PROBABILIDADE I

PEDRO GIGECK FREIRE 10737136 09/06/2021

PROVINHA 07

TERMO DE COMPROMETIMENTO

Eu me comprometo a manter uma conduta ética e adequada durante a realizaçao desta tarefa. Exemplos de conduta inadequada são fornecer e/ou receber auxilio de outras pessoas, consultar material não autorizado (que não consta na página do curso ou na literatura recomendada), entre outras.

Pedro Gigeck Freire

---

n doadores

teste com prob p, $0 < p < 1$ de resultar positivo, testes independentes

amostras de tamanho $k \leq n$ (amostra combinada)

↳ amostra contaminada se 1 das k amostras for contaminada

m inteiro, $m = n/k$ divisão dos doadores

a) Qual a prob que o teste para uma amostra combinada de k pessoas resulte positivo?

Seja $X_i = \begin{cases} 0 & \text{se doador } i \text{ não está contaminado} \\ 1 & \text{se doador } i \text{ está contaminado} \end{cases}$. Note que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$

Seja Y = número de doadores contaminados na amostra combinada

Note que $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$

Então $Y \sim \text{Binomial}(k, p)$

Portanto, a amostra combinada resultaria em um teste positivo se $Y \geq 1$

então a probabilidade do teste resultar positivo é

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 1) = 1 - \binom{k}{1} p^1 q^0 = \boxed{1 - kp}$$

b) Qual é o número esperado de testes necessários para os n doadores?

Seja $N = \begin{cases} 1, & \text{se a amostra combinada resultar negativo} \\ k+1, & \text{se a amostra combinada resultar positivo} \end{cases}$

a v.a. que descreve o número de testes para a amostra combinada

Como o resultado do teste de cada doador é independente dos demais, então as amostras combinadas também serão independentes

Seja M = número de testes para os n doadores

Pela independência, teremos que $M = mN$

Portanto o valor esperado será

$$E(M) = E(mN) = mE(N) \quad \text{(pela linearidade)}$$

Vamos condicionar N em função da variável $Y = \begin{cases} 0 & \text{se a amostra comb. for neg} \\ 1 & \text{se a amostra comb. for pos} \end{cases}$

$$E(N) = E(E(N|Y)) = 0 . E(N|Y=0) + 1\, E(N|Y=1)$$

$$= E(N|Y=1)$$

$$= (k+1)\, P(Y=1) = (k+1)(1-kp)$$

Portanto

$$E(M) = mE(N) = m(k+1)(1-kp) = \boxed{\frac{n}{k}(k+1)(1-kp)}$$