MAT 0265

Grupos

Lista 2

(5) Seja G um Grupo, seja H um subgrupo de G e seja K um subgrupo de H. Mostre que K tem índice finito em G se e somente se H tiver índice finito em G e K tiver índice finito em H.

Neste caso, mostre que $[G:K] = [G:H][H:K]$

Antes vamos definir algumas notações

- $C_H^G = \{aH : a \in G\}$ conjunto das classes laterais a esquerda de H em G
- $C_K^G = \{aK : a \in G\}$ (análogos)
- $C_K^H = \{hK : h \in H\}$

E vamos resgatar alguns resultados

Seja $f : A \to B$ uma função.

(i) Se f é injetora e B é finito, então A é finito.

Podemos construir $f' : A \to f(A)$ e f' é uma bijeção; como $f(A) \subseteq B$, $f(A)$ é finito. Como f' é bijeção, A é finito.

(ii) Se f é sobrejetora e A é finito, então B é finito.

Podemos construir $g : B \to A$, com $f(g(b)) = b$; pois para qualquer $b \in B$, existe $a \in A$ tq $f(a) = b$.

Como B é Imagem de f, então g é injetora, pois $g(b) = g(b') \Rightarrow f(g(b)) = f(g(b')) \Rightarrow b = b'$. Por (i), como g é injetora, B é finito.

Vamos provar

K tem índice finito em G $\Leftrightarrow$ H tem índice finito em G e K tem índice finito em H.

($\Rightarrow$) K tem índice finito em G.

Então C_K^G é finito

Definimos a função $f: C_K^H \longrightarrow C_K^G$, com $f(hK) \longmapsto hK$, com $h \in H$.

Vamos mostrar que f é injetora (direto da definição)

$f(hK) = f(h'K) \Rightarrow hK = h'K$.

Logo, por (i), C_K^H é finito.

Definimos, agora, $g: C_K^G \longrightarrow C_H^G$, com $g(aK) \longmapsto aH$, com $a \in G$.

Vamos mostrar que g é sobrejetora (direto da definição)

Seja $aH \in C_H^G$, $aH = g(aK) \Rightarrow C_H^G \subseteq Im(g)$, então g é sobrejetora.

(Vale perceber que g está bem definido, pois se $aK = bK$, então $b^{-1}a \in K$, já que $a \underset{E}{\sim} b$, mas $K \subseteq H$, então $b^{-1}a \in H$, então $aH = bH$.)

Por (ii) como g é sobrejetora e C_K^G é finito, então C_H^G é finito.

Portanto, C_H^G e C_K^H são finitos, isto é, H tem um índice finito em G e K tem índice finito em H.

($\Leftarrow$) H tem índice finito em G e K tem índice finito em H.

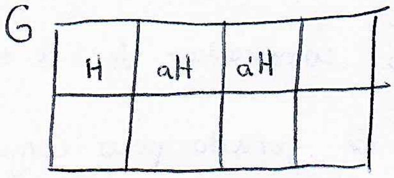
Então C_H^G é finito e

C_K^H é finito

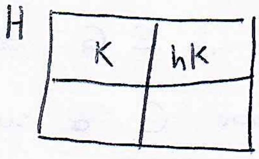
Sabemos que C_H^G define uma partição de G e C_K^H define uma partição de H.

Podemos definir, para cada classe lateral de H em G, uma partição análoga. $C_K^{aH} = \{bK : b \in aH\}$

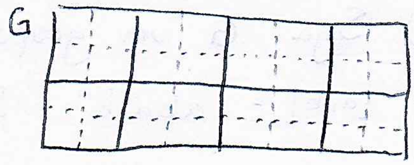
Intuitivamente, estamos criando subpartições, da forma:



Classes laterais de H em G



Classes laterais de K em H.



Partição que criamos.

Sabemos que é uma partição pois são classes de equivalencia (Análogo as classes laterais)

Portanto, particionamos G em um número finito de partes, que são classes laterais de K em G.

<u>Então C_K^G é finito.</u>

Mais que isso, para cada classe de H em G, criamos novas classes, do tamanho de C_K^H.

Então, no total

$$[G:K] = \sum_{aH \in C_H^G} |C_K^{aH}| = \sum_{aH \in C_H^G} [H:K] = [G:H][H:K].$$