MAE 0221

PROBABILIDADE I

Pedro Gigeck Freire 10737136

Provinha 09 23/06/2021

Termo de comprometimento

Eu me comprometo a manter uma conduta ética e adequada durante a realização desta tarefa. Exemplos de conduta inadequada são fornecer e/ou receber auxílio de outras pessoas, consultar material não autorizado (material que não consta na página do curso ou na literatura recomendada), entre outras.

Pedro Gigeck Freire

Seja T = tempo que Teodoro demora para resolver um problema

$T \sim Exp(\lambda)$ $(\lambda > 0)$

Seja S = tempo que Sofia demora " " o mesmo problema

$S \sim Exp(\mu)$

T, S independentes

a) Calcule a prob de Teodoro demorar pelo menos duas vezes o tempo que sofia leva.

Queremos calcular $P(T \geq 2S)$

Seja $X = \frac{T}{S}$, Seja $Y = S$

Vamos calcular a distribuição de X

• Passo 0: suporte de X é de 0 a $+\infty$ $(0, +\infty)$, suporte de Y também é $(0, \infty$

• Passo 1: transformação inversa

Temos $t = xs \Rightarrow$ $t = x \cdot y$

$s = y$

Passo 2: Calcular o Jacobiano

$$J_h(x,y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y$$

Passo 3: $f_{X,Y}(x,y) = f_{T,S}(\text{"}r(x,y)\text{"}, \text{"}s(x,y)\text{"})\,|J_h(x,y)|$

$$= f_{T,S}(xy, y)\,|y|$$

$$= f_T(xy)\, f_S(y)\,|y| \quad \text{pois } T \text{ e } S \text{ são independentes}$$

$$= f_T(xy)\, f_S(y)\, y \quad \text{pois } y > 0$$

$$= \lambda e^{-\lambda xy}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(xy)\, \mu\, e^{-\mu y}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\, y$$

$$= \lambda\mu\, e^{-y(\lambda x + \mu)}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, y \quad \text{como } y \geq 0,\ xy \geq 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Agora, calculemos a marginal de X

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\,dy = \lambda\mu \int_0^\infty \underbrace{y\, e^{-y(\lambda x+\mu)}}_{\sim \text{Gama}(2,\ \lambda x + \mu)}\,dy = \frac{\lambda\mu}{(\lambda x + \mu)^2}$$

↑ "λ^{-r}" da gama

Portanto

$$P(T \geq 2S) = P(T/S \geq 2) = P(X \geq 2) = \int_2^\infty \frac{\lambda\mu}{(\lambda x + \mu)^2}\,dx = \lambda\mu \left(-\frac{1}{\lambda(\lambda x + \mu)}\right)\Bigg|_2^\infty$$

$$= \frac{\lambda\mu}{\lambda(\lambda 2 + \mu)} = \frac{\mu}{2\lambda + \mu}$$

b) Para $P(X \geq 2) = \frac{1}{2}$

Então $\frac{\mu}{2\lambda + \mu} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\mu = 2\lambda + \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 2\lambda}$

Para $P(X \geq 2) = \frac{1}{3}$

Então $\frac{\mu}{2\lambda + \mu} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3\mu = 2\lambda + \mu \Rightarrow 2\mu = 2\lambda \Rightarrow \boxed{\mu = \lambda}$