MAC105 FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA A COMPUTAÇÃO

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Pedro Gigeck Freire **Número USP:** 10737136

Assinatura

Pedro Gigeck Freire

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E51 **Data:** 30/05/2018

SOLUÇÃO

(i) Seja $c = mdc(a+b, a-b)$, temos que $c|a+b$ e $c|a-b$, logo $\exists\, q, q' \in \mathbb{Z}$ tq

$a+b = qc$ e $a-b = q'c$

Com a primeira igualdade, segue $a = qc - b \Rightarrow 2a = qc + a - b = qc + q'c \Rightarrow$

$$a = \frac{c(q+q')}{2}$$

Analogamente, temos $2b = c(q-q') \Rightarrow b = \frac{c(q-q')}{2}$.

Se q e q' tiverem a mesma paridade, então $\frac{q+q'}{2}$ e $\frac{q-q'}{2}$ são números inteiros, implicando que $c|a$ e $c|b$.

Como $mdc(a,b) = 1$, então, nesse caso $c \leq 1$.

Se q e q' tiverem paridades distintas, então $\frac{c}{2}$ terá que ser inteiro, implicando que $\frac{c}{2}|a$ e $\frac{c}{2}|b$.

Então $\frac{c}{2} \leq 1 \Rightarrow c \leq 2$.

Em caso geral, portanto, $mdc(a+b, a-b) \leq 2$. □

(ii) Seja $c = \text{mdc}(a+b, a^2+b^2)$, segue que $c | a+b$ e $c | a^2-b^2$.

Assim, $\exists\, q, q' \in \mathbb{Z}$ tq $a+b = qc$ e $a^2+b^2 = q'c$

Da primeira equação, temos:

- $a = qc - b \Rightarrow \underline{2ab} = (qc-b)2b = \underline{cq2b - 2b^2}$. $(\star)$
- $b = qc - a \Rightarrow \underline{2ab} = (qc-a)2a = \underline{cq2a - 2a^2}$ $(\star\star)$
- $(a+b)b = qcb \Rightarrow ab + b^2 - 2b^2 = qcb - 2b^2 \Rightarrow \underline{ab - b^2 = qcb - 2b^2}$ $(\star\star\star)$
- $(a+b)a = qca \Rightarrow ab + a^2 - 2a^2 = qca - 2a^2 \Rightarrow \underline{ab - a^2 = qca - 2a^2}$ $(\star\star\star\star)$

Vamos somar $(\star\star\star)$ com $(\star\star\star\star)$:

$2ab - a^2 - b^2 = qcb + qca - 2a^2 - 2b^2 \Rightarrow \underline{2ab} + \underline{a^2+b^2} = c(qb + qa)$

- Sabemos que $a^2+b^2 = q'c$ e, de $(\star\star)$, obtemos:

1) $\underline{2cqa - 2a^2} + \underline{q'c} = c(qa + qb) \Rightarrow -2a^2 = c(q(b-a) - q') \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{c(q(a-b)+q')}{2a}}$

sendo $a \neq 0$. Se $a = 0$, $\text{mdc}(a,b) = b \Rightarrow \text{mdc}(a^2+b^2, a+b) = 1$. $(\star\star\star\star\star)$

Vamos fazer uma análise dos casos para $(\star\star\star\star\star)$:

Caso 1: $\dfrac{q(a-b)+q'}{2a} \in \mathbb{Z}$

Neste caso, podemos escrever $a = cn$, $n \in \mathbb{Z}$, portanto $\boxed{c|a}$

Caso 2: $\dfrac{q(a-b)+q'}{a} \in \mathbb{Z}$ mas $\dfrac{q(a-b)-q'}{2a} \notin \mathbb{Z}$

Neste caso, $\frac{c}{2}$ é inteiro, logo $a = \frac{c}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$, portanto $\boxed{\frac{c}{2}|a}$

Caso 3: $\dfrac{q(a-b)+q'}{a} \notin \mathbb{Z}$

Neste caso, $\frac{c}{a}$ é inteiro, então $a|c$, que implica que existe um x inteiro tq $c = xa$, substituindo c, temos $\dfrac{a+b}{q} = xa \Rightarrow a+b = xaq \Rightarrow b = a(xq-1)$

O que é uma contradição, pois a e b são coprimos entre si e não podem ser múltiplos. Então a sempre divide $q(a-b)+q'$, para a e $b \neq 0$.

(Neste caso, poderíamos ter $xq-1 = 0$, mas neste caso $b = 0 \Rightarrow \text{mdc}(a,b) = a \Rightarrow a = 1$ e $\boxed{\text{mdc}(a+b, a^2+b^2) =}\boxed{\text{mdc}(1,1) = 1}$) Para $xq-1 \neq 0$, é uma contradição.

Para $a=0$, $c=1$, (provado acima)

(★★★★★)

• Analogamente, com (★), obtemos:

2) $2cqb - 2b^2 + q'c = c(qa + qb) \Rightarrow -2b^2 = c(q(a-b) - q') \Rightarrow \boxed{b = \dfrac{c(q(b-a) + q')}{2b}}$

Ao fazer a análise dos casos de (★★★★★★)

Ainda de maneira análoga, obteremos, ~~obtém~~ as seguintes afirmasões:

. $c \mid b$, se $q(b-a)+q'$ é par

. $\frac{c}{2} \mid b$, se $q(b-a)+q'$ é ímpar

. $c = 1$, se a ou b forem 0.

Porém, observemos que se $q(b-a)+q'$ for par então $q(a-b)+q'$ também é.

Pois $q(b-a)+q' = 2k \Rightarrow q(a-b) - q' = -2k \Rightarrow q(a-b)+q' = -2k + 2q' = 2(k+q')$.

Então se $c \mid b$, então $c \mid a$. logo $c \leqslant 1$; pois $mdc(a,b) = 1$.

Se não, temos que $\frac{c}{2} \mid b$ e $\frac{c}{2} \mid a \Rightarrow \frac{c}{2} \leqslant 1 \Rightarrow c \leqslant 2$.

Então, de fato, em qualquer caso $mdc(a+b, a^2+b^2) \leqslant 2$. $\square$

UFA Ö

Index of comments

2.1 Por quê?