3

4

5 Capítulo 15, Exercício 1

Mostre em detalhe como obter a regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Vamos construir um polinômio interpolador $P_n(X)$ pelo método de Lagrange ao redor dos pontos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x) \Rightarrow \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx$$

Vamos pré calcular algumas coisas

- $$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} = \frac{(2x-a-b)(x-b)}{(2a-a-b)(a-b)} = \frac{2x^2-2xb-ax+ab-bx+b^2}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{2x^2-(a+3b)x+ab+b^2}{(a-b)^2}$$

$$\int_a^b L_0(x)dx = \left[\frac{\frac{2}{3}x^3 - \frac{a+3b}{2}x^2 + (ab+b^2)x}{(a-b)^2}\right]_a^b = \frac{\frac{2}{3}b^3 - \frac{ab^2+3b^3}{2} + ab^2+b^3 - \frac{2a^3}{3} + \frac{a^3+3ba^2}{2} - a^2b - ab^2}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{4b^3 - 3ab^2 - 9b^3 + 6ab^2 + 6b^3 - 4a^3 + 3a^3 + 9ba^2 - 6a^2b - 6ab^2}{6(a-b)^2} = \frac{b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{6(a-b)^2}$$

$$= \frac{(b-a)^3}{6(a-b)^2} = \frac{-(a-b)^3}{6(a-b)^2} = \frac{b-a}{6}$$

• $L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dfrac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} = \dfrac{x^2-x(a+b)+ab}{\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)} = \dfrac{4(-x^2+x(a+b)-ab)}{(a-b)^2}$

• $\displaystyle\int_a^b L_1(x)\,dx = \left[\frac{4\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}(a+b)-abx\right)}{(a-b)^2}\right]_a^b = \frac{4\left(-\frac{b^3}{3}+\frac{b^2a+b^3}{2}-ab^2+\frac{a^3}{3}-\frac{a^3+a^2b}{2}+a^2b\right)}{(a-b)^2}$

$= \dfrac{4}{6}\left(\dfrac{-2b^3+3b^2a+3b^3-6ab^2+2a^3-3a^3-3a^2b+6a^2b}{(b-a)^2}\right) = \dfrac{4}{6}\left[\dfrac{b^3-3b^2a+3a^2b-a^3}{(b-a)^2}\right] = \dfrac{4}{6}(b-a)$

• $L_2(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{(2x-a-b)(x-a)}{(b-a)(2b-a-b)} = \dfrac{2x^2-(3a+b)x+ab+a^2}{(b-a)^2}$

• $\displaystyle\int_a^b L_2(x)\,dx = \left[\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{3a+b}{2}x^2+(ab+a^2)x}{(b-a)^2}\right]_a^b = \frac{\frac{2}{3}b^3-\frac{3ab^2}{2}-b^3+ab^2+a^2b-\frac{2}{3}a^3+\frac{3a^3+ba^2}{2}-a^2b-}{(b-a)^2}$

$= \dfrac{4b^3-9ab^2-3b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3+9a^3+3ba^2-6a^2b-6a^3}{6(b-a)^2} = \dfrac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{6(b-a)^2}$

$= \dfrac{b-a}{6}$

Finalmente, obtemos a fórmula da Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

PS: As integrais podiam ficar mais fáceis com mudanças de variáveis, só pensei depois :-