(b) Mostre que o polinômio interpolador sempre possui um mínimo que satisfaz $0 < x^* < 1$. Pode-se mostrar o mesmo para função f?

Com as três observações que temos, nosso polinômio terá a seguinte forma:

$$c_0 + c_1(x-0) + c_2(x-0)^2 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

Onde,

$$c_0 = f(x_0) = f(0)$$
$$c_1 = f[x_0, x_1] = f'(0)$$
$$c_2 = f[x_0, x_1, x_2] = f(1) - f(0)$$

Sabemos, que, tanto para o polinômio, quanto para a função, x^* será uma raiz da derivada.

Observemos o caso do polinômio

$$P'(x) = c_1 + 2c_2 x = f'(0) + 2(f(1) - f(0))x^* = 0 \iff x^* = \frac{-f'(0)}{2(f(1)-f(0))}$$

Mas, $f'(0) < 0$, $f(1) > f(0) \Rightarrow f(1) - f(0) > 0$, então $\frac{-f'(0)}{2(f(1)-f(0))} > 0 \Rightarrow 0 < x^*$

Agora, vamos escrever $f(1)$ como um polinômio de Taylor (pois $f \in C^2$)

$$f(1) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(1-0) + \frac{f''(\xi)(1-0)^2}{2}, \text{ para algum } \xi \in [0,1]$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{-f'(0)}{2\left(f(0) + f'(0) + \frac{f''(\xi)}{2} - f(0)\right)} = \frac{-f'(0)}{2f'(0) + f''(\xi)}$$

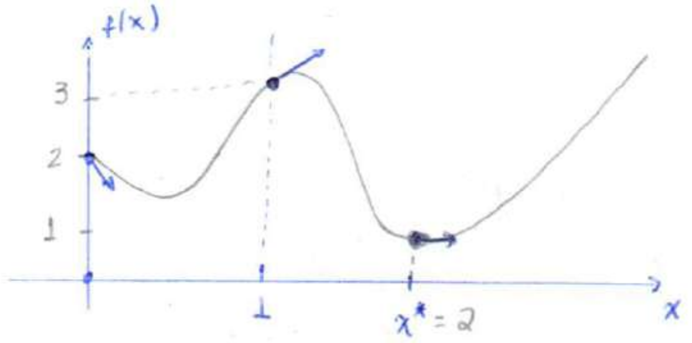
Mas, no polinômio interpolador, onde aproximamos f, a segunda derivada é $2c_2 = 2(f(1) - f(0)) > 0$ portanto $2f'(0) + f''(\xi) > -f'(0) \Rightarrow \frac{-f'(0)}{2f'(0)+f''(\xi)} < 1$

Portanto, no polinômio, de fato, $0 < x^* < 1$

Porém, para a função original isso não é sempre verdadeiro, pois não conhecemos informações suficiente sobre as derivadas.

Contra-Exemplo:

Vamos construir um contra-exemplo usando o próprio método de Newton:



Observações

$f(0) = 2$ $\quad x_0 = x_1 = 0$

$f'(0) = -1$ $\quad x_2 = x_3 = 1$

$f(1) = 3$ $\quad x_4 = x_5 = 2$

$f'(1) = 1$

$f(2) = 1$

$f'(2) = 0$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^2(x-1) + C_4 x^2 (x-1)^2 + C_5 x^2 (x-1)^2 (x-2)$$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	0	2	—	—	—	—	—
1	0	2	-1	—	—	—	—
2	1	3	1	2	—	—	—
3	1	3	1	0	-2	—	—
4	2	1	-2	-3	$-3/2$	$1/4$	—
5	2	1	0	2	5	$13/4$	$3/2$

$$f(x) = 2 - x + 2x^2 - 2x^2(x-1) + \frac{1}{4} x^2 (x-1)^2 + \frac{3}{2} x^2 (x-1)^2 (x-2)$$