

MAC0329 – Álgebra booleana e aplicações

DCC / IME-USP — Primeiro semestre de 2018

Lista de exercícios 2 (Data para entrega: até 18/04/2018)

Entregar os exercícios: 2, 5d', 5e, 8, 11, 12, 13, 16a, 25, 27

Álgebra booleana e propriedades

1. Mostre que o conjunto B^n conforme definido nas notas de aula é uma álgebra booleana.
2. Seja $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, ou seja, o conjunto dos divisores de 30. Defina operações binárias $+$ e \cdot e uma operação unária $\bar{}$ da seguinte forma: para quaisquer $a_1, a_2 \in A$,

$$a_1 + a_2 = \text{o mínimo múltiplo comum entre } a_1 \text{ e } a_2$$

$$a_1 \cdot a_2 = \text{o máximo divisor comum entre } a_1 \text{ e } a_2$$

$$\bar{a}_1 = 30/a_1$$

Quais são os elementos identidade com respeito a $+$ e \cdot ? Mostre que A , com as três operações acima, é uma álgebra booleana.

Dica: considere a decomposição dos elementos de A em fatores primos.

3. Explique o que é o princípio da dualidade.
4. Seja uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1 \rangle$ qualquer. Prove ou mostre um contra-exemplo:
 $(a + \bar{b})(\bar{a} + b)(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a} + \bar{b}$
5. Seja uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1 \rangle$ qualquer. Sejam x, y, z três elementos de A . Prove, algebricamente, as seguintes igualdades. Justifique as passagens.
 - a) $x + \bar{x}y = x + y$
 - a') $x(\bar{x} + y) = xy$
 - b) $x + y = \overline{\bar{x}\bar{y}}$
 - b') $xy = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$
 - c) $(x + y)(x + \bar{y}) = x$
 - c') $xy + x\bar{y} = x$
 - d) (Teorema do consenso) $xy + yz + \bar{x}z = xy + \bar{x}z$
 - d') $(x + y)(y + z)(\bar{x} + z) = (x + y)(\bar{x} + z)$
 - e) $yx = zx$ e $y\bar{x} = z\bar{x}$ implica que $y = z$
 - f) $(x + y + z)(x + y) = x + y$
 - g) $x\bar{y} = 0$ se, e somente se, $xy = x$.

6. Sejam a, b, c três elementos de uma álgebra booleana. A seguinte implicação está correta? Explique.

$$a + b = a + c \implies b = c$$

Funções e expressões booleanas (caso geral)

7. Simplifique, algebricamente, as seguintes expressões (tente encontrar expressões equivalentes “mais curtas”):
 - a) $y \bar{z}(\bar{z} + \bar{z}x) + (\bar{x} + \bar{y})(\bar{x}y + \bar{x}z)$
 - b) $x + xyz + yz\bar{x} + wx + \bar{w}x + \bar{x}y$
8. Dada a álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ com $A = \{0, 1, a, \bar{a}\}$, construa a tabela-verdade da função correspondente à expressão $\bar{a}x + a\bar{y}$.
9. Deduza uma expressão booleana correspondente à função definida pela tabela-verdade do exercício anterior (a partir da tabela-verdade e não da expressão dada!). Dica: use o teorema de expansão de Boole e manipulação algébrica.
10. Seja $A = \{0, 1, a, \bar{a}\}$. Liste todas as funções booleanas de uma variável sobre A . Dica: use o teorema de expansão de Boole.

Termos produto e soma, formas canônicas

11. Considere três variáveis booleanas a , b e c . Assinale quais das expressões abaixo são produtos, conforme definição vista em sala de aula:
a) ab
b) $a\bar{a}$
c) a
d) aab
e) $a(b+c)$
f) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$
12. Considere três variáveis booleanas a , b e c . Assinale quais das expressões abaixo são somas, conforme definição vista em sala de aula:
a) $a+b$
b) $a+\bar{a}$
c) a
d) $a+a+b$
e) $a+bc$
f) $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$
13. Assinale quais das expressões abaixo são somas de produtos.
a) a
b) $ab+ac$
c) $a+ab$
d) $ab+\overline{ab}$
e) $ab+ab$
f) abc
14. Escreva todos os produtos canônicos em três variáveis a , b e c .
15. Escreva as seguintes funções na forma SOP (soma de produtos). Não precisam ficar na forma canônica.
a) $f(a,b,c) = \overline{abc}$
b) $f(a,b,c) = a+b+c$
c) $f(a,b,c,d) = (a+b)(b+c+d)$
d) $f(a,b,c) = \overline{\overline{(a+b)} + c}$
16. Escreva as seguintes funções na forma POS (produto de somas). Não precisam ficar na forma canônica.
a) $f(a,b,c) = \overline{a+b+c}$
b) $f(a,b,c) = abc$

Minimização de expressões

17. O que é uma expressão na forma SOP minimal ? Qual a importância dessa forma na realização dessa função por circuito digital?
18. Sejam 4 variáveis binárias a, b, c, d . Para quais valores dessas variáveis o produto $\bar{a}b\bar{c}d$ toma valor 1?
19. Sejam 3 variáveis binárias a, b, c . Qual é o produto que toma valor 1 quando $a = 0, b = 1$, e $c = 1$? Qual é o produto que toma valor 1 para ambos $a = 0, b = 1, c = 1$ e $a = 0, b = 1, c = 0$?
20. Quais são os elementos no intervalo $[0010, 0110]$? A qual produto corresponde esse intervalo ?
21. Para quais elementos de B^4 (isto é, valores de (a, b, c, d)) o produto $\bar{a}c\bar{d}$ toma valor 1 ? A qual “intervalo” correspondem esses elementos ?
22. Sejam 3 variáveis a, b e c .
 - (a) Qual é o produto correspondente ao intervalo $[010, 110]$?
 - (b) Qual é o intervalo correspondente ao cubo $XX0$?
 - (c) Qual é o produto correspondente ao cubo 010 ?
 - (d) Qual é o intervalo correspondente ao produto $a\bar{c}$?
23. Minimize a função $f(a, b, c) = \sum m(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ usando mapa de Karnaugh (minimizar na forma SOP).
24. Para a função do exercício anterior, desenhe o circuito lógico 2-níveis correspondente à expressão inicial dada e à expressão obtida após a minimização. Como os circuitos se comparam em termos de quantidade de portas (AND e OR) utilizadas e também em termos de entradas em cada uma das portas ?
25. Minimize a função $f(a, b, c, d) = \sum m(0, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13)$ usando mapa de Karnaugh (minimizar na forma SOP).
26. Minimize na forma POS a função $f(x, y, z) = \prod M(0, 1, 6, 7)$ usando o mapa de Karnaugh.
27. Minimize a função $f(a, b, c, d) = \sum m(0, 2, 8, 12, 13) = \prod M(1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15)$, na forma SOP e na forma POS. Como se comparam as duas formas minimais em termos de quantidade de operações AND e OR ?
28. Minimize a função $f(w, x, y, z) = \sum m(0, 7, 8, 10, 12) + d(2, 6, 11)$, na qual $d()$ indica o conjunto de *don't cares* (isto é, entradas para as quais o valor da função não importa).
29. Minimize na forma SOP a função $f(a, b, c, d) = \sum m(0, 2, 8, 9) + d(1, 13)$
30. Minimizar conjuntamente as funções abaixo. Na escolha dos implicants, pode-se considerar que a implementação será em PLA e portanto o custo dos implicants pode ser ignorado.

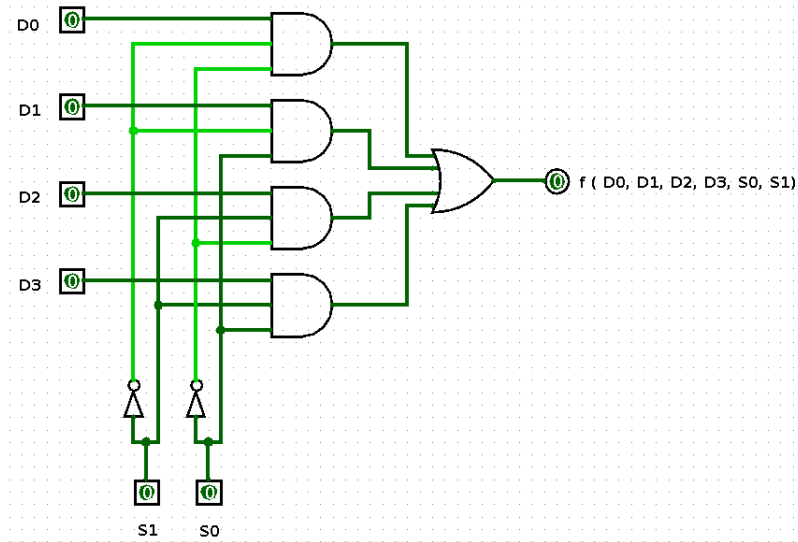
$$f_1(a, b, c, d) = \sum m(0, 2, 6, 7, 15) + d(8, 10, 14)$$

$$f_2(a, b, c, d) = \sum m(0, 1, 3, 7, 15) + d(8, 10, 14)$$

Pode existir outra solução melhor (de menor custo) ? Explique (não é preciso exibir tal solução, caso exista).

Projeto / interpretação de circuitos lógicos

31. Escreva a expressão correspondente à saída do circuito abaixo e explique qual o papel das entradas s_1 s_2 na parte inferior do circuito.



32. Escreva a tabela-verdade da função $f(a, b, c) = a \overline{(b + \overline{a} \overline{c})}$. Desenhe o circuito que realiza f , reproduzindo fielmente a expressão.
33. Considere números binários com 4 bits, denotados $a b c d$. Suponha que desejamos projetar um circuito para detectar números de 4 bits que correspondem a múltiplos de 3.
- Escreva a tabela verdade da função detectora de múltiplos de 3 (o número 0000 (zero) não deve ser considerado múltiplo de 3).
 - Minimize a função, tanto na forma SOP como POS.
 - Há diferença de custos entre as soluções SOP e POS no item anterior? Comente.
34. Deseja-se projetar um circuito com quatro entradas e duas saídas e que realiza a adição módulo 4. Por exemplo, $(3 + 3) \bmod 4 = 2$, etc. Os números a serem adicionados são dados em binário respectivamente por $x_2 x_1$ e $y_2 y_1$. A saída também deve ser dada em binário ($z_2 z_1 = 00$ se a soma é 0, $z_2 z_1 = 01$ se a soma é 1, etc).
- determine uma função na forma SOP canônica para z_1 e para z_2
 - Simplifique-as na forma SOP individualmente
 - Simplifique-as em conjunto na forma SOP
 - Compare e discuta as soluções obtidas em (b) e (c).

35. Código BCD refere-se à codificação de dígitos decimais de 0 a 9 pela respectiva representação binária. Para tanto são necessários 4 bits. As combinações binárias de 0000 a 1001 são utilizadas para codificação e as demais não são utilizadas. O incremento por 1 do código BCD pode ser definido pela tabela-verdade ao lado.

Ou seja, pode-se pensar esta tabela-verdade como representando 4 funções (w , x , y , e z) com 4 entradas.

$abcd$	$wxyz$
0000	0001
0001	0010
0010	0011
0011	0100
0100	0101
0101	0110
0110	0111
0111	1000
1000	1001
1001	0000
1010	XXXX
...	...
1111	XXXX

Escolha uma das funções (saídas w , x , y ou z) e minimize-a.

36. Considere um subtrator para números de dois bits. As entradas ab e cd definem dois números binários N_1 e N_2 (i.e., $N_1 = ab$ e $N_2 = cd$). Suponha que $N_1 \geq N_2$. As saídas fg do circuito correspondem à diferença $N_1 - N_2$ (i.e., $fg = N_1 - N_2$).

Escreva a tabela-verdade para fg