MAE0221

PROBABILIDADE I

PEDRO GIGECK FREIRE 10737136

19/05/21

PROVINHA 04

Variável Aleatória X tem f.d.p

$$f_X(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x) \qquad , \theta > 0$$

Encontre a f.dp de $Y = \ln X$ e identifique sua distribuição

Primeiro, vamos calcular a função de distribuição F_Y de Y

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y) = F_X(e^y)$$

Logo, a f.d.p $f_Y(\cdot)$ de Y é dada por

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) =$$

$$= \frac{d}{dy} F_X(e^y)$$

(regra da cadeia) $$= f_X(e^y)\, e^y$$

$$= e^y \frac{\theta}{(e^y)^{\theta+1}} \mathbb{1}_{(1,\infty)}(e^y)$$

Note que $e^y \geq 1 \iff y \geq 0$, portanto

$$f_Y(y) = \frac{e^y \theta}{e^{y\theta+y}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) = \frac{e^y \theta}{e^y e^{y\theta}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) = \boxed{\theta e^{-\theta y} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)}$$

Com isso, notamos que $\boxed{Y \sim \text{Exponencial}(\theta)}$