MAC 0210 - LISTA 2

QUESTÃO 1

DADA UMA SEQUÊNCIA $y_0, y_1, \dots$ Defina o operador de diferença para a Δ por $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. Potências de Δ são definidas recursivamente

$$\Delta^0 y_i = y_i$$
$$\Delta^j y_i = \Delta(\Delta^{j-1} y_i)$$

Assim, $\Delta^2 y_i = \Delta(y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+1} + y_i$, etc. Considere a interpolação polinomial em pontos equiespaçados $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$

(a) Mostre que

$$f[x_0, \dots, x_j] = \frac{1}{j!\,h^j} \Delta^j f(x_0)$$

Vamos provar por indução em j

Base $j = 0$

$$f[x_0] = f(x_0) = \Delta^0 f(x_0) = \frac{1}{1.1} \Delta^0 f(x_0) = \frac{1}{0!\,h^0} \Delta^0 f(x_0) = \frac{1}{j!\,h^j} \Delta^j f(x_0)$$

Passo da indução:

Hipótese: $f[x_0, \dots, x_{j-1}] = \frac{1}{(j-1)!\,h^{j-1}} \Delta^{j-1} f(x_0)$ (Vale para $j-1$)

Multiplicando por -1 e somando $\underbrace{f[x_1, \dots, x_j] = \frac{1}{(j-1)!\,h^{j-1}} \Delta^{j-1} f(x_1)}_{\text{Vale pela hipótese (já que tem j}}$:

$$f[x_1, \dots, x_j] - f[x_0, \dots, x_{j-1}] = \frac{1}{(j-1)!\,h^{j-1}} \left(\Delta^{j-1} f(x_1) - \Delta^{j-1} f(x_0) \right)$$

Dividindo ambos os lados por $(x_j - x_0)$

$$\frac{f[x_1, \dots, x_j] - f[x_0, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_0} = \frac{1}{(j-1)!\, h^{j-1}\, (x_j - x_0)} \left(\Delta^{j-1} f(x_1) - \Delta^{j-1} f(x_0) \right)$$

Mas, observemos que

$$x_j = x_0 + j.h \Rightarrow x_j - x_0 = j.h \qquad e$$

$$\frac{f[x_1, \dots, x_j] - f[x_0, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_0} = f[x_0, \dots, x_j] \quad \text{por definição} \quad ,$$

Então obtemos

$$f[x_0, \dots, x_j] = \frac{1}{(j-1)!\, h^{j-1}\, j\, h} \left(\Delta^{j-1} f(x_1) - \Delta^{j-1} f(x_0) \right) = \frac{1}{j!\, h^j} \left(\Delta^{j-1} f(x_1) - \Delta^{j-1} f(x_0) \right)$$

Finalmente, observemos que

$$\Delta^{j-1} f(x_1) - \Delta^{j-1} f(x_0) = \Delta^{j} f(x_0)$$

Concluindo que, de fato, pelo princípio da indução

$$f[x_0, \dots, x_j] = \frac{1}{j!\, h^j} \Delta^{j} f(x_0) \quad \blacksquare$$