MAC 0331

Geometria Computacional

Pedro Gigeck Freire

10737136

Lista 6

[4] Descreva o Diagrama de Voronoy e o Grafo de Delayney dos vértices de um polígono regular.

Vamos construir o Diagrama de Voronoy usando os Teoremas da aula 11.

- Os vértices:

"Um ponto q é vértice de $Vor(P)$ sse $C_p(q)$ contém três ou mais pontos de P em sua fronteira"

Então, pegamos os círculos que contém os vértices do polígono na fronteira. Porém, como o polígono é regular, quaisquer 3 pontos definirão o mesmo círculo, que é o círculo circunscrito ao polígono.

Então, $Vor(P)$ tem apenas 1 vértice, o centro do polígono.

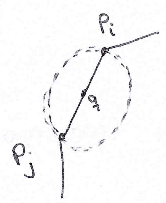
- As arestas

"A reta bissetora entre dois pontos p_i, p_j define uma aresta de $Vor(P)$ sse existe um ponto q nela tq $C_p(q)$ contém p_i, p_j e apenas estes."

Temos que verificar quais pares de pontos satisfazem isso.

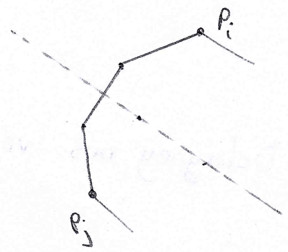
- Pares de pontos adjacentes: ✓

O ponto entre p_i e p_j q é tal que apenas p_i e p_j estão em $C_p(q)$:



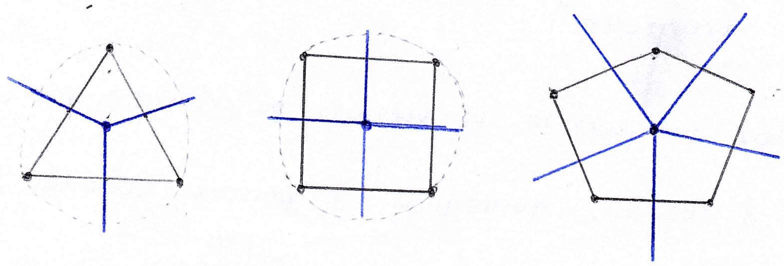
- Pontos não adjacentes: X

Qualquer ponto na reta bissetora define um $C_p(q)$ que inclui algum outro ponto do polígono; pois os outros pontos estão mais próximos da reta que p_i e p_j.



Portanto, tem um único vértice e uma aresta pra cada aresta do polígono (perpendicular)

Por exemplo:



O grafo de Delaunay é bem mais simples. Podemos ver que as células vizinhas em Vor(P) são as que representam os vértices vizinhos no polígono.

Portanto, DG(P) é o próprio polígono. ☺

$\boxed{5}$ Descreva um algoritmo que, dado o grafo de Delauney DG(P) de um conjunto de pontos P, constrói Vor(P). Tente fazer um algoritmo linear.

Como DG(P) é o grafo dual de Vor(P), então devemos encontrar todas as faces de DG(P), construir o círculo que é definido pelos vértices da face e então adicionar o centro do círculo como um vértice de Vor(P) e as arestas da face indicando as arestas de Vor(P)

Consideramos que DG(P) é dado por uma DCEL, com informações sobre as faces

Consideraremos, também, que cada aresta da DCEL sabe de que face ela faz parte. As faces serão identificadas por números, que a ordem que elas aparecem na DCEL.

Então, em mais alto nível, nosso algoritmo fara:

- Para cada face, constroi um circulo
- Adiciona o centro do círculo como um vértice de Vor(P)
- Para cada aresta do DG, adiciona uma aresta entre os vértices que representam as faces dessa aresta.

A ESTRUTURA DE CADA ARESTA DA DCEL será então

```
e {  p1   ▷ Ponto inicial
     p2   ▷ Ponto final
     f    ▷ número da face
     prev ▷ aresta anterior
     prox ▷ aresta posterior
     twin ▷ aresta gemea
}
```

Consideraremos também que uma face f é representada por alguma de suas arestas.

Temos ainda que tratar a face externa separadamente, pois ela será representada por vários vértices indo para o infinito, e não um só vértice.

O número da face externa será 0.

Depois de todas as considerações, vamos ao algoritmo:

```
Voronoy (DG)
    Vor ← {∅, ∅}   // {V, E}
    para f em (DG.faces \ {face_externa}) faça:
        P1 ← f.p1
        P2 ← f.p2
        P3 ← f.prox.p1
```

```
06      c ← circulo (p1, p2, p3)
07      VOR.V ← VOR.V ∪ {c.centro}
08  para e em DG.arestas faça
09      f1 ← e.f
10      se f1 = 0
11          então v1 ← vertice_infinito (e)
12                VOR.V ← VOR.V ∪ {v1}
13          senão v1 ← VOR.V[f1]
14      f2 ← e.twin.f
15      se f2 = 0
16          então v2 ← vertice_infinito (e.twin)
17                VOR.V ← VOR.V ∪ {v2}
18          senão v2 ← VOR.V[f2]
19      VOR.E ← VOR.E ∪ {v1, v2}
20  devolva VOR
```

Recapitulando, nas linhas 01 a 07, adicionamos os vértices de $Vor(P)$. Nas linhas 08 a 20 adicionamos as arestas e os "vértices infinitos", que podem ser representados de alguma maneira artificial.

O primeiro laço consome tempo $O(F)$, onde F é o número de faces de $DG(P)$.

O segundo laço consome tempo $O(E)$, com E número de arestas de $DG(P)$.

Então nosso algoritmo consome tempo $O(F) + O(E)$, pela relação de Euler, $V - E + F = 2$, então nosso algoritmo consome tempo $O(V)$, linear.

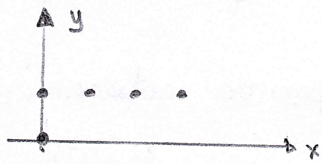
6 Descreva um conjunto P de n pontos, para um n arbitrário, que não contenha 4 pontos cocirculares, tal que o grafo de Delauney tenha um vértice de grau n-1.

Nosso conjunto P será composto de um ponto arbitrário (que podemos colocar na origem) e os outros n-1 pontos distribuidos em uma reta acima da origem:

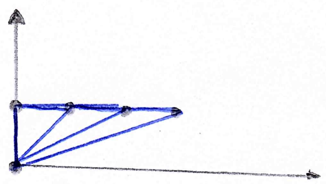
$$P_n = \{(0,0)\} \cup \{(x,1) \mid x \in \{0,1,\dots,n-1\}\}$$

Por exemplo, se $n=5$, então nosso P sera:

$$\{(0,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (2,1),\ (3,1)\}$$



E o grafo de Delauney ficará



Dessa forma, a origem sempre terá grau n-1.

Prova:

Primeiro, sabemos que 3 pontos colineares não podem ser cocirculares, então não há 4 pontos cocirculares.

Agora temos que provar que a origem compartilha uma aresta, no diagrama de Voronoy com todos os outros pontos.

Pelo teorema da aula 19, dois pontos compartilham uma aresta, que é a reta bissetora, sse existe um ponto q nela tq $C_p(q)$ contém p_i, p_j e apenas estes.

Então temos que achar esse ponto q em todas as retas bissetoras entre a origem e os outros pontos.

Seja $p_j = (j, 1)$.

A reta que passa pela origem e por p_j é dada por

$$yj - x = 0$$

A reta bissetora é aquela perpendicular que passa pelo ponto $(j/2, 1/2)$ (depois de umas continhas, chegamos na reta:)

$$r(j):\ 2y + 2xj - j^2 - 1 = 0$$

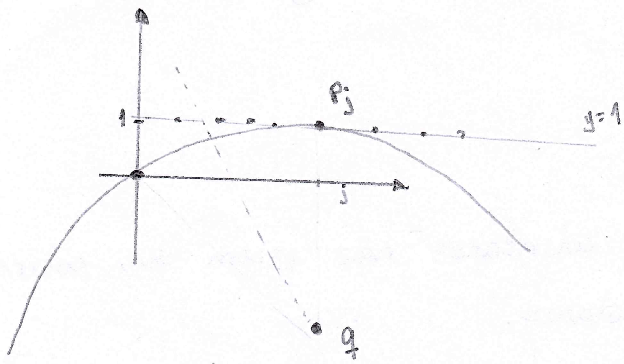
Lema: O ponto $q = \left(j, \frac{1-j^2}{2}\right) \in r(j)$ e $C_p(q)$ contém apenas a origem e p_j.

quando colocamos q na reta, temos

$$2\left(\frac{1-j^2}{2}\right) + 2jj - j^2 - 1 = 1 - j^2 + 2j^2 - j^2 - 1 = 0.$$

De fato, $q \in r(j)$.

Vamos observar visualmente $C_p(q)$:



Aqui, podemos ver que $C_p(q)$ contém a origem e o p_j e nenhum outro ponto, pois a única interseção entre $C_p(q)$ e a reta $y=1$ é o ponto p_j ∎

Portanto, para todo j, existe um $q = \left(j, \frac{1-j^2}{2}\right)$ na reta bissetora entre a origem e p_j e que $C_p(q)$ contém apenas a origem e p_j. Então a origem e p_j compartilham uma aresta em $Vor(P)$, então estão conectados em $DG(P)$.

Com isso, a origem sempre terá grau $n-1$! ∎