Lógica
Aula 9

Leliane Nunes de Barros

2018

leliane@ime.usp.br

Prova da completude

A completude da LP diz que as regras da dedução natural são completas:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

"Sempre que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi$ for verdadeira, vai existir uma demonstração para o sequente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$."

Combinando a completude com a correção temos a liberdade para escolher qual método utilizar:

- O 1o. envolve uma busca por uma demonstração e o 2o. envolve a computação da Tabela-Verdade.
- Ambos os métodos são intratáveis em geral, porém para problemas específicos, um método pode ser mais adequado que o outro.

Prova da completude da lógica proposicional

Supondo que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi$ é verdadeira, vamos dividir a prova da completude em 3 passos:

Prova da completude da lógica proposicional

Supondo que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi$ é verdadeira, vamos dividir a prova da completude em 3 passos:

1. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vDash \psi \qquad \Longrightarrow \qquad \vDash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to ...(\varphi_n \to \psi)...))$

Prova da completude da lógica proposicional

Supondo que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi$ é verdadeira, vamos dividir a prova da completude em 3 passos:

1. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vDash \psi \qquad \Longrightarrow \qquad \vDash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \psi)...))$
2. $\vDash \chi \qquad \Longrightarrow \qquad \vdash \chi$

Prova da completude da lógica proposicional

Supondo que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi$ é verdadeira, vamos dividir a prova da completude em 3 passos:

1. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vDash \psi \quad \Longrightarrow \quad \vDash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \psi)...))$
2. $\vDash \chi \quad \Longrightarrow \quad \vdash \chi$
3. $\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \psi)...)) \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vdash \psi$

Prova da completude - Passo 1 (fácil!)

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vDash \psi \quad \Longrightarrow \quad \vDash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to ...(\varphi_n \to \psi)...))$$

Prova da completude - Passo 1 (fácil!)

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vDash \psi \quad \Longrightarrow \quad \vDash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \psi)...))$$

Supondo que a consequência lógica $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vDash \psi$ seja verdadeira, queremos mostrar que $\vDash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \psi)...))$ é verdadeira, isto é, a fórmula é uma "tautologia".

Prova: Basta provar que a única valoração que a tornaria falsa, de acordo com a Tabela-Verdade da implicação, refutaria a suposição $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vDash \psi$.

Análise da árvore!

Prova da completude - Passo 3 (fácil!)

$$\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \ldots(\varphi_n \rightarrow \psi)\ldots)) \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

Prova da completude - Passo 3 (fácil!)

$$\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to ...(\varphi_n \to \psi)...)) \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

Prova: Suponha que $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to ...(\varphi_n \to \psi)...))$ seja verdadeira, i.e. existe uma demonstração Π usando a dedução natural. Então podemos aumentar essa demonstração adicionando as premissas $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ no início e usar Modus Ponens até produzir ψ.

(prova alternativa: transformar suposições em premissas, abrir caixas e eliminar as fórmulas de introdução da implicação.)

Exemplo:

$$\vdash (\neg p \to q) \to (\neg q \to p) \quad \Longrightarrow \quad \neg p \to q, \neg q \vdash p$$

Prova da completude - Passo 2 (mais difícil)

$$\models \chi \quad \Longrightarrow \quad \vdash \chi$$

Prova da completude - Passo 2 (mais difícil)

$$\vDash \chi \quad \Longrightarrow \quad \vdash \chi$$

(a) Para cada linha da tabela, um sequente: se p_i é T, $\overline{p_i}$=p_i, senão, $\neg p_i$.

$$\overline{p_1},\ \overline{p_2},\ ...,\ \overline{p_n} \vdash \chi$$

Prova da completude - Passo 2 (mais difícil)

$$\vDash \chi \quad \Longrightarrow \quad \vdash \chi$$

(a) Para cada linha da tabela, um sequente: se p_i é T, $\overline{p_i}{=}p_i$, senão, $\neg p_i$.

$$\overline{p_1},\ \overline{p_2},\ ...,\ \overline{p_n} \vdash \chi$$

(b) Se todos os sequentes forem válidos então provamos:

$$\vDash \chi \quad \Longrightarrow \quad \vdash \chi$$

Exemplo: $\vdash p \land q \to p$

Propriedades de fórmulas

Estudar outros métodos de prova (corretos) que utilizam fórmulas equivalentes mais simples.

Propriedade das fórmulas: Equivalência

Propriedade das fórmulas: Equivalência

Equivalência Lógica:

Definição

$\varphi \equiv \psi$ *sse* $\varphi \vDash \psi$ *e* $\psi \vDash \varphi$.

Propriedade das fórmulas: Equivalência

Equivalência Lógica:

Definição

$\varphi \equiv \psi$ *sse* $\varphi \vDash \psi$ *e* $\psi \vDash \varphi$.

Exemplos:

- $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

Propriedade das fórmulas: Equivalência

Equivalência Lógica:

Definição

$\varphi \equiv \psi$ *sse* $\varphi \vDash \psi$ *e* $\psi \vDash \varphi$.

Exemplos:

- $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
- $p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Propriedade das fórmulas: Equivalência

Equivalência Lógica:

Definição

$\varphi \equiv \psi$ *sse* $\varphi \vDash \psi$ *e* $\psi \vDash \varphi$.

Exemplos:

- $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
- $p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Propriedade das fórmulas: Equivalência

Equivalência Lógica:

Definição

$\varphi \equiv \psi$ *sse* $\varphi \vDash \psi$ *e* $\psi \vDash \varphi$.

Exemplos:

- $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
- $p \land q \to r \equiv p \to (q \to r)$

Pelo teorema da correção e completude:

Definição

$\varphi \equiv \psi$ *sse* $\varphi \vdash \psi$ *e* $\psi \vdash \varphi$.

Propriedade das fórmulas: Exemplos de Equivalência

Equivalences

Allow rewriting formulas to simplify reasoning.

Idempotence:	$\phi \wedge \phi \equiv \phi$	$\phi \vee \phi \equiv \phi$
Commutativity:	$\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$	$\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$
Associativity:	$(\phi \wedge \psi) \wedge \eta \equiv \phi \wedge (\psi \wedge \eta)$ $(\phi \vee \psi) \vee \eta \equiv \phi \vee (\psi \vee \eta)$	
Absorption:	$\phi \wedge (\phi \vee \eta) \equiv \phi$	$\phi \vee (\phi \wedge \eta) \equiv \phi$
Distributivity:	$\phi \wedge (\psi \vee \eta) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \eta)$ $\phi \vee (\psi \wedge \eta) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \eta)$	
deMorgan Laws:	$\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$ $\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\psi$	
Miscellaneous:	$\phi \rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$	$\neg\neg\phi \equiv \phi$

Propriedade das fórmulas: Validade

Definição

φ é válida sse $\vDash \varphi$.

φ é válida $\iff$ φ é uma tautologia

Exemplos:

$p \wedge q \rightarrow p$ e $r \vee \neg r$

$\varphi \vee p \vee \neg p \vee \psi$ (generalizando)

Propriedade das fórmulas: Satisfatibilidade

Satisfiabilidade: φ é satisfatível sse φ é verdadeira para algum valor verdade de seus átomos.

(φ é satisfatível sse $\neg\varphi$ não é válida)

Exemplo: $p \to q$ é satisfatível mas não é válida.

Propriedade das fórmulas: verificação

Objetivo: criar uma abordagem de prova mais mecânica (algoritmica).

- Tabelas-Verdade são muito custosas: 2^n linhas para n átomos.
- Dedução Natiural: a escolha de regras não é trivial.

Como verificar propriedades de fórmulas usando métodos mais simples do que o método de dedução natural?

Uso de equivalências para transformar fbfs em uma forma mais conveniente.

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal: um átomo ou sua negação. $L ::= p | \neg p$

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal: um átomo ou sua negação. $L ::= p | \neg p$

Cláusula: disjunção de literais. $D ::= L | L \vee D$

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal: um átomo ou sua negação. $L ::= p | \neg p$

Cláusula: disjunção de literais. $D ::= L | L \vee D$

CNF: conjunção de cláusulas. $C ::= D | D \wedge C$

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal: um átomo ou sua negação. $L ::= p | \neg p$

Cláusula: disjunção de literais. $D ::= L | L \vee D$

CNF: conjunção de cláusulas. $C ::= D | D \wedge C$

Exemplos:

- $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$ (CNF)

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal: um átomo ou sua negação. $L ::= p | \neg p$

Cláusula: disjunção de literais. $D ::= L | L \vee D$

CNF: conjunção de cláusulas. $C ::= D | D \wedge C$

Exemplos:

- $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$ (CNF)
- $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$ (CNF)

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal: um átomo ou sua negação. $L ::= p \mid \neg p$

Cláusula: disjunção de literais. $D ::= L \mid L \vee D$

CNF: conjunção de cláusulas. $C ::= D \mid D \wedge C$

Exemplos:

- $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$ (CNF)
- $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$ (CNF)
- $(\neg(p \vee q) \vee r) \wedge (q \vee r)$ (não é uma CNF)

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal:	um átomo ou sua negação.	$L ::= p \mid \neg p$
Cláusula:	disjunção de literais.	$D ::= L \mid L \vee D$
CNF:	conjunção de cláusulas.	$C ::= D \mid D \wedge C$

Exemplos:

- $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$ (CNF)
- $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$ (CNF)
- $(\neg(p \vee q) \vee r) \wedge (q \vee r)$ (não é uma CNF)
- $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ (não é uma CNF)

Por que CNF?

1. Uma fórmula em CNF é válida sse todas as suas cláusulas são válidas.

Por que CNF?

1. Uma fórmula em CNF é válida sse todas as suas cláusulas são válidas.
2. Uma cláusula é válida sse ela contém um átomo e sua negação.

Transformar em CNF - Tabela Verdade

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$q \vee \neg p$	$(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Transformar em CNF - Tabela Verdade

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$q \vee \neg p$	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

$v((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p) = F$ apenas quando $v(p) = T$ e $v(q) = F$

Transformar em CNF - Tabela Verdade

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$q \vee \neg p$	$(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

$v((p \to \neg q) \to (q \vee \neg p) = F$ apenas quando $v(p) = T$ e $v(q) = F$

$(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p) \equiv \neg p \vee q$

Transformar em CNF - usando equivalências

1. Eliminar $\rightarrow$: $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

Transformar em CNF - usando equivalências

1. Eliminar $\rightarrow$: $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
2. Mover $\neg$ para dentro: $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ e $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

Transformar em CNF - usando equivalências

1. Eliminar $\rightarrow$: $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
2. Mover $\neg$ para dentro: $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ e $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
3. Eliminar dupla negação: $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

Transformar em CNF - usando equivalências

1. Eliminar $\to$: $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
2. Mover $\neg$ para dentro: $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ e $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
3. Eliminar dupla negação: $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
4. Distribuir $\vee$ e $\wedge$: $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$