MAE0221

Pedro Gigeck 10737136

Provinha 06

02/06

Considere uma moeda com $P(\text{cara}) = p$ $\quad 0 < p < 1$ $\quad p \neq 1/2$

A moeda é lançada infinitas vezes e defina-se as V.As $X_1, X_2 \dots$ por

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o } i\text{-ésimo e } (i+1)\text{-ésimo lançamentos resultam em cara} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

a) Obtenha $E(X_i)$ e $Var(X_i)$ para $i \geq 1$

Temos que a probabilidade de X_i ser 1 é $p \cdot p = p^2$, ou seja, ocorrer cara nos dois lançamentos. Logo

$$P(X_i = 1) = p^2$$

$$P(X_i = 0) = 1 - P(X_i = 1) = 1 - p^2$$

Também identificamos facilmente que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p^2)$

Portanto $E[X_i] = p^2$

e $Var(X_i) = p^2(1 - p^2)$

b) Mostre que $Cov(X_i, X_j) = 0$ se $|j - i| > 1$

Sejam i, j com $|j - i| > 1$

Então

$$Cov(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E(X_i) E[X_j] = E[X_i X_j] - p^2 p^2$$

Mas $E[X_i X_j] = \sum_{x_i = 0}^{1} \sum_{x_j = 0}^{1} x_i x_j P_{X_i X_j}(x_i, x_j) = 0 + 0 + 0 + 1 \cdot P_{X_i X_j}(1, 1)$

$= P(X_i = 1, X_j = 1) = P(X_i = 1) P(X_j = 1) = p^2 p^2$ $\quad$ pois $P(X_i \mid X_j = x_j) = P(X_i)$

Portanto

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = p^4 - p^4 = 0 \qquad \text{se} \quad |j-i| > 1$$

b) Se $|j-i| = 1$

Então $E(X_i X_j) = P(X_i = 1, X_j = 1) = P(X_i = 1 \mid X_j = 1)\, P(X_j = 1)$

$$= p \cdot p^2 = p^3$$

Logo $\mathrm{Cov}(X_i X_j) = p^3 - p^2 = p^2(p-1)$