MAT206

Análise Real

Prova 1

Pedro Gigeck Freire 10737136

Questão 1

a) Dê as definições de conjunto finito e conjunto enumerável.

Lembrando:

· Seja $I_n := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto dos n primeiros números naturais.

· Um conjunto $A \neq \emptyset$ é finito se existir uma bijeção $\phi : I_n \to A$ para algum $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

· Um conjunto B é enumerável se B for finito ou se existir uma bijeção $\phi : \mathbb{N} \to B$, ou seja se B e $\mathbb{N}$ forem equipotentes.

b) Mostre que o conjunto dos números naturais ímpares é infinito e enumerável.

Seja $A := \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos números naturais ímpares.

Seja $\phi : \mathbb{N} \to A$ uma função definida por

$$\phi(n) := 2n+1$$

Vamos mostrar que ϕ é bijetora.

(i) ϕ é injetora.

Seja $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $\phi(n) = \phi(m)$.

Então $2n+1 = 2m+1 \Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m$.

Logo, ϕ é injetora

(ii) ϕ é sobrejetora.

Seja $a \in A$, então a é da forma $2k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}$, pela definisão de A.

Portanto

$$a = 2k+1 = \phi(k) \in Im(\phi)$$

De fato, ϕ é sobrejetora.

Por (i) e (ii), ϕ é bijetora.

Logo, pela definisão de conjuntos enumeráveis, temos que A é enumerável.

Agora, vamos mostrar que A é finito.

Suponha, por absurdo, que A seja finito.

Pelo princípio da boa ordem de $\mathbb{N}$, como $A \subseteq \mathbb{N}$, então A possui um elemento máximo.

Seja m o elemento máximo de A

Temos que $m = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Mas então $m+2 = 2k+1+2 = 2(k+1)+1 \in A$, pela definisão de A

Como $m+2 > m$ e m é o maior elemento de A, temos uma contradisão.

Portanto, A é finito.

c) Mostre que $\mathbb{N}$ pode ser escrito como uma união enumerável infinita disjunta de conjuntos infinitos enumeráveis (ou seja $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. A_n infinito enumerável $\forall n$

Conforme a sujestão, seja

$A_1 :=$ conjunto dos números impares

$A_2 := 2A_1$

$A_n := 2^{n-1}A_1$

Por fim, vamos mostrar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$.

Primeiro, mostraremos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbb{N}$:

Seja $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$,

De modo que a pertence a algum A_k, $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$

logo, $a \in A_k \Rightarrow a = 2^{k-1}(2m+1)$ (para algum $m \in \mathbb{N}$)

Como $2^{k-1} \in \mathbb{N}$ e $2m+1 \in \mathbb{N}$, então $a \in \mathbb{N}$.

Ou seja $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{N}$

Agora, mostraremos que $\mathbb{N} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Seja $m \in \mathbb{N}$ qualquer

Pelo teorema fundamental da aritmética, existe uma decomposisão de m em fatores primos, ou seja

$$m = 2^{q_1} 3^{q_2} 5^{q_3} 7^{q_4} \ldots$$

Portanto, $m = 2^{q} x$ para algum $x \in \mathbb{N}$, além disso, x é ímpar, pois todos os números primos são ímpares, além do 2.

Isso implica que $m \in A_q \Rightarrow m \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Então $\mathbb{N} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Como $\mathbb{N} \subseteq \bigcup A_n$ e $\bigcup A_n \subseteq \mathbb{N}$, então $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ∎

d) Mostre que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enume

Seja $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, sendo A_n enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar que A é enumerável

Por exemplo,

$$A_1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$A_2 = \{2, 6, 10, 14, \dots\}$$

$$A_3 = \{4, 12, 20, 28, \dots\}$$

Vamos provar que os A_n são disjuntos, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq$

Seja $i, j \in \mathbb{N}$, com $i \neq j$ quaisquer.

Suponha, por absurdo, que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

Seja $a \in A_i \cap A_j$

Como $a \in A_i$, então $a \in 2^{i-1} A_1 \Rightarrow a = 2^{i-1}(2k+1)$ para algum $k \in \mathbb{N}$

Analogamente, como $a \in A_j$ então $a = 2^{j-1}(2k'+1)$ para algum $k' \in \mathbb{N}$

Então

$$a = 2^{i-1}(2k+1) = 2^{j-1}(2k'+1)$$

Suponha, sem perda de generalidade que $j > i$

Então

$$2^{i-1}(2k+1) = 2^{j-1}(2k'+1) \Rightarrow$$

$$2^i k + 2^{i-1} = 2^j k' + 2^{j-1} \Rightarrow$$

$$\frac{2^i k + 2^{i-1}}{2^i} = \frac{2^j k' + 2^{j-1}}{2^i} \Rightarrow$$

$$k + \frac{1}{2} = 2^{j-i} k' + 2^{j-i-1} \Rightarrow$$

$$k = 2^{j-i} k' + 2^{j-i-1} - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

Mas isso é uma contradisão, pois $k \in \mathbb{N}$.

De fato, os A_n são disjuntos.

Vamos supor que A_n é infinito para todo $n \in \mathbb{N}$, s.p.g.

(Não perdemos generalidade pois poderíamos 'separar' os A_n finitos dos infinitos e mostrar que a união de um conjunto finito com enumerável resulta em um conjunto enumerável)

Então para cada A_n existe uma bijeção $\phi_n : \mathbb{N} \to A_n$.

Definimos

$$\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{por}$$

$$\psi(n, m) = \phi_n(m)$$

Como cada ϕ_n é uma bijeção, então todos os elementos de todos os A_n estão na imagem de ψ

Ou seja, ψ é sobrejetora.

Pela proposição 1.12 das aulas, sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, então como $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup A_n$ é sobrejetora, então todos os elementos de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ são contemplados pela enumerasão de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Ou seja $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é enumerável.

2) a) Enuncie o princípio de indusão finita

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ é tal que

- $1 \in A$ e
- se $n \in A$ então $n+1 \in A$

Então $A = \mathbb{N}$.

b) Use o p.i.f. para mostrar que, se $x \geq 0$ então

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad \text{para todo natural } n \geq 2$$

· Caso base $n=2$

Se $n=2$ temos que

$$(1+x)^n = (1+x)^2 = 1+2x+x^2 = 1+2x+\frac{2}{2}x^2 = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

Então a igualdade vale (logo a desigualdade também vale)

· Hipótese de indução: suponha que $(1+x)^k \geq 1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2$

Então

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)\left[1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2\right]$$, pois $x \geq 0$ e pela hipótese

$$= 1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2 + x + kx^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3$$

$$= 1 + x(k+1) + x^2\left(\frac{k(k-1)}{2} + k + \frac{k(k-1)}{2}\right) + \frac{k(k-1)}{2}x$$

$$= 1 + x(k+1) + x^2\left(\frac{2k(k-1)+2k}{2}\right) + \frac{k(k-1)}{2}x$$

$$= 1 + x(k+1) + x^2\left(\frac{k(2k-1+2)}{2}\right) + \frac{k(k-1)}{2}x$$

$$= 1 + x(k+1) + x^2\left(\frac{k(2k+1)}{2}\right) + \frac{k(k-1)}{2}x$$

$$\geq 1 + x(k+1) + x^2\left(\frac{(k+1)k}{2}\right)$$, pois $x \geq 0$. e $k \geq 1$

Logo, como o resultado valer para k implica que o resultado vale para $k+1$, o resultado segue pelo princípio da indução finita.

c) Mostre que todo subconjunto finito e não vazio A de $\mathbb{N}$ tem um elemento máximo.

Como A é finito, denotaremos por n à quantidade de elementos de A.

Vamos provar por indução em n.

Base: se $n=1$, então A tem um único elemento, que é o máximo.

Hipótese: Suponha que o resultado vale se um conjunto ter k elementos, com $k>1$

Seja A com $k+1$ elementos

Seja $a \in A$ qualquer

Temos que $A \setminus \{a\}$ tem k elementos, e pela hipótese, $A \setminus \{a\}$ tem um elemento máximo b.

Se $a > b$, então a é um elemento máximo de A, pois

$a > b \geq a'$ para todo $a' \in A$, $a' \neq a$.

Se $a \leq b$, então b é um elemento máximo de A, pois

$b \geq a$ e

$b \geq a' \quad \forall a' \in A \setminus \{a\}$

Portanto $b \geq x \quad \forall x \in A$.

O resultado segue pelo princípio da indução finita.

3) a) Defina ínfimo e supremo em um corpo ordenado K

Seja $A \subseteq K$ um subconjunto de K qualquer.

Se $x \in K$ é tal que $x \geq a$ para todo $a \in A$, dizemos que x é um <u>majorante</u> de A.

Se $x \in K$ é tal que $x \leq a$ para todo $a \in A$, dizemos que x é um <u>minorante</u> de A.

Seja $M \subseteq K$ o conjunto dos majorantes de A. Dizemos que $x \in M$ é o <u>supremo</u> de A se $x \leq m$ para todo $m \in M$ (x é o menor dos majorantes)

Seja $N \subseteq K$ o conjunto dos minorantes, dizemos que $x \in N$ é o ínfimo de A se $x \geq n$ para todo $n \in N$ (x é o maior dos minorantes

b) Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A := \{\sqrt{2}/n : n \in \mathbb{N}\}$. Determine o supremo de A em $\mathbb{R}$, se existir. Determine o ínfimo de A em $\mathbb{R}$. Prove suas conclusões.

- Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é o supremo de A.

Primeiro, mostraremos que é um majorante.

De fato, temos que

$\sqrt{2} \geq \frac{\sqrt{2}}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $n\sqrt{2} \geq \sqrt{2}$, já que $n \geq 1$.

Agora, devemos mostrar que é o menor dos majorantes:

Suponha que $m \in \mathbb{R}$ seja um majorante menor que $\sqrt{2}$,

ou seja, $m < \sqrt{2}$

Mas $\sqrt{2} \in A$, então m não é um majorante, contradição $\lightning$

Portanto, $\sqrt{2}$ é o supremo de A.

- Agora, vamos mostrar que 0 é o ínfimo de A.

Como $\sqrt{2} > 0$, então $\frac{\sqrt{2}}{n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, 0 é um minorante.

Suponha, por absurdo, que 0 não seja o ínfimo.

Seja m o ínfimo de A. Como 0 não é o ínfimo, então $m > 0$

Como $m \neq 0$, então existe $\frac{\sqrt{2}}{m} > 0$ e pela propriedade arquimediana dos números naturais, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{\sqrt{2}}{m}$

Então $m > \frac{\sqrt{2}}{n}$, absurdo, pois $\frac{\sqrt{2}}{n} \in A$ e m é um minorante.

Portanto 0 é o ínfimo de A.

c) Mostre que o conjunto dos números irracionais é denso em $\mathbb{R}$.
Isto é, se $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ existe z irracional tal que $x < z < y$.

Seja $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$.

Consideremos os números $\frac{x}{\sqrt{2}}$ e $\frac{y}{\sqrt{2}}$

Pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, existe um número racional r tal que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Mas então

$$x < r\sqrt{2} < y$$

E $r\sqrt{2}$ é irracional, pois o produto de um racional com irracional é irracional.

Portanto o conjunto dos irracionais é denso em $\mathbb{R}$.