MAP0217 - Cálculo Diferencial

3ª Prova

Pedro Gigeck Freire

10737136

Questão	Se fez, preencha com X
Q1 (2)	X
Q2 (1)	
Q3 (1)	
Q4 (2)	X
Q5 (2)	

Questão	Se fez, preencha com X
Q6 (2)	X
Q7 (2)	X
Q8 (2)	X
Q9 (2)	

Questão 1

Considere o espaço métrico $(M, \tilde{d})$, com $M = \mathbb{R}^2$ e $\tilde{d} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ definida por

$$\tilde{d}(x,y) = |x_1 + x_2 - y_1 - y_2| + d_*(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2),\ \forall x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

onde d_* é a métrica discreta em $\mathbb{R}$.

Sejam $\pi_1 : M \to \mathbb{R}$ e $\pi_2 : M \to \mathbb{R}$ as projeções definidas por $\pi_1(x) = x_1$ e $\pi_2(x) = x_2$. Considere $\mathbb{R}$ com a distância usual e mostre que π_1 e π_2 são contínuas.

Vamos usar a caracterização de continuidade global.

Ou seja, vamos mostrar que $\forall\, U \subseteq \mathbb{R}$ aberto existe $O \subseteq M$ aberto t.q. $\pi^{-1}(U) = O \cap M$

Seja $U \subseteq \mathbb{R}$ aberto.

Seja $O = \pi_1^{-1}(U)$.

Vamos mostrar que O é aberto:

Seja $x = (x_1, x_2) \in O$

Como $x \in \pi_1^{-1}(U)$, então $x_1 \in U$.

Como U é aberto, existe $r > 0$ tal que

$$B_r(x_1) \subseteq U.$$

Caso 1

- Se $r \leq 1$, vamos mostrar que $B_r(x) \subseteq O$ (em $M = \mathbb{R}^2$ com $\tilde{d}$)

Seja $y = (y_1, y_2) \in B_r(x)$, então

$$\tilde{d}(x, y) < r \Rightarrow$$

$$(*) \quad |x_1 + x_2 - y_1 - y_2| + d_*(x_1 - x_2, y_1 - y_2) < r \Rightarrow$$

$$1 \geq r > |x_1 + x_2 - y_1 - y_2| + d_*(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq d_*(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Ou seja, $1 > d_*(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$, logo

$$(i) \quad d_*(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 - x_2 = y_1 - y_2 \Rightarrow$$

$$(ii) \quad x_1 - y_1 = x_2 - y_2$$

Substituindo essa igualdade em $(*)$, temos

$$|(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| + d_*(x_1 - x_2, y_1 - y_2) < r \Rightarrow \quad (\text{de } *)$$

$$|(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)| + 0 < r \Rightarrow \quad (\text{de (i)})$$

$$(**) \quad |(x_1 - y_1) + (x_1 - y_1)| < r \Rightarrow \quad (\text{de (ii)})$$

$$2|x_1 - y_1| < r \Rightarrow$$

$$|x_1 - y_1| < \frac{r}{2} < r \Rightarrow$$

$$y_1 \in B_r(x_1) \subseteq U \Rightarrow$$

$$y_1 \in U \Rightarrow$$

$$y \in \pi_1^{-1}(U).$$

Portanto, para qualquer $y \in B_r(x)$, temos $y \in \pi_1^{-1}(U)$.

Então $B_r(x) \subseteq \pi_1^{-1}(U) = O$

Logo, O é aberto.

Caso 2:

- Se $r > 1$, vamos mostrar que $B_{\frac{1}{r}}(x) \subseteq O$.

Seja $y \in B_{1/r}(x)$

Temos

$$\tilde{d}(x,y) < 1/r$$

Com argumentos totalmente análogos ao caso 1, obtemos

$$2|x_1 - y_1| < 1/r \Rightarrow$$

$$|x_1 - y_1| < \frac{1}{2r} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{r}\right) < \left(\frac{1}{2}\right)(1) = \frac{1}{2} < 1 < r \Rightarrow$$

$$y_1 \in B_r(x_1) \subseteq U \Rightarrow$$

$$y_1 \in U \Rightarrow$$

$$y \in \pi_1^{-1}(U) = O.$$

Então $B_{1/r}(x) \subseteq O$, logo O é aberto.

Em ambos os casos, $O = \pi_1^{-1}(U)$ é aberto, para qualquer aberto $U \in \mathbb{R}$, portanto π_1 é contínua.

Para π_2, o resultado é análogo, basta usar x_2 e y_2 na passagem (**)

Questão 4

Seja (M, d) um espaço métrico $(M \neq \emptyset)$ e seja $A \subseteq M$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Existe $\bar{a} \in M$ e $r > 0$ tal que $A \subset B_r(\bar{a})$.

(b) Existe $\bar{a} \in M$ e $s > 0$ tal que $A \subset B_s[\bar{a}]$.

(c) Existe $\beta > 0$ tal que $d(x,y) \leq \beta$, $\forall x, y \in A$.

(d) Existe $\gamma > 0$ tal que $d(x,y) < \gamma$, $\forall x, y \in A$.

Vamos mostrar (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a)

[(a) $\Rightarrow$ (b)]

Sejam $\bar{a} \in M$, $r > 0$ tais que $A \subseteq B_r(\bar{a})$.

Seja $a \in A$, então

$$a \in B_r(\bar{a}) \Rightarrow$$

$$d(a, \bar{a}) < r \leq r \Rightarrow$$

$$d(a, \bar{a}) \leq r \Rightarrow$$

$$a \in B_r[\bar{a}] \Rightarrow$$

$$A \subseteq B_r[\bar{a}].$$

[(b) $\Rightarrow$ (c)]

Sejam $\bar{a} \in M$ e $s > 0$ tais que $A \subseteq B_s[\bar{a}]$

Sejam $x, y \in A$ quaisquer, então

$$d(x, \bar{a}) \leq s \quad \text{e} \quad d(y, \bar{a}) \leq s$$

Pela desigualdade triangular, temos.

$$d(x,y) \leq d(x,\bar{a}) + d(\bar{a}, y) \leq s + s = 2s$$

De fato, tomando $\beta = 2s$, temos

$$d(x,y) \leq \beta \quad \forall\, x, y \in A.$$

[(c) $\Rightarrow$ (d)]

Seja $\beta > 0$ tal que $d(x,y) \leq \beta$, $\forall x, y \in A$.

Tomamos $\gamma = 2\beta$, então para todo $x, y \in A$,

$$d(x,y) \leq \beta < 2\beta = \gamma.$$

$[(d) \Rightarrow (a)]$

Seja $\gamma > 0$ tal que $d(x,y) < \gamma \quad \forall\, x, y \in A$.

Escolhemos qualquer $\bar{a} \in A$, então para todo $x \in A$ temos

$$d(x, \bar{a}) < \gamma$$

Portanto $x \in B_\gamma(\bar{a})$, tomando $r = \gamma$, temos, de fato

$x \in B_r(\bar{a})$, logo $A \subseteq B_r(\bar{a})$.

Questão 6

Sejam (M, d_M), (N, d_N) espaços métricos e seja $f: A \subset M \longrightarrow N$.
Sejam $\tilde{A} \subset A$ e $\hat{A} = A \setminus \tilde{A}$
Seja $a \in \mathring{A}$ um ponto de acumulação de A.
Mostre que:

(a) Se a não é ponto de acumulação de $\hat{A}$ então existe $\lim\limits_{x \to a} f$ se e só se existe $\lim\limits_{x \to a} f|_{\tilde{A}}$. Nesse caso, $\lim\limits_{x \to a} f = \lim\limits_{x \to a} f|_{\tilde{A}}$

(só se) (existe $\lim\limits_{x \to a} f \Rightarrow$ existe $\lim\limits_{x \to a} f|_{\tilde{A}}$)

Seja $l = \lim\limits_{x \to a} f$

Então $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $0 < d_M(x, a) < \delta$ e $x \in A$ então $d_N(f(x), l) < \varepsilon$ (por definição de limite)

Como $\tilde{A} \subseteq A$, então a afirmação anterior vale para $x \in \tilde{A}$, isto é,
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $0 < d_M(x, a) < \delta$ e $x \in \tilde{A}$ então $d_N(f(x), l) < \varepsilon$

Ou seja, $\lim\limits_{x \to a} f|_{\tilde{A}}$ existe e vale l.

(se) (existe $\lim\limits_{x \to a} f|_{\tilde{A}} \Rightarrow$ existe $\lim\limits_{x \to a} f$)

Seja $l = \lim\limits_{x \to a} f|_{\tilde{A}}$.

Sabemos que $\forall x \in \tilde{A}$ vale que

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tal que se $0 < d_M(x, a) < \delta$ então $d_N(f(x), l) < \varepsilon$.

Resta mostrar esse resultado para $x \in (A \setminus \tilde{A}) = \hat{A}$

Como a não é ponto de acumulação de $\hat{A}$, então existe um $\delta > 0$ tal que $(B_\delta(a) \cap \hat{A}) \setminus \{a\} = \emptyset$ (Pela definição de ponto de acumulação)

Portanto não existe nenhum $x \in \hat{A}$ que satisfaz $0 < d_M(x, a) < \delta$.

Então, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, podemos escolher esse δ e então o resultado vai valer por vacuidade.

Ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq se $0 < d_M(x, a) < \delta$ e $x \in \hat{A}$ então $d_N(f(x), l) < \varepsilon$. (Pois não existirá nenhum x satisfazendo $0 < d_M(x, a) < \delta$).

Logo o resultado vale em $\hat{A}$ e $\tilde{A}$, então vale para todo A.

Isto é, $\lim_{x \to a} f$ existe e vale l.

(b) Se a não é ponto de acumulação de $\tilde{A}$ então existe $\lim_{x \to a} f$ se e só se existe $\lim_{x \to a} f|_{\hat{A}}$. Nesse caso $\lim_{x \to a} f = \lim_{x \to a} f|_{\hat{A}}$.

Esse caso pode ser reduzido ao item (a).

Pois $\tilde{A} \subseteq A$ e $\hat{A} = A \setminus \tilde{A}$, então esse caso é análogo ao item (a), basta substituir $\tilde{A}$ por $\hat{A}$ e vice-versa.

(c) Se a é ponto de acumulação de $\tilde{A}$ e é ponto de acumulação de $\hat{A}$ então existe $\lim_{x \to a} f$ se e só se existem $\tilde{l} = \lim_{x \to a} f|_{\tilde{A}}$ e $\hat{l} = \lim_{x \to a} f|_{\hat{A}}$ e $\tilde{l} = \hat{l}$. Nesse caso, $\lim_{x \to a} f = \lim_{x \to a} f|_{\tilde{A}} = \lim_{x \to a} f|_{\hat{A}}$.

[só se] (existe $\lim_{x \to a} f \Rightarrow$ existe $\lim_{x \to a} f|_{\tilde{A}}$ e $\lim_{x \to a} f|_{\hat{A}}$)

(Esse caso também é análogo ao item (a))

Seja $l = \lim_{x \to a} f(x)$.

Temos que $\forall x \in A$ vale que

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tq se $0 < d_M(x, a) < \delta$ então $d_N(f(x), l) < \varepsilon$.

Como $\tilde{A} \subseteq A$ e $\hat{A} \subseteq A$, então a afirmasão acima também vale para todo $x \in \tilde{A}$ e para todo $x \in \hat{A}$.

Logo, existem $\tilde{l} = \lim_{x \to a} f|_{\tilde{A}}$ e $\hat{l} = \lim_{x \to a} f|_{\hat{A}}$, além disso, $\tilde{l} = \hat{l} = l$.

[se] (existem $\tilde{l}$ e $\hat{l}$, $\hat{l} = \tilde{l} \Rightarrow$ existe $\lim_{x \to a} f$)

Seja $l = \tilde{l} = \hat{l}$.

Para todo $x \in A$, temos 2 casos:

- caso 1: $x \in \hat{A}$

  Nesse caso, como a é ponto de acumlação de $\hat{A}$ e existe $\lim_{x \to a} f|_{\hat{A}}$, então $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tq se $0 < d_M(x, a) < \delta$ então $d_N(f(x), l) < \varepsilon$. (pois $l = \hat{l}$)

- Caso 2: $x \notin \hat{A}$

  Nesse caso, $x \in \tilde{A}$, e sabemos que existe $\lim_{x \to a} f|_{\tilde{A}}$, logo $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tq se $0 < d_M(x, a) < \delta$ então $d_N(f(x), l) < \varepsilon$ (pois $l = \tilde{l}$).

De fato, $\forall x \in A$; vale que

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tal que se $0 < d_M(x, a) < \delta$ então $d_N(f(x), l) < \varepsilon$.

Ou seja, existe $\lim_{x \to a} f$ e vale l.

Questão 7

Seja $f(x, y) = \dfrac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Determinar o limite de f quando (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo da reta $y = mx$. É possível definir $f(0, 0)$ de modo que f seja contínua em $(0, 0)$?

Quando (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo de uma reta $y = mx$, o limite de f vale (se existir):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-m^2}{1+m^2} = \boxed{\frac{1-m^2}{1+m^2}}$$

Não é possivel definir $f(0,0)$ de modo que ela seja contínua em $(0,0)$:

Suponha, por absurdo, que seja possivel definir $f(0,0)$ de modo que f seja contínua em $(0,0)$.

Nesse caso, teríamos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, porém sabemos que

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pode valer $\frac{1-m^2}{1+m^2}$, para qualquer $m \in \mathbb{R}$, assim, podemos tomar

$m=0$, de modo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ e

$m=1$, de modo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Como $1 \neq 0$, então não pode existir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. $\square$

Questão 8

Prove a seguinte proposição:

"Sejam (M,d), $(N,\tilde{d})$ espaços métricos, suponha que M é compacto.

Seja $f: M \to N$ contínua, bijetora. Então $f^{-1}: N \to M$ é contínua."

De um exemplo para mostrar que não podemos abrir mão da compacidade de M na proposição anterior.

Seja $g = f^{-1}$ (apenas para simplificar a notação)

Vamos mostrar que g é contínua usando a caracterização de continuidade global.

Temos que $g: N \to M$, com $g^{-1} = f$.

Vamos mostrar que

- $\forall$ $G \subseteq M$ fechado existe $F \subseteq N$ fechado tq $g^{-1}(G) = F$.

Seja $G \subseteq M$ fechado.

Temos que $G \neq \emptyset$

Como M é compacto, então G é compacto. *

(* esse resultado foi enunciado na aula de 30/09, e provei ele na prova 2, afirmação 12)

Como G é compacto e $g^{-1} = f$ é contínua, então

$g^{-1}(G)$ é compacto, pelo teorema visto e provado em aula (30/09)

Logo, $g^{-1}(G)$ é fechado, pois é compacto.

Então, de fato,

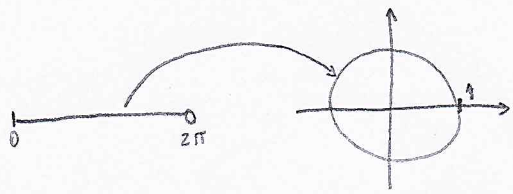
$\forall$ $G \subseteq M$ fechado existe $F \subseteq N$ fechado tq $g^{-1}(G) = F$

Pela caracterização de continuidade global, $g = f^{-1}$ é contínua $\square$

Se abrirmos mão da compacidade de M, o resultado não vale, como no exemplo

$f: [0, 2\pi) \longrightarrow S_1$

$f(x) \longmapsto (\cos(x), \operatorname{sen}(x))$

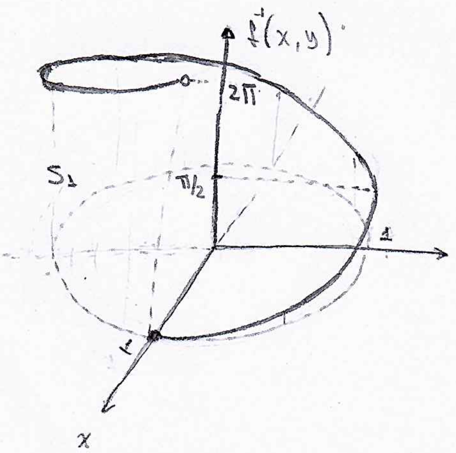


Temos que f é contínua

Mas se tomarmos

$f^{-1}: S_1 \to [0, 2\pi)$

$f^{-1}(x, y) =$ Ângulo entre o vetor $(1,0)$ e (x,y) (Expressada no desenho)



Vemos que a função f^{-1} não é contínua em $(1,0)$, pois podemos tomar o limite e obter $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f^{-1}(x,y) = 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1,0)$.