MAT0265

GRUPOS

PROVA 2

PEDRO GIGECK FREIRE

10737136

QUESTÃO 1 MOSTRE QUE UM GRUPO ABELIANO FINITO NÃO É CÍCLICO SE E SOMENTE SE ELE CONTIVER UM SUBGRUBO ISOMORFO A $C_p \times C_p$ PARA ALGUM PRIMO P.

(Necessidade $\Rightarrow$)

Seja G um grupo abeliano finito que não é cíclico.

Seja $n = |G|$, $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ (p_i primos distintos, $\alpha^i \geq 1$)

Temos, pelo teorema visto na aula 25, que

$$G \cong H_1 \times \cdots \times H_r, \quad \text{com } |H_i| = p_i^{\alpha_i} \text{ e}$$

$$H_i \cong C_{p_i^{\beta_1}} \times \cdots \times C_{p_i^{\beta_{r_i}}}$$

Suponha, por absurdo, que H_i é cíclico para todo $i = 1, \dots, r$,

Assim, $H_i \cong C_{p_i^{\alpha_i}}$, mas então, como $\text{mdc}(p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j}) = 1$ para todo $i \neq j$, teríamos que

$$G \cong H_1 \times \cdots \times H_r \cong C_{p_i^{\alpha_i}} \times \cdots \times C_{p_r^{\alpha_r}} \cong C_{p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}}$$

Pelo corolário do Teorema chinês dos restos.

Contradisão, já que G não é cíclico.

Portanto, existe algum H_i que não é cíclico.

Tal H_i é da forma

$$H_i \cong C_{p_i^{\beta_1}} \times \dots \times C_{p_i^{\beta_{r_i}}} \quad , \quad \text{com } r_i \geq 2 \quad (\text{Pois } H_i \text{ não é cíclico})$$

Agora, para cada $C_{p_i^{\beta_j}}$ existe um $h_j \in C_{p_i^{\beta_j}}$ com $\theta(h_j) = p_i$, pelo lema de Cauchy (Corolário 1 do Teo. de Sylow I), de modo que

$$C_{p_i} \cong \langle h_j \rangle \leqslant C_{p_i^{\beta_j}}$$

Logo, montamos o subgrupo

$$\langle h_1 \rangle \times \langle h_2 \rangle \times \{e\} \times \{e\} \times \dots \times \{e\} \leqslant C_{p_i^{\beta_1}} \times C_{p_i^{\beta_2}} \times \dots \times C_{p_i^{\beta_{r_i}}}$$

Que é isomorfo a $C_{p_i} \times C_{p_i}$.

Resumindo, existe H_i tal que

$$C_{p_i} \times C_{p_i} \cong \langle h_1 \rangle \times \langle h_2 \rangle \times \{e\} \times \dots \times \{e\} \leqslant C_{p_i^{\beta_1}} \times \dots \times C_{p_i^{\beta_{r_i}}} \cong H_i$$

E como H_i é isomorfo a algum subgrupo de G, então G tem um subgrupo isomorfo a $C_{p_i} \times C_{p_i}$ para algum p_i primo.

$\square$

(Suficiência $\Leftarrow$)

Seja G um grupo abeliano finito.

Seja $H \leqslant G$ com $H \cong C_p \times C_p$ para algum p primo.

Como $\mathrm{mdc}(p, p) = p \neq 1$, então H não é cíclico.

E como todo subgrupo de um grupo cíclico é cíclico, temos que G não é cíclico.

$\square$