(3) Cap 14. Exercício 8

x_{-1}

$x_0 = x_{-1} + h_0$

$x_1 = x_0 + h_1 \qquad h_0 \neq h_1$

- Método (i)

Defina

$g(x) = f'(x)$ "seek a staggered mesh"

$$g_{\frac{1}{2}} = \frac{\left(f(x_1) - f(x_0)\right)}{h_1} \qquad g_{-\frac{1}{2}} = \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{h_0}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{g_{1/2} - g_{-1/2}}{\frac{h_0 + h_1}{2}}$$

- Método (ii)

Usar um polinômio interpolador na forma de Newton, derivar 2 vezes e obter

$$f''(x_0) \approx 2 f[x_{-1}, x_0, x_1]$$

(a) Mostre que os dois métodos são o mesmo

Vamos abrir as duas aproximações e ver que são iguais

$$(i) \quad f''(x_0) \cong \frac{g_{1/2} - g_{-1/2}}{\frac{h_0 + h_1}{2}} = 2 \, \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1} - \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{h_0}}{h_0 + h_1} = 2 \, \frac{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{x_0 - x_{-1}}}{h_0 + h_1}$$

$$= \frac{2\left(f[x_0, x_1] - f[x_{-1}, x_0]\right)}{x_0 - x_{-1} + x_1 - x_0} = 2 \, \frac{f[x_0, x_1] - f[x_{-1}, x_0]}{x_1 - x_{-1}} = 2 f[x_{-1}, x_0, x_1] \approx f''(x_0) \ (ii)$$

Portanto, os métodos i e ii produzem a exata mesma aproximação.