MAT0265

GRUPOS

PROVA 2

PEDRO GIGECK FREIRE

10737136

QUESTÃO 3 SEJA G UM GRUPO DE ORDEM pqr em que $p<q<r$ são números primos. Mostre que G possui um único subgrupo de ordem r.

Pelo Teorema de Sylow I, temos que existe pelo menos um subgrupo de ordem r.

Vamos mostrar que $n_r = 1$. (n_r = número de r-subgrupos de Sylow)

Ainda por Sylow I, temos que

$n_p \geq 1$ e

$n_q \geq 1$

Suponha, por absurdo, que $n_r > 1$.

Por Sylow III, temos

$n_r \equiv 1 \pmod{r} \Rightarrow n_r > r$

Seja $R \leqslant G$ um r-sylow, temos que $|R| = r$ e $[G:R] = \frac{|G|}{|R|} = pq$

Logo, (ainda por Sylow III).

$n_r \mid [G:R] \Rightarrow n_r \mid pq$ mas como p e q são primos e $n_r > r > q > p$, então

$n_r \geq pq$ (pois não pode ser p nem q)

Porém, temos que qualquer subgrupo de Sylow de G é cíclico, pois terá ordem p, q ou r.

Então os p-sylows de G possuem $p-1$ geradores (pois p é primo),

Logo, se dois p-sylows P e P' são diferentes, então

$P \cap P' = \{e\}$ (pois todos os outros elementos são geradores)

Com isso, vamos contar a quantidade de elementos nos p-sylows.

- Existem $n_p(p-1)$ elementos distintos nos subgrupos de ordem p.
- Existem $n_q(q-1)$ elementos distintos nos subgrupos de ordem q.
- Existem $n_r(r-1)$ elementos distintos nos subgrupos de ordem r.

Além disso, como existe um elemento de ordem p e outro de ordem q, então existe um subgrupo de ordem pq

De modo que

$$|G| \geq \underbrace{n_p(p-1)}_{p\text{-sylows}} + \underbrace{n_q(q-1)}_{q\text{-sylows}} + \underbrace{n_r(r-1)}_{r\text{-sylows}} + \underbrace{pq}_{\substack{\text{subgrupo}\\ \text{de ordem } pq}} + \underbrace{1}_{\{e\}}$$

$$\geq (p-1)+(q-1)+pq(r-1)+pq+1 \quad (\text{pois } n_r \geq pq)$$

$$= p+q+pqr-pq+pq-1$$

$$= p+q+pqr-1$$

$$> pqr \quad (\text{absurdo})$$

Portanto, por contradisão, $n_r = 1$.