⑮ Seja G um grupo. Para $a,b \in G$, definimos o comutador de a e b por $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$. Denote por G' o subgrupo de G gerado pelo conjunto $\{[a,b] : a,b \in G\}$

(a) Mostre que G' é normal em G.

Seja $g \in G$ qualquer.

Seja $n \in G'$, vamos mostrar que $gng^{-1} \in G'$.

Como $n \in G'$, existem $a,b \in G$ tais que $n = aba^{-1}b^{-1}$

Então $gng^{-1} = gaba^{-1}b^{-1}g^{-1}$

Tomamos $\alpha = gag^{-1}$, $\beta = gbg^{-1}$

Percebemos que $gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = ga(g^{-1}g)b(g^{-1}g)a^{-1}(g^{-1}g)b^{-1}g^{-1} =$

$$(gag^{-1})(gbg^{-1})(ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1}) =$$

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = [\alpha:\beta] \in G'.$$

Portanto $gng^{-1} = [\alpha:\beta] \in G'$, então G' é normal em G.

(b) Mostre que G/G' é abeliano.

Sejam $a,b \in G$

Então

$$(ba)^{-1}ab = a^{-1}b^{-1}ab = [a^{-1}:b^{-1}] \in G'$$

Logo $ab \cong ba$; então $(ab)G = (ba)G \iff (aG)(bG) = (bG)(aG)$.

Então $G/G' = \{gG' : g \in G\}$ é abeliano

(c) Seja N um subgrupo normal de G. Mostre que se G/N for abeliano, então $N \supseteq G'$.

Seja $[a:b] \in G'$

Temos que $ab = ab\,e_G \in (ab)N$

Como G/N é abeliano, $(ab)N = (ba)N$, então

$ab \in (ba)N \Rightarrow \exists\, n \in N$ tq $ab = ban$

$ab = ban \Rightarrow ab(ba)^{-1} = ban(ba^{-1}) \Rightarrow [a:b] = (ba)n(ba^{-1})$

Como N é normal e $ba \in G$, então $(ba)n(ba)^{-1} \in N$.

Portanto $[a;b] \in N$.

Logo $G' \subseteq N$.

(d) Mostre se H é um subgrupo de G tal que $H \supseteq G'$, então H é normal em G.

Seja $H \leqslant G$ tal que $H \supseteq G'$

Seja $g \in G$, $h \in H$ quaisquer.

Então

$$ghg^{-1} = gh(e)g^{-1} = gh(hg)^{-1}(hg)g^{-1} =$$

$$gh(g^{-1}h^{-1})(hg)g^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})h(gg^{-1}) =$$

$$[g:h]h$$

Como $G' \subseteq H$, $[g:h] \in H$

Como H é subgrupo, $[g:h]h \in H$.

Portanto $ghg^{-1} = [g:h]h \in H$. Então H é normal.