Lógica
Aula 8

Leliane Nunes de Barros

2018

leliane@ime.usp.br

(recordando) Relação entre $\vdash$ e $\vDash$

Quando definimos uma lógica (ou qualquer tipo de cálculo), queremos mostrar que ela é útil:

- Correção: As fórmulas derivadas usando a lógica (cálculo) refletem a verdade “real”.
- Completude: Toda fórmula correspondendo à verdade “real” pode ser inferida usan do as regras da lógica (cálculo).

(recordando) Relação entre $\vdash$ e $\models$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

(recordando) Relação entre $\vdash$ e $\models$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

A dedução natural é **completa** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

(recordando) Relação entre $\vdash$ e $\vDash$

A dedução natural é **correta e completa** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

$M(k)$: Todo sequente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ com prova de tamanho k implica em $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$.

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

$M(k)$: Todo sequente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ com prova de tamanho k implica em $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$.

Problema:

- Dividir uma prova pode não gerar uma sub-prova, uma vez que algumas caixas podem ficar abertas !

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

$M(k)$: Todo sequente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ com prova de tamanho k implica em $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$.

Problema:

- Dividir uma prova pode não gerar uma sub-prova, uma vez que algumas caixas podem ficar abertas !
- Porém, uma prova dividida pode gerar uma prova correta se as suposições das caixas abertas forem adicionadas às premissas.

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

$M(k)$: Todo sequente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$ com prova de tamanho k implica em $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vDash \psi$.

Problema:

- Dividir uma prova pode não gerar uma sub-prova, uma vez que algumas caixas podem ficar abertas !
- Porém, uma prova dividida pode gerar uma prova correta se as suposições das caixas abertas forem adicionadas às premissas.

Exemplo: $M(6) \Rightarrow M(7)$

$$(p \wedge q) \to r, p \vdash q \to r \quad \Rightarrow \quad (p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$$

Prova da correção

Caso Base: $(k = 1)$ Provas de 1 linha

Prova da correção

Caso Base: ($k = 1$) Provas de 1 linha

1	φ	premissa

Prova da correção

Caso Base: ($k = 1$) Provas de 1 linha

1	φ	premissa

A prova é trivial, estamos considerando um sequente do tipo: $\varphi \vdash \varphi$

Prova da correção

Passo de indução: $(k > 1)$ $M(k') \Rightarrow M(k)$

Prova da correção

Passo de indução: $(k > 1)$ $M(k') \Rightarrow M(k)$

Seja k o tamanho da prova do sequente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$.
Vamos supor que toda prova de tamanho k', com $k' < k$, satisfaz M
Isto é, a propriedade $M(k')$ é verdadeira.

Prova da correção

Passo de indução: $(k > 1)\ M(k') \Rightarrow M(k)$

Seja k o tamanho da prova do sequente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$.
Vamos supor que toda prova de tamanho k', com $k' < k$, satisfaz M
Isto é, a propriedade $M(k')$ é verdadeira.

Estrutura da prova de tamanho k:

1	φ_1	premissa
2	φ_2	premissa
3	φ_3	premissa
	...	
n	φ_n	premissa
	...	
k	ψ	justificativa-k

Prova da correção

Passo de indução: $(k > 1)\ M(k') \Rightarrow M(k)$

Seja k o tamanho da prova do sequente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$.
Vamos supor que toda prova de tamanho k', com $k' < k$, satisfaz M
Isto é, a propriedade $M(k')$ é verdadeira.

Estrutura da prova de tamanho k:

1	φ_1	premissa
2	φ_2	premissa
3	φ_3	premissa
	...	
n	φ_n	premissa
	...	
k	ψ	justificativa-k

Qual a última regra aplicada?

Prova de correção: justificativa-k

A justificativa-k depende da última regra aplicada na prova. Com a tabela verdade correspondente a essa regra, podemos provar que ψ é verdade.

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge_i \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge_{e_1} \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge_{e_2} \qquad \frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee_{i_1} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ \vee_{i_2}$$

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{matrix}\phi \\ \vdots \\ \xi\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}\psi \\ \vdots \\ \xi\end{matrix}}}{\xi}\ \vee_e \qquad \frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\ \to_e \qquad \frac{\boxed{\begin{matrix}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}}{\phi \to \psi}\ \to_i$$

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg_e \qquad \frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg_e \qquad \frac{\boxed{\begin{matrix}\phi \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}}{\neg\phi}\ \neg_i \qquad \frac{\bot}{\phi}\ \bot_e$$

Prova da correção: última regra $\wedge_i$

Se a última regra aplicada foi $\wedge_i$ então:

- ψ é da forma $\psi_1 \wedge \psi_2$ e
- a justificativa da linha k se refere às 2 linhas anteriores k_1 e k_2 que possuem, respectivamente, ψ_1 e ψ_2 como conclusões.

Como k_1 e k_2 são menores que k então existem provas dos sequentes:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi_1 \text{ e}$$
$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi_2,$$

com provas de tamanho menor que k, e pela hipótese de indução temos:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi_1 \text{ e}$$
$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi_2.$$

Portanto:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi_1 \wedge \psi_2$$

uma vez que todas as valorações que tornem ψ_1 verdade e ψ_2 verdade, também tornam $\psi_1 \wedge \psi_2$ verdade (tabela verdade do $\wedge$).

Prova da correção: última regra $\wedge_i$

Estrutura da prova de tamanho k:

1	φ_1	premissa
2	φ_2	premissa
3	φ_3	premissa
	...	
n	φ_n	premissa
	...	
k_1	ψ_1	
	...	
k_2	ψ_2	
	...	
k	$\psi_1 \wedge \psi_2$	$\wedge_i$ k_1, k_2

Prova da correção: última regra $\vee_e$

Se a última regra aplicada foi $\vee_e$ então:

- temos uma premissa ou uma prova de uma fórmula do tipo $\eta_1 \vee \eta_2$ em uma linha $k' < k$ e
- a aplicação de $\vee_e$ se refere a linha k'

Estrutura da prova:

Consequência da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Contra-exemplo indica que não há prova!

Consequência da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Contra-exemplo indica que não há prova!

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \nvDash \psi$$

Consequência da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

Contra-exemplo indica que não há prova!

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \nvDash \psi \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \nvdash \psi$$

Satisfatibilidade

- v satisfaz φ sse $v(\varphi) = T$

Satisfatibilidade

- v satisfaz φ sse $v(\varphi) = T$
- φ é satisfatível sse existe v tal que $v(\varphi) = T$

Satisfatibilidade

- v satisfaz φ sse $v(\varphi) = T$
- φ é satisfatível sse existe v tal que $v(\varphi) = T$
- φ é falsificável sse existe v tal que $v(\varphi) = F$

Satisfatibilidade

- v satisfaz φ sse $v(\varphi) = T$
- φ é satisfatível sse existe v tal que $v(\varphi) = T$
- φ é falsificável sse existe v tal que $v(\varphi) = F$
- φ é uma tautologia (ou válida) sse para qualquer v, $v(\varphi) = T$

Satisfatibilidade

- v satisfaz φ sse $v(\varphi) = T$
- φ é satisfatível sse existe v tal que $v(\varphi) = T$
- φ é falsificável sse existe v tal que $v(\varphi) = F$
- φ é uma tautologia (ou válida) sse para qualquer v, $v(\varphi) = T$
- φ é uma contradição (ou insatisfatível) sse para qualquer v, $v(\varphi) = F$

Algumas relações úteis

- Tautologia $\Longrightarrow$ SAT

Algumas relações úteis

- Tautologia $\implies$ SAT
- Contradição $\implies$ UNSAT

Algumas relações úteis

- Tautologia $\implies$ SAT
- Contradição $\implies$ UNSAT
- φ é tautologia $\iff$ $\neg\varphi$ é UNSAT

Algumas relações úteis

- Tautologia $\implies$ SAT
- Contradição $\implies$ UNSAT
- φ é tautologia $\iff \neg\varphi$ é UNSAT
- φ é contradição $\iff \neg\varphi$ é SAT