MAC 0315

Otimização Linear

Pedro Gigeck Freire

10737136

Lista 1

① Dada uma matriz $m \times n$ A e um conjunto convexo $C \in \mathbb{R}^n$

Mostre que o conjunto Ax, $x \in C$ é convexo.

Seja $D = \{Ax : x \in C\}$ o conjunto que queremos provar que é convexo.

Sejam $(Ax), (Ay)$ dois elementos quaisquer de D.

Seja $\alpha \in [0,1]$ qualquer.

Então

$$\alpha(Ax) + (1-\alpha)(Ay) =$$

$$A(\alpha x) + A(1-\alpha)y = \quad \text{(Pela linearidade da multiplicação de matrizes)}$$

$$A(\alpha x + (1-\alpha)y) \quad \text{(Pela distributividade)}$$

Mas C é convexo e $x, y \in C$, portanto $(\alpha x + (1-\alpha)y) \in C$.

Logo $A(\alpha x + (1-\alpha)y) \in D$, então

$$\alpha(Ax) + (1-\alpha)(Ay) \in D.$$

Portanto, D é convexo.

② Se substituirmos a palavra convexo por aberto no item 1 ele continua válido? Se sim, prove porque, se não de um exemplo no qual ele não valeria.

Não. O conjunto $Ax, x \in C$ não é aberto.

Podemos fornecer o contra exemplo onde $A = 0$ (matriz nula)

Assim, o conjunto $Ax, x \in C$ é o conjunto unitário $\{\vec{0}\}$, pois a matriz nula multiplicada com qualquer vetor resulta no vetor nulo.

Vamos mostrar que o conjunto $\{\vec{0}\}$ não é aberto.

Suponha, por absurdo, que $\{\vec{0}\}$ é aberto, então o seu complementar $\mathbb{R}^m \setminus \{\vec{0}\}$ é fechado.

Porém, se tomarmos a sequência $x_n \in (\mathbb{R}^m \setminus \{\vec{0}\})$ como sendo a sequência de vetores $\left(\frac{1}{n}, 0, 0, \dots, 0\right)$.

Sabemos que $1/n$ converge para 0, portanto x_n converge para $\vec{0}$, mas $\vec{0} \notin (\mathbb{R}^m \setminus \{\vec{0}\})$, portanto $(\mathbb{R}^m \setminus \{\vec{0}\})$ não é fechado, absurdo.

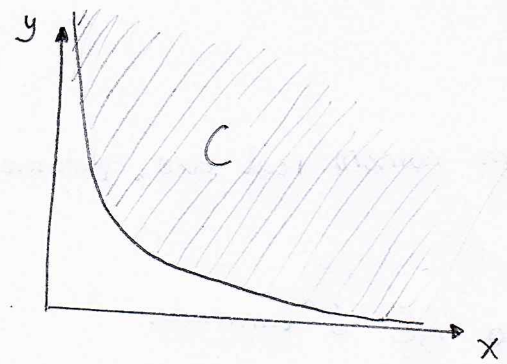
Portanto $Ax, x \in C$ não é aberto.

③ Se substituirmos a palavra convexo por fechado no item 1, ele continua válido? Se sim prove porque, se não, de um exemplo no qual ele não valeria.

Não vale.

Podemos tomar o contra exemplo em $\mathbb{R}^2$, com

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x > 0 \text{ e } y \geq 1/x \right\}$$



O conjunto C é fechado.

Agora tomamos a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = A$. (Projeção no eixo y)

Temos que

$$Ax,\ x \in C = (y \in \mathbb{R} : y \geq 1/x \text{ para } x > 0)$$

$$= (y \in \mathbb{R} : y > 0) = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Portanto o conjunto Ax é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, portanto não é fechado, finalizando o contra exemplo.

④ Se substituirmos a palavra convexo por compacto no item 1 ele continua válido? Se sim, prove porque, se não de um exemplo no qual ele não valeria.

Sim, vale.

Seja C um conjunto compacto (fechado e limitado)

Seja A uma matriz, vamos mostrar que $AC = \{Ax : x \in C\}$ é compacto.

- Vamos mostrar, primeiro, que AC é limitado.

Seja $Ax \in AC$.

Sabemos, pela definisao de norma de matriz, que

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$$

Como C é limitado, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\|x\| < L$ para toda $x \in C$.

Então

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \|x\| \leqslant \|A\| L$$

Como a matriz A está fixada, então $\|A\|$ é um número real fixo, podemos tomar $L' = \|A\| L$ e obter

$\|Ax\| \leqslant L'$ para todo $Ax \in AC$. Portanto AC é limitado.

- Agora, vamos mostrar que AC é fechado.

Seja Ax_n uma sequência convergente em AC.

Temos que a sequência converge para um elemento de AC, pois

$$\lim_{n \to \infty} (Ax)_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pois } A \text{ é uma transformação linear} \\ \text{que preserva o limite}}}{=} A \lim_{n \to \infty} (x_n) \in AC$$

, pois $\lim x_n \in C$, já que C é compacto.

Portanto AC é fechado e limitado, logo, compacto.

5 Formule e resolva um problema linear para o seguinte problema extraído de (...):

Sejam

x_t a quantidade de Acres de trigo (wheat)

x_c a quantidade de Acres de centeio (rye)

- Cada acre de trigo produz 500 de lucro e cada acre de centeio produz 300 de lucro.

Então lucro $= 500x_T + 300x_C$

- Cada acre de trigo custa 200 para plantar e cada acre de centeio custa 100 para plantar. E o limite é 1200.

Então restrisao_custo $= 200x_T + 100x_C \leq 1200$

- Cada acre de trigo leva 1 hora para plantar e cada acre de centeio leva 2 horas para plantar. E o limite é de 12 horas.

- Então restrição_horas $= 1x_T + 2x_C \leq 12$

Por fim, precisamos plantar no mínimo 7 e no máximo 10 acres.

Então restrisão_espaso $= x_T + x_C \geq 7$ e $x_T + x_C \leq 10$

Assim podemos traduzir essas informasões para o seguinte problema

Maximize lucro

Sujeito a restrisao_custo
restrição_horas
restrição_espaso

Ou seja:

Maximize $500x_T + 300x_C$

Sujeito a
$$x_T + x_C \geq 7$$
$$x_T + x_C \leq 10$$
$$200x_T + 100x_C \leq 1200$$
$$x_T + 2x_C \leq 12$$
$$x_T, x_C \geq 0.$$

Refinando um pouco mais, podemos escrever esse problema com vetores e matrizes:

$$\text{Maximize} \quad (500 \quad 300)\begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix}$$

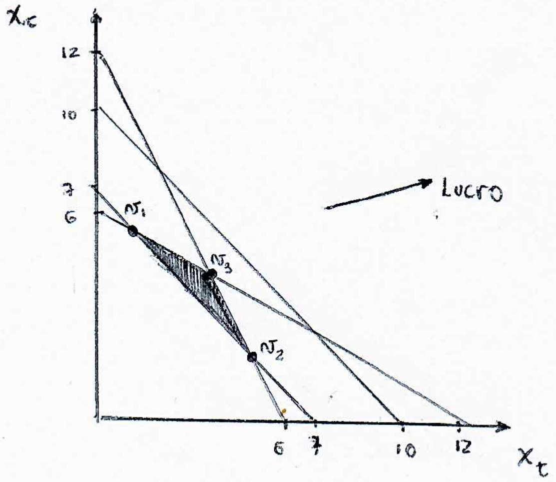
Sujeito a

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 200 & 100 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ x_c \end{pmatrix} \leq \begin{bmatrix} -7 \\ 10 \\ 1200 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$x_t, x_c \geq 0$$

Agora que formulamos o problema, podemos resolver usando o método geométrico

Vamos ter uma intuição desenhando a região factível:



Temos 3 vértices na região factível, que são as interseções entre as retas dadas pelas desigualdades

São eles:

$$v_1 = (2, 5)$$
$$v_2 = (5, 2)$$
$$v_3 = (4, 4)$$

Pelo teorema visto em aula, sabemos que a solução ótima é um vértice, então calculamos o lucro nos 3 vértices e obtemos:

$\text{Lucro}(v_1) = 2500$

$\text{Lucro}(v_2) = 3100$

$\text{Lucro}(v_3) = 3200$

Portanto, o lucro máximo será 3200 e a solução ótima é plantar 4 acres de trigo e 4 acres de centeio.

⑥ Formule e resolva um problema linear para o seguinte problema (...):

Seja x_A a quantidade (toneladas) de minério da fonte A e x_B a quantidade da fonte B.

Existe a restrição de custo: o minério da fonte A custa 20 e da fonte B custa 10 e a soma precisa ser menor que 80, ou seja:

$$20x_A + 10x_B \leq 80$$

Existe a restrição de quantidade. no mínimo 3 toneladas por dia, ou seja

$$x_A + x_B \geq 3$$

Existe a restrição da proporção: Quantidade de B não excede o dobro da quantidade de A, ou seja

$$x_B \leq 2x_A \iff x_B - 2x_A \leq 0 \iff 2x_A - x_B \geq 0$$

Queremos maximizar a quantidade de ouro produzida, sendo que uma tonelada da fonte A produz 2 onças (oz.) de ouro e uma tonelada da fonte B produz 3 onças.

Então montamos o seguinte problema:

Maximize $2x_A + 3x_B$

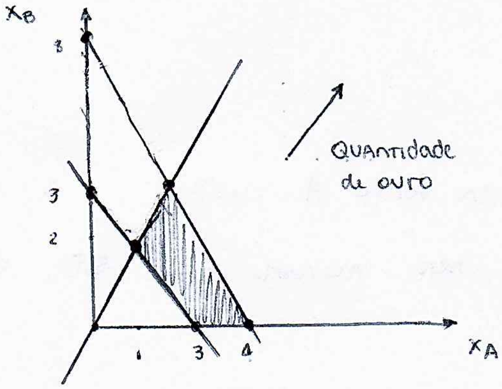
Sujeito a $x_A + x_B \geq 3$

$20x_A + 10x_B \leq 80$

$2x_A - x_B \geq 0$

$x_A, x_B \geq 0$

Usando, mais uma vez o método geométrico, podemos desenhar a região factível:



Pelo teorema visto em aula, sabemos que pelo menos um vértice é uma solução ótima.

Temos 4 vértices: (3,0), (4,0), (1,2), (2,4)

Calculando a quantidade de ouro produzida em cada vértice, descobrimos que o valor ótimo é 16 onças de ouro, alcançado no ponto (2,4), ou seja, devem ser processadas 2 toneladas da fonte A e 4 toneladas da fonte B.

7) Formule e resolva um problema linear para o seguinte problema (...):

Nesse problema, queremos minimizar o custo da logística.

Sejam

x_1 = cópias de Novato para São Francisco

x_2 = cópias de Novato para Sacramento.

x_3 = cópias de Lodi para São Francisco.

x_4 = cópias de Lodi para Sacramento.

Temos restrições do pedido (600 para São Francisco, 400 para Sacramento) e restrisões de estoque (700 de Novato e 800 de Lodi)

Então montamos o seguinte problema

$$\text{Minimize} \quad 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 4x_4$$

$$\text{Sujeito a} \quad \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 600 \\ x_2 + x_4 &= 400 \\ x_1 + x_2 &\leq 700 \\ x_3 + x_4 &\leq 800 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Porém, podemos eliminar duas variáveis, tomando

$$x_3 = 600 - x_1$$

$$x_4 = 400 - x_2$$

De modo que o custo se transforma em

$$5x_1 + 10x_2 + 15(600 - x_1) + 4(400 - x_2) =$$

$$-10x_1 + 6x_2 + 10600$$

E a ultima restrição se transforma em

$$(600 - x_1) + (400 - x_2) \leq 800 \Rightarrow$$

$$-x_1 - x_2 \leq -200 \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 \geq 200$$

Portanto, construímos o seguinte problema:

Minimize $-10x_1 + 6x_2 + 10600$

Sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 700$$

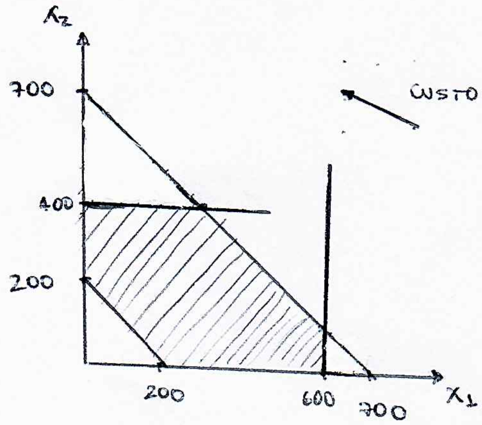
$$x_1 + x_2 \geq 200$$

$$x_1 \leq 600$$

$$x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

E podemos resolvê-lo usando o método geométrico



Temos 6 vértices

(200, 0) (350, 400)
(0, 200) (600, 100)
(600, 0)
(0, 400)

E o vértice de custo ótimo é o vértice (600, 0)

Portanto obtemos a solução ótima

$x_1 = 600$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$x_4 = 400$

Então mandamos 600 cópias de Novato para São Francisco e 400 cópias de Lodi para Sacramento, com custo total

$400 \cdot 4 + 600 \cdot 5 = \$4600$

⑧ Resolva o seguinte problema linear usando o método simplex

maximizar $2x + y$

sujeito a

$$2x + 3y \leq 3$$
$$x + 5y \leq 1$$
$$2x + y \leq 4$$
$$4x + y \leq 5$$
$$x, y \geq 0$$

Vamos aplicar as folgas

Maximizar $2x + y$

Sujeito a

$$x_1 = 3 - 2x - 3y$$
$$x_2 = 1 - x - 5y$$
$$x_3 = 4 - 2x - y$$
$$x_4 = 5 - 4x - y$$
$$x_i, x, y \geq 0$$

Conseguimos aumentar x em no máximo 1, na folga dada por x_2

Maximizar $2x + y$

Sujeito a

$$x_1 = 3 - 2x - 3y$$
$$x = 1 - x_2 - 5y$$
$$x_3 = 4 - 2x - y$$
$$x_4 = 5 - 4x - y$$
$$x_i, x, y \geq 0$$

Substituimos x na funsão objetivo:

Maximizar $\quad 2 - 2x_2 - 9y$

Sujeito a $\quad x_1 = 3 - 2x - 3y$

$x = 1 - x_2 - 5y$

$x_3 = -2x - y$

$x_4 = 5 - 4x - y$

Portanto o valor máximo que conseguimos é 2, que ocorre com $x_2 = y = 0$

Portanto a solução ótima ocorre com

$x = 1$

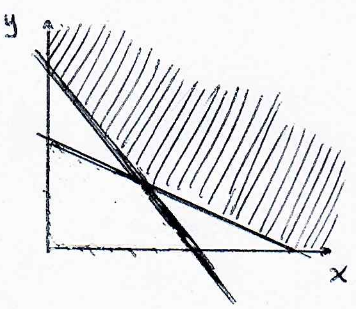
$y = 0$

⑨ Considere o problema linear

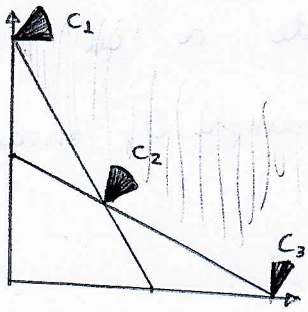
$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & ax + by \\ \text{sujeito a} \quad & 2x + y \geq 6 \\ & x + 2y \geq 6 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Descreva todas as possibilidades para a solução ótima desse problema em função de a e b. Ou seja, divida os possíveis valores de a e b em classes e explique como é a solução ótima em cada classe.

Vamos primeiro ter uma intuição geométrica da região viável



Podemos descrever a solução ótima com base no vetor custo (a b) e nos "cones" dados nos vértices



Se $(a\ b)$ está no cone C_1, então o vértice ótimo é o ponto $(0,6)$

Se $(a\ b)$ está no cone C_2 então o vértice ótimo é o ponto $(2,2)$

Se $(a\ b)$ está no cone C_3 então o vértice ótimo é o ponto $(6,0)$

Se o vetor não está em nenhum dos cones, então o problema é ilimitado.

Mais formalmente:

Se $a < 0$ ou $b < 0$, então o problema é ilimitado.

Se $a > 0$ e $b > 0$, dividimos nos casos

- $0 < \frac{b}{a} \leqslant \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$ (cone C_1)

  Então o vértice ótimo é $(0,6)$

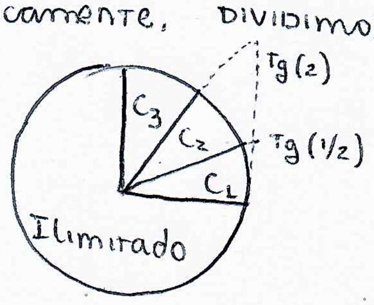
- $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{b}{a} \leqslant \operatorname{arctg}(2)$ (cone C_2)

  Então o vértice ótimo é $(2,2)$

- $\operatorname{arctg}(2) < \frac{b}{a}$ (cone C_3)

  Então o vértice ótimo é $(6,0)$

Graficamente, dividimos da seguinte forma:



Por fim, devemos apenas analisar o caso onde a ou b é 0

Se $a = b = 0$, então o valor do custo é sempre 0, então todo ponto factível é ótimo

Se $a = 0$ e $b < 0$ ou $b = 0$ e $a < 0$.

Então o problema é ilimitado.

Se $a = 0$ e $b > 0$, então todo ponto factível da forma $(x, 0)$ é ótimo. (pontos no eixo x)

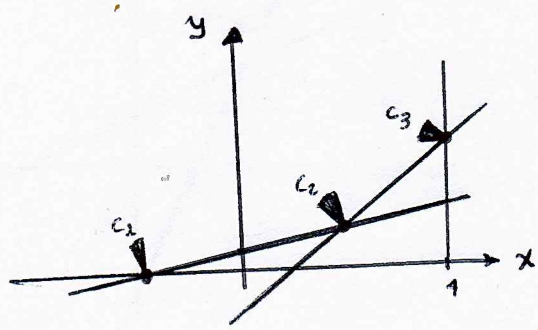
Se $a > 0$ e $b = 0$, então todo ponto factível da forma $(0, y)$ é ótimo (pontos do eixo y).

Com isso analisamos todos os casos

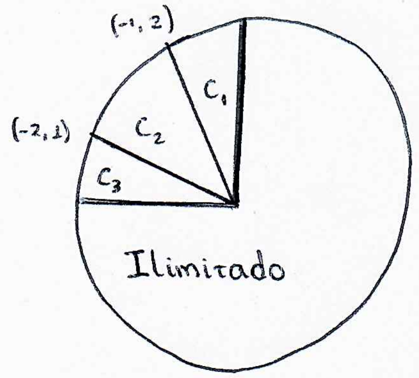
(10) Repita a análise do item anterior para o problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & ax + by \\ \text{sujeito a} \quad & -2x + y \geq -2 \\ & -x + 2y \geq 2 \\ & y \geq 0 \\ & -x \geq -4 \end{aligned}$$

Vamos, mais uma vez, adquirir uma intuição geométrica



E. Dividimos os casos com base nos cones



Se $a > 0$ ou $b < 0$, então o problema é ilimitado.

Se $a < 0$ e $b > 0$, dividimos nos seguintes casos

- $0 < \left|\frac{b}{a}\right| \leq \operatorname{arctg}(1/2)$ (cone C_3)

  Então o vértice ótimo é a solução $(4, 6)$;

- $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) < \left|\frac{b}{a}\right| \leq \operatorname{arctg}(2)$ (cone C_2)

  Então o vértice ótimo é $(2, 2)$;

- $\operatorname{arctg}(2) < \left|\frac{b}{a}\right|$ (cone C_1)

  Então o vértice ótimo é $(-2, 0)$.