**MAC105 FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA A COMPUTAÇÃO**

**FOLHA DE SOLUÇÃO**

**Nome:** Pedro Gigeck Freire **Número USP:** 10737136

*Assinatura*

Pedro Gigeck Freire

***Sua assinatura atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você se compromete a seguir o código de ética da USP em suas atividades acadêmicas, incluindo esta atividade.***

**Exercício:** E49 **Data:** 30/05/2018

---

**SOLUÇÃO**

(i) Vamos provar por indução em $n$.

Base da indução: $n=0$. Temos que $\prod_{0=k}^{0} F_k = F_0 = 3$, e, de fato, $F_0 = F_1 - 2 \Rightarrow 3 = 5 - 2$. Assim, a afirmação vale para $n=0$.

Agora, suponha que sabemos que a afirmação vale para $n-1$, $n>0$. Vamos provar que a igualdade segue para $n$.

Temos, para $n-1$:

$\prod_{0=k}^{n-1} F_k = F_n - 2$ Multiplicando $F_n$ em ambos os lados: $\prod_{0=k}^{n-1} F_k \cdot F_n = F_n(F_n - 2) \Rightarrow$

$\prod_{0=k}^{n} F_k = F_n^2 - 2F_n$. Substituindo $F_n$ por $2^{2^n}+1$: $\prod_{0=k}^{n} = (2^{2^n}+1)^2 - 2(2^{2^n}+1) \Rightarrow$

$\prod_{0=k}^{n} F_k = 2^{2^{n+1}} + \cancel{2 \cdot 2^{2^n}} + 1 - \cancel{2 \cdot 2^{2^n}} - 2 = 2^{2^{n+1}} + 1 - 2$. Percebamos que $2^{2^{n+1}} + 1 = F_{n+1}$. Assim, de fato:

$\boxed{\prod_{0=k}^{n-1} F_k = F_n - 2 \Rightarrow \prod_{0=k}^{n} F_k = F_{n+1} - 2}$. Isto completa o passo de indução.

O resultado segue por indução.

(ii) Vamos considerar o algoritmo de Euclides para calcular o mdc.

$$mdc(A,B) = \begin{cases} A, & se\ B=0 \\ mdc(B,r) & se\ B \neq 0 \end{cases} \quad \text{sendo } A = qB + r,\ 0 \leq r \leq |B|$$

Portanto

$$mdc(F_k, F_l) = mdc(F_l, r), \text{ pois } F_k, F_l \geq 3$$

Vamos analisar r:

$F_k = qF_l + r$ • Sabemos que $F_k = \prod_{0=i}^{k-1} F_i + 2$, conforme provado em (i).

Caso $k > l$, temos que $F_l$ está contido no produtório $\prod_{0=i}^{k-1} F_i$; assim, segue que $q = \dfrac{\prod_{0=i}^{k-1} F_i}{F_l}$ e $r = 2$.

Caso $l > k$, temos que $mdc(F_l, F_k) = mdc(F_k, F_l)$ (pois $q = 0$ e $r = F_k$) e o resultado é análogo.

Assim, temos que $mdc(F_l, F_k) = mdc(F_k, F_l) = mdc(F_l, 2) = mdc(F_k, 2)$

Agora, percebamos que $F_k$ é sempre ímpar para qualquer $k$, portanto

$F_k = q \cdot 2 + 1$ e $1$ é o resto da divisão.

Aplicando agora mais uma iteração do algoritmo de Euclides, temos

$$mdc(F_k, F_l) = mdc(F_l, 2) = mdc(2, 1) = 1.$$

De fato, $mdc(F_k, F_l) = 1$ para quaisquer $k$ e $l$ naturais.

(iii) Podemos dizer, por (ii) que todos os $F_n$ são coprimos entre si, mas não podemos comprovar que são primos.

Além disso, para $n = 5$ temos um número composto $\Rightarrow F_5 = 641 \cdot 6700417$

Portanto, não.

2.1

(iv) Desculpa, ñ fazia ideia :/

Boa correção! Corrija com carinho.

# Index of comments

2.1 Tente fazer algo parecido com a demonstração de Euclides para a infinitude dos primos!