MAT0265 - Grupos

Prova 1

Pedro Gigeck Freire

10737136

Questão 4

Seja H um subgrupo normal de um grupo G.

Dizemos que H é um subgrupo normal maximal de G se não existe subgrupo normal N de G tal que $H \subsetneq N \subsetneq G$.

a) Mostre que H é subgrupo normal maximal de G se, e somente se, G/H não tem subgrupos normais não triviais.

[somente se] (H subgrupo normal maximal $\Rightarrow$ G/H só tem subgrupos normais triviais)

~~Seja $N \triangleleft G/H$~~ .

Resgatamos o contexto do teorema da correspondência:

$S = \{\text{Subgrupos de } G \text{ contendo } H\}$

$\bar{S} = \{\text{Subgrupos de } G/H\}$

$\varphi : S \to \bar{S}$

$H' \mapsto \varphi(H') = H'/H$

Seja $S_N = \{\text{Subgrupos normais de } G \text{ contendo } H\}$

Como H é maximal, então $S_N = \{H, G\}$

Mas, pelo item (ii) do teorema, temos que, para algum $H_1 \in S$:

$\varphi(H_1) \triangleleft \varphi(G) \Rightarrow H_1 \triangleleft G$, isto é

$\varphi(H_1) \triangleleft G/H \Rightarrow H_1 \triangleleft G \Rightarrow H_1 \in S_N$

Logo, os subgrupos normais de G/H são aqueles gerados por subgrupos normais de S, que são apenas 2.

Portanto se $N \triangleleft G/H$, então

$$N \triangleleft G/H \Rightarrow N \in \varphi(S_N) \Rightarrow N \in \{\varphi(H), \varphi(G)\} \Rightarrow$$

$$N \in \{H/H, G/H\}.$$

Isso prova que G/H tem apenas subgrupos normais triviais. $\square$

[se] (G/H não tem subgrupos normais não triviais $\Rightarrow$ H é normal maximal)

A prova é bastante análoga a anterior.

Seja $\overline{S_N} = \{$subgrupos Normais de $G/H\}$

Temos que $\overline{S_N} = \{e_{G/H}, G/H\} = \{H/H, G/H\}$ pois G/H só tem subgrupos normais triviais.

Pelo item (ii) do teorema da correspondencia, temos que

$$N \triangleleft G \Rightarrow \varphi(N) \triangleleft \varphi(G) \Rightarrow \varphi(N) \triangleleft G/N \Rightarrow \varphi(N) \in \overline{S_N}$$

$$\Rightarrow \varphi(N) \in \{H/H, G/H\}$$

Mas φ é bijeção, então

$N \in \{H, G\}$. Portanto não existe nenhum subgrupo normal de G com $H \subsetneq N \subsetneq G$. Então H é maximal $\blacksquare$

b) Sejam H, K dois subgrupos normais maximais distintos de G.

Mostre que $HK = G$ e que $H \cap K$ é subgrupo normal maximal de H e de K

- Vamos mostrar que $HK \triangleleft G$.

Sejam $g \in G$, $hk \in HK$ quaisquer.

Então $ghkg^{-1} = gh(g^{-1}g)kg^{-1} = ghg^{-1}gkg^{-1} \in HK$

pois $ghg^{-1} \in H$ e $gkg^{-1} \in K$.

Portanto HK é normal.

Lembremos que $H \subsetneq HK \subseteq G$.

Como H é normal maximal e $HK \triangleleft G$, então ou $H = HK$ ou $HK = G$.

Mas $H \neq HK$, pois $H \neq K$.

Logo, $HK = G$.

Agora, pelo 2° teorema do Isomorfismo, temos que

$H \cap K \triangleleft H$ e $H/H \cap K \cong HK/K$

Mas $HK = G$, então

$H/H \cap K \cong G/H$.

Como H é maximal, então G/H não tem subgrupos não triviais (item a).

Mas então $H/H \cap K$ também não tem subgrupos normais não triviias (por causa do isomorfismo). Portanto $H \cap K$ é maximal de H (pelo item a).

Para $H \cap K$ normal maximal de K a prova é análoga.