MAP0217

Cálculo Diferencial

Prova 2

Pedro Gigeck Freire

10737136

Afirmações Escolhidas	V ou F ?
Afirmação 1	V
Afirmação 2	F
Afirmação 3	V
Afirmação 4	V
Afirmação 5	F
Afirmação 6	V
Afirmação 10	F
Afirmação 11	V
Afirmação 12	V
Afirmação 17	V

* Para a afirmação 3, recebi a dica de usar o argumento da pré-imagem do colega Victor Marçon Pirozelli.

Afirmação 1

Num espaço métrico (M,d), se $A \subset M$ então $\mathring{A}$ é a união de todos os abertos contidos em A.

Verdadeira

Seja $X := \{B \subset A : B \text{ é aberto}\}$ o conjunto de todos os abertos contidos em A

Denotando a união de todos os abertos contidos em A por $\bigcup_{B \in X} B$, vamos mostrar que

$$\mathring{A} = \bigcup_{B \in X} B .$$

. $(\subseteq)$ Seja $x \in \mathring{A}$.

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(x) \subset A.$$

Mas sabemos que toda bola aberta é um conjunto aberto (visto em aula)

Portanto

$$B_\varepsilon(x) \in X$$

Logo, como $x \in B_\varepsilon(x)$, então

$$x \in \bigcup_{B \in X} B$$

Como x é qualquer, então $\mathring{A} \subseteq \bigcup_{B \in X} B$.

($\supseteq$) Seja $x \in \bigcup_{B \in X} B$.

Então existe um conjunto aberto $B \subseteq A$ tal que $x \in B$.

Portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(x) \subseteq B \subseteq A$$

Logo, $x \in \mathring{A}$.

Então $\bigcup_{B \in X} B \subseteq \mathring{A}$

Assim, temos que $\mathring{A} \subset \bigcup_{B \in X} B$ e $\bigcup_{B \in X} B \subseteq \mathring{A}$, portanto $\mathring{A} = \bigcup_{B \in X} B$, isto é,

$\mathring{A}$ é a união de todos os abertos contidos em A.

Afirmação 2

Num espaço métrico (M, d), $A \subset M$ é fechado se e só se $A = A'$.

Falso

Podemos fornecer o contra-exemplo com $(M, d) = (\mathbb{R}, |\,|)$ (reais com distância usual)

Se tomarmos o conjunto unitário $A = \{0\}$

Temos que A é fechado, porém $A' = \emptyset$

Portanto $A' \neq A$.

Afirmação 3

O subconjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y + z^2 \geq 1 \text{ e } xyz = 3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ é fechado em $\mathbb{R}^3$.

Verdadeiro

Esse subconjunto pode ser escrito como

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y + z^2 \geq 1\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 3\}$$

Sabemos que a intersesão de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado. Então basta provar que esses dois são fechados.

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y + z^2 \geq 1\}$ é fechado;

Seja $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$(x,y,z) \mapsto x^2 + 3y + z^2$$

O conjunto que queremos analisar é a pré imagem de f no intervalo $[1, +\infty)$

Ou seja

$$f^{-1}([1, +\infty)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) \in [1, +\infty]\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y + z^2 \geq 1\}$$

É simples verificar que f é contínua, pois é composisão de contínuas.

Portanto, pela caracterizasão de continuidade global, sabemos que

$f^{-1}([1, +\infty)) = F \cap \mathbb{R}^3 = F$ para algum F fechado em $\mathbb{R}^3$, pois $[1, \infty)$ é fechado em $\mathbb{R}$.

Isto é, $f^{-1}([1, +\infty))$ é fechado em $\mathbb{R}^3$

- Agora, com um raciocínio análogo, podemos verificar que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 3\}$ é fechado.

Seja $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$(x,y,z) \mapsto xyz$$

Então o conjunto que queremos analisar é a pré imagem de 3.

$$g^{-1}(3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 3\}$$

Como g é contínua e o conjunto unitário $\{3\}$ é fechado em $\mathbb{R}$, então

$g^{-1}(3) = F' \cap \mathbb{R}^3 = F'$ para algum conjunto fechado F' em $\mathbb{R}^3$.

Portanto $g^{-1}(3)$ é fechado.

- Por fim, como ambos os conjuntos são fechados, então a sua interseção, isto é, o conjunto original, também é fechado.

Afirmação 4

O conjunto das soluções do sistema de inequação abaixo é aberto de $\mathbb{R}^3$.

$$x^4 + 3y + z^3 - \sin(xy^2 + z) > 0$$

$$x - 2y + 3z^2 < 0$$

$$e^x + z^3 > 0$$

VERDADEIRO

Vamos usar um argumento similar ao usado para a afirmação 3.

Sejam $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f((x,y,z)) = x^4 + 3y + z^3 - \sin(xy^2 + z)$,

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $g((x,y,z)) = x - 2y + 3z^2$ e

$h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $h((x,y,z)) = e^x + z^3$

É simples verificar que f, g e h são funções contínuas em $\mathbb{R}^3$, pois são composisão de funções contínuas.

Além disso, o conjunto de solusões do sistema de inequasões enunciado é a intersesão das solusões de cada inequasão, e pode ser escrito como:

$$f^{-1}((0,+\infty)) \cap g^{-1}((-\infty,0)) \cap h^{-1}((0,+\infty))$$

Porém, como os intervalos $(0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$ são abertos em $\mathbb{R}$, então as pré-imagens em questão também serão abertas em $\mathbb{R}^3$, pela caracterização de continuidade global.

Por fim, como a interseção de 3 conjuntos abertos é um conjunto aberto, então o conjunto de soluções que queríamos analisar é, de fato, aberto.

Afirmação 5

No espaço métrico $\mathbb{Q}$ dos números racionais com a métrica usual $d(x,y) = |x-y|$, $\forall\, x,y \in \mathbb{Q}$. Todo subconjunto fechado e limitado é compacto.

Falso

Podemos tomar o contra-exemplo $A = B_1[1] \subseteq \mathbb{Q}$.

Esse conjunto é fechado e limitado, vamos mostrar que não é compacto.

Seja $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a família de abertos dada por

$$O_n = B_{r(n)}(0) \quad , \text{ onde } \quad r(n) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} 1/2^i} = \sqrt{1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n}$$

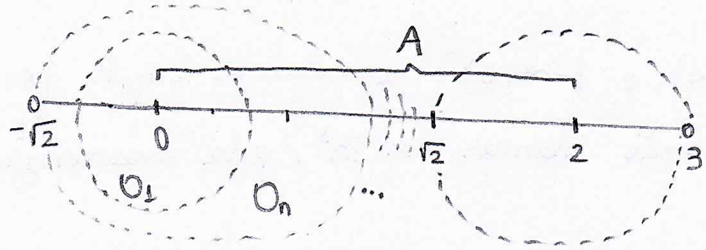
Note que $r(n)$ é crescente, portanto $O_{n-1} \subseteq O_n$ para qualquer n.

Além disso, note que $r(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}$.

Isso implica que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = B_{\sqrt{2}}(0)$

logo, podemos montar a cobertura

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n \cup (\sqrt{2}, 3) = \left((-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3)\right) \cap \mathbb{Q}$$



Suponha que existe uma subcobertura finita $\bigcup_{i\leq m} O_i \cup (\sqrt{2},3)$ de A. Temos que

$$\bigcup_{i\leq m} O_i \cup (\sqrt{2}, 3) = O_m \cup (\sqrt{2}, 3)$$

Porém existe um "furo" nessa cobertura, composto pelo intervalo

$(r(m), \sqrt{2})$

E sabemos dos cursos anteriores que em um intervalo sempre há um número racional.

Portanto existe um elemento de A que não é coberto pela subcobertura. Então precisamos de todos os infinitos (O_n) para cobrir o A.

Logo, A não é compacto.

Afirmação 6

O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1$ e $x_1^3 - 3x_2^2 x_3 + x_1 \cos(x_2 + 2x_3) \geq 0\}$ é compacto em $\mathbb{R}^3$

Verdadeiro

Pelo teorema visto na aula de 23/10, sabemos que, em $\mathbb{R}^3$, ser compacto é equivalente a ser fechado e limitado.

Então vamos mostrar que esse conjunto é fechado e limitado.

Seja $A := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}$ e

$B := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^3 - 3x_2^2 x_3 + x_1 \cos(x_2 + 2x_3) \geq 0\}$

Vamos denotar por K o conjunto que estamos analisando.

Temos, por definição, que

$$K = A \cap B.$$

Vamos mostrar que K é fechado, mostrando que A e B são fechados.

Sabemos que toda bola fechada é fechada, e podemos ver que

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - 0\| \leq 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x,0) \leq 1\} = B_1[0]$$

Logo, A é fechado.

Para verificar que B é fechado, vamos usar o argumento da contra-imagem.

Seja $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x_1^3 - 3x_2^2 x_3 + x_1 \cos(x_2 + 2x_3)$$

Temos que

$$A = f^{-1}([0,+\infty))$$

Como f é contínua (pois é composição de contínuas) e $[0,+\infty)$ é fechado em $\mathbb{R}$, então $f^{-1}([0,+\infty])$ é fechado em $\mathbb{R}^3$.

Com isso, temos que A é fechado e B é fechado, portanto $A \cap B = K$ é fechado.

Agora, resta mostrar que K é limitado, mas

$$K = A \cap B \subseteq A = B_1[0] \subseteq B_2(0)$$

Logo K é limitado. Então K é compacto.

Afirmação 10

Sejam $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica usual d e $N = \mathbb{R}^n$ com a métrica discreta d_*. Então $f: M \to N$ definida por $f(x) = x \ \forall x \in M$ é contínua.

Falso

Suponha, por absurdo, que f é contínua.

Pela caracterização de continuidade global, para todo $U \subseteq N$ aberto existe $O \subseteq M$ aberto tal que $f^{-1}(U) = O \cap D$.

Tomamos $U = B_{1/2}(0)$ Como em N usamos a métrica discreta então

$$U = B_{1/2}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_*(x, 0) < 1/2\} = \{0\}$$

Então $f^{-1}(U) = f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{0}\}$

Porém $\{\vec{0}\}$ não é aberto em M (com a métrica usual), absurdo.

Portanto f não é contínua.

Afirmação 11

Sejam $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica usual d e $N = \mathbb{R}^n$ com a métrica discreta d_* Então $g: N \to M$ definida por $g(x) = x$, $\forall x \in N$ é contínua.

Verdadeiro

Vamos provar usando a caracterização global de continuidade

Seja $U \subseteq M$ aberto.

Temos que $g^{-1}(U) = U$

Tomamos $O \subseteq N$, com $O = g^{-1}(U) = U$

Vamos mostrar que O é aberto, lembrando que em N usamos d_*

Seja $x \in O$, podemos tomar $\varepsilon = 1/2$ de modo que $B_\varepsilon(x) = \{x\} \subset O$.

Portanto. O é aberto.

Em suma, para todo aberto $U \subseteq M$, existe um aberto $\mathcal{O} \subseteq N$ tal que

$g^{-1}(U) = \mathcal{O}$,

Portanto g é contínua.

Afirmação 12

Seja (M,d) um espaço métrico. Se $K \subset M$ é compacto e $F \subset K$ é fechado não vazio, então F é compacto.

Verdadeiro

Seja $(\mathcal{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura por abertos de F.

Como F é fechado, F^c é aberto, então

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda \cup F^c$ é uma cobertura por abertos de K

Mas K é compacto, então existe uma subcobertura finita de K da forma

$\mathcal{O}_{\lambda_1}, \mathcal{O}_{\lambda_2}, \dots, \mathcal{O}_{\lambda_n}, F^c$

Logo, $\mathcal{O}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{O}_{\lambda_n}$ é uma subcobertura finita de F

Portanto F é compacto.

Afirmação 17

A função $f : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ e } y^2 + z^2 = 30\} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$f(x,y,z) = (xz^2\cos(y^2) - ye^{xz},\ x^3z^2 + 3x^2yz - y^3z^2)$ é limitada.

Verdadeiro

Vamos mostrar que o domínio de f é compacto

Como $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}^3$, basta mostrar que é fechado e limitado

Para isso, basta verificar que o domínio da f é uma circunferência no plano y3, variando no eixo x entre 0 e 2.

Ou seja, podemos afirmar que (extrapolando)

$$Dom(f) \subseteq B_{100}(\vec{0}) \subseteq B_{100}[\vec{0}]$$

Portanto Dom(f) é compacto, logo, pelo teorema visto em aula, temos que a imagem de f é compacta.

Isso é suficiente para dizer que a imagem de f é limitada.