

PEDRO GIGECK FREIRE 10737136

04/06/2021

## EXERCÍCIO EM CLASSE 06

Sejam  $X, Y$  variáveis aleatórias tais que

$$E(X) = 0$$

$$\text{Var}(X) = 4$$

$$\text{Cov}(X, Y) = 1$$

$$E(Y) = -1$$

$$\text{Var}(Y) = 1$$

DEFINA  $T = -2X + 5Y + 3$  e  $Z = X - 3Y + 7$ a) calcule  $E(T)$  e  $\text{Var}(T)$ 

$$E(T) = E(-2X + 5Y + 3)$$

$$= E(-2X) + E(5Y) + E(3)$$

(pela linearidade da esperança)

$$= -2E(X) + 5E(Y) + 3$$

" " " " " "

$$= -2 \cdot 0 + 5(-1) + 3 = -2$$

$$\text{Var}(T) = E[T^2] - E[T]^2$$

$$= E[T^2] - (-2)^2 = E[T^2] - 4$$

$$= E[(-2X + 5Y + 3)^2] - 4 = E[4X^2 - 4X(5Y + 3) + (5Y + 3)^2] - 4$$

$$= E[4X^2 - 20XY - 12X + 25Y^2 + 30Y + 9] - 4$$

$$= 4E[X^2] - 20E[XY] - 12E[X] + 25E[Y^2] + 30E[Y] + 9 - 4 \quad (\text{pela linearidade})$$

Mas podemos calcular essas esperanças da expressão.

$$\bullet \quad 4 = \text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - 0 \Rightarrow \boxed{E[X^2] = 4}$$

$$\bullet \quad 1 = \text{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = E[Y^2] - (-1)^2 = E[Y^2] - 1 \Rightarrow \boxed{E[Y^2] = 0}$$

$$\bullet \quad 1 = \text{Corr}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] - 0(-1) \Rightarrow \boxed{E[XY] = 1}$$

Portanto, retornando à expressão, teremos

$$\text{Var}(T) = 4E[X^2] - 20E[XY] - 12E[X] + 25E[Y^2] + 30E[Y] + 5$$

$$= 4 \cdot 4 - 20 \cdot 1 - 12 \cdot 0 + 25 \cdot 0 + 30(-1) + 5$$

$$= 16 - 20 - 30 + 5 = -29$$

$$\boxed{\text{Var}(T) = -29}$$

b) Calcule  $\text{Corr}(T, Z)$  (Note que  $E(Z) = E(X) - 3E(Y) + 7 = 0 + 3 + 7 = 10$ )

$$\text{Corr}(T, Z) = E(TZ) - E(T)E(Z)$$

$$= E(-2X + 5Y + 3)(X - 3Y + 7) - (-2)10$$

$$= E(-2X^2 + 6XY - 14X + 5XY - 15Y^2 + 35Y + 3X - 9Y + 21) + 20$$

$$= E(-2X^2 - 11X + 11XY + 26Y - 15Y^2 + 21) + 20$$

Linearidade  $\Rightarrow$   $= -2E(X^2) - 11E(X) + 11E(XY) + 26E(Y) - 15E(Y^2) + 21 + 20$

$$= -2 \cdot 4 - 11 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 26(-1) - 15 \cdot 0 + 41$$

$$= -8 + 11 - 26 + 41 = 52 - 34 = 18$$

$$\boxed{\text{Corr}(T, Z) = 18}$$