MAT0265 - Grupos

Prova 1

Pedro Gigeck Freire

10737136

Questão 3

Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.

a) Se G é um grupo infinito e S é um subconjunto não vazio de G tal que $xy \in S$ sempre que $x, y \in S$. Então S é um subgrupo de G.

Falso.

Podemos fornecer o contra exemplo

$G = \mathbb{Z}$ com a adição

$S = \mathbb{Z}_+^* = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$

É verdade que, sempre que $x, y \in S$, então $x > 0$ e $y > 0$, Logo

$x + y > 0$, então $(x+y) \in S$.

Porém S não é subgrupo de G, pois $e = 0 \notin S$.

b) Sejam $n \geq 2$ um inteiro, $2 \leq r \leq n$ um inteiro e $\sigma \in S_n$ um r-ciclo. Se $1 \leq m < r$, então σ^m é um r-ciclo.

Falso.

Podemos tomar o contra exemplo com $n = r = 4$, $m = 2$

Com $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4) \in S_4$ um 4-ciclo, mas

$\sigma^2 = (1\ 3)(2\ 4)$ não é um 4-ciclo.

c) Se H é um subgrupo normal de um grupo G tal que $a^2 \in H$, para todo $a \in G$, então G/H é abeliano.

Verdadeiro.

Seja $aH \in G/H$, $bH \in G/H$ quaisquer.

Temos que

$$(ba)^{-1}(ab) = e\,(ba)^{-1}e\,(ab)\,e = (bb^{-1})(ba)^{-1}(a^{-1}a)(ab)(bb^{-1}) =$$

$$= b\,b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}\,a\,a\,b\,b\,b^{-1} =$$

$$= b\,(b^{-1}a^{-1})^2\,a^2\,b^2\,b^{-1}$$

Mas, temos que a^2, b^2 e $(b^{-1}a^{-1})^2$ pertencem a H.

Como H é subgrupo, então $(b^{-1}a^{-1})^2a^2b^2 \in H$.

Mas H é normal, então $b\left[(b^{-1}a^{-1})^2a^2b^2\right]b^{-1} \in H$.

Resumindo.

$$(ba)^{-1}(ab) = b\left[(b^{-1}a^{-1})^2a^2b^2\right]b^{-1} \in H$$

Portanto

$$ab \underset{E}{\simeq} ba \Rightarrow (ab)H = (ba)H$$

Isto é

$$(aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH)$$

Logo G/H é abeliano.

■