MAT0265 - Grupos

Lista 3:

Exercícios 16 e 24

Pedro Gigeck Freire

10737136

Exercício 16

Seja $n = 3$ ou $n \geq 5$.

Mostre que $\{e\}$, A_n e S_n são os únicos subgrupos normais de S_n.

Em particular, o grupo alternado A_n é o único subgrupo de S_n de índice 2.

Já vimos, na aula de 28/10, que A_n é o único subgrupo de S_n de índice 2, para todo $n \geq 2$.

· Vamos mostrar que $\{e\}$, A_n, S_n são os únicos subgrupos normais de S_n.

Seja $H \triangleleft S_n$ um subgrupo normal qualquer de S_n.

Como $A_n \triangleleft S_n$ (visto em 16/10), podemos aplicar o segundo teorema do isomorfismo, e obter que

$$H \cap A_n \triangleleft A_n.$$

Mas sabemos que A_n é simples (visto em 26/10) (para $n \geq 5$ ou $n = 3$).

Portanto

- $H \cap A_n = \{e\}$ ou $H \cap A_n = A_n$

* Caso 1: $H \cap A_n = \{e\}$

Nesse caso, temos que

$$H/_{H \cap A_n} = H/_{\{e\}} = \{eH\}$$

E pelo 2° teorema do isomorfismo, temos

$$H/_{H\cap A_n} \cong {HA_n}/_{A_n}$$

Logo

$$\left| H/_{H\cap A_n} \right| = \left| {HA_n}/_{A_n} \right| \Rightarrow$$

$$\left| \{eH\} \right| = \left| {HA_n}/_{A_n} \right| \Rightarrow$$

$$1 = \left| {HA_n}/_{A_n} \right|$$

Portanto só existe uma classe lateral a esquerda de A_n em HA_n, que é o próprio A_n.

Vamos mostrar que $H = \{e\}$

Seja $h \in H$ qualquer.

Então $h = he \in HA_n$, logo

$hA_n = A_n$ (pois só existe uma classe lateral)

Portanto $h \in A_n$.

Mas como $H \cap A_n = \{e\}$, temos que $h = e$.

Logo $H = \{e\}$.

* Caso 2: $H \cap A_n = A_n$

Como $H \leqslant S_n$, pelo Teorema de Lagrange, temos que $|H| \mid |S_n|$

Portanto existe $q \in \mathbb{Z}$, com $q \geqslant 1$, tal que

$$|S_n| = q|H| \Rightarrow$$

$$|H| = \frac{n!}{q}$$

Mas como $H \cap A_n = A_n$, temos que $A_n \subseteq H$, Logo

$$|A_n| \leqslant |H| \Rightarrow$$

$$\frac{n!}{2} \leqslant \frac{n!}{q} \Rightarrow$$

$$q \leqslant 2$$

Então $q = 1$ ou $q = 2$.

Se $q = 1$, então $|H| = |S_n| \Rightarrow H = S_n$

Se $q = 2$, então $|H| = \frac{n!}{2} \Rightarrow [S_n : H]$, mas A_n é o único subgrupo de índice 2, portanto $H = A_n$.

Logo, em todos os casos, $H = \{e\}$ ou $H = A_n$ ou $H = S_n$.

Então $\{e\}$, A_n e S_n são os, únicos subgrupos normais de S_n. □

Exercício 24

Dizemos que G é o produto semidireto (interno) de N por H se G contiver subgrupos N e H tais que

(i) $N \trianglelefteq G$

(ii) $NH = G$

(iii) $N \cap H = \{e\}$

(a) Mostre que se G é o produto semidireto interno de N por H então os elementos de G podem ser expressos de maneira única na forma nh com $n \in N$, $h \in H$.

Como $NH = G$, então todo $g \in G$ pode ser escrito como

$g = nh$ para alguns $n \in N$, $h \in H$.

Vamos mostrar que tais n, h são únicos.

Sejam $n' \in N$ e $h' \in H$ tais que

$g = n'h'$ então

$nh = n'h' \Rightarrow$

$h = n^{-1}n'h' \Rightarrow$

$h(h')^{-1} = n^{-1}n'$

Como $h(h')^{-1} \in H$, $n^{-1}n' \in N$ e $H \cap N = \{e\}$

Então

$$h(h')^{-1} = e \Rightarrow$$

$$h = ((h')^{-1})^{-1} = h'$$

E

$$n^{-1}n' = e \Rightarrow$$

$$n' = (n^{-1})^{-1} e = n.$$

Portanto $n = n'$ e $h = h'$

Logo n e h são únicos.

(b) Seja G um produto semi-direto de N por H. Mostre que

$$\theta : H \to Aut(N)$$
$$h \mapsto \theta_h$$

com

$\theta_h(n) = hnh^{-1}$ para todo $n \in N$, é um homomorfismo.

Primeiramente, note que θ está bem definido, já que, de fato $\theta_h \in Aut(N)$ (Mostramos isso no item b) do exercício 32 da lista 2, que já entregamos)

Vamos mostrar que θ é homomorfismo.

Sejam $h_1, h_2 \in H$ quaisquer.

Vamos mostrar que $\theta_{h_1 h_2}(n) = \theta_{h_1}(\theta_{h_2}(n))$, para todo $n \in N$.

Temos $\theta_{h_1 h_2}(n) = (h_1 h_2) n (h_1 h_2)^{-1} = (h_1 h_2) n (h_2^{-1} h_1^{-1}) = h_1 (h_2 n h_2^{-1}) h_1^{-1} =$

$$= h_1 \, \theta_{h_2}(n) \, h_1^{-1} = \theta_{h_1}(\theta_{h_2}(n))$$

Portanto $\theta_{h_1 h_2} = \theta_{h_1} \theta_{h_2}$.

Logo θ é homomorfismo.

(c) Sejam N e H dois grupos e seja $\theta : H \to Aut(N)$ um homomorfismo.

Defina a seguinte operação binária no conjunto $N \times H$

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1\, \theta(h_1)(n_2)\,,\ h_1 h_2)$$

Mostre que $N \times H$ com essa operação binária forma um grupo.

Este grupo é chamado de produto semidireto (externo) de N por H e é denotado por $N \rtimes_\theta H$.

Sejam e_N o elemento neutro de N e e_H o elemento neutro de H.

- Vamos mostrar que (e_N, e_H) é o elemento neutro de $N \rtimes_\theta H$

Note que $\theta(h)(e_N) = e_N$ para todo $h \in H$, pois $\theta(h)$ é automorfismo.

Note também que $\theta(e_H) = id$, pois θ é homomorfismo, então mapeia elemento neutro do domínio no elemento neutro do contradomínio.

Seja $(n, h) \in N \times H$ qualquer.

Vamos mostrar que $(e_N, e_H)(n,h) = (n,h) = (n,h)(e_N, e_H)$.

Temos

$$(e_N, e_H)(n,h) = (e_N\, \theta(e_H)(n)\,,\ e_H h) = (e_N\, id(n), e_H h) = (e_N n\,,\ e_H h) = (n,h)$$

E

$$(n,h)(e_N, e_H) = (n\, \theta(h)(e_N), h e_H) = (n e_N, h e_H) = (n,h).$$

Portanto (e_N, e_H) é o elemento neutro de $N \rtimes_\theta H$

- Vamos mostrar que $N \rtimes_\theta H$ é fechado com a operação

Sejam $(n_1, h_1), (n_2, h_2) \in N \times H$

Então

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1\, \theta(h_1)(n_2), h_1 h_2) \in N \times H,$$ pois

$h_1 h_2 \in H$ e

$\theta(h_1)(n_2) \in N$, logo $n_1\, \theta(h_1)(n_2) \in N$.

Logo $N \rtimes_\theta H$ é fechado com a operação.

• Vamos mostrar que $N \rtimes_\theta H$ é fechado com o inverso.

Seja $(n, h) \in N \times H$

Afirmamos que $(\theta(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$ é o inverso de (n, h)

De fato

$$(n, h)(\theta(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1}) = (n\,\theta(h)(\theta(h^{-1})(n^{-1})), hh^{-1}) \underset{\uparrow\ \theta \text{ é homo}}{=} (n\,\theta(hh^{-1})(n^{-1}), hh^{-1}) =$$

$$= (n\,\theta(e_H)(n^{-1}), e_H) = (n\, id(n^{-1}), e_H) = (nn^{-1}, e_H) = (e_N, e_H).$$

E

$$(\theta(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})(n, h) = (\theta(h^{-1})(n^{-1})\,\theta(h^{-1})(n), h^{-1}h) \underset{\uparrow\ \theta(h^{-1}) \text{ é homo}}{=} (\theta(h^{-1})(n^{-1}n), h^{-1}h) =$$

$$= (\theta(h^{-1})(e_N), e_H) = (e_N, e_H).$$

Portanto $\theta(h^{-1})(n^{-1})$ é o inverso de (n, h).

Com essas 3 propriedades, $N \rtimes_\theta H$ é grupo.

(d) Mostre que $N^* = \{(n, e) \in N \rtimes_\theta H : n \in N\}$ é um subgrupo normal de $N \rtimes_\theta H$ e que $N \rtimes_\theta H$ é o produto semidireto interno de N^* por H^*.

Vamos mostrar que N^* é subgrupo normal de $N \rtimes_\theta H$:

Sejam $(n, e) \in N^*$ e $(n_1, h) \in N \rtimes_\theta H$ quaisquer.

Então

$$(n_1, h)(n, e)(n_1, h)^{-1} = (n_1\,\theta(h)(n), he)(n_1, h)^{-1} =$$

$$= (n_1\,\theta(h)(n), h)(\theta(h^{-1})(n_1^{-1}), h^{-1}) =$$

$$= (n_1\theta(h)(n)\theta(h)(\theta(h^{-1})(n_1^{-1})), hh^{-1}) =$$

$$= (\underbrace{n_1\,\theta(h)(n\,\theta(h^{-1})(n_1^{-1}))}_{\in N}, e) \in N^*$$

Portanto N^* é normal.

Vamos mostrar que $N \rtimes_\theta H$ é produto semidireto interno de N^* por H^*.

Já temos que

(i) $N^* \triangleleft N \rtimes_\theta H$

Vamos mostrar

(ii) $N^*H^* = N \rtimes_\theta H$

($\subseteq$) Seja $(n, e)\cdot(e, h) \in N^*H^*$.

Então

$$(n,e)\cdot(e,h) = (n\,\theta(e)(e), eh) = (n, h) \in N \rtimes_\theta H.$$

($\supseteq$) Seja $(n,h) \in N \rtimes_\theta H$

Então

$(n,h) = (n,e)\cdot(e,h)$ (demonstrado acima)

Logo $(n,h) \in N^*H^*$

Portanto $N^*H^* = N \rtimes_\theta H$

Agora resta mostrar que

(iii) $N^* \cap H^* = \{(e, e)\}$

Mas isso vem direto da definição de N^* e H^*.

Portanto, como (i), (ii) e (iii) são satisfeitos, então $N \rtimes_\theta H$ é produto semidireto interno de N^* e H^*.

(e) Mostre que se G é o produto semidireto interno de N por H, então $G \cong N \rtimes_\theta H$.

Pelo item (a), temos que qualquer $g \in G$ pode ser expresso de maneira única na forma nh, com $n \in N$, $h \in N$.

Então definimos

$$\varphi : G \longrightarrow N \rtimes_\theta H$$

$$g = nh \longmapsto (n, h)$$

Temos que φ está bem definido pois n, h são únicos.

Vamos mostrar que φ é homomorfismo:

Sejam $g_1, g_2 \in G$, com $g_1 = n_1 h_1$, $g_2 = n_2 h_2$ para $n_1, n_2 \in N$, $h_1, h_2 \in H$, então

$$g_1 g_2 = n_1 h_1 n_2 h_2 = n_1 h_1 n_2 (h_1^{-1} h_1) h_2 = n_1 (h_1 n_2 h_1^{-1}) h_1 h_2$$

Note que $n_1(h_1 n_2 h_1^{-1}) \in N$, pois $N \trianglelefteq G$.

Logo

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi((n_1 h_1 n_2 h_1^{-1}) h_1 h_2) = (n_1 h_1 n_2 h_1^{-1}, h_1 h_2) = (n_1 \theta(h_1)(n_2), h_1 h_2)$$

$$= (n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$$

Logo φ é homomorfismo.

E é bijetor por causa da unicidade de n, h, isto é,

φ é injetor:

Sejam g_1, g_2 tais que $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ então, seja $(n, h) = \varphi(g_1) = \varphi(g_2)$

Temos

$$g_1 = nh = g_2.$$

φ é sobrejetor:

Seja $(n, h) \in N \rtimes_\theta H$, então existe $g = nh \in G$ tal que $(n, h) = \varphi(g)$.

Portanto φ é um isomorfismo e

$G \cong N \rtimes_\theta H$.

(f) Mostre que o grupo diedral D_n é um produto semidireto de um grupo cíclico de ordem n por um grupo cíclico de ordem 2.

Podemos definir o grupo de rotações de um poliedro regular de n lados como R_n.

Temos que $R_n \cong C_n$ (cíclico de ordem n)

Pois temos n rotações, com a n-ésima sendo a identidade.

Depois, podemos definir um grupo T_2 de um tranlasão em alguma determinada direção

Isto é se $D_n = \{id, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$

Então $R_n = \{id, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1}\} \cong C_n$

e $T_2 = \{id, \tau\} \cong C_2$

Então, temos que

(i) $R_n \triangleleft D_n$, pois $\tau\sigma\tau^{-1} \in R_n \ \forall \tau \in D_n$

(ii) $D_n = R_n T_2$ (direto da definisao de D_n)

(iii) $R_n \cap T_2 = \{id\}$

Logo, pelo item e), tomamos θ igual ao item b), então

$$D_n \cong R_n \rtimes_\theta T_2 \cong C_n \rtimes_\theta C_2.$$

$\square$