MAE0221

PROBABILIDADE I

Pedro Gigeck Freire

Provinha 03

A variável Y tem f.d.p dada por, para $\lambda > 0$ fixado

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

Calcule $E(e^{tY})$ e indique para quais valores de t (na reta) essa esperança é finita

---

Seja $g(Y) = e^{tY}$

Então

$$E[e^{tY}] = E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{0} g(y) 0\, dy + \int_{0}^{\infty} g(y) \lambda e^{-\lambda y} dy$$

$$= \int_0^{\infty} e^{ty} \lambda e^{-\lambda y} dy$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{ty - \lambda y} dy$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{y(t-\lambda)} dy$$

$$= \lambda \left(\frac{e^{y(t-\lambda)}}{t-\lambda} \Bigg|_0^{\infty} \right)$$

$$= \lambda \left(\lim_{y\to\infty} \frac{e^{y(t-\lambda)}}{t-\lambda} - \frac{1}{t-\lambda} \right) = \frac{\lambda}{t-\lambda} \left(\lim_{y\to\infty} e^{y(t-\lambda)} - 1 \right)$$

Esse valor é finito somente se $t - \lambda \leq 0$, ou seja $\boxed{t \leq \lambda}$

Nesse caso, $E[e^{tY}] = \frac{\lambda}{t-\lambda}\left(\lim_{y\to\infty} e^{y(t-\lambda)} - 1\right) = \frac{-\lambda}{t-\lambda} = \boxed{\frac{\lambda}{\lambda - t}}$ $\boxed{\text{ou } 0 \text{ se } \lambda = t}$

□