VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

IEL – protokol k projektu

Tomáš Brablec
xbrabl04

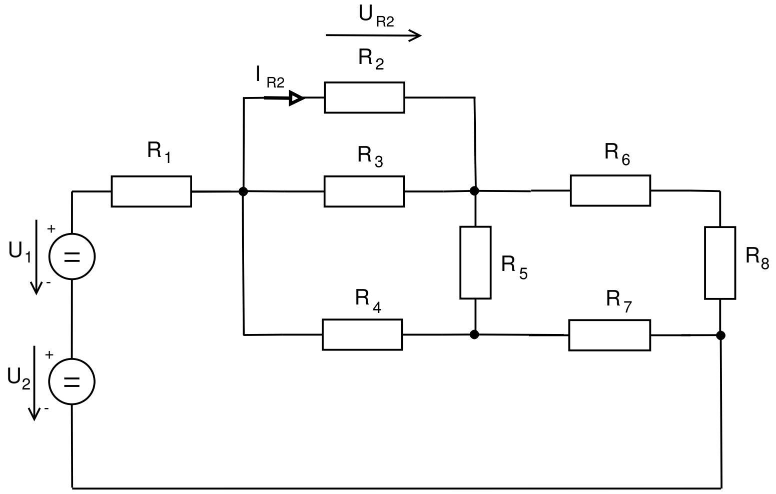
18. prosince 2022

Obsah

Příklad 1

Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2}. Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

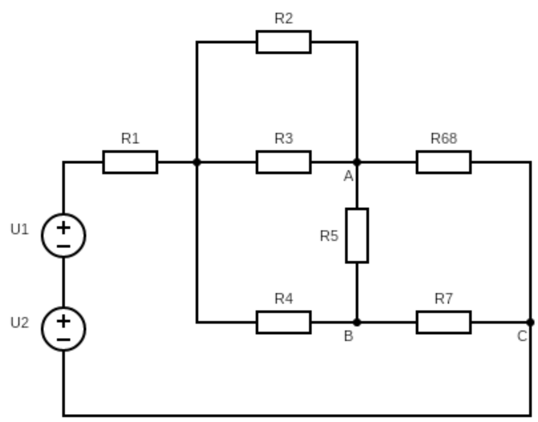
sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
A	80	120	350	650	410	130	360	750	310	190



Řešení

Naším úkolem je vypočítat napětí a proud rezistoru R_2. Jako první pomocí postupných záměn zjistíme celkový ekvivalentní odpor obvodu R_e. Jako první nahradíme sériově zapojené rezistory R_6 a R_8 ekvivalentním odporem R_{68} o velikosti:

$$R_{68} = R_6 + R_8 = 940\Omega$$



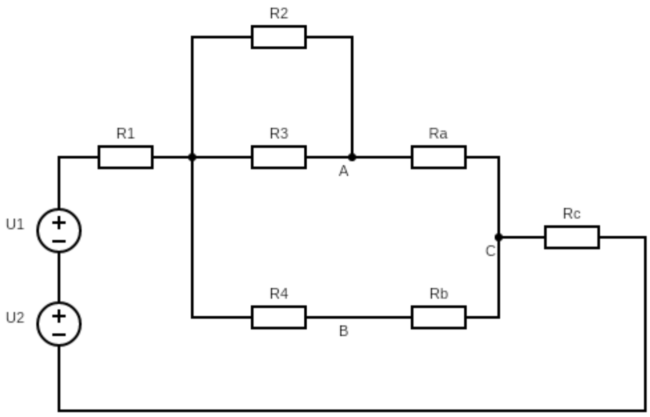
Obrázek 1: Odpor R_{68}

Následně si označíme uzly A, B, C (viz předchozí obrázek), a zaměníme trojúhelník tvořený rezistory R_5, R_7 a R_{68} hvězdou s ekvivalentními odpory R_a, R_b, a R_c. Jejich velikosti vypočítáme pomocí následujících vztahů:

$$R_a = \frac{R_5 R_{68}}{R_5 + R_7 + R_{68}} \doteq 210,1863\Omega$$

$$R_b = \frac{R_5 R_7}{R_5 + R_7 + R_{68}} \doteq 69,3168\Omega$$

$$R_c = \frac{R_7 R_{68}}{R_5 + R_7 + R_{68}} \doteq 180,9938\Omega$$

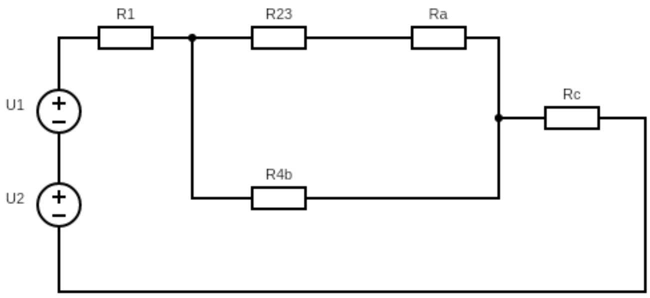


Obrázek 2: Záměna hvězdy za čtverec

Nyní nahradíme paralelně zapojené rezistory R_2 a R_3 ekv. odporem R_{23} a sériově zapojené odpory R_4 a R_b odporem R_{4b}:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_3 + R_3} \doteq 251,4151\Omega$$

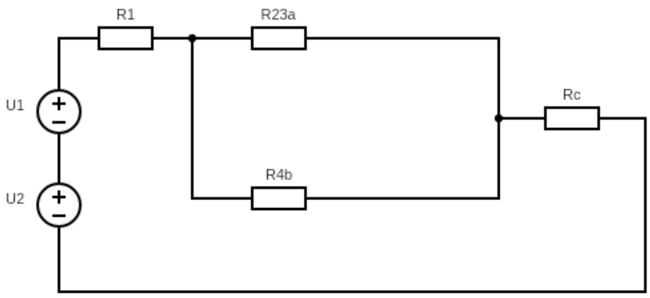
$$R_{4b} = R_4 + R_b = 199,3168\Omega$$



Obrázek 3: Odpory R_{23} a R_{4b}

Následně můžeme nahradit pár sériově zapojených odporů R_{23} a R_a jedním odporem R_{23a}:

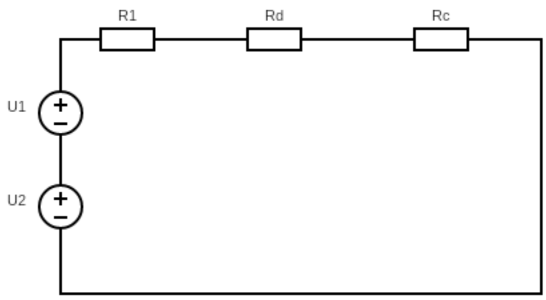
$$R_{23a} = R_{23} + R_a = 461,6014\Omega$$



Obrázek 4: Odpory R_{23} a R_{4b}

Dále nahradíme paralelně zapojené R_{23a} a R_{4b} odporem R_d:

$$R_d = \frac{R_{23a}R_{4b}}{R_{23a} + R_{4b}} \doteq 141,9836\Omega$$

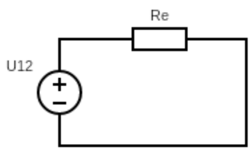


Obrázek 5: Odpor R_d

Nakonec nahradíme tři sériově zapojené odpory R_1, R_d a R_c ekvivalentním odporem celého obvodu R_e, a sériově zapojené napěťové zdroje U_1 a U_2 ekvivalentním zdrojem U_{12}:

$$R_e = R_1 + R_d + R_c = 141,9836\Omega$$

$$U_{12} = U_1 + U_2 = 200V$$



Obrázek 6: Zjednodušený obvod

Když už známe celkový odpor rezistorů a celkové napětí zdrojů v obvodu, můžeme dle Ohmova zákona spočítat proud I_e procházející rezistorem R_e:

$$I_e = \frac{U_{12}}{R_e} \doteq 0,2984A$$

Proud I_d procházející odporem R_d je stejný jako proud I_e, jelikož rezistory z obr. 5 jsou zapojeny v sérii. Tento proud se dle prvního Kirchoffova zákona rozdělí do větví s odpory R_{23a} a R_{4b}.

$$I_d = I_{23a} + I_{4b}$$

Napětí na rezistoru R_{23a} je stejné jako napětí na R_d, viz obr. 5. U_d si můžeme z Ohmova zákona vyjádřit jako $U_d = R_d I_d$. Z těchto vztahů můžeme vyjádřit proud I_{23a}:

$$I_{23a} = I_d - I_{4b}$$

$$I_{23a} = I_d - \frac{U_d}{R_{4b}}$$

$$I_{23a} = I_d - \frac{I_d R_d}{R_{4b}} \doteq 8,9996 \cdot 10^{-2} A$$

Jelikož odpory R_{23} a R_a jsou zapojené sériově, je proud jimi protékající stejný, a je roven proudu I_{23a}. Z Ohmova zákona si můžeme vyjádřit napětí na odporu R_{23}, které bude shodné s napětími na rezistorech R_2 a R_3, jelikož jsou zapojené paralelně.

$$U_2 = U_{23} = R_{23} I_{23a} \doteq 22,6262 V$$

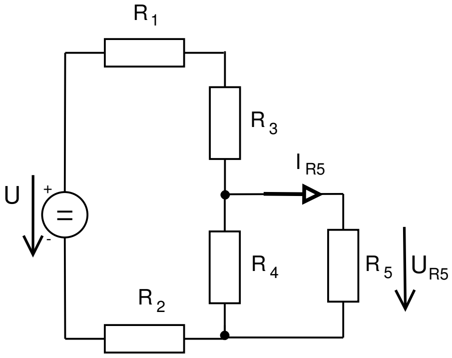
Proud procházející rezistorem R_2 vyjádříme opět z Ohmova zákona:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} \doteq 0,03481 A$$

Příklad 2

Stanovte napětí U_{R5} a proud I_{R5}. Použijte metodu Théveninovy věty.

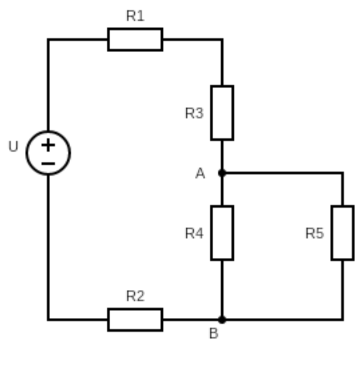
sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
G	180	250	315	615	180	460



Řešení

Cílem úkolu je vypočítat napětí a proud rezistoru R_5 za využití Théveninovy věty. Théveninova věta říká, že můžeme celý obvod zde sestávající ze zdroje stejnosměrného napětí a rezistorů nahradit jedním zdrojem napětí U_e s vnitřním odporem R_e. Tyto hodnoty musíme nyní vypočítat.

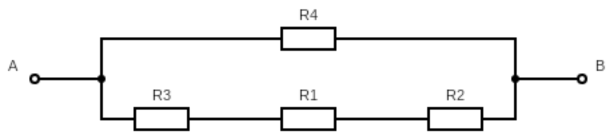
Uzly, na které je připojen rezistor R_5 si označíme písmeny A a B.



Obrázek 7: Označení uzlů A a B

V prvním kroku spočítáme velikost odporu R_e. To provedeme tak, že v části obvodu připojené k uzlům A a B nahradíme všechny zdroje napětí spojením nakrátko, a spočítáme ekvivalentní odpor mezi uzly. Po překreslení zjistíme, že jde o kombinaci sériově a paralelně zapojených rezistorů, jejichž celkový odpor vypočítáme následovně:

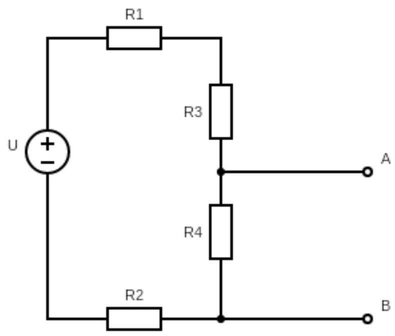
$$R_e = \frac{R4(R_3 + R_1 + R_2)}{R_4 + R_3 + R_1 + R_2} \doteq 156,1765\Omega$$



Obrázek 8: Překreslené zapojení rezistorů mezi uzly A a B

Následně vypočteme velikost napětí U_e. Napětí U_e je rovno napětí mezi uzly A a B, pokud bychom rezistor R_5 z obvodu odpojili. V takovém případě nám vznikne zapojení děliče napětí, ve kterém dokážeme napětí mezi uzly A a B snadno vyjádřit jako:

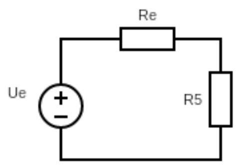
$$U_e = U\frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \doteq 23,8235V$$



Obrázek 9: Původní obvod bez rezistoru R_5

Nyní můžeme pomocí hodnot U_e a R_e obvod zjednodušit, a dopočítat velikost napětí a proudu na rezistoru R_5. Po zakreslení zjednodušeného obvodu si můžeme všimnout, že dostáváme další zapojení děliče napětí, proto můžeme velikost napětí na rezistoru R_5 vyjádřit jako:

$$U_{R5} = U_e\frac{R_5}{R_e + R_5} \doteq 17,7852V$$



Obrázek 10: Zjednodušený obvod

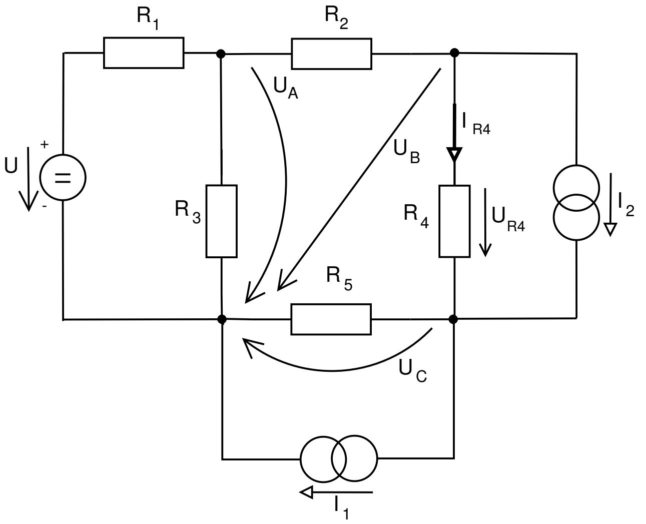
Velikost proudu pak dopočítáme z Ohmova zákona:

$$I_{R5} = \frac{U_{R5}}{R_5} \doteq 0,03866A$$

Příklad 3

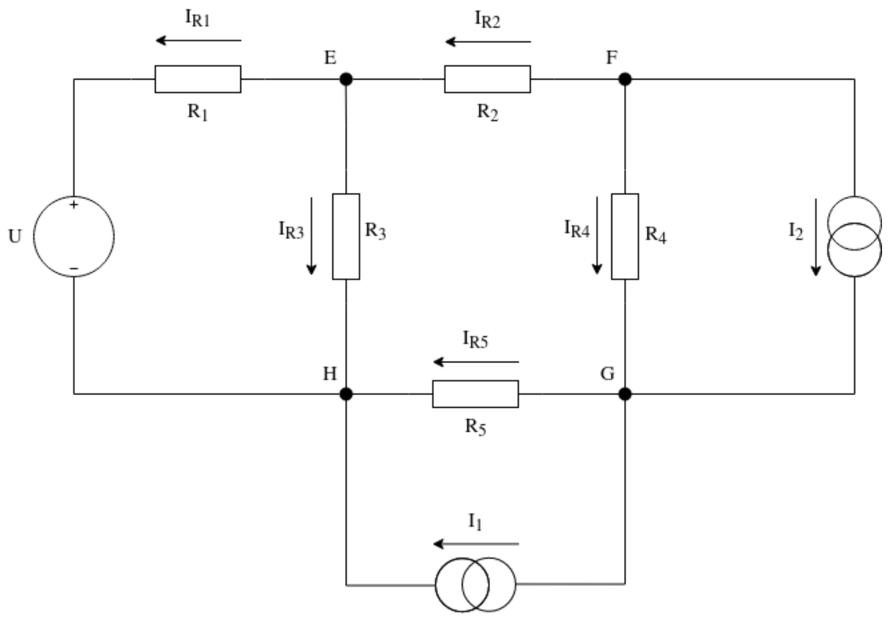
Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4}. Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
B	150	0.7	0.8	49	45	61	34	34



Řešení

Úkolem je stanovit napětí a proud rezistorem R_4 pomocí metody uzlových napětí. Uzly v obvodu si označíme písmeny E, F, G, H, a proudy v jednotlivých větvích si označíme podle příslušných rezistorů (viz obrázek).



Obrázek 11: Označení proudů ve větvích obvodu

Nyní si rozepíšeme proudy I_{R1} až I_{R5} pomocí uzlových napětí:

$$I_{R1} = \frac{U_a - U}{R_1}$$
$$I_{R2} = \frac{U_b - U_a}{R_2}$$
$$I_{R3} = \frac{U_a}{R_3}$$
$$I_{R4} = \frac{U_b - U_c}{R_4}$$
$$I_{R5} = \frac{U_c}{R_5}$$

Následně pro libovolné tři uzly sestavíme rovnice podle prvního Kirchoffova zákona, dle konvence, že vstupující proud má vždy záporné znaménko:

$$F: \; I_{R2} + I_{R4} + I_2 = 0$$
$$G: \; I_{R5} + I_1 - I_{R4} - I_2 = 0$$
$$H: \; -I_{R1} - I_{R3} - I_{R5} - I_1 = 0$$

Do těchto rovnic dosadíme výrazy získané v předchozím kroce, a roznásobíme zlomky:

$$R_4U_B - R_4U_A + R_2U_B - R_2U_C + R_2R_4I_2 = 0$$
$$R_4U_C + R_4R_5I_1 - R_5U_B + R_5U_C - R_4R_5I_2 = 0$$
$$-R_3R_5U_A + R_3R_5U - R_1R_5U_A - R_1R_3U_C - R_1R_3R_5I_1 = 0$$

Tyto rovnice převedeme do tvaru matice, dosadíme hodnoty ze zadání, a vyřešíme (celý postup zde neuvádím). Zajímají nás hodnoty U_B a U_C, neboť napětí na rezistoru R_4 je rozdílem právě těchto napětí.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -R_4 & R_4 + R_2 & -R_2 & -R_2R_4I_2 \\ 0 & -R_5 & R_4 + R_5 & R_4R_5I_2 - R_4R_5I_1 \\ -R_3R_5 - R_1R_5 & 0 & -R_1R_3 & R_1R_3R_5I_1 - R_3R_5U \end{array}\right)$$

Vyřešením této soustavy dostaneme hodnoty $U_B \doteq 14,0937V$ a $U_C \doteq 8,7469V$. Napětí U_{R4} se rovná rozdílu těchto dvou napětí:

$$U_{R4} = U_B - U_C \doteq 5,3469V$$

Proud procházející rezistorem už zjistíme jednoduše pomocí Ohmova zákona:

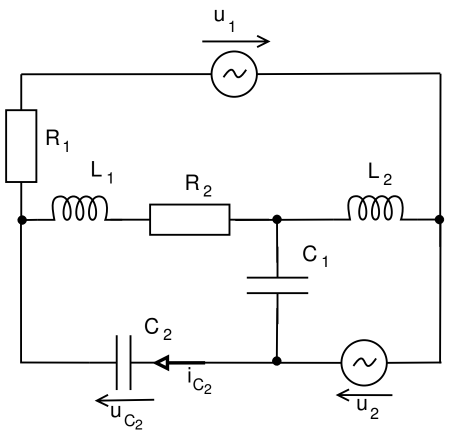
$$I_{R4} = \frac{U_{R4}}{R_4} \doteq 0,1573A$$

Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi f t)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi f t)$.
Ve vztahu pro napětí $u_{C_2} = U_{C_2} \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_{C_2})$ určete $|U_{C_2}|$ a φ_{C_2}. Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [µF]	C_2 [µF]	f [Hz]
A	3	5	12	14	120	100	200	105	70



Řešení

V tomto příkladě máme za úkol vypočítat amplitudu a fázi napětí na kondenzátoru C_2 v obvodu se střídavým proudem, a to za využití metody smyčkových proudů.

Při výpočtu budeme využívat komplexních impedancí kondenzátorů a cívek, které si můžeme pro začátek vypočítat:

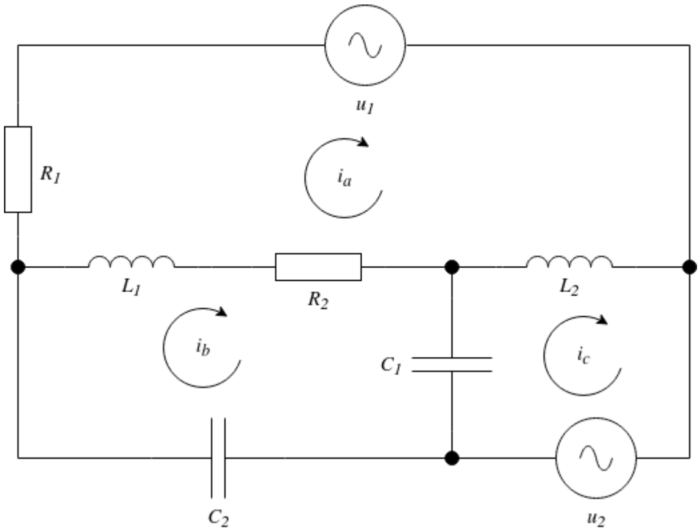
$$Z_{C1} = -\frac{j}{\omega C_1} = -\frac{j}{2\pi f C_1} \doteq -11,3682j\ \Omega$$

$$Z_{C2} = -\frac{j}{2\pi f C_2} \doteq -21,6537j\ \Omega$$

$$Z_{L1} = j\omega L_1 = 2j\pi f L_1 \doteq 52,7788j\ \Omega$$

$$Z_{L2} = 2j\pi f L_2 \doteq 43,9823j\ \Omega$$

Následně si do obvodu zaznačíme směrové šipky smyčkových proudů I_a, I_b a I_c.



Obrázek 12: Označení smyčkových proudů v obvodu

Nyní si pro každou smyčku sestavíme rovnici na základě druhého Kirchoffova zákona:

$$Smyčka\,A:\ i_aR_1 + u_1 + (i_a - i_c)Z_{L2} + (i_a - i_b)R_2 + (i_a - i_b)Z_{L1} = 0$$

$$Smyčka\,B:\ (i_b - i_c)Z_{C1} + i_bZ_{C2} + (i_b - i_a)Z_{L1} + (i_b - i_a)R_2 = 0$$

$$Smyčka\,C:\ (i_c - i_a)Z_{L2} + u_2 + (i_c - i_b)Z_{C1} = 0$$

Tuto soustavu rovnic přepíšeme do matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} R_1 + Z_{L2} + R_2 + Z_{L1} & -R_2 - Z_{L1} & -Z_{L2} & -u_1 \\ -R_2 - Z_{L1} & Z_{C1} + Z_{C2} + Z_{L1} + R_2 & -Z_{C1} & 0 \\ -Z_{L2} & -Z_{C1} & Z_{L2} + Z_{C1} & -u_2 \end{array}\right)$$

Do této matice dosadíme konkrétní hodnoty, které jsme si vypočítali výše, a vyřešíme např. eliminační metodou. Pro přehlednost zde nebudu celý výpočet uvádět. Zajímá nás hodnota proudu i_b, jelikož kondenzátorem C_2 teče právě proud i_b.

Po vyřešení soustavy rovnic nám vyjde, že $i_b \doteq 0,05676 + 0.3126j\ A$. Komplexní hodnotu napětí určíme jednoduše, podle následnující rovnice:

$$u_{C2} = i_bZ_{C2} \doteq -6.7696 + 1.2291j\ V$$

Amplitudu napětí na kondenzátoru C_2 pak určíme jako velikost tohoto komplexního čísla:

$$|u_{C2}| = |-6.7696 + 1.2291j| \doteq 6,8803\,V$$

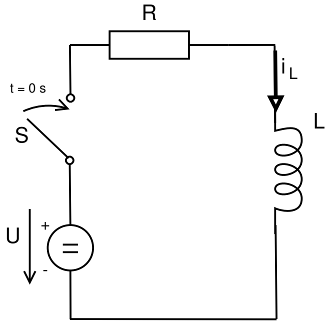
Nakonec, fázový posun φ_{C2} bude odpovídat fázi komplexního čísla u_{C2}:

$$\varphi_{C2} = arg(6.7696 - 1.2291j) \doteq 169.7093°$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S. Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
G	10	50	25	7



Řešení

Naším úkolem je sestavit a vyřešit diferenciální rovnici popisující přechodový děj sepnutí spínače v obvodu s cívkou a rezistorem. Konkrétně máme získat funkci $i_L(t)$, a poté ověřit její platnost dosazením do původní diferenciální rovnice.

Jako první musíme sestavit diferenciální rovnici popisující zadaný obvod. Vyjdeme z druhého Kirchoffova zákona, který nám říká, že v elementární smyčce je součet napětí všech zdrojů roven součtu napětí všech spotřebičů. To můžeme zapsat jako:

$$U - u_R - u_L = 0$$

Vzhledem k tomu, že chceme sestavit dif. rovnici pro funkci proudu i_L, vyjádříme členy u_L a u_R pomocí proudu i (který je z prvního Kirchoffova zákona v celém obvodu stejný, $i_L = i_R = i$). Člen u_R nahradíme pomocí Ohmova zákona, a člen u_L nahradíme obecně platným popisem závislosti proudu a napětí na cívce ($u_L = L\frac{di}{dt}$)

$$U - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

Tím dostáváme diferenicální rovnici popisující tento obvod. Tuto rovnici převedeme na tvar se separovanými proměnnými:

$$\frac{U}{L} - i\frac{R}{L} - \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{U - Ri}{L}$$

$$\frac{L\,di}{dt(U - Ri)} = 1$$

$$\frac{L}{U - Ri}di = 1dt$$

Nyní zintegrujeme obě strany rovnice a budeme pokračovat v úpravách:

$$\int \frac{L}{U - Ri} di = \int 1 dt$$

Provedeme substituci $y = U - Ri$, $di = -\frac{1}{R}dy$

$$-\frac{L}{R}\int \frac{1}{y} dy = t + C_1$$

$$-\frac{L}{R} ln(y) = t + C_1$$

$$-\frac{L}{R} ln(U - Ri) = t + C_1$$

$$ln(U - Ri) = -\frac{R}{L}t - \frac{R}{L}C_1$$

$$U - Ri = e^{-\frac{R}{L}t} e^{-\frac{R}{L}C_1}$$

V tomto bodě si pro zjednodušení dalších výpočtů substituujeme výraz $e^{-\frac{R}{L}C_1}$ obsahující integrační konstantu C_1 jinou konstantou C_2. Poté z rovnice vyjádříme funkci i:

$$U - Ri = C_2 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i = \frac{1}{R}(U - C_2 e^{-\frac{R}{L}t})$$

Ještě musíme dopočítat konstantu C_2 pomocí počáteční podmínky. Použijeme k tomu mezikrok $U - Ri = C_2 e^{-\frac{R}{L}t}$, do kterého dosadíme počáteční podmínku $i(0)$:

$$U - Ri(0) = C_2 e^{-\frac{R}{L}0}$$

$$C_2 = U - Ri(0)$$

Tím získáváme obecný tvar analytického řešení diferenciální rovnice:

$$i(t) = \frac{1}{R}(U - (U - Ri(0))\, e^{-\frac{R}{L}t})$$

S hodnotami dosazenými ze zadání dostáváme funkci:

$$i(t) = \frac{1}{25}(10 - (10 - 25 \cdot 7)\, e^{-\frac{25}{50}t})$$

$$i(t) = \frac{1}{5}(2 + 33 e^{-\frac{t}{2}})$$

Nakonec provedeme zkoušku tím, že dosadíme získanou funkci a její derivaci do původní diferenciální rovnice, a ověříme že daná rovnice platí. K tomu si nejdřív musíme spočítat derivaci funkce $i(t)$:

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{R}(U - (U - Ri(0))\, e^{-\frac{R}{L}t})) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{R}\, (U - Ri(0))\, e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{1}{L}((U - Ri(0))\, e^{-\frac{R}{L}t})$$

Tu můžeme následně dosadit do diferenciální rovnice spolu s původní funkcí $i(t)$ a upravit:

$$U - Ri - \frac{di}{dt} = 0$$

$$U - R\frac{1}{R}(U - (U - Ri(0))\, e^{-\frac{R}{L}t}) - L\frac{1}{L}((U - Ri(0))\, e^{-\frac{R}{L}t}) = 0$$

$$U - U + (U - Ri(0))\, e^{-\frac{R}{L}t} - (U - Ri(0))\, e^{-\frac{R}{L}t} = 0$$

$$0 = 0$$

Čímž jsme ověřili platnost našeho řešení.

Shrnutí výsledků

Příklad	**Skupina**	**Výsledky**	
1	A	$U_{R2} = 22,6262V$	$I_{R2} = 0,03481A$
2	G	$U_{R5} = 17,7852V$	$I_{R5} = 0,03866A$
3	B	$U_{R4} = 5,3469V$	$I_{R4} = 0,1573A$
4	A	$\lvert U_{C_2}\rvert = 6,8803V$	$\varphi_{C_2} = 169,7093°$
5	G	$i_L = \frac{1}{5}(2 + 33e^{-\frac{t}{2}})$	