MAC0315

Otimização Linear

Pedro Gigeck Freire

10737136

① Resolva o problema abaixo pelo método das duas fases

$$\max \quad 3x_1 + x_2$$

$$\text{suj.} \quad x_1 - x_2 \leq -1$$

$$-x_1 - x_2 \leq -3$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Primeiro, vamos trocar as desigualdades por igualdades, com as folgas

$$\max \quad 3x_1 + x_2$$

$$\text{sujeito a} \quad x_3 = -1 - x_1 + x_2$$

$$x_4 = -3 + x_1 + x_2$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - x_2$$

$$x_i \geq 0$$

Agora, como $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ não é uma solução factível, vamos usar a primeira fase do método das duas fases para encontrar algum ponto factível. Isto é, adicionar uma variável artificial x_0 e resolver o novo problema

$$\max \quad -x_0$$

$$\text{suj} \quad x_3 = -1 - x_1 + x_2 + x_0$$

$$x_4 = -3 + x_1 + x_2 + x_0$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - x_2 + x_0$$

$$x_i \geq 0$$

E agora resolvemos esse problema auxiliar pelo método simplex

· Escrevemos x_0 em funsão do x_4 $(x_0 = 3 - x_1 - x_2 + x_4)$

$$\max \quad -3 + x_1 + x_2 - x_4$$
$$\text{suj} \quad x_3 = 2 - 2x_1 + x_4$$
$$x_0 = 3 - x_1 - x_2 + x_4$$
$$x_5 = 7 - 3x_1 - 2x_2 + x_4$$
$$x_i \geq 0$$

· Agora resolvemos por Simplex:

Entra x_2 sai x_0

$$\max \quad -3 + x_1 + x_2 - x_4$$
$$\text{suj} \quad x_3 = 2 - 2x_1 + x_4$$
$$x_2 = 3 - x_1 - x_0 + x_4$$
$$x_5 = 7 - 3x_1 - 2x_2 + x_4$$
$$x_i \geq 0$$

$$\max \quad 0 - x_0$$
$$\text{suj} \quad x_3 = 2 - 2x_1 + x_4$$
$$x_2 = 3 - x_1 - x_0 + x_4$$
$$x_5 = 1 - x_1 + 2x_0 - x_4$$
$$x_i \geq 0$$

· Agora, já encontramos um ponto factível, podemos eliminar o x_0 e retornar ao custo original

$$\max \quad 3x_1 + x_2$$
$$\text{suj} \quad x_3 = 2 - 2x_1 + x_4$$
$$x_2 = 3 - x_1 + x_4$$
$$x_5 = 1 - x_1 - x_4$$
$$x_i \geq 0.$$

Como x_2 é básica, vamos substituir ela no custo

$$\max \quad 3 + 2x_1 + x_4$$

$$\text{suj} \quad x_3 = 2 - 2x_1 + x_4$$
$$x_2 = 3 - x_1 + x_4$$
$$x_5 = 1 - x_1 - x_4$$
$$x_i \geq 0$$

E agora resolvemos com o método simplex

Vamos aumentar o x_1

$$\max \quad 5 - x_4 - 2x_5$$

$$\text{suj} \quad x_3 = 3x_4 + 2x_5$$
$$x_2 = 2 + 2x_4 + x_5$$
$$x_1 = 1 - x_5 - x_4$$
$$x_i \geq 0$$

Assim acabou, temos a solusão ótima $x_4 = x_5 = 0$

Portanto, no nosso problema original, a solusão ótima é

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

Com valor ótimo $3x_1 + x_2 = 5$.

(2) Resolva o problema abaixo pelo método das duas fases

$$\max \quad 3x_1 + x_2$$

$$\text{suj} \quad x_1 - x_2 \leq -1$$
$$-x_1 - x_2 \leq -3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Vamos fazer os mesmos passos do exercício anterior

- Adicionar as variáveis de folga para obter as igualdades

$$\max \quad 3x_1 + x_2$$

$$\text{suj} \quad x_3 = -1 - x_1 + x_2$$

$$x_4 = -3 + x_1 + x_2$$

$$x_5 = 2 - 2x_1 - x_2$$

$$x_i \geq 0$$

- Adicionamos a variável artificial x_0 para encontrar uma solusão factível

$$\max \quad -x_0$$

$$\text{suj} \quad x_3 = -1 - x_1 + x_2 + x_0$$

$$x_4 = -3 + x_1 + x_2 + x_0$$

$$x_5 = 2 - 2x_1 - x_2 + x_0$$

$$x_i \geq 0$$

- Escrevemos x_0 em função de x_4 $(x_0 = 3 - x_1 - x_2 + x_4)$

$$\max \quad -3 + x_1 + x_2 - x_4$$

$$\text{suj} \quad x_3 = 2 - 2x_1 + x_4$$

$$x_0 = 3 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$x_5 = 5 - 3x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_i \geq 0$$

- Resolvemos via Simplex: Entra x_2 sai x_0.

$$\max \quad 0 - x_0$$

$$\text{suj} \quad x_3 = 2 - 2x_1 + x_4$$

$$x_2 = 3 - x_1 - x_0 + x_4$$

$$x_5 = -1 - x_1 + 2x_0 - x_4$$

$$x_i \geq 0$$

Agora, temos um caso particular!

Como $x_0 = 0$ não é factível nesse problema auxiliar, então, pelo resultado visto na aula 13, temos que o problema original é

INFACTÍVEL

(3) Qual é o Dual do problema

$$\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\
\text{suj} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 20 \\
& x_1 - x_2 - x_3 = 10 \\
& 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 30 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \text{ irrestrito.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & 20y_1 + 10y_2 + 30y_3 \\
\text{suj} \quad & 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 5 \\
& 4y_1 - y_2 - 2y_3 = 6 \\
& 7y_3 - y_3 - 3y_3 \leq 5 \\
& y_1 \geq 0 \quad y_2 \leq 0 \quad y_3 \text{ irrestrito}
\end{aligned}$$

(4) Enuncie e prove o Teorema fraco de dualidade. Enuncie o teorema forte de dualidade.

Teorema fraco de Dualidade

Se x é uma solução factível de um problema primal de maximização e y é uma solução factível do dual então

$$c^T x \leq b^T y$$

(onde c é o custo do primal e b é o custo do dual)

Prova:

Na aula, vimos uma prova explicitando as desigualdades, aqui, faremos a prova mantendo a notação matricial.

Sabemos que todas as restrições podem ser escritas como desigualdades "$\leq$".

Seja o problema primal

$$\max \quad c^T x$$
$$\text{suj.} \quad Ax \leq b$$

Com o problema dual

$$\min \quad b^T y$$
$$\text{suj.} \quad A^t y \geq c$$

Como x é factível, temos que

$Ax \leq b$ — multiplicando y^t em ambos os lados

$\Rightarrow y^t A x \leq y^t b$ — Transpondo ambos os lados

$\Rightarrow (y^t A x)^t \leq (y^t b)^t$

$\Rightarrow x^t A^t y \leq b^t y$ — como y é factível, temos $A^t y \geq c$

$\Rightarrow x^t c \leq b^t y$ — como $x^t c$ é um número, temos $x^t c = c^T y$

$\Rightarrow c^T x \leq b^t y$ ∎

Teorema forte de Dualidade

Se o primal tem uma solução ótima x então o dual tem uma solução ótima y e $c^T x = b^T y$.

(5) Resolva o seguinte problema usando o método simplex revisado

$$\max \quad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\text{suj.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$2x_1 + 3x_3 \leq 5$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

· Vamos acrescentar as folgas (o que será o x_b)

$$\max \quad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\text{suj.} \quad x_4 = 4 - x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_5 = 5 - 2x_1 - 3x_3$$

$$x_6 = 7 - 2x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$x_i \geq 0$$

Entra x_1 sai x_5 $\left(x_1 = 5/2 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{x_5}{2}\right)$

$$\max \quad 15/2 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_5$$

$$\text{suj} \quad x_4 = 3/2 - x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{x_5}{2}$$

$$x_1 = 5/2 - 3/2\, x_3 - \frac{x_5}{2}$$

$$x_6 = 2 - x_2 + x_5$$

$$x_i \geq 0$$

Entra x_2 sai x_4 $\left(x_2 = 3/2 - 1/2\, x_3 - x_4 - 1/2\, x_5\right)$

$$\max \quad \frac{21}{2} - \frac{3}{2}x_3 - 2x_4 - \frac{5}{2}x_5$$

$$\text{suj} \quad x_2 = 3/2 - 1/2\, x_3 - x_4 - 1/2\, x_5$$

$$x_1 = 5/2 - 3/2\, x_3 - 1/2\, x_5$$

$$x_6 = 1/2 + 1/2\, x_3 + x_4 + 3/2\, x_5$$

$$x_i \geq 0$$

Assim, chegamos na solução ótima $x_3 = x_4 = x_5 = 0$

E, no problema original, a solução ótima é $(x_1 = 5/2,\ x_2 = 3/2,\ x_3 = 0)$.

6) Prove que $x = \{0, 4/3, 2/3, 5/3, 0\}$ NÃO é a solução ótima do problema

$$\max \quad 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5$$

$$\text{suj.} \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 &\leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &\leq 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 &\leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 &\leq 1 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Vamos usar o Teorema 5.3 do livro que diz que uma solução é ótima se e somente se existe uma solução para o dual y_1, y_2, y_3, y_4 tais que

(i) $\sum_{i=1}^{m=4} a_{ij} y_i = c_j$ se $x_j > 0$

(ii) $y_i = 0$ se $\sum_{j=1}^{n=5} a_{ij} x_j < b_i$

(iii) $\sum_{i=1}^{m=4} a_{ij} y_i \geq c_i \quad \forall\, j = 1, 2, \dots, n=5$

(iv) $y_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, m=4$

(isto é, Teorema das folgas complementares)

Vamos conferir todas essas condições

Por (ii), temos que

★ $y_3 = 0$, pois na segunda desigualdade temos $0 + 16/3 + 8/3 - 10/3 + 0 = \frac{14}{3} < 5$

Vamos montar o sistema descrito por (i) (com $j = 2, 3, 4$)

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_4 = 6 \\ 5y_1 - 2y_2 + 2y_4 = 5 \\ -2y_1 + y_2 - y_4 = -2 \end{cases}$$

Vamos resolver esse sistema:

(Somando a segunda equação com o dobro da terceira temos)

$$5y_1 - 2y_2 + 2y_4 + 2(-2y_1 + y_2 - y_4) = 5 + 2(-2) \Rightarrow$$

$$\star \quad y_1 = 1$$

Agora, somamos as duas primeiras equações e obtemos

$$8y_1 + 3y_4 = 11 \Rightarrow$$

$$3y_4 = 11 - 8y_1 \Rightarrow \quad (\text{como } y_1 = 1)$$

$$3y_4 = 3$$

$$\star \quad y_4 = 1$$

Substituindo esses valores na primeira equação, temos

$$3y_1 + 2y_2 + y_4 = 6 \Rightarrow$$

$$3 + 2y_2 + 1 = 6 \Rightarrow$$

$$2y_2 = 2 \Rightarrow$$

$$\star \quad y_2 = 1$$

Com isso, obtemos a solução $(y_1 = 1,\ y_2 = 1,\ y_3 = 0,\ y_4 = 1)$

Porém, essa solução do dual não satisfaz o item (iii) do teorema, pois quando $j = 5$, temos que

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij}\, y_i = 2 + 1 + 0 - 2 = 1 < 3.$$

Portanto, não existe uma solução do dual que satisfaça todas as condições, logo, x não é ótimo.

7) RESOLVA O PROBLEMA

$$\max \quad -x_1 - 2x_2$$

$$\text{suj} \quad -3x_1 + x_2 \leq -1$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$-2x_1 + 7x_2 \leq 6$$
$$9x_1 - 4x_2 \leq 6$$
$$-5x_1 + 2x_2 \leq -3$$
$$7x_1 - 3x_2 \leq 6$$
$$x_i \geq 0$$

Como (0,0) não é factível (pela 1ª restrição por exemplo), vamos aplicar a primeira fase do método simplex.

· Adicionando as folgas

$$\max \quad -x_1 - 2x_2$$

$$\text{suj} \quad x_3 = -1 + 3x_1 - x_2$$
$$x_4 = 1 - x_1 + x_2$$
$$x_5 = 6 + 2x_1 - 7x_2$$
$$x_6 = 6 - 9x_1 + 4x_2$$
$$x_7 = -3 + 5x_1 - 2x_2$$
$$x_8 = 6 - 7x_1 + 3x_2$$
$$x_i \geq 0.$$

· Adicionando a variável artifical x_0 (para achar um ponto factível)

$$\max \quad -x_0$$

$$\text{suj} \quad x_3 = -1 + 3x_1 - x_2 + x_0$$
$$x_4 = 1 - x_1 + x_2 + x_0$$
$$x_5 = 6 + 2x_1 - 7x_2 + x_0$$
$$x_6 = 6 - 9x_1 + 4x_2 + x_0$$
$$x_7 = -3 + 5x_1 - 2x_2 + x_0$$
$$x_8 = 6 - 7x_1 + 3x_2 + x_0$$
$$x_i \geq 0$$

- Escrevemos x_0 em função do x_7 $\quad (x_0 = 3 - 5x_1 + 2x_2 + x_7)$

$$\text{Max} \quad -3 + 5x_1 - 2x_2 - x_7$$

$$\begin{aligned} \text{suj} \quad x_3 &= 2 - 2x_1 + x_2 + x_7 \\ x_4 &= 4 - 6x_1 + 3x_2 + x_7 \\ x_5 &= 9 - 3x_1 - 5x_2 + x_7 \\ x_6 &= 9 - 14x_1 + 6x_2 + x_7 \\ x_0 &= 3 - 5x_1 + 2x_2 + x_7 \\ x_8 &= 9 - 12x_1 + 5x_2 + x_7 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

- Entra x_1 sai x_0 $\quad \left(x_1 = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_7 - \frac{1}{5}x_0\right)$

$$\text{Max} \quad 0 - x_0$$

$$\begin{aligned} \text{suj} \quad x_3 &= 4/5 + 1/5\,x_2 + 3/5\,x_7 - 2/5\,x_0 \\ x_4 &= 2/5 + 3/5\,x_2 - 1/5\,x_7 - 6/5\,x_0 \\ x_5 &= \frac{36}{5} - \frac{31}{5}x_2 + 2/5\,x_7 - 3/5\,x_0 \\ x_6 &= 3/5 + 2/5\,x_2 - 9/5\,x_7 - 14/5\,x_0 \\ x_1 &= 3/5 + 2/5\,x_2 + 1/5\,x_7 - 1/5\,x_0 \\ x_8 &= 9/5 + 1/5\,x_2 - 7/5\,x_7 - 12/5\,x_0 \end{aligned} \qquad (x_i \geq 0)$$

Agora temos a solusão $x_0 = 0$ e podemos voltar ao problema original, eliminando o x_0 e voltando ao custo correto

$$\text{max} \quad -x_1 - 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{suj} \quad x_3 &= 4/5 + 1/5\,x_2 + 3/5\,x_7 \\ x_4 &= 2/5 + 3/5\,x_2 - 1/5\,x_7 \\ x_5 &= 36/5 - 31/5\,x_2 + 2/5\,x_7 \\ x_6 &= 3/5 + 2/5\,x_2 - 9/5\,x_7 \\ x_1 &= 3/5 + 2/5\,x_2 + 1/5\,x_7 \\ x_8 &= 9/5 + 1/5\,x_2 - 7/5\,x_7 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Como x_1 está no custo e na base, vamos substituir ele no custo

$$\max \; -3/5 - 12/5\, x_2 - 1/5\, x_7$$

suj. (mesmas restrições)

Assim, obtemos a solução ótima $(x_2 = 0,\ x_7 = 0)$

No problema original, a solução ótima é $x_1 = 3/5$, $x_2 = 0$.

Com valor ótimo $z = -3/5$.