MAC105 FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA A COMPUTAÇÃO

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: PEDRO GIGECK FREIRE **Número USP:** 10737136

Assinatura

PEDRO GIGECK FREIRE

Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.

Exercício: E43 **Data:** 23/05/2018

SOLUÇÃO

(i) Analisemos, através da construção das árvores binárias, o comportamento de $\alpha(n)$

n	0	1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	$\boxed{7}$	8	...	14	$\boxed{15}$	16
$\alpha(n)$	0	1	1	$\boxed{2}$	2	2	2	$\boxed{3}$	3	...	3	$\boxed{4}$	4

Assim, podemos perceber uma relação entre α e a altura da árvore correspondente

O valor de α se altera no mesmo ritmo da altura, isto é, $\log_2 n$, porém, percebamos que os valores são ajustados no inteiro anterior ao que o da altura é ajustado, isto é, a função é recolocada 1 unidade para a esquerda. Além disso, subtrai-se um da altura após esse reposicionamento.

Assim, $\alpha(n) = h(n+1) - 1 = \lfloor \log_2 (n+1) \rfloor + 1 - 1 \Rightarrow \boxed{\alpha(n) = \lfloor \log_2 (n+1) \rfloor}$

* Sabe-se que $h(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, conforme visto em aula.

De outra forma, podemos ver esta conclusão pela construção de $\alpha(n)$, pois a cada número acrescentado, "acrescentará-se" um nó interno na mesma altura do último nó interno, por consequencia, um nó externo na altura da árvore. Assim α só se alterará quando todos os nós internos que "cabiam" nessa altura forem adicionados, fazendo que todos os nós externos fiquem na mesma altura, isso ocorre quando $n = 2^k - 1$ para algum k. Chegando na mesma conclusão que anteriormente.

$$\alpha(n) = \lfloor \log_2 (n+1) \rfloor.$$

(ii) A maior profundidade de 1 nó externo é basicamente a altura da árvore da B.B.

Que, conforme provado em sala é $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

então $\boxed{\beta(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1}$

(iii) Queremos provar

$$\lfloor \log_2 (n+1) \rfloor \leqslant \lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \leqslant \lfloor \log_2 (n+1) \rfloor + 1$$

Sabemos que $\lfloor \log_2 n \rfloor \geqslant \log_2 n - 1$. Assim, obtemos:

$$\lfloor \log_2 n \rfloor \leqslant \log_2 n + 1$$

$$\log_2 n - 1 \leqslant \lfloor \log_2 n \rfloor \leqslant \log_2 n + 1 \Rightarrow \boxed{\log_2 n \leqslant \lfloor \log_2 n \rfloor + 1} \; (*)$$

Podemos escrever $\log_2 n = \log_2 (n+1) + \log_2 (n/n+1)$, então, de $(*)$

$$\log_2 (n+1) + \log_2 \left(\frac{n}{n+1}\right) \leqslant \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

Mas, como $n > 0$, temos $\frac{n}{n+1} \leqslant 1$ logo $\log_2 (n/n+1) \leqslant 0$, pois $\log_2 x$ é crescente.

Assim,

$$\log_2 (n+1) + \log_2 (n/n+1) \leqslant \log_2 (n+1) \leqslant \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$, portanto $\alpha(n) \leqslant \beta(n)$.

Agora, vejamos a outra desigualdade

$$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \leqslant \log_2 n + 2 = \log_2 (n+1) + \log_2 \left(\frac{n}{n+1}\right) + 2$$, Porem $\frac{n}{n+1} \in [1/2, 1[$, então $\log_2 \left(\frac{n}{n+1}\right) \in [-1, 0[$

então $\log_2 (n/n+1) + 2 \geqslant 1$

$$\therefore \quad \lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \leqslant \log_2 (n+1) + 1.$$

Segue $\alpha(n) \leqslant \beta(n) \leqslant \alpha(n) + 1$.