Ciência Computacional: Modelagem e Simulação - 2

Roberto M. Cesar Jr.
rmcesar@usp.br

Blucher

Curso de Física Básica – vol. 1 -
5ª ed. - H. Moysés Nussenzveig

Curso de Física Básica

Volume 1 – Mecânica

5ª Edição, Revista e Atualizada

Capítulo I
Introdução

Blucher

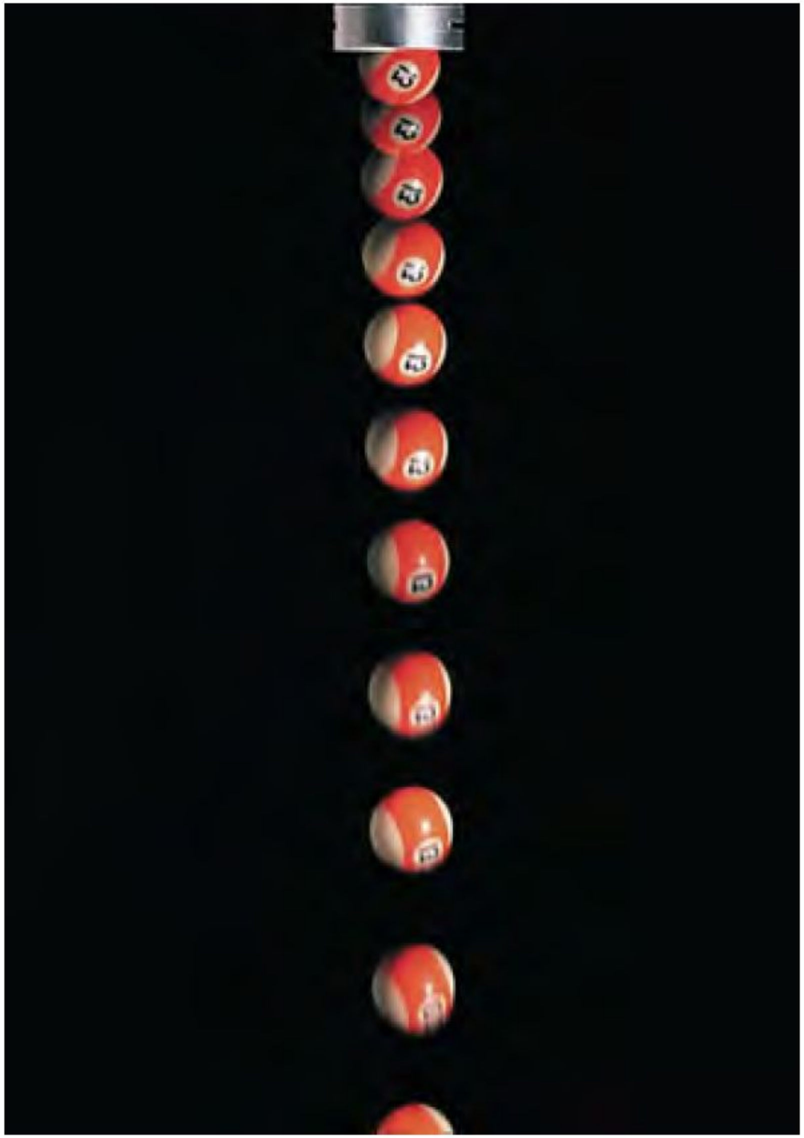
Capítulo 2

MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL

2.1 — Velocidade média

A análise do movimento é um problema fundamental em física, e a forma mais simples de abordá-la é considerar primeiro os conceitos que intervêm na *descrição* do movimento (*cinemática*), sem considerar ainda o problema de como determinar o movimento que se produz numa dada situação física (*dinâmica*). No presente capítulo, para simplificar ainda mais a discussão, vamo-nos limitar ao movimento em uma só dimensão — por exemplo, o movimento de um automóvel em linha reta ao longo de uma estrada. Como muitos aspectos da cinemática são discutidos no curso secundário, vamos restringir o tratamento a apenas alguns tópicos centrais.

2.22 Multiflash photo of a freely falling ball.



$$g = 9.8\ \text{m/s}^2 = 980\ \text{cm/s}^2 = 32\ \text{ft/s}^2$$

(approximate value near the earth's surface)

Exemplo: Na experiência de queda livre da bolinha (Fig. 2.2), o gráfico $x \times t$ tem a forma de uma parábola (Fig. 2.6), $x = \alpha t^2$, onde, para x em m e t em s, o valor de α seria $\approx 5\ m/s^2$; tomemos

$$x(t) = 5t^2 \qquad (2.2.1)$$

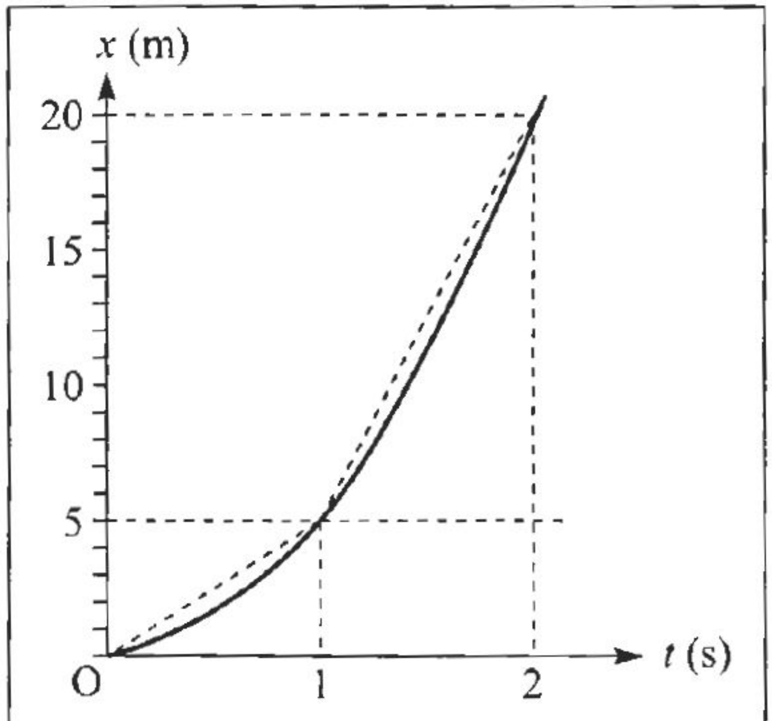


Figura 2.6 Velocidade média na queda livre.

Qual é a velocidade instantânea para $t = 1$ s? Com centro no instante t = 1 s, calculemos a velocidade média (2.1.5) a partir de instantes anteriores e para instantes posteriores, tomando $\Delta t = 1$ s, 0,1 s, 0,01 s .

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_{0\to1} &= \frac{x(1)-x(0)}{1-0} = \frac{5-0}{1-0} = 5 \text{ m/s} \\ \bar{v}_{1\to2} &= \frac{x(2)-x(1)}{2-1} = \frac{20-5}{2-1} = 15 \text{ m/s} \end{aligned}\right\} \Delta t = 1 \text{ s}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_{0,9\to1} &= \frac{x(1)-x(0,9)}{1-0,9} = \frac{5,00-4,05}{1-0,9} = 9,5 \text{ m/s} \\ \bar{v}_{1\to1,1} &= \frac{x(1,1)-x(1)}{1,1-1} = \frac{6,05-5,00}{1,1-1} = 10,5 \text{ m/s} \end{aligned}\right\} \Delta t = 0,1 \text{ s}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_{0,99\to1} &= \frac{x(1)-x(0,99)}{1-0,99} = \frac{5,0000-4,9005}{1,00-0,99} = 9,95 \text{ m/s} \\ \bar{v}_{1\to1,01} &= \frac{x(1,01)-x(1)}{1,01-1,00} = \frac{5,1005-5,0000}{1,01-1,00} = 10,05 \text{ m/s} \end{aligned}\right\} \Delta t = 0,01 \text{ s}$$

Para uma função x(t), o limite

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=1} = 10 \qquad \text{(em m / s)}$$

A velocidade instantânea $v(t)$ num instante t qualquer, num movimento descrito por $x = x(t)$, é dada por

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt}} \qquad (2.2.5)$$

2.3 — O problema inverso

Vimos como, conhecendo a "lei horária" de um movimento, ou seja, a função $x = x(t)$, é possível calcular a velocidade instantânea $v(t)$ no decurso do movimento: basta tomar dx/dt. Assim, por exemplo, para a lei horária (2.2.3), a velocidade é dada pela (2.2.4).

Freqüentemente temos de resolver o problema inverso: conhecendo a velocidade instantânea $v(t)$ entre um dado instante inicial t_1, e um instante final t_2, calcular o espaço percorrido entre estes dois instantes, ou seja, $x(t_2) - x(t_1)$. Poderíamos pensar num filme do painel de instrumentos de um automóvel que mostrasse simultaneamente o velocímetro e um relógio, permitindo traçar o gráfico de $v \times t$ entre t_1 e t_2 (tomamos sempre $t_2 > t_1$).

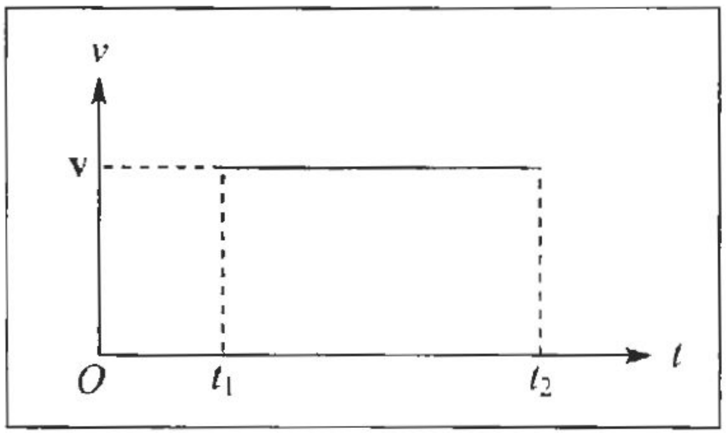


Figura 2.9 Espaço percorrido como área.

Se o movimento for uniforme, como na (2.1.4), velocidade instantânea e velocidade média se confundem, $v = \overline{v}$ = constante, e o gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas (Fig. 2.9). Pela definição de velocidade média, o espaço percorrido entre t_1 e t_2 é:

$$\Delta t_{t_1 \to t_2} = x(t_2) - x(t_1) = \overline{v}_{t_1 \to t_2} \Delta t = \overline{v}_{t_1 \to t_2}(t_2 - t_1) = \overline{v}(t_2 - t_1) = v(t_2 - t_1) \quad (2.3.1)$$

Delta x, o livro está errado.

$$\Delta x_{t_1 \to t_1'} = x(t_1') - x(t_1) = \bar{v}_{t_1 \to t_1'} \Delta t_1 \approx v(t_1) \Delta t_1$$
$$\Delta x_{t_1' \to t_2'} = x(t_2') - x(t_1') = \bar{v}_{t_1' \to t_2'} \Delta t_2 \approx v(t_1') \Delta t_2$$
$$\Delta x_{t_2' \to t_3'} = x(t_3') - x(t_2') = \bar{v}_{t_2' \to t_3'} \Delta t_3 \approx v(t_2') \Delta t_3$$

Somando membro a membro estas 3 relações, obtemos o deslocamento total entre t_1 e t_3':

$$x(t_3') - x(t_1) \approx v(t_1)\Delta t_1 + v(t_1')\Delta t_2 + v(t_2')\Delta t_3$$

e é claro que, se prosseguirmos até t_2, obteremos a soma das contribuições de todos os subintervalos em que $[t_1, t_2]$ foi dividido:

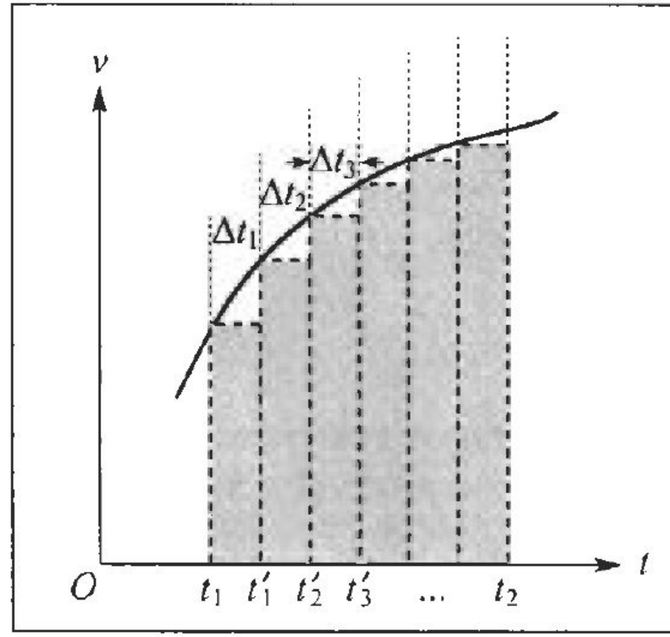


Figura 2.11 Divisão em subintervalos.

$$x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_i v(t_i')\Delta t_i' \qquad \textbf{(2.3.2)}$$

A soma (2.3.2) se aproxima tanto mais do resultado exato quanto menores forem as subdivisões $\Delta t_i'$. Logo, no limite em que os $\Delta t_i'$ tendem a zero, devemos obter:

$$x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t_1' \to 0} \sum_i v(t_i')\Delta t_i' = \begin{array}{l}\text{Área entre a curva } v \times t \\ \text{e o eixo } Ot\text{, de } t_1 \text{ a } t_2\end{array} \tag{2.3.3}$$

O limite (2.3.3) é chamado de *integral definida de* $v(t)$ *entre os extremos* t_1 e t_2, é representado pela notação

$$\lim_{\Delta t_1' \to 0} \sum_i v(t_i')\Delta t_i' = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \tag{2.3.4}$$

Como aplicação, consideremos um movimento cuja velocidade $v(t)$ é dada pela (2.2.4):

$$v(t) = 2at + b \tag{2.3.5}$$

A área a calcular neste caso é o trapézio sombreado na Fig. 2.12.

$$\frac{dx}{dt} = 2\,at + b \tag{2.2.4}$$

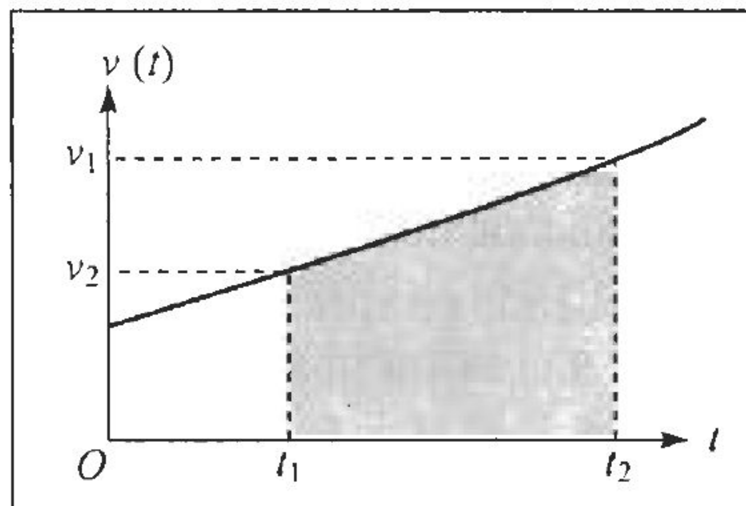


Figura 2.12 Exemplo de integração.

$$\text{Sejam } \begin{cases} v(t_1) = v_1 = 2\,at_1 + b \\ v(t_2) = v_2 = 2\,at_2 + b \end{cases}$$

Temos então, pela (2.3.3), $x(t_2) - x(t_1)$ = Área do trapézio = Semi-soma das bases × Altura = $\frac{1}{2}(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)$ o que, comparando com a (2.1.5), implica que, neste movimento,

$$\overline{v}_{t_1 \to t_2} = \frac{1}{2}[v(t_1) + v(t_2)] \tag{2.3.6}$$

ou seja, que a velocidade média num intervalo é a média aritmética das velocidades nos extremos do intervalo. Substituindo na (2.3.6) os valores de $v(t_1)$ e $v(t_2)$, vem

$$\overline{v}_{t_1 \to t_2} = a(t_2 + t_1) + b$$

o que dá

$$x(t_2) - x(t_1) = a(t_2^2 - t_1^2) + b(t_2 - t_1) \tag{2.3.7}$$

que coincide com o resultado obtido a partir da lei horária (2.2.3) (e dá o valor da integral definida (2.3.4) quando $v(t)$ é dado pela (2.3.5)).

A (2.3.7) pode ser aplicada, em particular, tomando para t_1 o instante inicial $t_1 = 0$, e para t_2 um instante genérico t. Chamando $x(0) = c$ (valor inicial de x), a (2.3.7) dá então:

$$x(t) = x(0) + at^2 + bt = at^2 + bt + c \tag{2.3.8}$$

ou seja, este processo de "integração" nos permitiu recuperar a lei horária (2.2.3) a partir da expressão (2.2.4) da velocidade e do valor inicial de x.

Matematicamente, a (2.2.4) se chama uma *equação diferencial* para a função incógnita x(t) (porque a derivada da função incógnita aparece na equação). Passamos da (2.2.4) à (2.3.8) integrando a equação diferencial com a *condição inicial* $x(0) = c$.

$$\frac{dx}{dt} = 2\,at + b \tag{2.2.4}$$

Aceleração

A aceleração média pode geralmente ser variável durante o movimento, e considerações análogas às da Seção 2.2 levam-nos a definir a *aceleração instantânea* $a(t)$ num instante t por (cf. (2.2.2) e (2.2.5))

$$\boxed{a(t) = \lim_{\Delta t 0}\left[\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt}} \tag{2.4.2}$$

ou seja, a *aceleração instantânea é a derivada em relação ao tempo da velocidade instantânea.*

Substituindo $v(t)$ na (2.4.2) pela (2.2.5), obtemos

$$\boxed{a(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}} \tag{2.4.3}$$

onde introduzimos a definição de *derivada segunda* de x em relação a t, indicada pela notação d^2x/dt^2.

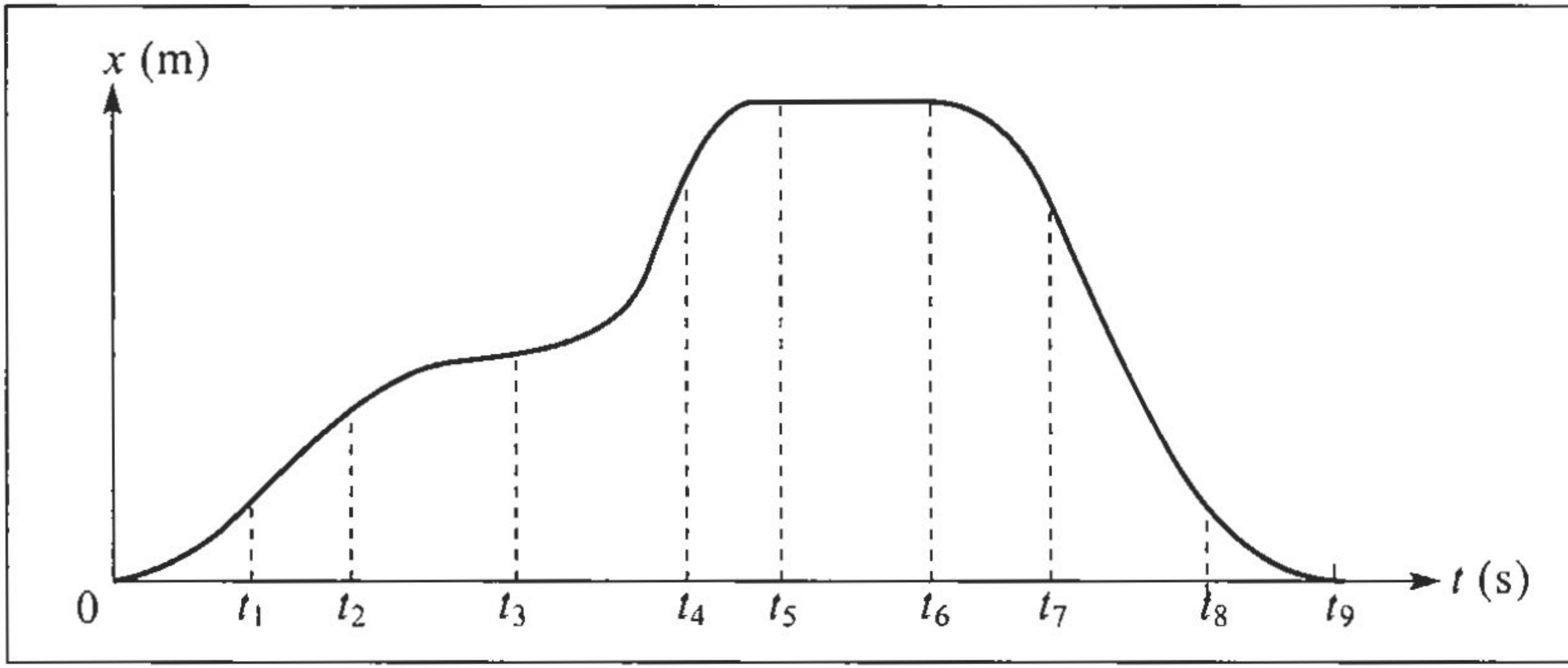


Figura 2.13 Posição em função do tempo.

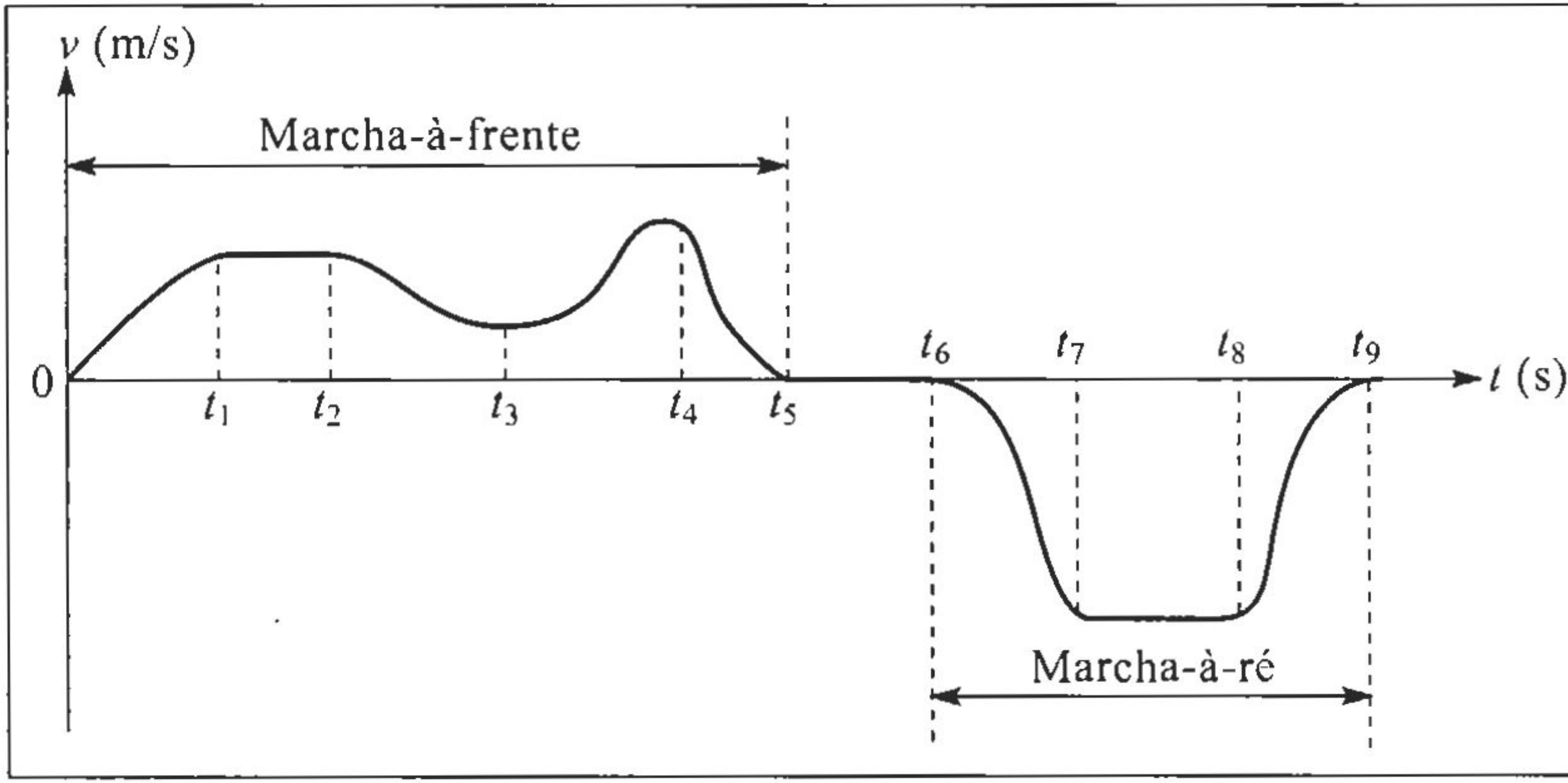


Figura 2.14 Velocidade em função do tempo.

O gráfico da aceleração instantânea se obtém de forma análoga do gráfico $v \times t$:

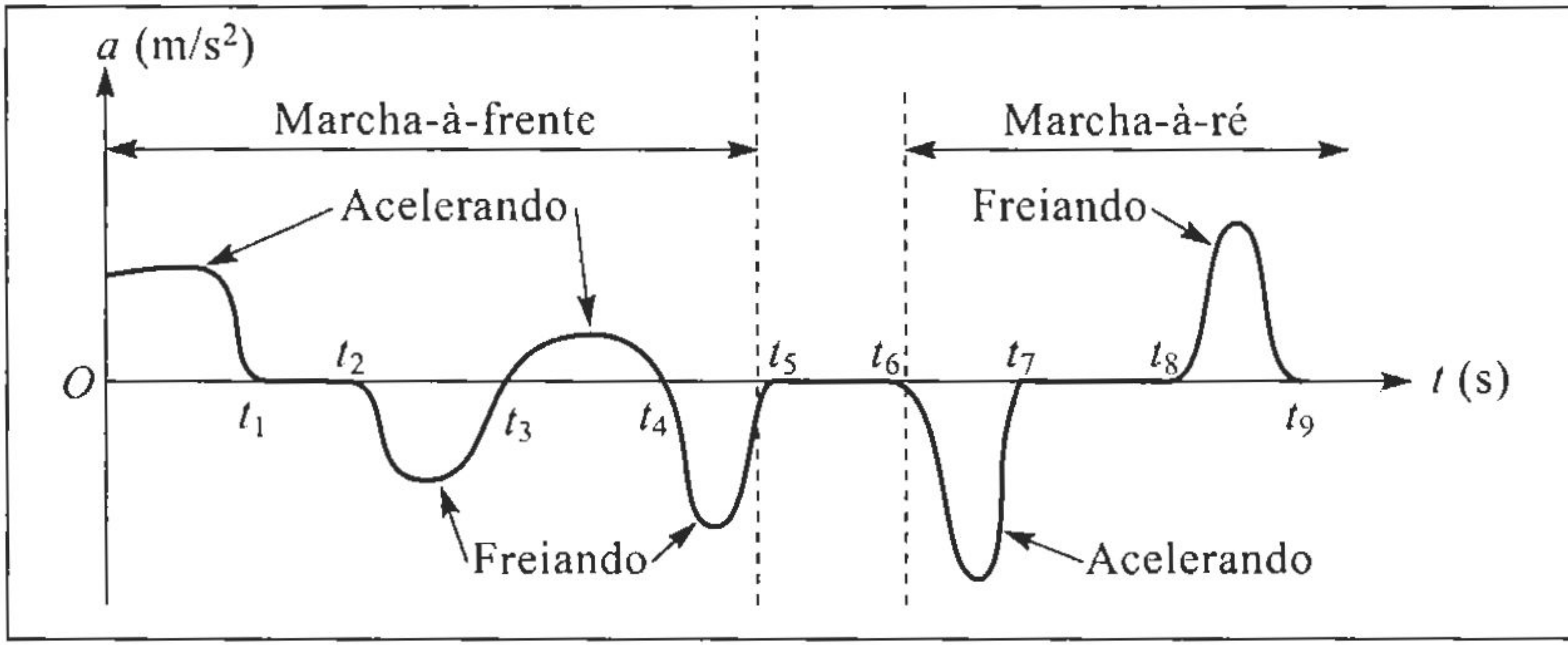


Figura 2.15 Aceleração em função do tempo.

2.5 — Movimento retilíneo uniformemente acelerado

Um movimento retilíneo chama-se *uniformemente acelerado* quando a aceleração instantânea é constante (independente do tempo):

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = a = \text{ constante}} \tag{2.5.1}$$

Podemos usar as técnicas de solução do "problema inverso" (Seção 2.3) para determinar a lei horária de um movimento uniformemente acelerado.

Para isto, consideremos o movimento durante um intervalo de tempo $[t_0, t]$, onde t_0 é o "instante inicial" (freqüentemente se toma $t_0 = 0$).

A (2.4.4) dá:

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a\, dt = a(t - t_0) \tag{2.5.2}$$

que é a área do retângulo hachurado na Fig. 2.16 (compare com a (2.3.1)).

O valor

$$\boxed{v(t_0) = v_0} \qquad \textbf{(2.5.3)}$$

da velocidade no instante inicial chama-se *velocidade inicial*. A (2.5.2) dá então

$$\boxed{v(t) = v_0 + a(t - t_0)} \qquad \textbf{(2.5.4)}$$

mostrando que a velocidade é uma função linear do tempo no movimento uniformemente acelerado. Esta

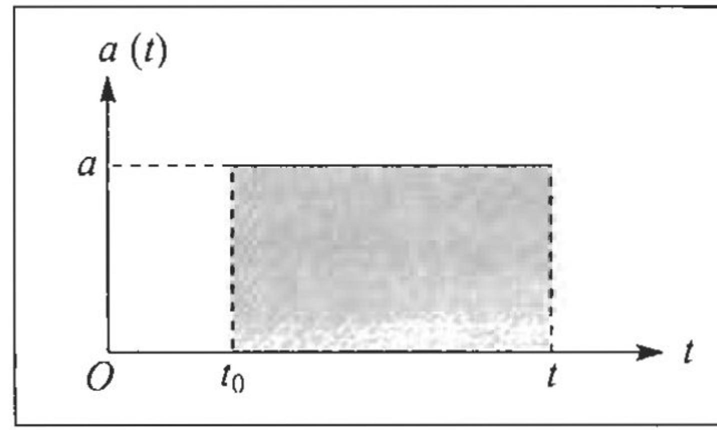


Figura 2.16 Integração da aceleração.

Poderíamos obter a lei horária simplesmente adaptando a (2.3.7) à notação da (2.5.4) (em particular, $2a$ na (2.3.5) corresponde a a na (2.5.4)), mas é instrutivo recalcular o resultado de forma um pouco diferente. Pelas (2.3.3) e (2.3.4),

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt' \qquad \textbf{(2.5.5)}$$

onde chamamos de t' a variável de integração (veja a discussão após a (2.3.4)) para evitar confusão com t, o extremo superior da integral. A área do trapézio, conforme mostra a Fig. 2.17, pode também ser calculada como a soma da área do retângulo sombreado, que é $v_0\,(t - t_0)$, com a área do triângulo sombreado, que é

$$\frac{1}{2}a(t - t_0)\cdot(t - t_0)$$

ou seja

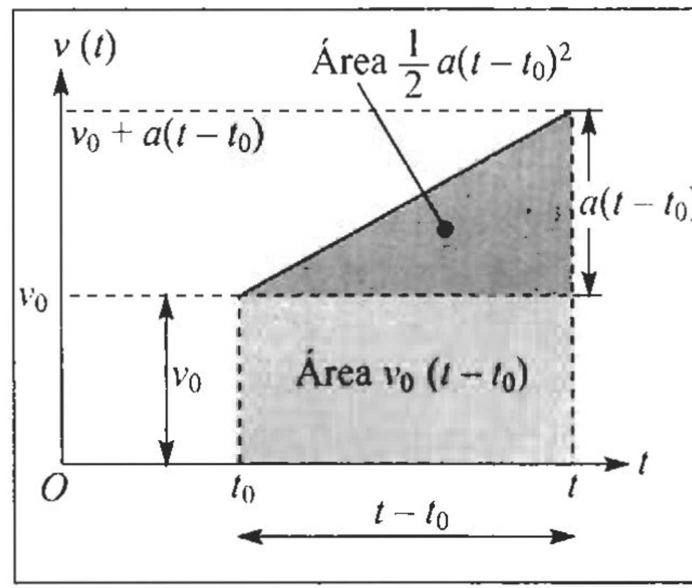


Figura 2.17 Integração da velocidade.

$$x(t) - x(t_0) = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \qquad \textbf{(2.5.6)}$$

Analogamente à (2.5.3), definimos

$$\boxed{x(t_0) = x_0} \qquad \textbf{(2.5.7)}$$

como a *posição inicial*. A (2.5.6) dá então finalmente a *lei horária do movimento retilíneo uniformemente acelerado*,

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2} \qquad \textbf{(2.5.8)}$$

em função dos valores iniciais x_0 e v_0 da posição e da velocidade no instante inicial t_0.

Do ponto de vista matemático, a passagem da (2.5.1) à (2.5.8) corresponde à "integração" da equação diferencial de 2.ª ordem (2.5.1) para a função incógnita $x(t)$ (de 2.ª ordem porque entra a derivada segunda d^2x/dt^2), com as condições iniciais (2.5.3) e (2.5.7). O gráfico $x \times t$ de um movimento uniformemente acelerado é uma parábola.

Freqüentemente interessa também exprimir a velocidade no movimento uniformemente acelerado em função da posição x (em lugar do tempo t). Para obter esta expressão, basta substituir a (2.5.4) na (2.5.8), eliminando $t - t_0$:

$$t - t_0 = \frac{v - v_0}{a} \left\{ x - x_0 = v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{a}{2} \frac{(v - v_0)^2}{a^2} = \right.$$

$$= \frac{v - v_0}{a} \left(v_0 + \frac{v}{2} - \frac{v_0}{2} \right) = \frac{(v - v_0)(v + v_0)}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

ou seja,

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)} \tag{2.5.9}$$

que é a expressão procurada.

Algoritmo de Euler

E quando não soubermos a solução analítica?

$$\Delta t_{t_1 \to t_2} = x(t_2) - x(t_1) = \overline{v}_{t_1 \to t_2} \Delta t = \overline{v}_{t_1 \to t_2}(t_2 - t_1) = \overline{v}(t_2 - t_1) = v(t_2 - t_1) \quad \textbf{(2.3.1)}$$

Delta x, o livro está errado.

dx/dt = v

Aproximação por diferenças finitas: dx = x(t2) – x(t1)

x(t2) – x(t1) = v * dt

x(t2) = x(t1) + v * dt

Exercício

Implemente em python a solução da equação diferencial dx/dt = v(t) dada por:

$$v(t) = 2at + b \tag{2.3.5}$$

Compare com a solução analítica.

jupyter Movimento-1D (unsaved changes)

File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help Python [default]

Markdown CellToolbar

Método de Euler para solução de EDOs

O método de Euler é uma forma de resolver numericamente uma equação diferencial ordinária. Assumem-se conhecidas a derivada de uma função que se quer encontrar ("resolver") e um valor inicial da equação a ser integrada. Por exemplo, no caso do movimento uniformemente acelerado:

$$a = \text{constante}, b = \text{constante}$$

$$v(t) = x'(t) = dx(t)/dt = 2 * a * t + b$$

,

$$x(0) = 0$$

A ideia do método de Euler é substituir a derivada por uma aproximação de Taylor, desprezando-se os termos maiores que segunda ordem. Isto é:

$$x'(t) \sim \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Se denotarmos os valores de $x(t)$ por x_t, isto é, ao invés da notação de função, usarmos a notação com índices, e assumirmos que os valores de t só podem ser números inteiros (portanto Δt é no mínimo 1, o valor $x(t + \Delta t)$ pode ser escrito como x_1, para $t = 0$; x_2, para $t = 1$ e assim por diante.

Desta maneira, o exemplo poderia ser escrito assim (note que já estamos assumindo $\Delta t = 1$: