MAT0265 - GRUPOS

Lista 4 - Ex 2 e 4

Pedro Gigeck Freire
10737136

Exercício 2

Seja G um p-grupo finito, onde p é um primo. Seja H um subgrupo normal de G tal que $H \neq \{e\}$. Mostre que $H \cap Z(G) \neq \{e\}$.

Considere G agindo em H por conjugasão. Isto é, considere a ação

$$G \times H \longrightarrow H$$

$$(g, h) \longmapsto g \cdot h = ghg^{-1} \in H \quad \text{(pois } H \text{ é normal)}$$

Seja $R = \{h_1, \dots, h_r\}$ o conjunto de representantes das órbitas distintas determinadas pela ação de G em H.

Temos que (pela equasão das classes)

$$|H| = \sum_{h \in R} |O_h|$$

Vamos mostrar que $|O_h| = 1 \iff h \in Z(G)$

Temos (note que a prova é feita nos dois sentidos)

$$|O_h| = 1 \iff$$

$$\{h\} = O_h = \{g \cdot h : g \in G\} = \{ghg^{-1} : g \in G\} \iff$$

$$h = ghg^{-1} \quad \forall g \in G \iff$$

$$hg = gh \quad \forall g \in G \iff$$

$$h \in Z(G).$$

Agora, podemos separar as órbitas unitárias na equação das classes

$$|H| = \sum_{h \in R \cap Z(G)} |O_h| + \sum_{h \in R \setminus Z(G)} |O_h|$$

$$= |R \cap Z(G)| + \sum_{h \in R \setminus Z(G)} |O_h|$$

Como H é subgrupo de G, por Lagrange temos que

$$|H| \mid |G|$$

Como G é p-grupo e $H \neq \{e\}$, então

$$|H| = p^k \quad \text{para algum } k \geq 1$$

Além disso, temos que as órbitas na somatória também são potências de p, pois

$$|O_h| = [G : Stab(h)] = |G| / |Stab(h)|$$

Mas como retiramos as órbitas unitárias, então essas órbitas são todas da forma p^{k_i} para algum $k_i \geq 1$.

Portanto na equação acima temos

$$|H| = |R \cap Z(G)| + \sum_{h \in R \setminus Z(G)} |O_h| \implies$$

$$p^k = |R \cap Z(G)| + \sum_{h \in R \setminus Z(G)} p^{k_i} \implies$$

Então ambos os lados da equação são múltiplos de p.

Portanto $|R \cap Z(G)|$ também tem que ser um múltiplo de p, pois sabemos que $e \in R \cap Z(G)$, então $|R \cap Z(G)| > 0$.

Então, como $R \subseteq H$, temos $|H \cap Z(G)| \geq |R \cap Z(G)| = p^m > 1$. para algum $m \geq 1$. ∎

Exercício 4

Seja G um grupo que age em um conjunto X. Para cada $g \in G$, considere o seguinte subconjunto de X

$$X^g = \{ x \in X : g \cdot x = x \}$$

Mostre que o número de órbitas distintas da ação de G em X é dado por

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

Primeiro, vamos escrever a somatória dos X^g com relação aos estabilizadores dos elementos de X:

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{g \in G} |\{x \in X : g \cdot x = x\}|$$

$$= \sum_{x \in X} |\{g \in G : g \cdot x = x\}|$$ (ao invés de percorrer o G contando os x, contamos os g percorrendo X)

$$= \sum_{x \in X} |\mathrm{stab}(x)|$$

$$= \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|\mathcal{O}_x|}$$ (Pois $|\mathcal{O}_x| = [G : \mathrm{stab}(x)] = \frac{|G|}{|\mathrm{stab}(x)|}$).

$$= |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|\mathcal{O}_x|}$$

Agora, seja $X/G = \{\mathcal{O}_{x_1}, \mathcal{O}_{x_2}, \dots, \mathcal{O}_{x_r}\}$ o conjunto das órbitas de G em X

Temos que as órbitas particionam X, então podemos escrever

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|\mathcal{O}_x|} = \sum_{\mathcal{O}_i \in X/G} \sum_{x \in \mathcal{O}_i} \frac{1}{|\mathcal{O}_x|}$$

$$= \sum_{O_i \in X/G} \sum_{x \in O_i} \frac{1}{|O_i|} \qquad (\text{Pois } x \in O_i, \text{ então } O_x = O_i)$$

$$= \sum_{O_i \in X/G} |O_i| \frac{1}{|O_i|}$$

$$= \sum_{O_i \in X/G} 1$$

$$= |X/G|$$

Portanto, colocando esse valor no nosso primeiro resultado, temos

$$\sum_{g \in G} |X^g| = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|O_x|} = |G|\,|X/G|$$

Logo, de fato, o número de órbitas distintas de G em X é

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| .$$

OBS: Conforme permitido pela professora, consultei parte da prova desse exercício pesquisando sobre o Lema de Burnside na internet. Adaptei a prova (para as notações que usamos) de https://en.wikipedia.org/wiki/Burnside's_lemma#Proof