MAE0221

PROBABILIDADE I

PEDRO GIGECK FREIRE 10737136 24/05

EXERCÍCIO EM CLASSE 05

MOSTRE QUE SE $X_1, \dots, X_r$ são v.a. independentes tais que $X_i \sim$ Exponencial(λ), $\lambda > 0$ para $i = 1, \dots, r$ então

$$X_1 + \dots + X_r \sim Gama(r, \lambda)$$

Temos que a função geradora de momentos de X_i é

$$M_{X_i}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad (\text{pois } X_i \sim \text{Exponencial}(\lambda))$$

Logo, como $X_1, \dots, X_r$ são independentes, podemos usar o resultado visto aula de que

$$M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t)$$

E pode-se provar por indução que

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_r}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_r}(t)$$

Portanto

$$M_{X_1+\dots+X_r}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_r}(t)$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$$

E podemos identificar que a função geradora de momentos de $X_1 + \dots + X_r$ é uma função de uma variável aleatória com distribuição Gama(r, λ)

Como a função geradora de momentos caracteriza univocamente a variável aleatória, temos que $X_1 + X_2 + \dots + X_r \sim Gama(r, \lambda)$.

$\square$