⑥ Capítulo 15, exercício 4

Considerando o polinômio osculante da interpolação hermitiana cúbica

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f[a,a,b](x-a)^2 + f[a,a,b,b](x-a)^2(x-b)$$

integrando, obtemos (depois de alguma algebra)

$$I_f \approx \int_a^b P_3(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{(b-a)^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right]$$

Essa fórmula é chamada de REGRA TRAPEZOIDAL CORRIGIDA

(a) Mostre que o erro dessa regra pode ser estimado por

$$E(f) = \frac{f''''(\eta)}{720}(b-a)^5$$

Do teorema do erro da interpolação polinomial (capítulo 10), temos

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$, aqui, temos $n=4$ e as observações

$(a, f(a))$, $(a, f'(a))$, $(b, f(b))$ e $(b, f'(b))$

Então

$$f(x) - P_3(x) = \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2 \quad , \quad \eta \in [a,b]$$

Integrando ambos os lados

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P_3(x)\,dx = \int_a^b \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2\,dx,$$

Tomemos $r = x-a$, $dx = dr$

$x-b = r+(a-b)$

$x \to a \Rightarrow r \to 0$, $x \to b \Rightarrow r \to b-a$

$$= \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}\int_0^{b-a} r^2(r+(a-b))^2\,dr = \frac{f^{IV}(\eta)}{5!}\int_0^{b-a} r^2\left(r^2+2r(a-b)+(a-b)^2\right)dr$$

$$= \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}\int_0^{b-a} r^4+2r^3(a-b)+r^2(a-b)^2\,dr = \frac{f^{IV}(\eta)}{5!}\left[\frac{r^5}{5}+\frac{2(a-b)r^4}{4}+\frac{(a-b)^2r^3}{3}\right]_0^{b-a}$$

$$= \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}\left(\frac{(b-a)^5}{5} + \frac{2(a-b)(b-a)^4}{4} + \frac{(a-b)^2(b-a)^3}{3} \right)$$

$$= \frac{f^{IV}(\eta)}{4!}\,\frac{1}{30}\left(6(b-a)^5 - 15(b-a)^5 + 10(b-a)^5 \right) = \frac{f^{IV}(\eta)}{6!}(b-a)^5 = \frac{f''''(\eta)}{720}(b-a)^5$$