(b) Mostre que o polinômio interpolador de grau n é dado pela fórmula de diferença para frente de Newton

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j} \Delta^j f(x_0)$$

onde $s = \frac{x - x_0}{h}$ e $\binom{s}{j} = \frac{s(s-1)\cdots(s-j+1)}{j!}$

Sabemos que existe um único polinômio interpolador de grau n, que passa por $n+1$ observações distintas $(x_0, \dots, x_n)$.

Vamos chamar esse polinômio de $P_n'(x)$ e obtê-lo pelo método de Newton, onde

$$\begin{cases} P_n'(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \\ c_k = f[x_0, \dots, x_k] \quad k = 0, 1, \dots, n \\ \varphi_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i) \quad k = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

Vamos mostrar que $P_n'(x) = P_n(x)$.

$$P_n'(x) = c_0\varphi_0(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(x) = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, \dots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)$$

Pelo item (a), $f[x_0, \dots, x_j] = \frac{1}{j!h^j}\Delta^j f(x_0) \Rightarrow$

$$P_n'(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\Delta^j f(x_0)}{j!\,h^j} \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i), \quad \text{mas } x_i = x_0 + ih \Rightarrow$$

$$P_n'(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\Delta^j f(x_0)}{j!\,h^j} \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_0 - ih) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\Delta^j f(x_0)}{j!\,h^j} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \frac{(x - x_0)}{h} - i\right) h^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{\Delta^j f(x_0)}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} s - i$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j} \Delta^j f(x_0) = P_n(x).$$ Então de fato, $P_n(x)$ é o polinômio interpolador