Lógica Aula 10

Leliane Nunes de Barros

2018

leliane@ime.usp.br

Definição de CNF:

• Um literal é um átomo p, ou a negação de um átomo $\neg p$.

Definição de CNF:

- Um literal é um átomo p, ou a negação de um átomo $\neg p$.
- A fórmula φ está em forma normal conjuntiva (CNF) se ela for da forma $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, para algum $n \leq 1$, sendo cada φ_i uma disjunção de literais (cláusula), para todo $i \in \{1, 2, ..., N\}$

Definição de CNF:

- Um literal é um átomo p, ou a negação de um átomo $\neg p$.
- A fórmula φ está em forma normal conjuntiva (CNF) se ela for da forma φ₁ ∧ φ₂ ∧ . . . ∧ φ_n, para algum n ≤ 1, sendo cada φ_i uma disjunção de literais (cláusula), para todo i ∈ {1, 2, ..., N}

Nota: Algumas vezes incluimos o caso n=0, que por convenção representa o termo T

Definição de CNF:

- Um literal é um átomo p, ou a negação de um átomo $\neg p$.
- A fórmula φ está em forma normal conjuntiva (CNF) se ela for da forma φ₁ ∧ φ₂ ∧ . . . ∧ φ_n, para algum n ≤ 1, sendo cada φ_i uma disjunção de literais (cláusula), para todo i ∈ {1, 2, ..., N}

Nota: Algumas vezes incluimos o caso n=0, que por convenção representa o termo T

Exemplos de CNFs:

- $(\neg q \lor p \lor r) \land (\neg p \lor r) \land q$
- $(p \lor r) \land (\neg p \lor r) \land (p \lor \neg r)$

Definição de CNF:

- Um literal é um átomo p, ou a negação de um átomo $\neg p$.
- A fórmula φ está em forma normal conjuntiva (CNF) se ela for da forma φ₁ ∧ φ₂ ∧ . . . ∧ φ_n, para algum n ≤ 1, sendo cada φ_i uma disjunção de literais (cláusula), para todo i ∈ {1, 2, ..., N}

Nota: Algumas vezes incluimos o caso n=0, que por convenção representa o termo T

Exemplos de CNFs:

- $(\neg q \lor p \lor r) \land (\neg p \lor r) \land q$
- $(p \lor r) \land (\neg p \lor r) \land (p \lor \neg r)$

Exemplo de fórmula que não está em CNF:

•
$$(\neg(p \lor q) \lor r) \land (q \lor r)$$

Fórmulas do tipo CNF produzem provas de validade mais simples. Por exemplo, se quisermos provar a validade de uma CNF $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$:

- basta provar $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (pela semântica do \land).

Fórmulas do tipo CNF produzem provas de validade mais simples. Por exemplo, se quisermos provar a validade de uma CNF $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$:

- basta provar $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (pela semântica do ∧).
- uma disjunção de literais $L_1 \vee L_2 \vee ... L_n$ é válida sse existe i,j com $1 \leq i$ e $j \leq n$ tal que L_i é $\neg L_j$.

Fórmulas do tipo CNF produzem provas de validade mais simples. Por exemplo, se quisermos provar a validade de uma CNF $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$:

- basta provar $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (pela semântica do ∧).
- uma disjunção de literais $L_1 \vee L_2 \vee ... L_n$ é válida sse existe i,j com $1 \leq i$ e $j \leq n$ tal que L_i é $\neg L_j$.

Resumo:

 Uma fórmula em CNF é válida sse todas as suas cláusulas são válidas.

Fórmulas do tipo CNF produzem provas de validade mais simples. Por exemplo, se quisermos provar a validade de uma CNF $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$:

- basta provar $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (pela semântica do ∧).
- uma disjunção de literais $L_1 \vee L_2 \vee ... L_n$ é válida sse existe i,j com $1 \leq i$ e $j \leq n$ tal que L_i é $\neg L_j$.

Resumo:

- 1. Uma fórmula em CNF é válida sse todas as suas cláusulas são válidas.
- 2. Uma cláusula é válida sse ela contém um átomo e sua negação.

Toda fórmula da LP pode ser transformada em CNF!

1. Eliminar \rightarrow : $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \lor \psi$

- 1. Eliminar \rightarrow : $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \lor \psi$
- 2. Mover ¬ para dentro: ¬ $(\varphi \land \psi) \equiv \neg \varphi \lor \neg \psi$ e ¬ $(\varphi \lor \psi) \equiv \neg \varphi \land \neg \psi$

- 1. Eliminar \rightarrow : $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \lor \psi$
- 2. Mover ¬ para dentro: ¬ $(\varphi \land \psi) \equiv \neg \varphi \lor \neg \psi$ e ¬ $(\varphi \lor \psi) \equiv \neg \varphi \land \neg \psi$
- 3. Eliminar dupla negação: $\neg\neg\varphi\equiv\varphi$

- 1. Eliminar \rightarrow : $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \lor \psi$
- 2. Mover ¬ para dentro: ¬ $(\varphi \land \psi) \equiv \neg \varphi \lor \neg \psi$ e ¬ $(\varphi \lor \psi) \equiv \neg \varphi \land \neg \psi$
- 3. Eliminar dupla negação: $\neg\neg\varphi\equiv\varphi$
- 4. Distribuir \vee e \wedge : $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

- 1. Eliminar \rightarrow : $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \lor \psi$
- 2. Mover ¬ para dentro: ¬ $(\varphi \land \psi) \equiv \neg \varphi \lor \neg \psi$ e ¬ $(\varphi \lor \psi) \equiv \neg \varphi \land \neg \psi$
- 3. Eliminar dupla negação: $\neg\neg\varphi\equiv\varphi$
- 4. Distribuir \vee e \wedge : $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

Toda fórmula da LP pode ser transformada em CNF!

- 1. Eliminar \rightarrow : $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \lor \psi$
- 2. Mover ¬ para dentro: ¬ $(\varphi \land \psi) \equiv \neg \varphi \lor \neg \psi$ e ¬ $(\varphi \lor \psi) \equiv \neg \varphi \land \neg \psi$
- 3. Eliminar dupla negação: $\neg\neg\varphi\equiv\varphi$
- 4. Distribuir \vee e \wedge : $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

Exemplo:
$$(\neg p \land q) \rightarrow (p \land (r \rightarrow q))$$

4

Por que CNF?

1. Toda fórmula pode ser transformada em CNF.

Por que CNF?

- 1. Toda fórmula pode ser transformada em CNF.
- 2. Teorema: $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ sse $\varphi_1 \land \dots \land \varphi_n \land \neg \psi$ não é SAT.

"Dada uma fórmula, decidir se ela é satisfatível."

"Dada uma fórmula, decidir se ela é satisfatível."

• SAT é NP-completo [Cook 1971]

"Dada uma fórmula, decidir se ela é satisfatível."

- SAT é NP-completo [Cook 1971]
- Competição desde 2002: http://www.satcompetition.org/

"Dada uma fórmula, decidir se ela é satisfatível."

- SAT é NP-completo [Cook 1971]
- Competição desde 2002: http://www.satcompetition.org/

"Dada uma fórmula, decidir se ela é satisfatível."

- SAT é NP-completo [Cook 1971]
- Competição desde 2002: http://www.satcompetition.org/

Valididade, equivalência e derivação podem ser reduzidos a uma problema SAT.

- não existem algoritmos eficientes mas ...
- vários métodos alternativos tentam ser o mais eficiente possível!!

NaiveSAT

Entrada: φ , em CNF

Saída: v, se $v(\varphi) = T$; "não", caso contrário

Para **toda valoração** v sobre os átomos de φ faça:

se v(C) = T então devolva v

Devolva "não"

NaiveSAT

Entrada: φ , em CNF

Saída: v, se $v(\varphi) = T$; "não", caso contrário

Para **toda valoração** v sobre os átomos de φ faça:

se
$$v(C) = T$$
 então devolva v

Devolva "não"

- Método simples e ineficiente para CNFs grandes
- Trabalha no nível semântico (buscando por valorações)

Método alternativo de reescrita: Resolução

Única regra:

$$\frac{\phi \vee p \qquad \psi \vee \neg p}{\phi \vee \psi}$$

Método alternativo de reescrita: Resolução

Única regra:

$$\frac{\phi \vee p \qquad \psi \vee \neg p}{\phi \vee \psi}$$

- Essa regra generaliza as regras da dedução natural: Modus Ponens (→_e), Modus Tolens e Eliminação da Negação (¬_e).
- A cláusula vazia pode ser vista como uma disjunção de nenhum disjunto, o que equivale à constante Falso (⊥)

Método alternativo de reescrita: Resolução

Única regra:

$$\frac{\phi \vee p \qquad \psi \vee \neg p}{\phi \vee \psi}$$

- Essa regra generaliza as regras da dedução natural: Modus Ponens (→_e), Modus Tolens e Eliminação da Negação (¬_e).
- A cláusula vazia pode ser vista como uma disjunção de nenhum disjunto, o que equivale à constante Falso (⊥)

Raciocínio por contradição:

1. Para provar $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\vdash\psi$, transforme $\chi=\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\wedge\neg\psi$ em CNF.

- 1. Para provar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n \land \neg \psi$ em CNF.
- 2. Seja *C* o conjunto de cláusulas obtido.

- 1. Para provar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n \land \neg \psi$ em CNF.
- 2. Seja C o conjunto de cláusulas obtido.
- 3. Aplique resolução ao conjunto quantas vezes for possível.

- 1. Para provar $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \land \dots \land \varphi_n \land \neg \psi$ em CNF.
- 2. Seja C o conjunto de cláusulas obtido.
- 3. Aplique resolução ao conjunto quantas vezes for possível.
- 4. Se em algum momento gerar uma cláusula vazia, devolva T (χ não é SAT e portanto $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash \psi$ é válido)

- 1. Para provar $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \land \dots \land \varphi_n \land \neg \psi$ em CNF.
- 2. Seja C o conjunto de cláusulas obtido.
- 3. Aplique resolução ao conjunto quantas vezes for possível.
- 4. Se em algum momento gerar uma cláusula vazia, devolva T (χ não é SAT e portanto $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash \psi$ é válido)
- 5. Senão, devolva $F(\chi \in SAT)$.

- 1. Para provar $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \land \dots \land \varphi_n \land \neg \psi$ em CNF.
- 2. Seja C o conjunto de cláusulas obtido.
- 3. Aplique resolução ao conjunto quantas vezes for possível.
- 4. Se em algum momento gerar uma cláusula vazia, devolva T (χ não é SAT e portanto $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash \psi$ é válido)
- 5. Senão, devolva $F(\chi \in SAT)$.

Raciocínio por contradição:

- 1. Para provar $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, transforme $\chi = \varphi_1 \land \dots \land \varphi_n \land \neg \psi$ em CNF.
- 2. Seja C o conjunto de cláusulas obtido.
- 3. Aplique resolução ao conjunto quantas vezes for possível.
- 4. Se em algum momento gerar uma cláusula vazia, devolva T (χ não é SAT e portanto $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash \psi$ é válido)
- 5. Senão, devolva $F(\chi \in SAT)$.

Exemplo:

•
$$p \rightarrow q, r \rightarrow s \vdash (p \lor r) \rightarrow (q \lor s)$$

Exemplo passo a passo (transformando em CNF)

$$p \to q, r \to s \vdash \left(p \lor r\right) \to \left(q \lor s\right)$$

1. Transformar $\chi = (p \to q) \land (r \to s) \land \neg ((p \lor r) \to (q \lor s))$ em CNF:

$$\left(p \to q\right) \land \left(r \to s\right) \land \neg \left(\left(p \lor r\right) \to \left(q \lor s\right)\right) \equiv$$

Exemplo passo a passo (transformando em CNF)

$$p \to q, r \to s \vdash \left(p \lor r\right) \to \left(q \lor s\right)$$

1. Transformar $\chi = (p \to q) \land (r \to s) \land \neg ((p \lor r) \to (q \lor s))$ em CNF:

$$(p \rightarrow q) \land (r \rightarrow s) \land \neg ((p \lor r) \rightarrow (q \lor s)) \equiv$$

(eliminando implicações)

$$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land \neg (\neg (p \lor r) \lor (q \lor s)) \equiv$$

Exemplo passo a passo (transformando em CNF)

$$p \to q, r \to s \vdash (p \lor r) \to (q \lor s)$$

1. Transformar $\chi = (p \to q) \land (r \to s) \land \neg ((p \lor r) \to (q \lor s))$ em CNF:

$$(p \to q) \land (r \to s) \land \neg ((p \lor r) \to (q \lor s)) \equiv$$

(eliminando implicações)

$$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land \neg (\neg (p \lor r) \lor (q \lor s)) \equiv$$

(movendo negações para dentro)

$$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land (\neg \neg (p \lor r) \land \neg (q \lor s)) \equiv$$

$$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land \neg \neg (p \lor r) \land (\neg q \land \neg s) \equiv$$

Exemplo passo a passo (transformando em CNF)

$$p \to q, r \to s \vdash (p \lor r) \to (q \lor s)$$

1. Transformar $\chi = (p \to q) \land (r \to s) \land \neg ((p \lor r) \to (q \lor s))$ em CNF:

$$(p \rightarrow q) \land (r \rightarrow s) \land \neg ((p \lor r) \rightarrow (q \lor s)) \equiv$$

(eliminando implicações)

$$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land \neg (\neg (p \lor r) \lor (q \lor s)) \equiv$$

(movendo negações para dentro)

$$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land (\neg \neg (p \lor r) \land \neg (q \lor s)) \equiv$$

$$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land \neg \neg (p \lor r) \land (\neg q \land \neg s) \equiv$$

(eliminando a dupla negação)

$$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land (p \lor r) \land \neg q \land \neg s$$

Exemplo passo a passo (resolução)

2.
$$C = \{\neg p \lor q, \neg r \lor s, p \lor r, \neg q, \neg s\}$$

Exemplo passo a passo (resolução)

2.
$$C = \{\neg p \lor q, \neg r \lor s, p \lor r, \neg q, \neg s\}$$

- 3. Aplicar resolução:
- 1. $\neg p \lor q$
- 2. $\neg r \lor s$
- 3. $p \lor r$
- 4. *¬q*
- 5. *¬s*
- 6. $\neg p$ (1,4)
- 7. r(3,6)
- 8. $\neg r$ (2,5)
- 9. [] (7,8)

Exemplo passo a passo

4. Como geramos a cláusula vazia, a fórmula χ não é satisfatível.

Isso quer dizer que o sequente

$$p \to q, r \to s \vdash \left(p \lor r\right) \to \left(q \lor s\right)$$

É válido.

Davis & Putnam, 1960; Davis, Longemann & Loveland, 1962

 Evita construir valorações (modelos) completas eliminado cláusulas e literais sempre que possível.

Davis & Putnam, 1960; Davis, Longemann & Loveland, 1962

- Evita construir valorações (modelos) completas eliminado cláusulas e literais sempre que possível.
- Símbolo puro: Aparece só positivo ou só negativo. Exemplos:

$$(p \vee \neg r) \wedge (p \vee s) \wedge (t \vee \neg s)$$
$$(\neg r \vee q) \wedge (s \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (n \vee q)$$

Davis & Putnam, 1960; Davis, Longemann & Loveland, 1962

- Evita construir valorações (modelos) completas eliminado cláusulas e literais sempre que possível.
- Símbolo puro: Aparece só positivo ou só negativo. Exemplos:

$$(p \lor \neg r) \land (p \lor s) \land (t \lor \neg s)$$

$$(\neg r \lor q) \land (s \lor p) \land (\neg p \lor \neg r) \land (n \lor q)$$

• Propagação Unitária: Preferência por cláusulas com um só literal.

$$(\neg p \lor r) \land (\neg s) \land (t \lor s \lor p)$$

Davis & Putnam, 1960; Davis, Longemann & Loveland, 1962

- Evita construir valorações (modelos) completas eliminado cláusulas e literais sempre que possível.
- Símbolo puro: Aparece só positivo ou só negativo. Exemplos:

$$(p \lor \neg r) \land (p \lor s) \land (t \lor \neg s)$$

$$(\neg r \lor q) \land (s \lor p) \land (\neg p \lor \neg r) \land (n \lor q)$$

• Propagação Unitária: Preferência por cláusulas com um só literal.

$$(\neg p \lor r) \land (\neg s) \land (t \lor s \lor p)$$

Davis & Putnam, 1960; Davis, Longemann & Loveland, 1962

- Evita construir valorações (modelos) completas eliminado cláusulas e literais sempre que possível.
- Símbolo puro: Aparece só positivo ou só negativo. Exemplos:

$$(p \lor \neg r) \land (p \lor s) \land (t \lor \neg s)$$
$$(\neg r \lor q) \land (s \lor p) \land (\neg p \lor \neg r) \land (n \lor q)$$

• Propagação Unitária: Preferência por cláusulas com um só literal.

$$(\neg p \lor r) \land (\neg s) \land (t \lor s \lor p) \equiv (\neg p \lor r) \land (t \lor p)$$

1. Começa com modelo vazio.

- 1. Começa com modelo vazio.
- 2. Se alguma cláusula é F, devolve F.

- 1. Começa com modelo vazio.
- 2. Se alguma cláusula é F, devolve F.
- 3. Se todas as cláusulas são T, devolve T.

- 1. Começa com modelo vazio.
- 2. Se alguma cláusula é F, devolve F.
- 3. Se todas as cláusulas são T, devolve T.
- 4. Remove todas as cláusulas com símbolo puro.

- 1. Começa com modelo vazio.
- 2. Se alguma cláusula é F, devolve F.
- 3. Se todas as cláusulas são T, devolve T.
- 4. Remove todas as cláusulas com símbolo puro.
- 5. Quando tem cláusulas unitárias, acrescenta ao modelo.

- 1. Começa com modelo vazio.
- 2. Se alguma cláusula é F, devolve F.
- 3. Se todas as cláusulas são T, devolve T.
- 4. Remove todas as cláusulas com símbolo puro.
- 5. Quando tem cláusulas unitárias, acrescenta ao modelo.
- Se não, escolhe literal / e acrescenta ao modelo. (ponto de retrocesso)

- 1. Começa com modelo vazio.
- 2. Se alguma cláusula é F, devolve F.
- 3. Se todas as cláusulas são T, devolve T.
- 4. Remove todas as cláusulas com símbolo puro.
- 5. Quando tem cláusulas unitárias, acrescenta ao modelo.
- Se não, escolhe literal / e acrescenta ao modelo. (ponto de retrocesso)
- 7. Apaga as cláusulas contendo 1.

- 1. Começa com modelo vazio.
- 2. Se alguma cláusula é F, devolve F.
- 3. Se todas as cláusulas são T, devolve T.
- 4. Remove todas as cláusulas com símbolo puro.
- 5. Quando tem cláusulas unitárias, acrescenta ao modelo.
- Se não, escolhe literal / e acrescenta ao modelo. (ponto de retrocesso)
- 7. Apaga as cláusulas contendo 1.
- 8. Apaga o oposto de / das outras cláusulas.

- 1. Começa com modelo vazio.
- 2. Se alguma cláusula é F, devolve F.
- 3. Se todas as cláusulas são T, devolve T.
- 4. Remove todas as cláusulas com símbolo puro.
- 5. Quando tem cláusulas unitárias, acrescenta ao modelo.
- Se não, escolhe literal / e acrescenta ao modelo. (ponto de retrocesso)
- 7. Apaga as cláusulas contendo 1.
- 8. Apaga o oposto de / das outras cláusulas.
- Repete até achar contradição ou não ter mais escolhas (conjunto de cláusulas vazio).

- 1. Começa com modelo vazio.
- 2. Se alguma cláusula é F, devolve F.
- 3. Se todas as cláusulas são T, devolve T.
- 4. Remove todas as cláusulas com símbolo puro.
- 5. Quando tem cláusulas unitárias, acrescenta ao modelo.
- Se não, escolhe literal / e acrescenta ao modelo. (ponto de retrocesso)
- 7. Apaga as cláusulas contendo 1.
- 8. Apaga o oposto de / das outras cláusulas.
- 9. Repete até achar contradição ou não ter mais escolhas (conjunto de cláusulas vazio).
- Se o modelo tem contradição, a fórmula não é T. Se não, é uma valoração.

- 1. Começa com modelo vazio.
- 2. Se alguma cláusula é F, devolve F.
- 3. Se todas as cláusulas são T, devolve T.
- 4. Remove todas as cláusulas com símbolo puro.
- 5. Quando tem cláusulas unitárias, acrescenta ao modelo.
- Se não, escolhe literal / e acrescenta ao modelo. (ponto de retrocesso)
- 7. Apaga as cláusulas contendo 1.
- 8. Apaga o oposto de / das outras cláusulas.
- 9. Repete até achar contradição ou não ter mais escolhas (conjunto de cláusulas vazio).
- Se o modelo tem contradição, a fórmula não é T. Se não, é uma valoração.

- 1. Começa com modelo vazio.
- 2. Se alguma cláusula é F, devolve F.
- 3. Se todas as cláusulas são T, devolve T.
- 4. Remove todas as cláusulas com símbolo puro.
- 5. Quando tem cláusulas unitárias, acrescenta ao modelo.
- Se não, escolhe literal / e acrescenta ao modelo. (ponto de retrocesso)
- 7. Apaga as cláusulas contendo 1.
- 8. Apaga o oposto de / das outras cláusulas.
- 9. Repete até achar contradição ou não ter mais escolhas (conjunto de cláusulas vazio).
- Se o modelo tem contradição, a fórmula não é T. Se não, é uma valoração.