2^a prova de Análise Real - MAT0206

1^o. semestre de 2021

Nome: PEDRO GIGECK FREIRE NUSP: 10737136

Disciplina: MAT0206 - Análise Real

Questões	Nota
Q_1	
Q_2	
Q_3	
Q_4	

escolhidas

- Esta é a prova da turma MAT0206. Por favor envie a resolução na área da disciplina no Moodle.
- Por favor, procure fazer uma prova organizada, escreva o enunciado e indique claramente as questões resolvidas . Justifique todas as suas afirmações.
- A prova deve ser enviada em um arquivo do tipo pdf, com o título: nome-do-aluno(a)-sigladadisciplina.
- O nome do (a) aluno (a) legível deve também estar na própria prova. Se possível, use uma cópia deste arquivo.
- Resolva questões totalizando, no máximo 10 pontos. Questões adicionais não serão consideradas.
- O prazo para entrega é até as 13h. Não haverá tempo adicional para digitalização e não serão aceitas provas com atraso.

Questão 1. **(4 pontos)** Dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **contrativa** se existe uma constante $0 < C < 1$ talque

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|,$$

para $n \in \mathbb{N}$
a)Mostre que toda sequência contrativa é de Cauchy (portanto convergente).
b) Mostre que a sequência definida por: $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^3 + 3)$ para $n \in \mathbb{N}$ é contrativa (Dica: Mostre antes que $\frac{1}{5}(x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2) < 1$). para $n \in \mathbb{N}$.
c) Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida em b), mostre que $r = \lim_{n\to\infty} x_n$ é raiz da equação:$x^3 - 5x + 3$.

a) Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $N_0 > 0$ tal que para quaisquer $m, n > N_0$ temos $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Para encontrar N_0, vamos aplicar o seguinte raciocínio:

Para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos provar por indusão que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq C|x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq C^{n-1}|x_2 - x_1|$$

Então, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, temos

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + x_{m+2} + \cdots + x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \quad \text{(desigualdade triangular)}$$

$$\leq C^{m-2}|x_2 - x_1| + C^{m-1}|x_2 - x_1| + \cdots + C^{n-1}|x_2 - x_1|$$

$$= |x_2 - x_1| \sum_{i=n-1}^{m-2} C^i$$

$$= |x_2 - x_1| \, C^{n-1}\left(\frac{1 - C^{m-2-(n-1)+1}}{1 - C}\right) \quad \text{(soma de PG)}$$

$$< |x_2 - x_1| \frac{C^{n-1}}{1 - C} \quad \text{(Pois } 1 - C^{m-n} < 1\text{)}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, precisamos escolher N_0 de modo que

$$|x_2 - x_1| \frac{c^{N_0 - 1}}{1 - c} \leq \varepsilon$$

$$\iff \quad c^{N_0} \leq \frac{\varepsilon(1-c)c}{|x_2 - x_1|} \quad \iff \quad N_0 \geq \log_c\left(\frac{\varepsilon(1-c)c}{|x_2 - x_1|}\right) \qquad (\text{pois } \log_c \text{ é decrescente})$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $N_0 = \left\lceil \log_c\left(\frac{\varepsilon(1-c)c}{|x_2 - x_1|}\right) \right\rceil$. Assim, para todo $m, n \geq N_0$,

$$|x_m - x_n| < |x_2 - x_1| \frac{c^{n-1}}{1-c} \leq |x_2 - x_1| \frac{c^{N_0 - 1}}{1-c} \leq |x_2 - x_1| \frac{c^{\log_c\left(\frac{\varepsilon(1-c)c}{|x_2 - x_1|}\right) - 1}}{1-c}$$

$$= |x_2 - x_1| \frac{\varepsilon(1-c)c}{(1-c)\,c\,|x_2 - x_1|} = \varepsilon.$$

Logo, x_n é de Cauchy e portanto, convergente.

---

b) Antes, observemos que, para $n > 1$

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\tfrac{1}{5}(x_n^3 + 3) - \tfrac{1}{5}(x_{n-1}^3 + 3)\right|$$

$$= \frac{1}{5}|x_n^3 - x_{n-1}^3|$$

$$= \frac{1}{5}\left|(x_n - x_{n-1})(x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2)\right|$$

Portanto, basta mostrar que $|x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2| \frac{1}{5} < 1$

Vamos mostrar por indução em n

Base: se $n = 1$, então

$$\frac{1}{5}(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) = \frac{1}{5}\left(\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 3\right)^2 + \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 3\right)\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(\frac{25}{8}\right)^2 + \frac{25}{16} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{125}{64} + \frac{100}{64} + \frac{16}{64}\right)$$

$$= \frac{241}{320} < 1$$

Hipótese de indusão: Suponha que $\frac{1}{5}\left|x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2\right| < 1$

Assim,

$$\frac{1}{5}\left|x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_{n-1}^2\right| = \frac{1}{5}\left|(x_n^3+3)^2 + (x_n^3+3)(x_{n-1}^3+3) + (x_{n-1}^3+3)^2\right|$$

$$= \frac{1}{5}\left|x_n^6 + 6x_n^3 + 9 + x_n^3x_{n-1}^3 + 3x_n^3 + 3x_{n-1}^3 + 9 + x_{n-1}^6 + 6x_{n-1} + 9\right|$$

$$= \frac{1}{5}\left|x_n^6 + 9x_n^3 + x_n^3x_{n-1}^3 + 9x_n^3 + x_{n-1}^6 + 27\right|$$

$$< \frac{1}{5}\left|x_n^2 + x_nx_{n-1} + x_{n-1}^2\right|^3$$

$$< 1$$

O resultado segue pelo P.I.F.

Logo, $|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{5}\left|x_n^2 + x_{n-1}x_n + x_{n-1}^2\right| |x_n - x_{n-1}|$

$$< \frac{1}{5}|x_n - x_{n-1}|$$

Portanto x_n é contrativa.

E) Seja $n \geq 1$ aplicando x_n na equasão $x^3 - 5x + 3$

$$x_n^3 - 5x_n + 3 = 5\left[\frac{1}{5}\left(x_n^3 + 3\right) - x_n\right]$$

$$= 5\left(x_{n+1} - x_n\right)$$

Mas tomando o limite, como x_n é convergente, obtemos que

$$x_n^3 - 5x_n + 3 = 5(x_{n+1} - x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Portanto $r = \lim x_n$ é raiz da equasão

Questão 2. **(3 pontos)** Seja $f : A \to \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy de pontos de A.

a) Mostre que, se $f : A \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

b) O resultado de ainda é verdadeiro se f é apenas contínua? Se sim, demonstre. Se não, dê contraexemplo.

c) Mostre que, se f é uniformemente contínua em (a, b), então ela pode ser estendida para uma função contínua definida em $[a, b]$.

a) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que se $x, y \in A$ satisfazem $|x-y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (Existe δ pois f é uniformemente contínua)

Como $\delta > 0$ e (x_n) é de Cauchy, existe n_0 tal que se $n, m \geq n_0$, então $|x_n - x_m| < \delta$

Logo, para $n, m \geq n_0$, temos que

$$|x_n - x_m| < \delta \implies |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Portanto $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

b) Não vale o resultado se f é apenas contínua.

Contra-Exemplo.

- $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por

  $f(x) = 1/x$

- $x_n = 1/n$

Temos que f é contínua, x_n é de Cauchy (pois é convergente), mas $f(x_n) = \frac{1}{1/n} = n$ não é de Cauchy (pois não é convergente).

c) Definimos as seguintes sequências

$$x_n = a - 1/n$$

$$y_n = b - 1/n$$

Temos que ambas sequências são de Cauchy, com

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$$

$$y_n \xrightarrow{n\to\infty} b$$

Como f é uniformemente contínua, então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy. Logo, podemos definir

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} \lim f(x_n) & \text{se } x = a \\ f(x) & \text{se } x \in (a,b) \\ \lim f(y_n) & \text{se } x = b \end{cases}$$

(Os limites existem pois as sequências são de Cauchy)

Assim, g é uma extensão contínua de f em $[a,b]$

Questão 3. **(3 pontos)** Dada a função: $f(x) = \begin{cases} |x|^3 \sin^2 \frac{1}{x} \text{ se } x \neq 0, \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$,

a) Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}$.
b) Mostre que f' é contínua em $\mathbb{R}$.

a) Vamos mostrar que f é derivável para cada $x \in \mathbb{R}$.

Se $x > 0$, então

$f(x) = x^3 \sin^2 1/x$ que é composição (e multiplicação) de funções deriváveis, portanto f é derivável em x.

Se $x < 0$, é análogo

Se $x = 0$, como x é ponto de acumulação de $\mathbb{R}$, temos que f será derivável em $x=0$ se existir o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Vamos analisar os limites laterais

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 \sin^2(1/x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x^2 \sin^2(1/x)$$

$= 0$ pelo Teorema do confronto, pois

$\sin^2(1/x) \in [0, 1]$ para todo $x \neq 0$ (é limitada)

e $x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Analogamente

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(-x)^3 \sin^2(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-x)^2 \sin^2(1/x) = 0$$ (pelo teo. do confronto)

Portanto $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

Logo, f é derivável em $x=0$, portanto f é derivável em $\mathbb{R}$.

(b) Usando as técnicas de derivação, obtemos que

$$f'(x) = \begin{cases} 3|x|^2\sin^2(1/x) + |x|^3 2\sin(1/x)\cdot\cos(1/x)\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ \\ 0 \quad \text{se } x=0 \end{cases}$$

Se $x \neq 0$, temos que $f'(x)$ é contínua pois é combinação de funções contínuas.

Se $x=0$, precisamos mostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ (já que x é ponto de acumulação de $\mathbb{R}$)

De fato,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 3|x|^2\sin^2(1/x) + \frac{|x|^3}{x^2}2\sin(1/x)\cdot\cos(1/x)$$

tende a 0

limitadas

Portanto, pelo teorema do confronto, temos que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$$

Então f' é contínua em $\mathbb{R}$.

$\square$