Capítulo 14. exercício 2

(c) Para a fórmula que você derivou em (a), como o erro de arredondamento se comporta como funsão de h?

Vamos usar o mesmo raciocínio que usamos em sala para estimar os erros de arredondamento.

Tomemos nossa estimativa

$$\hat{f}'''(x_0) = \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + 2f(x_0-h) - f(x_0-2h)}{2h^3} = Dh$$

Vamos simplificar as contas considerando que

$fl(x_0) = x_0$

$fl(h) = h$

E que as operações de adição, multiplicação e divisão são exatas

Então temos

$$\overline{Dh} = fl(Dh) = \frac{fl(f(x_0+2h)) - 2\,fl(f(x_0+h)) + 2\,fl(f(x_0-h)) - fl(f(x_0-2h))}{2h^3}$$

Para facilitar as notações, sejam

$x_1 = x_0 - 2h$ $\quad x_3 = x_0 + h$ $\quad$ e $\quad y_1 = -f(x_1)$ $\quad y_3 = -2f(x_3)$

$x_2 = x_0 - h$ $\quad x_4 = x_0 + 2h$ $\qquad\quad y_2 = 2f(x_2)$ $\quad y_4 = f(x_4)$

Assim, temos

$$Dh = \frac{1}{2h^3}\sum_{i=1}^{4} y_i \quad \text{e} \quad \overline{Dh} = \frac{1}{2h^3}\sum_{i=1}^{4} fl(y_i)$$

$$|Dh - \overline{Dh}| = \frac{1}{2h^3}\left|\sum_{1}^{4} y_i - fl(y_i)\right|$$; Aplicando a desigualdade triangular

$$|Dh - \overline{Dh}| \leq \frac{1}{2h^3}\sum_{i=1}^{4}|y_i - fl(y_i)| \leq \frac{4\varepsilon}{2h^3}$$, pois $|y_i - fl(y_i)| \leq \varepsilon$ (unidade de arredondamento)

Então podemos perceber que o erro de arredondamento é inversamente proporcional ao cubo de h.

Por isso, o erro de arredondamento toma controle e cresce tão rápido, nos resultados do exercício (b), podemos perceber uma propersão para $h < 10^{-3}$.