MAE0221

PROBABILIDADE I

PEDRO GIGECK FREIRE 10737136 30/06

Provinha 10

Termo de Comprometimento

Eu me comprometo a manter uma conduta ética e adequada durante a realização desta tarefa. Exemplos de conduta inadequada são fornecer e/ou receber auxílio de outras pessoas, consultar material não autorizado, entre outras.

Pedro Gigeck Freire

$Y_1, Y_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes e com mesma distribuição Bernoulli(θ) $0 < \theta < 1$

a) Seja $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n)$

Mostre que

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{D} \text{Normal}(0,\ \theta(1-\theta))$$

Temos que a média (esperança) de Y_i é θ e a variância é $\theta(1-\theta)$ para todo $i = 1, 2, \dots$

Seja $S_n = n\,\hat{\theta}_n = Y_1 + \dots + Y_n$

Pelo teorema limite central, temos

$$\frac{S_n - n\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}\,\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \text{Normal}(0,1) \iff$$

$$\frac{n\hat{\theta}_n - n\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}\,\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \text{Normal}(0,1) \iff$$

$$\frac{n}{\sqrt{n}} \frac{(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Normal}(0,1) \iff$$

$$\frac{n}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \frac{(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Normal}(0,1) \iff$$

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Normal}(0, \theta(1-\theta)). \quad \square$$

b) A função $h(\theta) = \ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$ é denominada logito
Obtenha a distribuição assintótica de $\ln\left(\frac{\hat{\theta}_n}{1-\hat{\theta}_n}\right)$

Como $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Normal}(0, \theta(1-\theta))$ e h é uma função derivável em $\mathbb{R}^+$, então podemos aplicar o MÉTODO DELTA e obter que

$$\sqrt{n}\,(h(\hat{\theta}_n) - h(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Normal}(0, \theta(1-\theta)\,h'(\theta)^2)$$

Calculando $h'(\theta)$, temos

$$h'(\theta) = \frac{1}{\frac{\theta}{1-\theta}} \left[1 \cdot \frac{1}{1-\theta} + \frac{\theta}{(1-\theta)^2}\right] = \frac{1-\theta}{\theta}\left[\frac{1-\theta+\theta}{(1-\theta)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

Logo

$$\sqrt{n}\,(h(\hat{\theta}_n) - h(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Normal}\left(0, \frac{\theta(1-\theta)}{\theta(1-\theta)}\right) = \text{Normal}(0,1)$$

Considere $g(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Pelo teorema do mapeamento contínuo, temos

$$h(\hat{\theta}_n) - h(\theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\text{Normal}(0,1)}{\sqrt{n}} = \text{Normal}\left(0, \frac{1}{n}\right)$$

E como $h(\theta)$ é constante, obtemos a distribuisão assintótica

$$\ln\left(\frac{\hat{\theta}_n}{1-\hat{\theta}_n}\right) = h(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Normal}(0, 1/n) + h(\theta)$$

(Pelo teo. de Slutsky)