdução

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg_i$$

"Qualquer fórmula pode ser deduzida a partir de uma contradição"

Exemplos

- $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$ ... e assim provamos a equivalência "$\dashv\vdash$"

Exemplos

- $\neg p \vee q \vdash p \to q$ ... e assim provamos a equivalência "$\dashv\vdash$"
- $p \to q \dashv\vdash \neg p \vee q$

Exemplos

- $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$ ... e assim provamos a equivalência "$\dashv\vdash$"
- $p \rightarrow q \dashv\vdash \neg p \vee q$
- $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg p \vee \neg q$