Lógica
Aula 3

Leliane Nunes de Barros

2018

leliane@ime.usp.br

(recordando) Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos
- Se φ é fbf, então $(\neg\varphi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \vee \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \wedge \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é fbf

(recordando) Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos
- Se φ é fbf, então $(\neg\varphi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \vee \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \wedge \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é fbf

Backus Naur Form (BNF)

$$\varphi ::= p|(\neg\varphi)|(\varphi \vee \varphi)|(\varphi \wedge \varphi)|(\varphi \rightarrow \varphi)$$

(recordando) Dedução Natural

Dedução Natural: coleção de regras de reescrita (prova) que permite derivar (inferir) novas fórmulas a partir de fórmulas existentes.

(recordando) Dedução Natural

Dedução Natural: coleção de regras de reescrita (prova) que permite derivar (inferir) novas fórmulas a partir de fórmulas existentes.

O argumento (sequente) válido:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

significa que existe uma **derivação** usando **dedução natural** em que:

- $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n$ são as premissas e
- ψ é a conclusão.

(recordando) Dedução Natural

Dedução Natural: coleção de regras de reescrita (prova) que permite derivar (inferir) novas fórmulas a partir de fórmulas existentes.

O argumento (sequente) válido:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

significa que existe uma **derivação** usando **dedução natural** em que:

- $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ são as premissas e
- ψ é a conclusão.

Dedução Natural é um **sistema formal** com **regras formais** de prova de argumentos!

(recordando) Dedução Natural - Regras da conjunção

Introdução do $\land$

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \land \psi} \land_i$$

(Se derivamos ϕ e ψ, então podemos concluir $\phi \land \psi$.)

(recordando) Dedução Natural - Regras da conjunção

Introdução do $\wedge$

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_i$$

(Se derivamos ϕ e ψ, então podemos concluir $\phi \wedge \psi$.)

Eliminação do $\wedge$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge_{e_1} \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge_{e_2}$$

(Se derivamos $\phi \wedge \psi$ então podemos concluir ϕ.)
(Se derivamos $\phi \wedge \psi$ então podemos concluir ψ.)

Regras da dupla negação

"Não é verdade que não está chovendo!"

Eliminação do $\neg\neg$

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg_e$$

Regras da dupla negação

"Não é verdade que não está chovendo!"

Eliminação do $\neg\neg$

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg_e$$

Introdução do $\neg\neg$

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg_i$$

Regras da dupla negação

"Não é verdade que não está chovendo!"

Eliminação do $\neg\neg$

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg_e$$

Introdução do $\neg\neg$

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg_i$$

Exemplo: prove que o argumento:

$$p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$$

é válido.

Regras de eliminação da implicação: $\rightarrow_e$

Modus Ponens (MP)

$$\frac{\phi \qquad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow_e$$

Regras de eliminação da implicação: $\rightarrow_e$

Modus Ponens (MP)

$$\frac{\phi \qquad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow_e$$

Modus Tollens (MT)

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi} \; MT$$

Exemplos

Prove que os seguintes argumentos são válidos:

- $p, p \to q, p \to (q \to r) \vdash r$

Exemplos

Prove que os seguintes argumentos são válidos:

- $p, p \to q, p \to (q \to r) \vdash r$
- $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$

Exemplos

Prove que os seguintes argumentos são válidos:

- $p, p \to q, p \to (q \to r) \vdash r$
- $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$
- $\neg p \to q, \neg q \vdash p$

Exemplos

Prove que os seguintes argumentos são válidos:

- $p, p \to q, p \to (q \to r) \vdash r$
- $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$
- $\neg p \to q, \neg q \vdash p$
- $\neg\neg p \to (\neg q \to r), p, \neg r \vdash q$

Introdução da Implicação

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi} \to_i$$

Exemplos

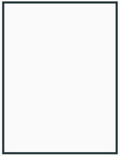
- $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$

Exemplos

- $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$
- $\neg q \to \neg p \vdash p \to \neg\neg q$

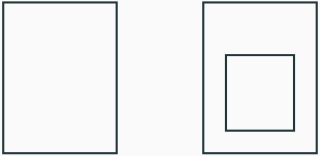
Estruturas de blocos

Pode aninhar



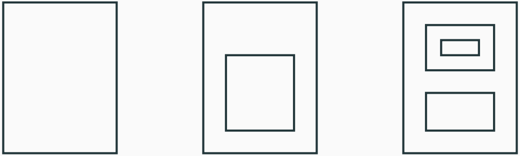
Estruturas de blocos

Pode aninhar



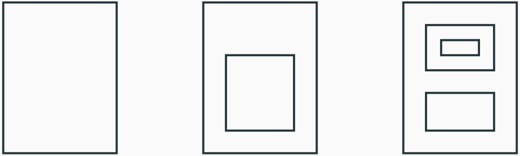
Estruturas de blocos

Pode aninhar

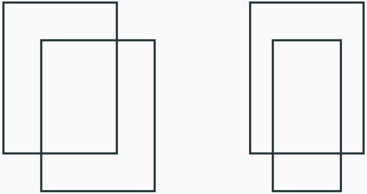


Estruturas de blocos

Pode aninhar



Não pode cruzar



Estruturas de Blocos

Quando aplicamos uma regra

$$\frac{\phi_1 \qquad \ldots \qquad \phi_n}{\psi}$$

as fórmulas $\phi_1, ..., \phi_n$ devem pertencer ao **escopo**, isto é, devem ter sido derivadas dentro da caixa atual ou de uma caixa externa que contém a caixa atual.

Estruturas de Blocos

Quando aplicamos uma regra

$$\frac{\phi_1 \qquad \dots \qquad \phi_n}{\psi}$$

as fórmulas $\phi_1, ..., \phi_n$ devem pertencer ao **escopo**, isto é, devem ter sido derivadas dentro da caixa atual ou de uma caixa externa que contém a caixa atual.

(Comparável ao escopo de variáveis em linguagend se programação)

Exemplos

- $q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow r$

Exemplos

- $q \to r, \neg q \to \neg p \vdash p \to r$
- $q \to r \vdash (\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$

Exemplos

- $q \to r, \neg q \to \neg p \vdash p \to r$
- $q \to r \vdash (\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$
- $\vdash (q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$

Dedução

De uma prova para

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

obtemos uma prova para

$$\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \psi)...))$$

(e vice-versa).