CAPÍTULO 15 EXERCÍCIO 13

Suponha que o intervalo de integração $[a,b]$ está dividido em subintervalos iguais de tamanho h cada, de modo que $r = (b-a)/h$ é par.

Seja R_1 o resultado de aplicar o método trapezoidal composto com passo de tamanho $2h$ e R_2 o resultado de aplicar o mesmo método com passo de tamanho h. Mostre que uma aplicação da extrapolação de Richardson da forma

$$S = \frac{4R_2 - R_1}{3}$$

Produz o método de Simpson Composto.

Relembrando o método trapezoidal composto

$$\sum_{i=1}^{r} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{r} \frac{h}{2}\left(f(t_{i-1}) + f(t_i)\right) = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{r-1} f(t_i) + f(b)\right)$$

Temos

$$R_1 = h\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}-1} f(t_{2i}) + f(b)\right)$$, podemos fazer isso pois r é par

$$R_2 = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{r-1} f(t_i) + f(b)\right)$$

$$S = \frac{4R_2 - R_1}{3} = \frac{1}{3}\left[4\frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{r-1} f(t_i) + f(b)\right) - h\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}-1} f(t_{2i}) + f(b)\right)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[2f(a) + 4\sum_{i=1}^{r-1} f(t_i) + 2f(b) - f(a) - 2\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}-1} f(t_{2i}) - f(b)\right] = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{r-1} f(t_i) - 2\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}-1} f(t_{2i}) + f(b)\right]$$

Notemos que

$$\sum_{i=1}^{r-1} f(t_i) = \sum_{i=1}^{\frac{r}{2}-1} f(t_{2i}) + \sum_{i=0}^{\frac{r}{2}-1} f(t_{2i+1})$$, portanto

$$S = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{\frac{r}{2}-1} f(t_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}-1} f(t_{2i}) + f(b)\right] = \frac{h}{3}\left[f(a) + \sum_{i=1}^{\frac{r}{2}} f(t_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{\frac{r}{2}-1} f(t_{2i}) + f(b)\right]$$

Agora percebamos que

$t_i = a + ih \Rightarrow$

$$t_{2i-1} = a + (2i-1)h = a + 2ih - h = \frac{2a + 4ih - 2h}{2} = \frac{a + 2ih + a + (2i-2)h}{2} = \frac{t_{2i} + t_{2(i-1)}}{2}$$

Então

$$S = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}} f\left(\frac{t_{2i} + t_{2(i-1)}}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}-1} f(t_{2i}) + f(b)\right]$$

Mas essa é a expressão para o método de Simpson composto para o passo de tamanho $2h$, para mudar, troquemos a variável para $\frac{h}{2}$, notando que

$t_{2i} = a + 2ih$, quando tomamos $\frac{h}{2}$ vira $a + ih = t_i$

e que $\frac{r}{2}$ vira r ao tomar $\frac{h}{2}$.

Portanto, obtemos

$$S = \frac{h}{2.3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{r} f\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{r-1} f(t_i) + f(b)\right]$$

que é o método de Simpson composto QED ☺