MAC0427

Otimização Não Linear

Primeira Lista de Exercícios

Pedro Gigeck Freire 10737136 /05/2021

① Calcule as derivadas parciais de segunda ordem da seguinte função.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{para } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Derivadas de primeira ordem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\left[\frac{(x^2-y^2)+x(2x)}{x^2+y^2} + \frac{(-1)\,x(x^2-y^2)\,2x}{(x^2+y^2)^2}\right]$$ (pela regra do produto)

$$= y\left[\frac{x^2-y^2+2x^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$ (aplicando distributiva)

$$= y\left[\frac{(x^2+y^2)(3x^2-y^2) - 2x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$ (multiplicando o 1º termo por $\frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}$)

$$= y\left[\frac{3x^4 - x^2y^2 + 3x^2y^2 - y^4 - 2x^4 + 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$ (aplicando distributiva)

$$= y\left[\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\right], \quad \text{para } (x,y) \neq (0,0)$$

Se $(x,y) = (0,0)$, temos que calcular pela definição da derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0.h(h^2-0^2)}{h^2+0^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0.$$

Portanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{, para } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, para } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Agora, vamos calcular a derivada parcial de primeira ordem com relação a y

Mas repare que

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} = \frac{(-x)y(y^2-x^2)}{x^2+y^2}$$

De modo que o cálculo de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ será completamente análogo ao cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, apenas modificado por um sinal de menos. Ou seja

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(-x)(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{, para } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, para } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Agora, calculando as derivadas de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y\left[\frac{(4x^3+8xy^2)(x^2+y^2)^2 - (x^4+4x^2y^2-y^4)(2(x^2+y^2)2x)}{(x^2+y^2)^4}\right]$$ (pela regra do quociente)

$$= y\left[\frac{(4x^3+8xy^2)(x^2+y^2) - (x^4+4x^2y^2-y^4)4x}{(x^2+y^2)^3}\right] \quad \text{("cancelando" } (x^2+y^2))$$

$$= 4xy\left[\frac{(x^2+2y^2)(x^2+y^2) - (x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^3}\right] \quad \text{(colocando } 4x \text{ em evidência)}$$

$$= 4xy\left[\frac{x^4+x^2y^2+2x^2y^2+2y^4-x^4-4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^3}\right] \quad \text{(aplicando distributiva)}$$

$$= \frac{4xy\,(y^2)}{(x^2+y^2)^3}\left(x^2+2x^2+2y^2-4x^2+y^2\right)$$

$$= \frac{4xy^3\,(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad \text{para } (x,y) \neq (0,0)$$

Se $(x,y) = (0,0)$, pela definição da derivada, temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(h,0)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0\,(h^4+4h^2 0^2-0^4)}{(h^2+0^2)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^4} = 0$$

Portanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy^3(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}, & \text{para } (x,y) \neq 0 \\ 0, & \text{para } (x,y) = 0 \end{cases}$$

Agora, vamos calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

Note que, pela simetria da segunda derivada, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(-x)(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

(regra do quociente)

$$= \frac{\left[(-1)(y^4+4x^2y^2-x^4)+(-x)(8xy^2-4x^3)\right](x^2+y^2)^2-(-x)(y^4+4x^2y^2-x^4)\,2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{(x^4-4x^2y^2-y^4+4x^4-8x^2y^2)(x^2+y^2)+(y^4+4x^2y^2-x^4)\,4x^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{(5x^4-12x^2y^2-y^4)(x^2+y^2)+4x^2y^4+16x^4y^2-4x^6}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{5x^6+5x^4y^2-12x^4y^2-12x^2y^4-x^2y^4-y^6+4x^2y^4+16x^4y^2-4x^6}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}, \quad \text{para } (x,y) \neq (0,0)$$

Se $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \frac{\partial}{\partial x}0 = 0$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}, & \text{para } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{para } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Por fim, calculamos $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$

Similar ao raciocínio da derivada de primeira ordem, teremos que $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ é análogo a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, trocando um sinal.

Portanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \begin{cases} \dfrac{4x^3y(3x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^3}, & \text{para } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{para } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

② Dados dois vetores $b \in \mathbb{R}^m$ e $v \in \mathbb{R}^n$ e uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma função $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, calcule o gradiente e o hessiano da função $g(x) = f(Ax + b)$ em termos do gradiente e hessiano de f.

Vamos calcular o gradiente da g aplicando a regra da cadeia

$$\nabla g(x) = \nabla f(Ax+b)^T A$$

E aplicar o mesmo raciocínio para encontrar o hessiano, que podemos interpretar como o "derivada" do gradiente

$$H[g(x)] = D[\nabla g(x)] = D[\nabla f(Ax+b)^T A] = H[f(Ax+b)] A^t A$$

③ Discuta a geometria das curvas de nível de uma função quadrática

$$f(x) = \frac{1}{2} x^t A x + b^t x + c$$

onde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é simétrica, $b \in \mathbb{R}^2$ e $c \in \mathbb{R}$ nos seguintes casos

- $A > 0$ (A definida positiva)

Nesse caso, a curva de nível de f de ordem d, para alguma constante $d \in \mathbb{R}$ é dada pela expressão

$$f(x) = d \iff \frac{1}{2} x^t A x + b^T x + c = d$$

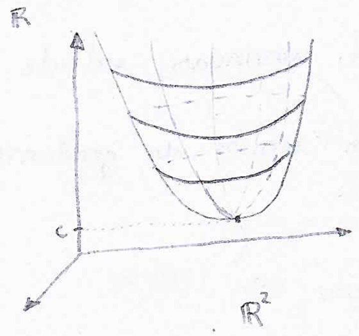
Vamos calcular o vetor gradiente, pois o gradiente é perpendicular a curva de nível:

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2} 2 A x + b = Ax + b \in \mathbb{R}^2$$

Além disso,

$$\nabla^2 f(x) = A$$

Como $A > 0$, a derivada de segunda ordem nos da a concavidade da função, então a função é convexa e teremos algo do tipo



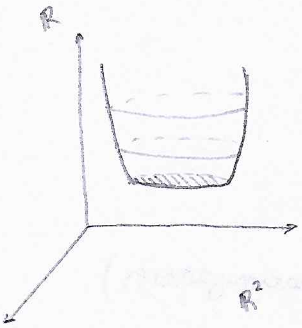
Onde as curvas de nível são <u>ELIPSOIDES</u> e existe apenas 1 ponto de mínimo local

- $A \geq 0$ e existe x tal que $Ax + b = 0$

Como $\nabla f(x) = Ax + b$

A função continuará sendo um parabolóide convexo, mas poderá assumir pontos de mínimo em todo x tal que $Ax + b = 0$

A geometria das curvas de nível será algo como



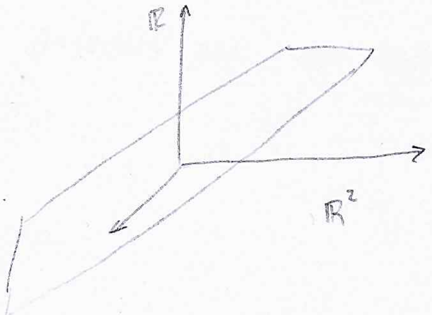
Onde as curvas de nível são elipsoides se $Ax+b \neq 0$ e é uma elipsoide "preenchida" nos pontos onde $Ax+b=0$ contendo seu interior

- $A \geq 0$ e não existe x tal que $Ax+b=0$

Se não existe x com $\nabla f(x) = 0$ então a função não tem pontos estacionários. Portanto ela é ilimitada.

Particularmente, se não existe solução para o sistema $Ax+b=0$, então $\det A = 0$.

A geometria será do tipo



Como $\det A = 0$, então A não tem posto máximo, então a função se torna uma função linear.

- A indefinida e não singular

Como A é indefinida, então A tem um autovalor positivo e um negativo, então o termo $x^t A x$, pode ser decomposto em matrizes U, D ortogonais tais que

$x^t A x = x^t U D U^T x$, onde D = matriz diagonal dos auto valores λ_1, λ_2

Mas como temos um positivo e um negativo, o resultado será algo da forma

$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots$, E sabemos que isso resulta em hiperbolóides, já que algum λ é positivo e o outro negativo.

④ Encontre os pontos estacionários de

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x-y-1)$$

Quais são pontos minimizadores locais ou globais? (e maximizadores)

Vamos calcular $\nabla f(x,y)$ calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 6x - 6y(x-y-1) - 6xy = 6(x^2 - x - xy + y^2 + y + xy)$$

$$= 6(x^2 - x - 2xy + y + y^2) = 6\left((x-y)^2 + (y-x)\right) = 6(x-y)(x-y-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6x(x-y-1) - 6xy(-1) = 6x(y - x + y + 1)$$

$$= \boxed{6x(2y - x + 1)}$$

Agora vamos calcular os pontos estacionários, que são os (x,y) tais que $\nabla f(x,y) = 0$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff 6x(2y - x + 1) = 0 \iff \underline{x = 0 \quad \text{ou} \quad 2y - x + 1 = 0}$$

- Se $x = 0$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0 \iff 6(-y)(-y-1) = 0 \Rightarrow 6y(y+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ y = -1 \end{cases}$$

Então os pontos $(0,0)$ e $(0,-1)$ são pontos estacionários.

- Se $2y - x + 1 = 0$, então $x = 2y + 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x}(2y+1, y) = 0 \iff 6(2y+1-y)(2y+1-y-1) = 0$$

$$\iff 6(y+1)y = 0 \iff \begin{cases} y = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Se $y=-1$, então $2y-x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Se $y=0$ então $2y-x+1=0 \Rightarrow x=1$

Portanto os pontos $(1,0)$ e $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ são pontos estacionários.

Retomando, os pontos estacionários são $(0,0)$, $(0,-1)$, $(-1,-1)$ e $(1,0)$

Para verificar se são pontos de mínimo ou máximo, vamos calcular as derivadas de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6((x-y-1)+(x-y)) = 12x - 12y - 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6((-1)(x-y-1) + (-1)(x-y)) = 12y - 12x + 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6 \times 2 = 12x$$

Então a Hessiana nos pontos estacionários é

- $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$
- $Hf(0,-1) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

Esses dois tem determinante negativo portanto são matrizes indefinidas, que implica que os pontos são de sela.

- $Hf(-1,-1) = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}$
- $Hf(1,0) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$

O ponto $(-1,-1)$ tem um hessiano negativo definido $\Rightarrow$ (-1) é mínimo local

O ponto $(1,0)$ tem um hessiano positivo definido $\Rightarrow$ $(1,0)$ é máximo local.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x}(2y+1, y) = 0 \iff 6(2y+1-y)(2y+1-y-1) = 0$

$$\iff 6(y+1)y = 0 \iff \begin{cases} y = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Se $y=-1$, então $2y-x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Se $y=0$ então $2y-x+1=0 \Rightarrow x=1$

Portanto os pontos $(1,0)$ e $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ são pontos estacionários.

Retomando, os pontos estacionários são $(0,0)$, $(0,-1)$, $(-1,-1)$ e $(1,0)$.

Para verificar se são pontos de mínimo ou máximo, vamos calcular as derivadas de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6\big((x-y-1)+(x-y)\big) = 12x-12y-6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6\big((-1)(x-y-1)+(-1)(x-y)\big) = 12y-12x+6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6\times 2 = 12x$$

Então a Hessiana nos pontos estacionários é

- $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$
- $Hf(0,-1) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

Esses dois tem determinante negativo portanto são matrizes indefinidas, que implica que os pontos são de sela.

- $Hf(-1,-1) = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}$
- $Hf(1,0) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$

O ponto $(-1,-1)$ tem um hessiano negativo definido $\Rightarrow$ (-1) é mínimo local

O ponto $(1,0)$ tem um hessiano positivo definido $\Rightarrow$ $(1,0)$ é máximo local.

Suponha, por absurdo, que A^t seja não singular

Então existe uma matriz B tal que

$$A^t B = Id \quad \text{(matriz identidade)}$$

Mas então

$$A^t B = Id \implies (A^t B)^t = Id^t = Id$$

$$\implies B^t (A^t)^t = Id$$

$$\implies B^t A = Id$$

Mas então B^t é a matriz inversa de A, absurdo.

Portanto, A^t é singular

($\Leftarrow$) Seja A uma matriz quadrada com A^t singular

Pelo resultado que acabamos de provar, $(A^t)^t$ é singular.

Ou seja, A é singular.

7) Mostre que se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são autovalores de uma matriz simétrica, então os autovetores correspondentes são ortogonais.

Sejam x, y os autovetores correspondentes aos autovalores λ_1, λ_2 respectivamente.

Seja A a matriz simétrica em questão

Consideremos o produto interno $\langle x, y \rangle$, então, usando as propriedades do produto interno, teremos

$$\lambda_1 \langle x, y \rangle = \langle \lambda_1 x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle \quad \text{(pois } x \text{ é autovetor com autovalor } \lambda_1\text{)}$$

$$= A \langle x, y \rangle = A \overline{\langle y, x \rangle} \quad \text{(simetria Hessiana do produto interno)}$$

$$= \overline{\langle A^t y, x \rangle} = \langle x, A^t y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \text{(pois } A^t = A\text{)}$$

$$= \langle x, \lambda_2 y \rangle = \lambda_2 \langle x, y \rangle$$

Logo, $\lambda_1 \langle x, y\rangle = \lambda_2 \langle x, y \rangle$

$\Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\langle x, y\rangle = 0$, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\langle x, y\rangle = 0$

Portanto x e y são ortogonais.

(8) Mostre que se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são convexas então $h(x) = \max(f(x), g(x))$ é convexa. O que acontece com $h(x) = \min(f(x), g(x))$?

Se $h(x) = \max(f(x), g(x))$

Vamos mostrar que h é convexa mostrando que

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0,1]$$

Temos

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = \max\{f(\lambda x + (1-\lambda)y), g(\lambda x + (1-\lambda)y)\}$$

Se $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq g(\lambda x + (1-\lambda)y)$ então

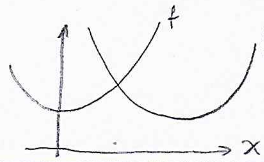
$$\begin{aligned} h(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \text{pois } f \text{ é convexa} \\ &\leq \lambda \max(f(x), g(x)) + (1-\lambda)\max(f(y), g(y)) \quad \text{pela def. de máx} \\ &= \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) \end{aligned}$$

Se $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y)$, o resultado é análogo.

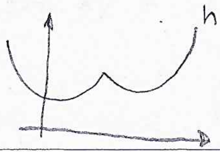
Portanto

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) \Longrightarrow h \text{ é convexa}.$$

Se $h = \min(f, g)$ o resultado não vale, como no seguinte exemplo



$\Longrightarrow$



não convexa.

(9) Mostre que se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa então o seu conjunto de mínimos locais é convexo; e todos os elementos desse conjunto são mínimos globais.

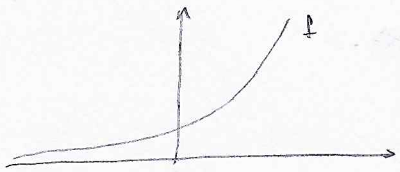
Esse conjunto pode ser vazio?

Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$ o conjunto de mínimos locais de f.

Esse conjunto pode ser vazio! como no exemplo

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = e^x$



f é convexa e não tem mínimos locais

Se $M = \emptyset$ então é fechado ✓

Se M é unitário, então M é fechado ✓

Se M tem mais que 1 elemento, então

tome $x, y \in M$

- Se $f(x) > f(y)$, então

$$\lambda f(x) > \lambda f(y) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

$$\Longrightarrow 0 > \lambda(f(y) - f(x))$$

$$\Longrightarrow f(x) > \lambda f(y) - \lambda f(x) + f(x)$$

$$= \lambda f(y) + f(x)(1-\lambda)$$

$$\geq f(\lambda y + (1-\lambda)x) \quad \text{pela definição de convexidade}$$

Então $f(x) > f(z)$ para todo z na reta entre x e y, o que contradiz o fato que x é mínimo local

- Se $f(x) < f(y)$, o resultado é análogo.

Portanto $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in M$.

Então todos os mínimos locais tem o mesmo valor.

Isso implica que M é convexo, pois

para quaisquer $x, y \in M$, temos $f(x) = f(y)$

logo

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) = f(x) = f(y)$$

Então todo ponto entre os dois mínimos tem o mesmo valor da função, portanto também são mínimos.

⑩ Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto e $f: A \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Mostre que f é contínua.

Vamos relembrar as definições:

- A aberto $\iff$ para todo $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$
- f convexa $\iff$ para todo $x, y \in A$, $\lambda \in [0,1]$ $\quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
- f contínua $\iff$ para todo $a \in A$ existe $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Vamos provar que f é contínua pela definição

Dado $a \in A$, vamos mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Como f é convexa, os coeficientes angulares das retas tangentes são crescentes. Ou seja, se $x < y < z$ temos

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Como A é aberto, podemos tomar $a - \delta < a < a + \delta$ com

$$\frac{f(a-\delta) - f(a)}{a - \delta - a} \leq \frac{f(a) - f(a+\delta)}{a - a - \delta}$$

$$\Rightarrow f(a-\delta) - f(a) \geq f(a) - f(a+\delta) \Rightarrow f(a) \leq \frac{f(a-\delta) + f(a+\delta)}{2}$$

Pela convexidade, teremos que todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$ satisfaz

$$|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Pela definisão de limite, f é contínua.