

QUESTÃO 1

a) REALIZE A DEDUÇÃO E OS CÁLCULOS ANÁLOGOS AOS DO EXEMPLO 1.2 USANDO A EXPRESSÃO

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

PARA APROXIMAR A PRIMEIRA DERIVADA $f'(x_0)$. MOSTRE QUE O ERRO É $O(h^2)$, VERIFICANDO QUE O TERMO DOMINANTE DO NUMÉRIADOR É $-\frac{h^2}{6} f'''(x_0)$ QUANDO $f'''(x_0) \neq 0$.

Com o teorema da série de Taylor, sabemos que,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \dots$$

Reorganizando os termos, igual ao exemplo do Livro, obtemos que

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \left(\frac{h}{2} f''(x_0) + \frac{h^2}{6} f'''(x_0) + \dots \right) \quad (*)$$

Observe que isso vale para qualquer h , assim, podemos tomar $h = -h$ e obter

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h} - \left(\frac{-h}{2} f''(x_0) + \frac{h^2}{6} f'''(x_0) + \dots \right) \quad (**)$$

Se somarmos (*) com (**) obtemos:

$$2f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \left(\frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{h} \right) - \frac{h}{2} f''(x_0) + \frac{h}{2} f''(x_0) - \frac{2h^2}{6} f'''(x_0) + \dots \Rightarrow$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \left(\frac{h^2}{6} f'''(x_0) + \frac{h^4}{5!} f^{(5)}(x_0) + \dots \right)$$

Observe que os termos onde h tinha expoente ímpar se cancelaram.

Com isso, concluímos que o termo mais significativo do erro, quando usamos a aproximação

QUESTÃO 1

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

$$-\frac{h^2}{6} f'''(x_0), \text{ para } h \ll 1. \text{ Então o erro é } O(h^2).$$

Para aproximar a primeira derivada $f'(x_0)$ usando o erro $O(h^2)$, verificando que o termo dominante do erro é $-\frac{h^2}{6} f'''(x_0)$.

Como queremos o erro de Taylor, escrevemos

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{h^2}{6} f'''(x_0) + \dots$$

rearranjando os termos, temos a seguinte expressão que

$$\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \right) = \frac{h^2}{6} f'''(x_0) + \dots$$

Obtemos que esse erro pode ser qualquer h^2 vezes menor

$$h^2 = h^2 \cdot x$$

$$\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \right) = \frac{h^2}{6} f'''(x_0) + \dots$$

2) somando $f(x_0+h)$ e $f(x_0-h)$ obtemos:

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \cdot 2h + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots$$

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \cdot 2h + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots$$

Obtemos assim a seguinte expressão para o erro de aproximação