MAC239
Aula 2

Leliane Nunes de Barros

leliane@ime.usp.br

2018

Motivação desse curso

Uso da lógica para especificação e verificação de sistemas de computação para, basicamente, tratar uma “relação de satisfação":

$$M \models \phi ,$$

sendo M uma especificação do modelo ou de um estado do sistema e ϕ uma propriedade (fórmula dessa lógica), expressando o que deve ser satisfeito (verdadeiro) em M.

Motivação para estudar lógica

Adquirir habilidade para modelar situações da vida real de uma maneira que permita o raciocínio formal sobre essas situações.

Elementos da lógica

- Linguagem lógica:

  > (sintaxe) quais são as fórmulas bem formadas (fbf) ?
  > (semântica) como sabemos que uma fbf expressa o que queremos?

- Consequência lógica:

  > dado um conjunto de sentenças que sabemos ser verdadeiras (premissas), quais outras sentenças também serão verdadeiras (conclusão)?

- Raciocínio lógica:

  > existem procedimentos de manipulação simbólica (como no MU-puzzle) que podemos usar para derivar as conclusões necessárias através da manipulação simbólica das fórmulas nas premissas?

Lógica Proposicional

Proposições

Proposição é uma declaração afirmativa a qual se pode associar um valor verdadeiro ou falso mas não ambos.

Teve greve de ônibus.

Proposições

Proposição é uma declaração afirmativa a qual se pode associar um valor verdadeiro ou falso mas não ambos.

Teve greve de ônibus.

Maria trouxe o guarda-chuva.

Proposições

Proposição é uma declaração afirmativa a qual se pode associar um valor verdadeiro ou falso mas não ambos.

Teve greve de ônibus.

Maria trouxe o guarda-chuva.

João atrasou para a aula

Proposições

Proposição é uma declaração afirmativa a qual se pode associar um valor verdadeiro ou falso mas não ambos.

Teve greve de ônibus.

Maria trouxe o guarda-chuva.

João atrasou para a aula

...

Proposições

Proposição é uma declaração afirmativa a qual se pode associar um valor verdadeiro ou falso mas não ambos.

Teve greve de ônibus.

Maria trouxe o guarda-chuva.

João atrasou para a aula

...

Está chovendo?

Proposições

Proposição é uma declaração afirmativa a qual se pode associar um valor verdadeiro ou falso mas não ambos.

Teve greve de ônibus.

Maria trouxe o guarda-chuva.

João atrasou para a aula

...

~~Está chovendo?~~

Proposições

Proposição é uma declaração afirmativa a qual se pode associar um valor verdadeiro ou falso mas não ambos.

Teve greve de ônibus.

Maria trouxe o guarda-chuva.

João atrasou para a aula

...

~~Está chovendo?~~

Feche a porta!

Proposições

Proposição é uma declaração afirmativa a qual se pode associar um valor verdadeiro ou falso mas não ambos.

Teve greve de ônibus.

Maria trouxe o guarda-chuva.

João atrasou para a aula

...

~~Está chovendo?~~

~~Feche a porta!~~

- *Estamos interessados em frases declarativas precisas ou afirmações sobre o comportamento de sistemas computacionais ou programas.*

- *Queremos transformar frases declarativas em fórmulas lógicas e criar um formalismo para manipular tais fórmulas.*

Combinando Proposições

Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.

Combinando Proposições

Se está chovendo e Maria não trouxe o guarda-chuva, então Maria se molhou.

Combinando Proposições

Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.

Se está chovendo e Maria não trouxe o guarda-chuva, então Maria se molhou.

Combinando Proposições

Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.

Se está chovendo e Maria não trouxe o guarda-chuva, então Maria se molhou.

Se p e não q, então r.

Argumentos

Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.

Teve greve de ônibus.

João **não** se atrasou.

Argumentos

Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.

Teve greve de ônibus.

João **não** se atrasou.

Havia táxi na estação.

Argumentos

Se está chovendo e Maria não trouxe o guarda-chuva, então Maria se molhou.

Está chovendo.

Maria **não** se molhou.

Argumentos

Se está chovendo e Maria não trouxe o guarda-chuva, então Maria se molhou.

Está chovendo.

Maria **não** se molhou.

Maria trouxe o guarda-chuva.

Argumentos

Se p e não q, então r.

p.

Não r.

q.

Sintaxe

- Conjunto infinito de *símbolos proposicionais* (ou *átomos*).

Sintaxe

- Conjunto infinito de *símbolos proposicionais* (ou *átomos*).
- Conectivos lógicos:

Sintaxe

- Conjunto infinito de *símbolos proposicionais* (ou *átomos*).
- Conectivos lógicos:
  - $\neg$

Sintaxe

- Conjunto infinito de *símbolos proposicionais* (ou *átomos*).
- Conectivos lógicos:
  - $\neg$
  - $\vee$

Sintaxe

- Conjunto infinito de *símbolos proposicionais* (ou *átomos*).
- Conectivos lógicos:
  - $\neg$
  - $\vee$
  - $\wedge$

Sintaxe

- Conjunto infinito de *símbolos proposicionais* (ou *átomos*).
- Conectivos lógicos:
  - $\neg$
  - $\vee$
  - $\wedge$
  - $\rightarrow$

Sintaxe

- Conjunto infinito de *símbolos proposicionais* (ou *átomos*).
- Conectivos lógicos:
  - $\neg$
  - $\vee$
  - $\wedge$
  - $\rightarrow$
- Parênteses

Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos

Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos
- Se φ é fbf, então $(\neg\varphi)$ é fbf

Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos
- Se φ é fbf, então $(\neg\varphi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \vee \psi)$ é fbf

Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos
- Se φ é fbf, então $(\neg\varphi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \vee \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \wedge \psi)$ é fbf

Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos
- Se φ é fbf, então $(\neg\varphi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \vee \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \wedge \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é fbf

Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos
- Se φ é fbf, então $(\neg\varphi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \vee \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \wedge \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é fbf

Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos
- Se φ é fbf, então $(\neg\varphi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \vee \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \wedge \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \to \psi)$ é fbf

Backus Naur Form (BNF)

$$\varphi ::= p|(\neg\varphi)|(\varphi \vee \varphi)|(\varphi \wedge \varphi)|(\varphi \to \varphi)$$

Fórmulas

p

Fórmulas

p

$(\neg q)$

Fórmulas

$$p$$

$$(\neg q)$$

$$(p \wedge (\neg q))$$

Fórmulas

$$p$$

$$(\neg q)$$

$$(p \wedge (\neg q))$$

$$((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r)$$

Convenção

$$\neg \quad \ggg \quad \wedge, \vee \quad \ggg \quad \rightarrow$$

Convenção

$$\neg \quad \ggg \quad \wedge, \vee \quad \ggg \quad \to$$

p

$(\neg q)$

$(p \wedge (\neg q))$

$((p \wedge (\neg q)) \to r)$

Convenção

$$\neg \quad \ggg \quad \wedge, \vee \quad \ggg \quad \rightarrow$$

$$p$$
$$(\neg q) \Longrightarrow \neg q$$
$$(p \wedge (\neg q))$$
$$((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r)$$

Convenção

$$\neg \quad \ggg \quad \wedge, \vee \quad \ggg \quad \rightarrow$$

$$p$$

$$(\neg q) \Longrightarrow \neg q$$

$$(p \wedge (\neg q)) \Longrightarrow p \wedge \neg q$$

$$((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r)$$

Convenção

$$\neg \quad \ggg \quad \wedge, \vee \quad \ggg \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&p \\
&(\neg q) \Longrightarrow \neg q \\
&(p \wedge (\neg q)) \Longrightarrow p \wedge \neg q \\
&((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r) \Longrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow r
\end{aligned}$$

$$p \wedge q \rightarrow r \quad = \quad (p \wedge q) \rightarrow r$$

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \to r &= (p \wedge q) \to r \\
\neg p \wedge r &=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \to r &= (p \wedge q) \to r \\
\neg p \wedge r &= (\neg p) \wedge r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \to r &= (p \wedge q) \to r \\
\neg p \wedge r &= (\neg p) \wedge r \\
p \wedge q \vee r &=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \to r &= (p \wedge q) \to r \\
\neg p \wedge r &= (\neg p) \wedge r \\
p \wedge q \vee r &= \text{??? \textit{Precisa de parênteses!}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \rightarrow r &= (p \wedge q) \rightarrow r \\
\neg p \wedge r &= (\neg p) \wedge r \\
p \wedge q \vee r &= \textit{??? Precisa de parênteses!} \\
p \wedge q \wedge r &=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \rightarrow r &\quad = \quad (p \wedge q) \rightarrow r \\
\neg p \wedge r &\quad = \quad (\neg p) \wedge r \\
p \wedge q \vee r &\quad = \quad \textit{??? Precisa de parênteses!} \\
p \wedge q \wedge r &\quad = \quad (p \wedge q) \wedge r
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{rcl}
p \wedge q \to r & = & (p \wedge q) \to r \\
\neg p \wedge r & = & (\neg p) \wedge r \\
p \wedge q \vee r & = & \textit{??? Precisa de parênteses!} \\
p \wedge q \wedge r & = & (p \wedge q) \wedge r \quad = \quad p \wedge (q \wedge r)
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
p \land q \to r &= (p \land q) \to r \\
\neg p \land r &= (\neg p) \land r \\
p \land q \lor r &= \text{??? Precisa de parênteses!} \\
p \land q \land r &= (p \land q) \land r \quad = \quad p \land (q \land r) \quad \text{(associativa)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \to r &\quad = \quad (p \wedge q) \to r \\
\neg p \wedge r &\quad = \quad (\neg p) \wedge r \\
p \wedge q \vee r &\quad = \quad \textit{??? Precisa de parênteses!} \\
p \wedge q \wedge r &\quad = \quad (p \wedge q) \wedge r \quad = \quad p \wedge (q \wedge r) \quad \text{(associativa)} \\
p \to q \to r &\quad = \quad
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \to r &= (p \wedge q) \to r \\
\neg p \wedge r &= (\neg p) \wedge r \\
p \wedge q \vee r &= \textit{??? Precisa de parênteses!} \\
p \wedge q \wedge r &= (p \wedge q) \wedge r \quad = \quad p \wedge (q \wedge r) \quad \text{(associativa)} \\
p \to q \to r &= \textit{??? Precisa de parênteses!}
\end{aligned}
$$

$p \wedge q \rightarrow r \quad = \quad (p \wedge q) \rightarrow r$

$\neg p \wedge r \quad = \quad (\neg p) \wedge r$

$p \wedge q \vee r$ = ??? *Precisa de parênteses!*

= $(p \wedge q) \vee r$ *(convenção: da esq. para dir.)*

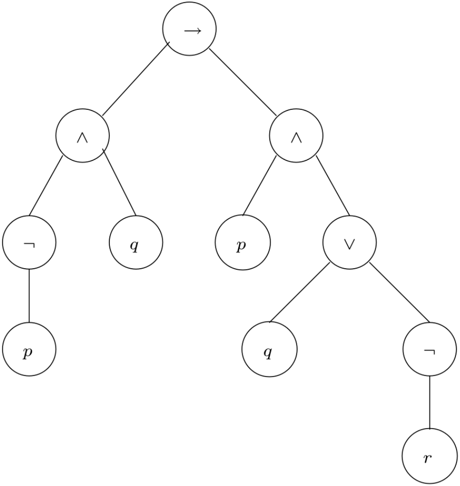
$p \wedge q \wedge r \quad = \quad (p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ *(associativa)*

(não precisa de parênteses)

$p \rightarrow q \rightarrow r$ = ??? *Precisa de parênteses!*

= $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ *(convenção: da dir. para esq.)*

Árvore de análise



Dedução Natural

Queremos verificar a validade de argumentos:

Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.

Teve greve de ônibus.

João **não** se atrasou.

Havia táxi na estação.

Dedução Natural

Queremos verificar a validade de argumentos:

Se p e não q, então r.

p.

Não r.

q.

Dedução Natural

Queremos verificar a validade de argumentos:

Se p e não q, então r.

p.

Não r.

q.

Sequente: $p \wedge \neg q \rightarrow r$

Dedução Natural

Queremos verificar a validade de argumentos:

Se p e não q, então r.

p.

Não r.

q.

Sequente: $p \wedge \neg q \to r, \ p$

Dedução Natural

Queremos verificar a validade de argumentos:

Se p e não q, então r.

p.

Não r.

q.

Sequente: $p \wedge \neg q \rightarrow r, \; p, \; \neg r$

Dedução Natural

Queremos verificar a validade de argumentos:

Se p e não q, então r.

p.

Não r.

q.

Sequente: $p \land \neg q \to r,\ p,\ \neg r \vdash$ q

Como formalizar o processo de raciocínio lógico?

Isto é, como a partir de um conjunto de fórmulas bem formadas podemos inferir novas fórmulas bem formadas?

Regras de Reescrita *(ou regras de inferência lógica)*

Passos de raciocínio lógico "imediatamente óbvios" (Aristóteles)

Para cada conectivo, regras para introdução e eliminação.

Permitem inferir uma conclusão de um conjunto de premissas.

Regras da conjunção

Introdução

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \land \psi} \land_i$$

Regras da conjunção

Introdução

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge_i$$

Eliminação

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge_{e_1} \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge_{e_2}$$

Exemplos

- $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

Exemplos

- $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$
- $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$