5/5

MAC105 FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA A COMPUTAÇÃO

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Pedro Gigeck Freire **Número USP:** 10737136

Assinatura

Pedro Gigeck Freire

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: S6 **Data:** 09/05/2018

SOLUÇÃO

(i) a) • $\lfloor nx \rfloor = \lfloor 5.\pi \rfloor$, como $\pi = 3 + 0{,}1415\ldots$, temos $3 < \pi < 3 + 1/5$, logo $15 < 5\pi < 16$, portanto $\lfloor 5\pi \rfloor = 15$.

+2/2

• $n\lfloor x \rfloor = 5 . \lfloor 3{,}14159\ldots \rfloor = 5.3 = 15$.

• $\{x\} = \pi - \lfloor \pi \rfloor = 3{,}141592\ldots - 3 \cong 0{,}141592\ldots$

b) • $\lfloor nx \rfloor = \lfloor 5(-\pi) \rfloor$, analogamente ao item a) Temos $-3 - \frac{1}{5} < -\pi < -3$, logo $-16 < -5\pi < -15$, portanto $\lfloor 5(-\pi) \rfloor = -16$

• $n\lfloor x \rfloor = 5 . \lfloor -\pi \rfloor = 5.(-4) = -20$

• $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor = -3{,}1415\ldots - (-4) = 4 - \pi \cong 0{,}8584\ldots$

(ii) Queremos provar: $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor \iff n\{x\} < 1$

Vamos provar $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor \Rightarrow n\{x\} < 1$, substituindo x por $\lfloor x \rfloor + \{x\}$,

Segue $\lfloor n(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \rfloor = n\lfloor x \rfloor \Rightarrow \lfloor n\lfloor x \rfloor + n\{x\} \rfloor = n\lfloor x \rfloor$ Como $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, temos

$n\lfloor x \rfloor + \lfloor n\{x\} \rfloor = n\lfloor x \rfloor \Rightarrow \lfloor n\{x\} \rfloor = 0$. Assim, para $\lfloor n\{x\} \rfloor = 0$, temos que $n\{x\}$ está entre 0 e 1, logo $n\{x\} < 1$.

+3/3

continua no verso ☺

Agora vamos provar $n\{x\} < 1 \Rightarrow \lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$

Consideremos $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, segue $n(x - \lfloor x \rfloor) < 1 \Rightarrow nx - n\lfloor x \rfloor < 1 \Rightarrow nx < 1 + n\lfloor x \rfloor$

"Tirando o chão" de ambos os lados, podemos ter que $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor$ se x for inteiro, assim temos

$$\lfloor nx \rfloor \leq \lfloor 1 + n\lfloor x \rfloor \rfloor, \text{ como } n\lfloor x \rfloor \text{ e } 1 \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor nx \rfloor \leq 1 + n\lfloor x \rfloor \text{ ou } \lfloor nx \rfloor - 1 \leq n\lfloor x \rfloor$$

Agora, sabemos que $\lfloor x \rfloor + 1 > x$, logo $n\lfloor x \rfloor + n > xn$, "tirando o chão" de ambos os lados, temos $n\lfloor x \rfloor + n \geq \lfloor xn \rfloor$

Analisando as desigualdades segue que

$$\lfloor nx \rfloor \leq n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \Rightarrow n\lfloor x \rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$