2) CAP 14 exercício 4

Let

$$g = \frac{1}{h^2}\left(f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)\right),$$

$$\hat{g} = \frac{1}{4h^2}\left(f(x_0-2h) - 2f(x_0) + f(x_0+2h)\right).$$

Show that if f has three bounded derivatives in a neighborhood of x_0 that included $[x_0-2h, x_0+2h]$, then the computable expression

$\hat{e} = \dfrac{g-\hat{g}}{3}$ provides an estimation for the error in $f''(x_0) - g$ accurate up to $O(h)$.

Primeiramente, vamos mostrar que g e $\hat{g}$ são aproximações para $f''(x_0)$

Usaremos a expansão de Taylor em x_0+h e x_0-h em torno de x_0

$$(I) \quad f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{IV}(x_0) + O(h^5)$$

$$(II) \quad f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{IV}(x_0) + O(h^5)$$

$$(I+II) \quad f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + h^2f''(x_0) + \frac{h^4}{12}f^{IV}(x_0) + O(h^5) \Rightarrow$$

$$(*) \quad f''(x_0) = \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{IV}(x_0) + O(h^3)$$

Então podemos obter as aproximações

$$g = \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2}$$ e, tomando $h \leftrightarrow 2h$ $$\hat{g} = \frac{f(x_0-2h) - 2f(x_0) + f(x_0+2h)}{4h^2}$$

Usando (*) podemos chegar que

$$f''(x_0) - g = -\frac{h^2}{12}f^{IV}(x_0) + O(h^3)$$

Agora, vamos tentar estimar o valor de $\frac{h^2 f^{IV}(x_0)}{12}$

Tomemos (*) e (**) (calculado com 2h)

$$(*)\quad f''(x_0) = \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} + \frac{h^2 f^{IV}(x_0)}{12} + O(h^3) = g + \frac{h^2}{12} f^{IV}(x_0) + O(h^3)$$

$$(**)\quad f''(x_0) = \frac{f(x_0-2h) - 2f(x_0) + f(x_0+2h)}{4h^2} + \frac{4h^2}{12} f^{IV}(x_0) + O(h^3) = \hat{g} + \frac{4h^2}{12} f^{IV}(x_0) + O(h^3)$$

$$(* - **):\quad 0 = g - \hat{g} + h^2 f^{IV}(x_0)\left(\frac{1}{12} - \frac{4}{12}\right) + O(h^3) = \frac{g-\hat{g}}{3} + \frac{h^2 f^{IV}\left(-\frac{3}{12}\right)}{3} + O(h^3) \Rightarrow$$

$$\hat{e} = \frac{h^2 f^{IV}}{12} + O(h^3) = f''(x_0) - g + O(h^3)$$

Portanto, concluímos que, de fato $\hat{e}$ é uma aproximação para $f''(x_0) - g$ com acurácia $O(h^3)$ que é melhor que $O(h)$ para $0 < h \ll 1$.