MAC 0331

Geometria Computacional

Pedro Gigeck Freire

10737136

Lista 6

[4] Descreva o Diagrama de Voronoy e o Grafo de Delayney dos vértices de um polígono regular.

Vamos construir o Diagrama de Voronoy usando os teoremas da aula 11.

• Os vértices:

"Um ponto $q$ é vértice de $Vor(P)$ sse $C_p(q)$ contém três ou mais pontos de $P$ em sua fronteira"

Então, pegamos os círculos que contém os vértices do polígono na fronteira. Porém, como o polígono é regular, quaisquer 3 pontos definirão o mesmo círculo, que é o círculo circunscrito ao polígono

Então, $Vor(P)$ tem apenas 1 vértice, o centro do polígono

• As arestas

"A reta bissetora entre dois pontos $p_i, p_j$ define uma aresta de $Vor(P)$ sse existe um ponto $q$ nela tq $C_p(q)$ contém $p_i, p_j$ e apenas estes"

Temos que verificar quais pares de pontos satisfazem isso

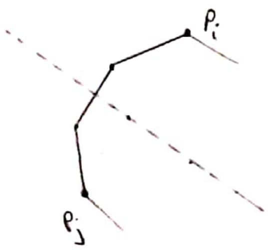
• Pares de pontos adjacentes: ✓

O ponto entre $p_i$ e $p_j$ $q$ é tal que apenas $p_i$ e $p_j$ estão em $C_p(q)$.


Digitalizado com CamScanner

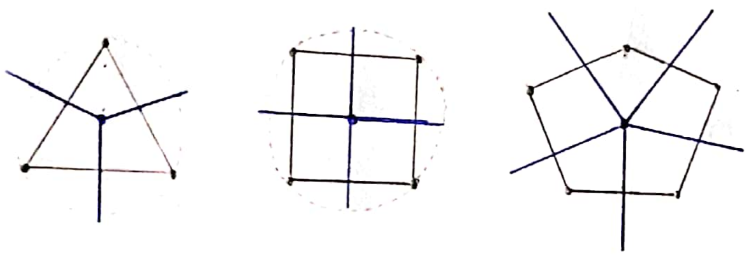
• Pontos não adjacentes: X

Qualquer ponto na reta bissetora define um $C_P(q)$ que inclui algum outro ponto do polígono, pois os outros pontos estão mais próximos da reta que $p_i$ e $p_j$.




Portanto, tem um único vértice e uma aresta pra cada aresta do polígono (perpendicular)

Por exemplo



O grafo de Delaunay é bem mais simples. Podemos ver que as células vizinhas em Vor(P) são as que representam os vértices vizinhos no polígono.

Portanto, DG(P) é o próprio polígono. ☺

$\boxed{5}$ Descreva um algoritmo que, dado o grafo de Delauney DG(P) de um conjunto de pontos P, constrói Vor(P). Tente fazer um algoritmo linear.

Como DG(P) é o grafo dual de Vor(P), então devemos encontrar todas as faces de DG(P), construir o círculo que é definido pelos vértices da face e então adicionar o centro do círculo como um vértice de Vor(P) e as arestas da face indicando as arestas de Vor(P)

Consideramos que DG(P) é dado por uma DCEL, com informações sobre as faces

Digitalizado com CamScanner

Consideraremos, também, que cada aresta da DCEL sabe de que face ela faz parte. As faces serão identificadas por números, que a ordem que elas aparecem na DCEL.

Então, em mais alto nível, nosso algoritmo fora.

- Para cada face, constroi um circulo
- Adiciona o centro do círculo como um vértice de Vor(P)
- Para cada aresta do DG, adiciona uma aresta entre os vértices que representam as faces dessa aresta.

A ESTRUTURA DE CADA ARESTA DA DCEL será então

```
e {  P1 ▷ Ponto inicial
     P2 ▷ Ponto final
     f ▷ número da face
     prev ▷ aresta anterior
     prox ▷ aresta posterior
     twin ▷ aresta gemea
}
```

Consideraremos também que uma face f é representada por alguma de suas arestas.

Temos ainda que tratar a face externa separadamente, pois ela será representada por vários vértices indo para o infinito, e não um só vértice.

O número da face externa será 0.

Depois de todas as considerações, vamos ao algoritmo:

```
Voronoy (DG)
    Vor ← {∅, ∅}   // {V, E}
    para f em (DG.faces \ {face_externa}) faça:
        P1 ← f.P1
        P2 ← f.P2
        P3 ← f.prox.P1
```

Digitalizado com CamScanner

```
06      c ← circulo (p1, p2, p3)
07      Vor.V ← Vor.V ∪ {c.centro}
08    para e em DG.arestas faça
09      f1 ← e.f
10      se f1 = 0
11          então v1 ← vertice_infinito (e)
12                Vor.V ← Vor.V ∪ {v1}
13          senão v1 ← Vor.V[f1]
14      f2 ← e.twin.f
15      se f2 = 0
16          então v2 ← vertice_infinito (e.twin)
17                Vor.V ← Vor.V ∪ {v2}
18          senão v2 ← Vor.V[f2]
19      Vor.E ← Vor.E ∪ {v1, v2}
20    devolva Vor
```

Recapitulando, nas linhas 01 a 07, adicionamos os vértices de Vor(P). Nas linhas 08 a 20 adicionamos as arestas e os "vértices infinitos", que podem ser representados de alguma maneira artificial.

O primeiro laço consome tempo $O(F)$, onde $F$ é o número de faces de $DG(P)$.

O segundo laço consome tempo $O(E)$, com $E$ número de arestas de $DG(P)$.

Então nosso algoritmo consome tempo $O(F) + O(E)$, pela relação de Euler, $V - E + F = 2$, então nosso algoritmo consome tempo $O(V)$, linear.

Digitalizado com CamScanner

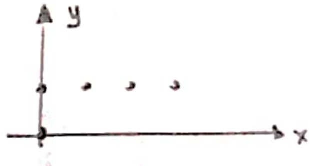
**6** Descreva um conjunto P de n pontos, para um n arbitrário, que não contenha 4 pontos cocirculares, tal que o grafo de Delauney tenha um vértice de grau n-1.

Nosso conjunto P será composto de um ponto arbitrário (que podemos colocar na origem) e os outros n-1 pontos distribuidos em uma reta acima da origem:

$$P_n = \{(0,0)\} \cup \{(x,1) \mid x \in \{0,1,\dots,n-1\}\}$$

Por exemplo, se $n=5$, então nosso P será:

$$\{(0,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (2,1),\ (3,1)\}$$




E o grafo de Delauney ficará

Dessa forma, a origem sempre terá grau n-1.

<u>Prova:</u>

Primeiro, sabemos que 3 pontos colineares não podem ser cocirculares, então não há 4 pontos cocirculares.

Agora temos que provar que a origem compartilha uma aresta, no diagrama de Voronoy com todos os outros pontos.

Pelo teorema da aula 19, dois pontos compartilham uma aresta, que é a reta bissetora, sse existe um ponto q nela tq $C_p(q)$ contém $p_i, p_j$ e apenas estes.

Então temos que achar esse ponto q em todas as retas bissetoras entre a origem e os outros pontos.

Digitalizado com CamScanner

Seja $p_j = (j, 1)$.

A reta que passa pela origem e por $p_j$ é dada por

$$yj - x = 0$$

A reta bissetora é aquela perpendicular que passa pelo ponto $(j/2, 1/2)$ (Depois de umas continhas, chegamos na reta:)

$$r(j): 2y + 2xj - j^2 - 1 = 0$$

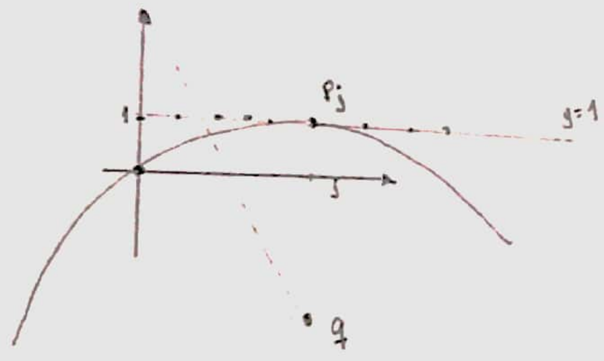
<u>Lema</u>. O ponto $q = \left(j, \frac{1-j^2}{2}\right) \in r(j)$ e $C_P(q)$ contém apenas a origem e $p_j$.

quando colocamos $q$ na reta, temos

$$2\left(\frac{1-j^2}{2}\right) + 2jj - j^2 - 1 = 1 - j^2 + 2j^2 - j^2 - 1 = 0.$$

De fato, $q \in r(j)$.

Vamos observar visualmente $C_P(q)$.




Aqui, podemos ver que $C_P(q)$ contém a origem e o $p_j$ e nenhum outro ponto, pois a única interseção entre $C_P(q)$ e a reta $y=1$ é o ponto $p_j$ ∎

Portanto, para todo $j$, existe um $q = \left(j, \frac{1-j^2}{2}\right)$ na reta bissetora entre a origem e $p_j$ e que $C_P(q)$ contém apenas a origem e $p_j$.

Então a origem e $p_j$ compartilham uma aresta em $Vor(P)$, então estão conectados em $DG(P)$.

Com isso, a origem sempre terá grau $n-1$! ∎

Digitalizado com CamScanner