MAC105 FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA A COMPUTAÇÃO

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: PEDRO GIGECK FREIRE **Número USP:** 10737136

Assinatura

PEDRO GIGECK FREIRE

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E28 **Data:** 25/04/2018

SOLUÇÃO

VAMOS PROVAR POR INDUÇÃO EM n.

BASE: $(n=0)$ SE $n=0$, VERIFICAMOS $H_{2^n} = \sum_{1\leq k\leq 1} 1/k = 1 \geq 1 + 0/2$. DE FATO, A DESIGUALDADE VALE NESSE CASO.

PASSO DE INDUÇÃO: Suponha que sabemos que $H_{2^{n-1}} \geq 1 + \frac{n-1}{2}$ e QUE $n \geq 1$. VAMOS PROVAR QUE $H_{2^{n-1}} \geq 1 + \frac{n-1}{2} \Rightarrow H_{2^n} \geq 1 + n/2$.

TEMOS QUE:

$$\sum_{1\leq k\leq 2^{n-1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n-1}{2}.$$

ADICIONANDO $\sum_{2^{n-1}+1\leq k\leq 2^n} 1/k \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$ À DESIGUALDADE, OBTEMOS:

$$\sum_{(1\leq k\leq 2^{n-1})} 1/k + \sum_{(2^{n-1}+1\leq k\leq 2^n)} 1/k \geq 1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} + \sum_{2^{n-1}+1\leq k\leq 2^n} 1/k \Rightarrow \sum_{1\leq k\leq 2^n} 1/k \geq 1 + n/2 + \left(-\frac{1}{2} + \sum_{2^{n-1}+1\leq k\leq 2^n} 1/k\right).$$

ASSIM, OBSERVAMOS QUE $\sum_{2^{n-1}+1\leq k\leq 2^n} 1/k = \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ É SEMPRE $\geq 1/2$ POIS É uma soma com $2^n - 2^{n-1}$ PARCELAS E O MENOR TERMO É $1/2^n$, FAZENDO UMA ESTIMATIVA PARA BAIXO $(2^n - 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1/2)$ PORTANTO $-1/2 + \sum_{2^{n-1}+1\leq k\leq 2^n} 1/k \geq 0$.

PORTANTO

$$\sum_{1\leq k\leq 2^n} 1/k \geq 1 + n/2 \Rightarrow H_{2^n} \geq 1 + n/2.$$

O RESULTADO SEGUE PELO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO.

$\square$