MAT 0265

Grupos

Prova 2

Pedro Gigeck Freire

10737136

Questão 2 Mostre que todo grupo simples contendo um subgrupo de índice n é isomorfo a um subgrupo de S_n. Considere $n > 1$.

Seja G um grupo simples qualquer.

Seja $H \leqslant G$ com $[G : H] = n$, isto é

$$|\{aH : a \in G\}| = n$$

Vamos usar uma ideia semelhante a demonstração do teorema de Cayley.

Seja $G/H = \{aH : a \in G\}$ o conjunto das classes laterais a esquerda de H em G.

Defina, para cada $g \in G$

$$f_g : G/H \to G/H$$
$$aH \mapsto (ga)H$$

Note que f_g está bem definida, pois se $aH = bH$ então $(gb)^{-1}(ga) = b^{-1}g^{-1}ga = b^{-1}a \in H$ (pois $a \underset{E}{\sim} b$)

logo $ga \underset{E}{\sim} gb$, portanto $f_g(a) = (ga)H = (gb)H = f_g(b)$.

Agora, vamos mostrar que f_g é bijetora.

· f_g é injetora: Sejam $aH, bH \in G/H$ com $f_g(aH) = f_g(bH)$

Então $(ga)H = (gb)H \Rightarrow (gb)^{-1}(ga) \in H \Rightarrow b^{-1}a = b^{-1}g^{-1}ga \in H$.

Logo $aH = bH$.

· f_g é sobrejetora: Seja $bH \in G/H$

Temos que $bH = (gg^{-1}b)H = f_g((g^{-1}b)H) \in Im(f_g)$.

De fato, f_g é bijetora, ou seja

$$f_g \in S(G/H).$$

Agora, construimos o homomorfismo

$$\varphi : G \longrightarrow S(G/H)$$
$$g \longmapsto f_g$$

· Vamos mostrar que φ é homomorfismo

Sejam $g_1, g_2 \in G$ e seja $aH \in G/H$ quaisquer

Então

$$\varphi(g_1g_2)(aH) = f_{g_1g_2}(aH) = (g_1g_2a)H = f_{g_1}((g_2a)H)$$

$$= f_{g_1}(f_{g_2}(aH)) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)(aH).$$

· Por fim, suponha, por absurdo, que φ não é injetora.

Então $Ker\,\varphi \neq \{e_G\}$ (Pelo Lema da aula 8)

Mas, como $Ker\,\varphi \triangleleft G$ e G é simples

Então $\operatorname{Ker} \varphi = G$, o que significa que para todo $g \in G$

$$\varphi(g) = Id \implies$$

$$f_g(aH) = aH \quad \forall \; aH \in G/H \implies$$

$$(ga)H = aH \quad \forall \; aH \in G/H \implies$$

$$a^{-1}ga \in H \quad \forall \; a \in G$$

Em particular, se $a = e_G$, então $g \in H$ $\forall \, g \in G$, logo $H = G$, absurdo, pois $[G:H] = n > 1$.

Portanto φ é injetora.

Logo φ é uma bijeção entre G e $\operatorname{Im} \varphi$.

Portanto $G \cong \operatorname{Im} \varphi \leq S(G/H) \cong S_n$.

$\square$