MAC 0210 _ LISTA 1

QUESTÃO 1

a) REALIZE A DEDUÇÃO E OS CÁLCULOS ANÁLOGOS AOS DO EXEMPLO 1.2 USANDO A EXPRESSÃO

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

PARA APROXIMAR A PRIMEIRA DERIVADA $f'(x_0)$. MOSTRE QUE O ERRO É $O(h^2)$, VERIFICANDO QUE O TERMO DOMINANTE DO ERRO É $-\frac{h^2}{6}f'''(x_0)$ QUANDO $f'''(x_0)\neq 0$.

Com o teorema da série de Taylor, sabemos

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2 f''(x_0)}{2} + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \cdots$$

Reorganizando os termos, igual ao exemplo do Livro, obtemos que

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \left(\frac{h}{2}f''(x_0) + \frac{h^2}{6}f'''(x_0) + \cdots\right) \quad (*)$$

Observe que isso vale para qualquer h, assim, podemos tomar $h=-h$ e obter

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} - \left(\frac{-h}{2}f''(x_0) + \frac{h^2 f'''(x_0)}{6} + \cdots\right). \quad (**)$$

Se somarmos $(*)$ com $(**)$ obtemos:

$$2f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \left(\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\right) - \frac{h}{2}f''(x_0) + \frac{h}{2}f''(x_0) - 2\frac{h^2}{6}f'''(x_0) + \cdots \Rightarrow$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - \left(\frac{h^2}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{5!}f'''''(x_0) + \cdots\right)$$

Observe que os termos onde h tinha expoente ímpar se cancelaram.

Com isso, concluímos que o termo mais significativo do erro, quando usamos a aproximação

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \text{ é}$$

$-\frac{h^2}{6} f'''(x_0)$, para $h \ll 1$. Então o erro é $O(h^2)$.