MAT0265 - GRUPOS

PROVA 1

PEDRO GIGECK FREIRE

10737136

QUESTÃO 2

Seja G um grupo e suponha que, para um inteiro $n > 1$ fixado, valha $(ab)^n = a^n b^n$ para todos $a, b \in G$.

Considere os seguintes conjuntos

$$G[n] = \{a \in G : a^n = e\} \quad e$$

$$G^n = \{a^n : a \in G\}$$

Mostre que $G[n]$ e G^n são subgrupos normais de G e que o grupo quociente $G/G[n]$ é isomorfo a G^n.

(i) Vamos mostrar que $G[n] \leq G$.

- $e^n = e$, portanto $e \in G[n]$.
- Seja $a \in G[n]$, então

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = e^{-1} = e, \text{ portanto } a^{-1} \in G[n]$$

- Sejam $a, b \in G[n]$, então

$$(ab)^n = a^n b^n = e.e = e, \text{ portanto } ab \in G[n].$$

Logo, $G[n]$ é subgrupo de G.

(ii) Vamos mostrar que $G^n \leq G$

- $e = e^n \in G^n$.

- Seja $a \in G^n$, então

$a = b^n$ para algum $b \in G$

Então $a^{-1} = (b^n)^{-1} = (b^{-1})^n \in G^n$.

- Sejam $a, b \in G^n$, então

$a = c^n$ e $b = d^n$ para alguns $c, d \in G$

Logo, $ab = c^n d^n = (cd)^n \in G^n$.

Portanto G^n é subgrupo de G.

(iii) Vamos mostrar que $G[n] \triangleleft G$.

Sejam $g \in G$, $a \in G[n]$ quaisquer.

Então

$$(gag^{-1})^n = g^n a^n (g^{-1})^n = g^n e (g^{-1})^n = g^n (g^{-1})^n = g^n (g^n)^{-1} = e.$$

pois $a \in G[n]$.

Portanto $gag^{-1} \in G[n]$, logo $G[n]$ é normal.

(iv) Vamos mostrar que $G^n \triangleleft G$.

Seja $g \in G$. Seja $a \in G^n$

Vamos provar, por indução em i, que

$ga^i g^{-1} = (gag^{-1})^i$

Caso base $(i = 1)$ vale $ga^1 g^{-1} = (gag^{-1})^1 = gag^{-1}$

Suponha que $ga^{n-1} g = (gag^{-1})^{n-1}$

Então

$$ga^n g^{-1} = ga(g^{-1}g)a^{n-1} g^{-1} = gag^{-1}(gag^{-1})^{n-1} = (gag^{-1})^n.$$

O resultado segue pelo princípio da indução.

Então, como $a \in G^n$, então $a = b^n$ para algum $b \in G$

Logo $gag^{-1} = gb^ng^{-1} = (gbg^{-1})^n \in G^n$. (Pelo resultado provado por indução).

(iv) Vamos mostrar que $G/G[n]$ é isomorfo a G^n

Seja $\varphi_n : G \to G$ dada por

$$\varphi_n(g) = g^n, \text{ para todo } g \in G$$

Afirmamos que φ é um homomorfismo:

Sejam $a, b \in G$.

Então $\varphi_n(ab) = (ab)^n = a^n b^n = \varphi_n(a) \cdot \varphi_n(b)$.

Portanto φ_n é homomorfismo.

Além disso, por definição, temos que

$$\ker \varphi_n = \{a \in G : \varphi_n(a) = e\} = \{a \in G : a^n = e\} = G[n].$$

e

$$\operatorname{Im} \varphi_n = \{\varphi_n(a) : a \in G\} = \{a^n : a \in G\} = G^n$$

Portanto, pelo teorema do homomorfismo (visto em aula em 28/09)

$$G/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$$

Ou seja

$$G/G[n] \cong G^n$$