Teorema de Baum–Bott

José Luis Alonzo Velázquez

FAMAT

30 de Abril del 2009

Introducción

El objetivo de esta tesis es demostrar el teorema de Baum–Bott(1970), dicho teorema nos dice que al considerar una descomposición de la variedad sobre una variedad compleja compacta, en subvariedades de menor dimensión podemos encontrar ciertos invariantes topológicos. Los cuales nos permitirán dar en algún sentido una extension del teorema de Gauss–Bonnet que tenemos para superficies compactas.

Teorema (Teorema de Baum-Bott)

Sea M una variedad compleja, compacta de dimensión n, L un haz vectorial holomorfo de rango 1 sobre M y ξ una sección holomorfa de $T'M \otimes L$, cuyos ceros son aislados y no degenerados. Consideremos las clases de Chern del haz virtual $TM - L^*$:

$$c^{\nu}(TM - L^*) = c_1^{\nu_1}(TM - L^*) \dots c_n^{\nu_n}(TM - L^*)$$

donde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n), n = \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + n\nu_n$ entonces

$$\int_M c^{\nu}(T'M - L^*) = \sum_{\{p:\xi(p)=0\}} \frac{C^{\nu}(J\xi(p))}{\det J\xi(p)}$$

Definición

Sea M una variedad compleja. Un **haz vectorial complejo de rango** *n sobre M es un espacio topológico E junto con una aplicación suprayectiva continua $\pi : E \longrightarrow M$ tales que satisfacen lo siguiente:*

(*i*) *El conjunto $\pi^{-1}(x) := E_x$ tiene estructura de espacio vectorial complejo de dimensión n, para todo $x \in M$.*

Definición

Sea M una variedad compleja. Un **haz vectorial complejo de rango** *n sobre M es un espacio topológico E junto con una aplicación suprayectiva continua $\pi : E \longrightarrow M$ tales que satisfacen lo siguiente:*

(*i*) *El conjunto $\pi^{-1}(x) := E_x$ tiene estructura de espacio vectorial complejo de dimensión n, para todo $x \in M$.*

(ii) *Existe una cubierta abierta de M, $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ y homeomorfismos $\Theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ tales que para todo $\alpha \in A$, si $x \in U_\alpha$, entonces $\Theta_{\alpha x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales complejos.*

Definición

Sea M una variedad compleja. Un **haz vectorial complejo de rango** *n sobre M es un espacio topológico E junto con una aplicación suprayectiva continua $\pi : E \longrightarrow M$ tales que satisfacen lo siguiente:*

(*i*) *El conjunto $\pi^{-1}(x) := E_x$ tiene estructura de espacio vectorial complejo de dimensión n, para todo $x \in M$.*

(ii) *Existe una cubierta abierta de M, $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ y homeomorfismos $\Theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ tales que para todo $\alpha \in A$, si $x \in U_\alpha$, entonces $\Theta_{\alpha x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales complejos.*

E se llama el espacio total del haz, M se llama la base del haz y las funciones Θ_α se llaman las **trivializaciones locales de** *E.*

Ejemplo

El haz trivial sobre M, denotado por

$$\begin{array}{c} X \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow \quad \pi \\ M \end{array}$$

donde $\pi(x, v) = x$.

Definición

Una sección de $\pi : E \longrightarrow X$ *es una aplicación continua* $s : X \longrightarrow E$ *tal que* $(\pi \circ s)(x) = x$ *para todo* $x \in X$*, es decir* $s(x) \in E_x$.

Definición

Una sección de $\pi : E \longrightarrow X$ *es una aplicación continua* $s : X \longrightarrow E$ *tal que* $(\pi \circ s)(x) = x$ *para todo* $x \in X$*, es decir* $s(x) \in E_x$*.*

Ejemplo

Los espacios TM *y* TM^* *son ejemplos de haces vectoriales. Secciones de estos haces son los campos de vectores y 1-formas diferenciales, respectivamente.*

Si $s : M \longrightarrow E$ es una sección de E, entonces

$$\begin{array}{rccll} \Theta_\alpha \circ s_{|_{U_\alpha}} : & U_\alpha & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C}^n & \\ & x & \longmapsto & \Theta_\alpha(s(x)) & = (x, s_\alpha(x)) \end{array}$$

es la gráfica de $s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Luego, secciones son funciones con

Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un haz de rango n, $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta trivializadora y $\{\Theta_\alpha\}$ trivializaciones locales de E. Dado $x \in U_\alpha$, $\Theta_{\alpha x} : E_x \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es una restricción de $\Theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ en E_x. Denotemos por $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ y definamos $\Theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ por $\Theta_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha x}\Theta_{\beta x}^{-1}$.

Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un haz de rango n, $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta trivializadora y $\{\Theta_\alpha\}$ trivializaciones locales de E. Dado $x \in U_\alpha$, $\Theta_{\alpha x} : E_x \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es una restricción de $\Theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ en E_x. Denotemos por $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ y definamos $\Theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ por $\Theta_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha x}\Theta_{\beta x}^{-1}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[dl, "\Theta_\beta"'] \arrow[dr, "\Theta_\alpha"] & \\
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \arrow[rr, "\Theta_{\alpha\beta}"'] & & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \\
(x, v) \arrow[rr, mapsto] & & (x, \Theta_{\alpha\beta}(x)v)
\end{tikzcd}
$$

Figura: El diagrama conmuta

Las $\Theta_{\alpha\beta}$ son aplicaciones continuas y satisfacen la condición de cociclo.

$$\Theta_{\alpha\beta}\Theta_{\beta\gamma}\Theta_{\gamma\alpha} = I \tag{I}$$

Las $\Theta_{\alpha\beta}$ son llamadas funciones de transición de E . Observemos que si s es una sección de E, entonces

$$\Theta_{\alpha\beta} s_\beta = s_\alpha \tag{II}$$

Definición

Sean E y F dos haces vectoriales sobre X. Un morfismo $\varphi : E \longrightarrow F$ es una aplicación continua tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_E"'] & F \arrow[d, "\pi_F"] \\ X \arrow[r, "Id"'] & X \end{tikzcd} \qquad \pi_E = \pi_F \circ \varphi$$

Figura: El diagrama conmuta

y $\varphi_{|_{E_x}} : E_x \longrightarrow F_x$ es lineal para todo $x \in X$. Si φ es una biyección y φ^{-1} es un morfismo, entonces φ es llamado isomorfismo

Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo $\mathcal{C}^\infty$ de rango n. Si $U \subset M$ es un abierto, denotemos por:

- $\mathcal{A}^0$ la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$.
- $\mathcal{A}^p(U)$ el $\mathcal{A}^0$-modulo de p- formas complejas $\mathcal{C}^\infty$ sobre U.
- $\mathcal{A}^*(U) = \bigoplus_{p=0}^{\dim M} \mathcal{A}^p(U)$ el álgebra graduada de formas diferenciales complejas $\mathcal{C}^\infty$ sobre U.
- $\mathcal{A}^p(U, E)$ el $\mathcal{A}^0$-modulo de secciones $\mathcal{C}^\infty(U, \bigwedge^p TM^{\mathbb{C}*} \otimes E)$.

Notemos que $\mathcal{A}^0(U, E)$ es el modulo de secciones $\mathcal{C}^\infty$ de E sobre U.

Definición

Una conexión en E es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$\nabla : \mathcal{A}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M, E)$$

que satisface la regla de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s), \ \forall f \in \mathcal{A}^0(M), \ s \in \mathcal{A}^0(M, E).$$

Si $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta de M, entonces una conexión ∇ en E es completamente determinada por sus restricciones $\nabla_{|U_\alpha}$.

Definición

Una conexión en E es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$\nabla : \mathcal{A}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M, E)$$

que satisface la regla de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s), \ \forall f \in \mathcal{A}^0(M), \ s \in \mathcal{A}^0(M, E).$$

Si $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta de M, entonces una conexión ∇ en E es completamente determinada por sus restricciones $\nabla_{|U_\alpha}$.

Lema

Existen las conexiones en cualquier haz vectorial complejo E de rango n.

Notemos que:

Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M, trivializadora de $TM^{\mathbb{C}}$ y E. Para cada α, escójanse $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ un sistema de coordenadas de $E_{|U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$, esto es, $s_i^\alpha \in \mathcal{A}^0(U_\alpha, E)$ y, para cada $x \in U_\alpha$, $\{s_1^\alpha(x), \ldots, s_n^\alpha(x)\}$ es una base de E_x.

Con esta notación tenemos que, en los abiertos U_α, ∇ se expresa en el sistema de coordenadas S^α por

$$\nabla(s_i^\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha,$$

donde las θ_{ij}^α son 1-formas $\mathcal{C}^\infty$ sobre U_α.

La matriz de 1-formas $\theta^\alpha = \left[\theta_{ij}^\alpha\right]$ es, por definición, la matriz de ∇ en U_α.

Si s^α y s^β son sistemas de coordenadas sobre U_α y U_β, respectivamente, entonces, en $U_{\alpha\beta}$ estos están relacionados por una matriz invertible $g_{\alpha\beta} = [g_{ij}]$ tal que $s_i^\alpha = \sum_j g_{ij} s_j^\beta$, con $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ una función $\mathcal{C}^\infty$. Entonces:

$$\theta^\alpha = dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}. \qquad \text{(IV)}$$

Una vez dada una conexión ∇ en E, extendemos tal noción definiendo un operador de carácter local(también denotado por ∇)

$$\nabla : \mathcal{A}^1(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}^2(M, E),$$

exigiendo que

$$\nabla(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla(s) \text{ (regla de Leibniz,)}$$

donde $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ es $s \in \mathcal{A}^0(M, E)$.

Se puede demostrar que:

$\nabla(f(\omega \otimes s)) = df \wedge (\omega \otimes s) + f\nabla(w \otimes s)$, donde $f \in \mathcal{A}^0(M)$.

Definición

La curvatura de una conexión ∇ es $K_\nabla = \nabla \circ \nabla$.

Observemos que:

$$\nabla(\nabla(fs)) = \nabla(df \otimes s + f\nabla(s)) = 0 - df \wedge \nabla(s) + df \wedge \nabla(s) + f\nabla(\nabla(s)).$$

K_∇ es un tensor, llamado el tensor de curvatura de la conexión ∇. Ya que no depende de los valores que toma una sección en una vecindad del punto, solo depende del valor de la sección en el punto. K_∇ esta dada localmente por la matriz *nxn* de 2-formas $\mathcal{C}^\infty$

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha$$

donde $\Theta^\alpha_{ij} = d\theta^\alpha_{ij} - \sum_k \theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj}$

Las matrices de curvatura tienen de la siguiente propiedad:

Sea s^{α} y s^{β} sistemas de coordenadas locales sobre U_{α} y U_{β} respectivamente, relacionados a través de $g_{\alpha\beta} = [g_{ij}]$.Entonces, en $U_{\alpha\beta}$,

$$\Theta^{\alpha} = g_{\alpha\beta}\Theta^{\beta}g_{\alpha\beta}^{-1}. \tag{V}$$

Sea $M(n, \mathbb{C})$ el álgebra de matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$.

Definición

Un polinomio invariantes sobre $M(n, \mathbb{C})$ es una función

$$P : M(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

que es polinomial en las entradas de una matriz y satisface $P(g^{-1}Ag) = P(A), \forall A \in M(n, \mathbb{C}), \forall g \in GL(n, \mathbb{C})$.

Equivalencia útil

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Sea $M(n,\mathbb{C})$ el álgebra de matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$.

Definición

Un polinomio invariantes sobre $M(n,\mathbb{C})$ es una función

$$P : M(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

que es polinomial en las entradas de una matriz y satisface $P(g^{-1}Ag) = P(A), \forall A \in M(n,\mathbb{C}), \forall g \in GL(n,\mathbb{C})$.

Equivalencia útil

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(*i*) $P(g^{-1}Ag) = P(A)$, $\forall A \in M(n,\mathbb{C})$ y $\forall g \in GL(n,\mathbb{C})$.

Sea $M(n,\mathbb{C})$ el álgebra de matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$.

Definición

Un polinomio invariantes sobre $M(n,\mathbb{C})$ es una función

$$P : M(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

que es polinomial en las entradas de una matriz y satisface $P(g^{-1}Ag) = P(A), \forall A \in M(n,\mathbb{C}), \forall g \in GL(n,\mathbb{C})$.

Equivalencia útil

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(*i*) $P(g^{-1}Ag) = P(A)$, $\forall A \in M(n,\mathbb{C})$ y $\forall g \in GL(n,\mathbb{C})$.

(*ii*) $P(XY) = P(YX)$, $\forall X, Y \in M(n,\mathbb{C})$.

Ejemplo de estos polinomios invariantes:

Los ejemplos básicos de tales polinomios son las funciones simétricas elementales de los autovalores, es decir, los polinomios C_i definidos por

$$\det(tI + A) = \sum_{i=0}^{n} C_{n-i}(A)t^i.$$

Denotando por $I(n, \mathbb{C})$ el álgebra de polinomios invariantes, tenemos que es isomorfa a $\mathbb{C}[C_1, \dots, C_n]$.

Hecho importante

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ como arriba, ∇ es una conexión en E y K_∇ la curvatura de ∇. En un abierto trivializador U_α, K_∇ esta dada por una matriz $n \times n$ de 2-formas Θ^α y, como las 2-formas conmutan entre si, entonces tiene sentido considerar $P(\Theta^\alpha)$, donde P es un polinomio invariante, y, además de esto, como las matrices de K_∇ satisfacen la relación crucial $\Theta^\alpha = g_{\alpha\beta}\Theta^\beta g_{ab}^{-1}$ en $U_{\alpha\beta}$, concluimos que

$$P(\Theta^\alpha) = P(g_{\alpha\beta}\Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}) = P(\Theta^\beta)$$

para cualquier polinomio invariante P. De ahí viene que , si P tiene grado k, entonces, definiendo $P(K_\nabla)_{|U_\alpha} = P(\Theta^\alpha)$, tenemos que $P(K_\nabla)$ es una $2k$-forma global en M, independientemente de cualesquiera trivializaciones de E. De hecho tales formas caen en $H^*_{DR}(M, \mathbb{C})$.

Lema

Si P es un polinomio invariante, entonces $dP(K_\nabla) = 0$.

- Puntos claves de la demostración:

Lema

Si P es un polinomio invariante, entonces $dP(K_\nabla) = 0$.

- Puntos claves de la demostración:

Acabamos de ver que si P es un polinomio invariante de grado k, implica que $P(K_\nabla)$ define una clase en $H^{2k}(M, \mathbb{C})$, aunque este elemento lo podemos ver en $H^{2k}_{DR}(M, \mathbb{C})$. Ahora mostraremos que esta clase depende solo de la clase de isomorfismo del haz E, es decir, no depende de la conexión ∇.
Para demostrar esto utilizaremos una operación muy útil en la cohomología de De Rham, llamada integración a lo largo de las fibras, la cual describiremos para el caso que nos interesa.

Consideremos el haz trivial $M \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{p} M$. Localmente, una forma diferencial $\mathcal{C}^\infty$, ω sobre $M \times \mathbb{R}^q$ se escribe como una combinación lineal de formas de los siguientes dos tipos:

$$\begin{cases} \text{TIPO(I):} & \omega = f(x^\alpha, t)dt_I \wedge dx_J^\alpha, \text{ con } |I| < q, \\ \text{TIPO(II):} & \omega = f(x^\alpha, t)dt_{I_q} \wedge dx_J^\alpha = f(x^\alpha, t)dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_q \wedge dx_J^\alpha, \end{cases}$$

donde $t = (t_1, \ldots, t_q)$, $dt_I = dt_{i_1} \wedge \ldots \wedge dt_{i_r}$, donde $i_1 < \ldots < i_r$, $|I| = r$, $dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_q$ determina una orientación de $\mathbb{R}^q$ y x^α son coordenadas locales en M. Definimos un operador lineal $\wp_*^{\Delta^q} : \mathcal{A}^*(M \times \mathbb{R}^q) \longrightarrow \mathcal{A}^{*-q}(M)$ por

$$\begin{cases} \wp_*^{\Delta^q} = 0 & \text{si } \omega \text{ es del TIPO(I)}, \\ \wp_*^{\Delta^q} = (\int_{\Delta^q} f(x^\alpha, t)dt_{I_q})dx_J^\alpha & \text{si } \omega \text{ es del TIPO(II)}, \end{cases}$$

donde Δ^q es el q-simplejo estándar. Notemos que $\wp_*^{\Delta^q}$ baja en q unidades el grado de una forma.

Proposición

Sea $i : \partial(M \times \Delta^q) \longrightarrow M \times \Delta^q$ una inclusión. Entonces tenemos que:
$\wp_*^{\Delta^q} \circ d + (-)^{q+1} d \circ \wp_*^{\Delta^q} = \wp_*^{\partial\Delta^q} \circ i^*$.

Con lo cual se puede probar que:

La clase $[P(K_\nabla)] \in H^*_{DR}(M, \mathbb{C})$ es independiente de la conexión ∇ sobre E.

▸ Puntos importantes de la demostración

Proposición

Sea $i : \partial(M \times \Delta^q) \longrightarrow M \times \Delta^q$ *una inclusión. Entonces tenemos que:*
$\wp_*^{\Delta^q} \circ d + (-)^{q+1} d \circ \wp_*^{\Delta^q} = \wp_*^{\partial\Delta^q} \circ i^*$.

Con lo cual se puede probar que:

La clase $[P(K_\nabla)] \in H^*_{DR}(M, \mathbb{C})$ es independiente de la conexión ∇ sobre E.

▸ Puntos importantes de la demostración

Proposición

Sea $i : \partial(M \times \Delta^q) \longrightarrow M \times \Delta^q$ una inclusión. Entonces tenemos que:
$\wp_*^{\Delta^q} \circ d + (-)^{q+1} d \circ \wp_*^{\Delta^q} = \wp_*^{\partial\Delta^q} \circ i^*$.

Con lo cual se puede probar que:

La clase $[P(K_\nabla)] \in H^*_{DR}(M, \mathbb{C})$ es independiente de la conexión ∇ sobre E.

▸ Puntos importantes de la demostración

Definición

La clase $[P(K_\nabla)] = [P(E)]$ *solo depende de la clase de isomorfismo de* E *y es llamada* **clase característica** *de* E.

Las propiedades anteriores nos llevan a que:

Si $I(n,\mathbb{C})$ es el álgebra graduada de polinomios invariantes y $E \xrightarrow{\pi} M$ es un haz vectorial complejo de rango n, obtuvimos un homomorfismo de algebras, llamado homomorfismo de Weil,

$$\begin{array}{rcl} I(n,\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^{2*}_{DR}(M,\mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & [P(K)] \end{array}$$

donde K es la curvatura de cualquier conexión en E.

Definición

Sean C_i, $i = 1, \dots, n$, los polinomios simétricos elementales de los autovalores de una matriz $n \times n$. Las **formas de Chern** *de una curvatura K_∇ asociada a una conexión ∇ sobre E son*

$$c_i(K_\nabla) = C_i\left(\frac{i}{2\pi}K_\nabla\right)$$

y las clases de Chern de E son $c_0(E) = 1$,

$$c_i(E) = \left[C_i\left(\frac{i}{2\pi}K\right)\right] \in H^{2i}_{DR}(M, \mathbb{C}).$$

$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_n(E)$ es la clase de Chern total de E.

1) Naturalidad.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f \in \mathcal{C}^{\infty}} & M. \end{array}$$

Entonces $c_i(f^{-1}E) = f^* c_i(E)$.

2) Formula de Whitney del producto.

Si $E \xrightarrow{\pi} M$ y $F \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$ son dos haces con conexiones ∇_E y ∇_F. Entonces

$$c(E \oplus F) = c(E)c(F).$$

En particular,

$$\begin{aligned} c_1(E \oplus F) &= c_1(E) + c_1(F), \\ c_2(E \oplus F) &= c_2(E) + c_1(E)c_1(F) + c_2(F), \text{etc...} \end{aligned}$$

donde el producto es el inducido por el producto exterior de formas.

3) Clase de Chern del dual.

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz sobre M, y $E^* \xrightarrow{\check{\pi}} M$ su dual.
Entonces $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$

4) Productos Tensoriales.(Caso especial)

$$c_1(E \otimes L) = c_1(E) + nc_1(L)$$

También se puede ver que

$$c_i(E \otimes L) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n-j}{i-j} c_j(E) c_1(L)^{i-j}, 2 \leq i \leq n.$$

Sea M una variedad compleja de dimensión n y $L \xrightarrow{\pi} M$ un haz lineal holomorfo de rango 1.

Definición

Diremos que $H = \{H_z\}_{z \in M}$ es una métrica hermitiana en L si

i. H_z *es un producto interno hermitiano en* L_z.
ii. *dados* $U \subset M$ *abierto y* $s : U \longrightarrow L_U$ *una sección holomorfa, la función*

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & H_z(s(z), s(z)) \end{array}$$

es $\mathcal{C}^\infty$.

Ahora supongamos que $\{U_\alpha\}$ es una cubierta trivializadora de L y que $\{g_{\alpha\beta}\}$ son los cociclos de transición holomorfos correspondientes. Si s^α es un sistema local de coordenadas sobre U_α entonces $s^\alpha = g_{\alpha\beta}s^\beta$ y, haciendo $H_\alpha(z) = H(s^\alpha(z), s^\alpha(z))$, tenemos que

$$H_\alpha(z) = H(s^\alpha(z), s^\alpha(z)) = g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}H(s^\beta(z), s^\beta(z)) = |g_{\alpha\beta}|^2 H_\beta(z)$$

es decir $H_\alpha = g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}H_\beta$. Ahora el recíproco lo obtenemos del siguiente lema:

Lema

Sea $\{H_\alpha\}$ una colección de funciones $\mathcal{C}^\infty$ definidas en $\{U_\alpha\}$ que satisfacen que $H_\alpha(z) > 0$ y $H_\alpha = g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}H_\beta$. Entonces existe una única métrica hermitiana en L tal que $H_\alpha(z) = H(s^\alpha(z), s^\alpha(z))$.

Un haz holomorfo equipado con una métrica hermitiana es llamado **haz hermitiano**. Definimos una conexión ∇_H en un haz hermitiano L, llamada la **conexión métrica**, a través de la familia de 1-formas del tipo $(1,0)$

$$\theta^\alpha = \partial \log H_\alpha$$

en cada abierto trivializador U_α. Para ver que esto define una conexión, observemos que $\log H_\alpha = \log(g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}H_\beta)$. Definiendo $\varphi = g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\theta^{\alpha} &= \partial \log(g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}} \cdot H_{\beta}) \\
&= \frac{1}{g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}H_{\beta}}(\partial H_{\beta} \cdot g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}} + H_{\beta}\partial(g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}})) \\
&= \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\beta}} + \frac{\partial(g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}))}{g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}} \text{ , notemos que } g_{\alpha\beta} \cdot \overline{g_{\alpha\beta}} \neq 0 \\
&= (g_{\alpha\beta} \cdot \overline{g_{\alpha\beta}})\partial \log H_{\beta}(g_{\alpha\beta} \cdot \overline{g_{\alpha\beta}})^{-1} + d(g_{\alpha\beta} \cdot \overline{g_{\alpha\beta}})(g_{\alpha\beta} \cdot \overline{g_{\alpha\beta}})^{-1} \\
&= d\varphi \cdot \varphi^{-1} + \varphi\theta^{\beta}\varphi^{-1}
\end{aligned}
$$

de acuerdo con la propiedad (IV), esto implica que $\partial \log H_{\alpha}$ define una conexión sobre L.

La curvatura K_{∇_H} asociada a la conexión métrica esta entonces dada por la 2-forma del tipo $(1,1)$

$$\begin{aligned}
\Theta^\alpha &= d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha, \text{ pero } \theta^\alpha \text{ es una 1-forma, por lo cual } \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha = \\
&= d\theta^\alpha \\
&= \partial\partial \log H_\alpha + \overline{\partial}\partial \log H_\alpha, \text{ pero } \partial\partial \equiv 0 \\
&= \overline{\partial}\partial \log H_\alpha.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $c_1(K_{\nabla_H}) = \frac{i}{2\pi} K_{\nabla_H}$ y de ahí

$$c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi} K_{\nabla_H}\right] = \left[\frac{i}{2\pi}\overline{\partial}\partial \log H\right] \in H^2_{DR}(M, \mathbb{C}).$$

Recordemos que el laplaciano complejo se define por $\Delta_H^\alpha = \overline{\partial}\partial \log H_\alpha$, por lo tanto tenemos una extensión de la curvatura que ya conocíamos.

Sea M una variedad compleja. Denotaremos por $Vec(M)$ al conjunto de las clases de isomorfismos de haz vectoriales complejos $\mathcal{C}^\infty$ sobre M, $E \stackrel{\pi}{\longrightarrow} M$. $Vec(M)$ es un semigrupo conmutativo en relación a la operación $\oplus$, cuyo elemento 0 es el haz de rango cero sobre M.

Al semigrupo $Vec(M)$ le asociamos un grupo abeliano $K(M)$, que satisface la siguiente propiedad universal: existe un homomorfismo de semigrupos $\Upsilon : Vec(M) \longrightarrow K(M)$, tal que, para cualquier grupo G y $\Gamma : Vec(M) \longrightarrow G$ homomorfismo de semigrupos, existe un único homomorfismos $\aleph : K(M) \longrightarrow G$ tal que el diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} Vec(M) \arrow[d, "\Upsilon"'] \arrow[dr, dashed, "\Gamma"] & \\ K(M) \arrow[r, "\aleph"'] & G \end{tikzcd} \qquad \Gamma = \aleph \circ \Upsilon$$

Figura: El diagrama conmuta

$K(M)$ es construido de la siguiente manera: consideremos el homomorfismo diagonal de semigrupos

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & Vec(M) & \longrightarrow & Vec(M)\times Vec(M) \\ & E & \longmapsto & (E,E) \end{array}$$

y pongamos $K(M) = Vec(M)\times Vec(M)/\Delta(Vec(M))$, es decir, $[(F,G)] = [(F',G')]$ si, y solamente si, $F = F'\oplus E$, $G = G'\oplus E$. $K(M)$ es un semigrupo pues definiendo la suma "+" por $[(F_1,G_1)] + [(F_2,G_2)] = [(F_1\oplus F_2, G_1\oplus G_2)]$, tenemos que esta suma esta bien definida, ya que

$$\left\{\begin{array}{l} F_1 = F_1'\oplus E, G_1 = G_1'\oplus E \\ F_2 = F_2'\oplus E', G_2 = G_2'\oplus E' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1\oplus F_2 = (F_1'\oplus F_2')\oplus(E\oplus E') \\ G_1\oplus G_2 = (G_1'\oplus G_2')\oplus(E\oplus E'). \end{array}\right.$$

Ahora, la permutación

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & Vec(M) \times Vec(M) & \longrightarrow & Vec(M) \times Vec(M) \\ & (F, G) & \longmapsto & (G, F) \end{array}$$

induce un elemento simétrico, pues $[(F, G)] + [(G, F)] = [(F \oplus G, F \oplus G)]$ y $(F \oplus G, F \oplus G) \in \Delta(Vec(M))$. Por lo tanto $K(M)$ es un grupos abeliano, el llamado grupo de **Grothendieck de M**.

Lema

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ *un haz vectorial complejo* $\mathcal{C}^\infty$ *de* M*,donde* M *es compacta. Entonces, existe un haz vectorial complejo* $\mathcal{C}^\infty$*,* $F \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$*, tal que* $E \oplus F$ *es trivial.*

Definición

La clase de Chern total de E*,*$c(E)$*, es el elemento*

$$c(E) = \prod_{i=0}^{k} c(E_i)^{(-1)^i} \in H^*_{DR}(M, \mathbb{C}).$$

La componente de $c(E)$ *en* $H^{2j}_{DR}(M, \mathbb{C})$ *es la* $j-$*esima clase de Chern,* $c_j(E)$*, de* E*.*

Conexiones Parciales

Sea E un haz vectorial complejo, $\mathcal{C}^{\infty}$, sobre la variedad compleja M y H un subhaz vectorial complejo, $\mathcal{C}^{\infty}$, de TM. El dual de H, H^*, es un subhaz de TM^*.
Denotemos por $p : TM^* \longrightarrow H^*$ la proyección del haz cotangente en el dual de H.

Definición

Una **conexión parcial** *en E es un par (H, δ), donde H es un subhaz vectorial de TM^* y δ es una aplicación $\mathbb{C}$–lineal*

$$\delta : \mathcal{A}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M, H^* \otimes E),$$

que satisface

$$\delta(fs) = p(df) \otimes s + f\delta(s), \qquad \forall f \in \mathcal{A}^0(M, E).$$

Definición

Sea $\nabla : \mathcal{A}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M, E)$ *una conexión en* E*. Entonces diremos que* ∇ *es una* **extensión** *de* (H, δ) *si el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^0(M,E) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[dr, "\delta"'] & \mathcal{A}^1(M,E) \arrow[d, "p\otimes 1"] \\
& \mathcal{A}^1(M, H^* \otimes E)
\end{tikzcd}$$

$$\delta = (p \otimes 1) \circ \nabla$$

Figura: El diagrama conmuta

Lema

Toda conexión parcial (H, δ) *admite una extensión* ∇.

Sea E es un haz vectorial holomorfo sobre M. Entonces, el operador $\overline{\partial} : \mathcal{A}^0(M) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M)$ induce

$$\overline{\partial} : \mathcal{A}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M, T''M^* \otimes E)$$

por

$$\overline{\partial}(fs) = \overline{\partial}f \otimes s + f\overline{\partial}s.$$

El par $(H, \delta) = (T''M, \overline{\partial})$ es una conexión parcial en E.

Notemos que:

Si $U \subset M$ es abierto y $\Gamma(E_{|U})$ denota el espacio de secciones holomorfas de $E_{|U}$, entonces

$$\Gamma(E_{|U}) = \ker\left\{\overline{\partial} : \mathcal{A}^0(U,E) \longrightarrow \mathcal{A}^1((U, T''M^* \otimes E)_{|U})\right\}.$$

Dado un marco holomorfo $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ de E sobre el abierto trivializador U_α, se tiene que $\overline{\partial}(s_i^\alpha) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Si ∇ es una conexión en E que extiende a $(T''M, \overline{\partial})$, entonces, con respecto a cualquier marco holomorfo de E, la matriz $[\theta_{ij}^{\alpha}]$ de ∇ consiste de formas del tipo $(1,0)$.

Con respecto a una cubierta trivializadora $\{U_\alpha\}$ de E, como haz holomorfo, tenemos que $\nabla(s_i^\alpha) = \sum_j \theta_{ij}^{\alpha} \otimes s_j^\alpha$. La proyección

$$p : TM^* \longrightarrow T''M^*$$

está dada por

$$p(\theta_{ij}^{\alpha}) = p(\theta_{ij}^{(1,0)\alpha} + \theta_{ij}^{(0,1)\alpha}) = \theta_{ij}^{(0,1)\alpha}.$$

Luego, si ∇ extiende a $\overline{\partial}$, tenemos que

$$\overline{\partial}(s_i^{\alpha}) = \sum_j \theta_{ij}^{(0,1)\alpha} \otimes s_j^{\alpha} = 0,$$

lo que nos dice que $\theta_{ij}^{(0,1)\alpha} = 0$. Estas conexiones son llamadas del **tipo** $(1,0)$ o también **compatibles con la estructura compleja de** M.

Definición

La familia $h = \{h_z\}_{z\in M}$ es una **métrica hermitiana** *en E si:*

i) *h_z es un producto interno hermitiano en E_z.*

ii) *Si U_α es un abierto trivializador de E y $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ es un marco de E sobre U_α, entonces, las funciones*

$$\begin{array}{rccc} h_{ij}^\alpha : & U_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & h_z(s_i^\alpha(z), s_j^\alpha(z)) \end{array}$$

son de clase $\mathcal{C}^\infty$ para toda $1 \leq i, j \leq n$.

Definición

Un haz vectorial holomorfo equipado con una métrica hermitiana se llama **haz hermitiano***.*

Proposición

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta de M que trivializa a E, h_α es una métrica hermitiana en $E_{|U_\alpha}$ y $\{\rho_\alpha\}$ es una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Entonces,

$$h=\sum_{\alpha\in I}\rho_\alpha h_\alpha$$

es una métrica hermitiana en E.

Compatibilidad con la métrica

Dadas u y s secciones de E, denotaremos por $\langle u, s\rangle$ el producto interno de estas secciones; esto es, $\langle u(z), s(z)\rangle = h_z(u(z), s(z))$. Sea ∇ una conexión en un haz hermitiano E. Decimos que ∇ es compatible con la métrica si

$$d\,\langle u, s\rangle = \langle \nabla(u), s\rangle + \langle u, \nabla(s)\rangle\,.$$

Proposición

Si E es un haz hermitiano, entonces existe una única conexión ∇ en E que es compatible con la estructura compleja y con la métrica.

Utilizando técnicas de ecuaciones diferenciales parciales se puede probar(ver [SM 1]) que la la conexión queda determinada por:

$$\theta^{\alpha} = \partial h^{\alpha}(h^{\alpha})^{-1}.$$

▸ Ver demostración

Proposición

Si E es un haz hermitiano, entonces existe una única conexión ∇ en E que es compatible con la estructura compleja y con la métrica.

Utilizando técnicas de ecuaciones diferenciales parciales se puede probar(ver [SM 1]) que la la conexión queda determinada por:

$$\theta^{\alpha} = \partial h^{\alpha}(h^{\alpha})^{-1}.$$

▸ Ver demostración

Proposición

Si E es un haz hermitiano, entonces existe una única conexión ∇ en E que es compatible con la estructura compleja y con la métrica.

Utilizando técnicas de ecuaciones diferenciales parciales se puede probar(ver [SM 1]) que la la conexión queda determinada por:

$$\theta^{\alpha} = \partial h^{\alpha} (h^{\alpha})^{-1}.$$

▸ Ver demostración

Proposición

Si E es un haz hermitiano, entonces existe una única conexión ∇ en E que es compatible con la estructura compleja y con la métrica.

Utilizando técnicas de ecuaciones diferenciales parciales se puede probar(ver [SM 1]) que la la conexión queda determinada por:

$$\theta^{\alpha} = \partial h^{\alpha} (h^{\alpha})^{-1}.$$

▸ Ver demostración

Proposición

Si E es un haz hermitiano, entonces existe una única conexión ∇ en E que es compatible con la estructura compleja y con la métrica.

Utilizando técnicas de ecuaciones diferenciales parciales se puede probar(ver [SM 1]) que la la conexión queda determinada por:

$$\theta^\alpha = \partial h^\alpha (h^\alpha)^{-1}.$$

Ver demostración

Proposición

Si E es un haz hermitiano, entonces existe una única conexión ∇ en E que es compatible con la estructura compleja y con la métrica.

Utilizando técnicas de ecuaciones diferenciales parciales se puede probar(ver [SM 1]) que la la conexión queda determinada por:

$$\theta^{\alpha} = \partial h^{\alpha} (h^{\alpha})^{-1}.$$

Ver demostración

Por lo tanto la curvatura K_{∇_h} de la conexión métrica tiene una matriz local

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha = \partial\theta^\alpha + \overline{\partial}\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha = \overline{\partial}\theta^\alpha.$$

Luego,

$$\overline{\partial}\Theta^\alpha = 0.$$

Supongamos ahora que L es un haz holomorfo de rango 1 sobre M. Recordemos que si H_α es la métrica hermitiana en L, entonces, si $g_{\alpha\beta}$ son las funciones de transición (holomorfas) de L, tenemos que

$$H_\alpha = g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}H_\beta.$$

Ya que la curvatura K_{∇_H} está dada por las 2-formas del tipo $(1,1)$

$$\Phi^\alpha = \overline{\partial}\partial \log H_\alpha$$

entonces, la curvatura toma la forma

$$\Phi^\alpha = \sum_i \overline{\partial}\left(\frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_i^\alpha}\right) \wedge dz_i^\alpha = \sum_i \psi_i^\alpha \wedge dz_i^\alpha,$$

donde $\psi_i^\alpha = \overline{\partial}\left(\frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_i^\alpha}\right)$, para $1 \leq i \leq n$. Observemos que $\overline{\partial}\psi_i^\alpha = 0$.

Consideremos ahora la matriz $\Omega^\alpha = \left[\Omega^\alpha_{ij}\right]$, definida en U_α por

$$\Omega^\alpha_{ij} = \Theta^\alpha_{ij} - dz^\alpha_j \wedge \psi^\alpha_i, \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Lema

Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta trivializadora común a $T'M$ y L. Sea Ξ^α la matriz de (1,1) formas en U_α, definida por $\Xi^\alpha_{ij} = -dz^\alpha_j \wedge \psi^\alpha_i$, para $1 \leq i, j \leq n$. Si $B_{\alpha\beta}$ son las funciones de transición de $T'M$, entonces

$$\Xi^\alpha = B_{\alpha\beta}\Xi^\beta B^{-1}_{\alpha\beta}.$$

Consideremos el haz $T'M \otimes L$, cuyas funciones de transición son $B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$, ya que L tiene rango 1.
Luego, las matrices definidas por

$$\Omega^{\alpha} = \Theta^{\alpha} + \Xi^{\alpha}$$

satisfacen que

$$\Omega^{\alpha} = (B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta}) \Omega^{\beta} (B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta})^{-1}.$$

Consideremos una sección holomorfa ξ del haz $T'M \otimes L$. Si $\{U_\alpha\}$ es una cubierta trivializadora de $T'M$ y L, tomemos sobre cada U_α, coordenadas locales $z^\alpha = (z_1^\alpha, \ldots, z_n^\alpha)$ y el marco holomorfo $\{\partial/\partial z_1^\alpha, \ldots, \partial/\partial z_n^\alpha\}$ de $T'M$. En estas coordenadas tenemos que $\xi_{|U_\alpha}$ se escribe como

$$\xi^\alpha = \sum_i \xi_i^\alpha \frac{\partial}{z_i^\alpha},$$

donde ξ_i^α es una sección holomorfa de L, $1 \leq i \leq n$. Sea $p \in M$ un cero de ξ. Tomemos coordenadas en una vecindad de p tales que $z^\alpha(p) = 0$.

Proposición

Si P es un polinomio invariante, entonces,

$$P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_j^\alpha}(p)\right]\right) = P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial z_j^\beta}(p)\right]\right).$$

Esto es, el número

$$P(J(\xi)(p)) = P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_j^\alpha}(p)\right]\right) \in \mathbb{C}$$

no depende de las trivializaciones locales de $T'M \otimes L$.

La conexión métrica en $T'M \otimes L$ está dada por

$$\nabla = (\nabla_h \otimes 1) + (1 \otimes \nabla_H),$$

donde ∇_h y ∇_H son las conexiones métricas de $T'M$ y de L, respectivamente. Escribiendo la matriz de la conexión ∇_h en la forma

$$\theta_{ij}^{\alpha} = \sum_k \Gamma_{ik}^{\alpha j} dz_k,$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla(\xi^\alpha) &= \nabla\left(\sum_i \xi_i^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}\right)\right) \\ &= \sum_i \left(d\xi_i^\alpha + \xi_i^\alpha \partial \log H_\alpha + \sum_{j,k} \xi_i^\alpha \Gamma_{jk}^{\alpha i} dz_k^\alpha\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}. \end{aligned}$$

Dada $u \in \mathcal{A}^0(M, H)$, podemos definir una aplicación:

$$\begin{array}{rcl} i(u) : \mathcal{A}^0(M, H^* \otimes E) & \longrightarrow & \mathcal{A}^0(M, E) \\ \omega \otimes s & \longmapsto & \omega(u)s. \end{array}$$

Proposición

Definamos $E_k^{\alpha i}$ por

$$E_k^{\alpha i} = -\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_k^\alpha} - \xi_i^\alpha \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_k^\alpha} - \sum_j \Gamma_{kj}^{\alpha i} \xi_j^\alpha,$$

entonces

$$\overline{\partial} E_k^{\alpha i} = i(\xi^\alpha) \Omega_{ki}^\alpha.$$

Sea P un polinomio invariante de grado $n = \dim_{\mathbb{C}} M$. Por el lema 4.9 tenemos que $P(\Omega^\alpha) = P(\Omega^\beta)$. La colección $\{P(\Omega^\alpha)\}$ define una (n,n) forma global en M, que denotaremos por $P(\Omega)$. Sea $\widetilde{P}$ la polarización de P y sea

$$P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) = \binom{n}{r} \widetilde{P}(\underbrace{E^\alpha, \ldots, E^\alpha}_{n-r}, \underbrace{\Omega^\alpha, \ldots, \Omega^\alpha}_{r}), 0 \leq r \leq n$$

Tenemos que

$$\overline{\partial} P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) = \binom{n}{r} \sum_{r=1}^{n-1} \widetilde{P}(E^\alpha, \ldots, i(\xi^\alpha)(\Omega^\alpha), \ldots, E^\alpha, \Omega^\alpha, \ldots, \Omega^\alpha)$$

$$= i(\xi^\alpha) P_{r+1}(\Omega^\alpha, E^\alpha).$$

Ahora con lo obtenido hasta el momento, construiremos una forma que nos ayudara a decir quien es explícitamente $P(\Omega)$.

Sea ω una $(1,0)$ forma de la sección ξ, definida por:

$$\omega^\alpha = \frac{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}dz^\alpha_i}{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i},$$

fuera de los ceros de ξ.

Notemos que:

$$i(\xi^\alpha)\omega^\alpha = 1,$$

$$i(\xi^\alpha)\overline{\partial}\omega^\alpha = 0.$$

Sea Π_r^α la $(n, n-1)$ forma definida por:

$$\Pi_r^\alpha = \omega^\alpha \wedge \left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r-1} \wedge P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha), \ 1 \leq r \leq n-1.$$

Definamos también la $(n, n-1)$ forma Υ definida por:

$$\Upsilon^\alpha = -\sum_{r=0}^{n-1} \Pi_r^\alpha.$$

Para ver que $P(\Omega)$ es una forma exacta probaremos que $d\Upsilon = P(\Omega)$.

Para ver esto notemos que

$$i(\xi^\alpha)\left\{\overline{\partial}\left[\sum_{r=0}^{n-1}\Pi_r^\alpha\right] + P_n(\Omega^\alpha, E^\alpha)\right\} = 0.$$

Notemos que $P_n(\Omega^\alpha, E^\alpha) = P(\Omega)_{|U_\alpha}$.
Luego, $\overline{\partial}\left[\sum_{r=0}^{n-1} \Pi_r^\alpha\right] + P(\Omega)_{|U_\alpha}$ es una (n,n) forma en $U_\alpha \setminus \{p \in M : \xi(p) = 0\}$ y por el lema (**??**) tenemos que

$$P(\Omega)_{|U_\alpha} - \overline{\partial}\Upsilon^\alpha = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} d\Upsilon^\alpha &= \partial\Upsilon + \overline{\partial}\Upsilon \\ &= \overline{\partial}\Upsilon \\ &= P(\Omega)_{|U_\alpha}, \end{aligned}$$

en $U_\alpha \setminus \{p : \xi(p) = 0\}$.

Lema

Dado C_r polinomio simétrico elemental en la forma Ω, lo podemos escribir como

$$C_r(\Omega^\alpha) = \sum_{0 \leq s \leq r} C_s(\Theta^\alpha) \wedge (\Phi^\alpha)^{r-s} + \overline{\partial}\Lambda_r^\alpha, \tag{2}$$

donde las Λ_r^α son obtenidas de las formas de torsión.

Proposición

Sea P un polinomio invariante de grado n, entonces

$$\int_M P(\Omega)$$

es independiente de las métricas hermitianas elegidas.

$$\int_M C^{\nu}(\Omega) = \int_M (C^{\nu}(K_h, K_H) + d\Psi_{\nu}) = \int_M C^{\nu}(K_h, K_H). \tag{3}$$

Teorema (Teorema de Baum-Bott)

Sea M una variedad compleja, compacta de dimensión n, L un haz holomorfo de rango 1 sobre M y ξ una sección holomorfa de $T'M \otimes L$, cuyos ceros son aislados y no degenerados. Consideremos las clases de Chern del haz virtual $TM - L^*$:

$$c^{\nu}(TM - L^*) = c_1^{\nu_1}(TM - L^*) \dots c_n^{\nu_n}(TM - L^*)$$

donde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $n = \nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n$ entonces

$$\int_M c^{\nu}(T'M - L^*) = \sum_{\{p : \xi(p) = 0\}} \frac{C^{\nu}(J\xi(p))}{\det J\xi(p)}$$

Sea M una variedad compleja de dimensión $n \geq 2$.

Definición

Una foliación holomorfa no singular de dimensión k*(o codimensión* $n-k$*) en* M*, donde* $1 \leq k \leq n-1$*, esta dada por:*

(a) *una cubierta* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *de* M *por abiertos;*

Sea M una variedad compleja de dimensión $n \geq 2$.

Definición

Una foliación holomorfa no singular de dimensión k(o codimensión $n-k$) en M, donde $1 \leq k \leq n-1$, esta dada por:

(a) *una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abiertos;*

(b) *para cada $\alpha \in A$, tenemos un biholomorfismo $\Phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$, donde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ es un disco unitario en el origen;*

Sea M una variedad compleja de dimensión $n \geq 2$.

Definición

Una foliación holomorfa no singular de dimensión k(o codimensión $n-k$) en M, donde $1 \leq k \leq n-1$, esta dada por:

(a) *una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abiertos;*

(b) *para cada $\alpha \in A$, tenemos un biholomorfismo $\Phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$, donde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ es un disco unitario en el origen;*

(c) *siempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\alpha\beta} : & \Phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) & \longrightarrow & \Phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \\ & (z,w) & \longmapsto & \Phi_\beta \circ \Phi_{\alpha^{-1}}(z,w) = (\varphi_1, \varphi_2) \end{array}$$

satisface que $\Phi_{\alpha\beta}(z,w) = (\varphi_1(z,w), \varphi_2(w))$.

Las placas de nuestra foliación:

Cada abierto U_α es llamado es llamado abierto trivializador de la foliación. Por (b), U_α esta descompuesto en variedades de dimensión k de la forma $\Phi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}^k \times w_0)$, donde $w_0 \in \mathbb{D}^{n-k}$, llamadas placas. Por (c), las placas se sobreponen en las intersecciones de los abiertos trivializadores de la siguiente forma: si $P_\alpha \subset U_\alpha$ y $P_\beta \subset U_\beta$ son placas, entonces $P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset$, o $P_\alpha \cap P_\beta = P_\alpha \cap U_\beta = P_\beta \cap U_\alpha$.

Las hojas de nuestra foliación:

Definimos la siguiente relación de equivalencia en $M : p \sim q$ si existen placas $P_1, \ldots, P_n$, con $p \in P_1$ y $q \in P_n$ tales que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n-1$. La clase de equivalencia de $p \in M$ por esta relación es llamada la hoja por p. cada hoja, con la topología generada por los abiertos de sus placas, posee estructura de variedad compleja de dimensión k inmersa en M. Una foliación proporciona por lo tanto, una descomposición de la variedad en subvariedades inmersas de dimensión k, dos a dos disjuntas. El espacio tangente a la foliación $\mathcal{F}$ en $p \in M$, denotado por $T_p\mathcal{F}$, esta definido como el espacio tangente, en el punto p, a la hoja que pasa por ese punto. Tiene, por lo tanto, dimensión k. Decimos que dos foliaciones son iguales si todas sus hojas coinciden.

Proposición (Definición equivalente)

Mostrar que una foliación puede estar dada definida por el siguiente conjunto:

Proposición (Definición equivalente)

Mostrar que una foliación puede estar dada definida por el siguiente conjunto:

(a) *una cubierta* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *de* M *por abiertos;*

Proposición (Definición equivalente)

Mostrar que una foliación puede estar dada definida por el siguiente conjunto:

(a) *una cubierta* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *de* M *por abiertos;*

(b) *para cada* $\alpha \in A$, *existe una submersión holomorfa* $\Psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^{n-k}$;

Proposición (Definición equivalente)

Mostrar que una foliación puede estar dada definida por el siguiente conjunto:

(a) *una cubierta* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *de* M *por abiertos;*

(b) *para cada* $\alpha \in A$*, existe una submersión holomorfa* $\Psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^{n-k}$*;*

(c) *siempre que* $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$*, tenemos una aplicación holomorfa*

$$\Psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

que satisface $\Psi_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = \Psi_{\alpha\beta}\Psi_{\beta|U_{\alpha\beta}}$.

Observación 1:

Sea v un campo de vectores holomorfos no singular en un abierto $U \subset M$, entonces el teorema del flujo tubular holomorfo implica que U posee una estructura de foliación holomorfa de dimensión 1.

Observación 2:

Si $\widetilde{U} \subset M$ es un abierto tal que $U \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$, entonces admite un campo de vectores no singular $\widetilde{v}$ que satisface $v_{|U\cap\widetilde{U}} = f\widetilde{v}_{|U\cap\widetilde{U}}$ para alguna función $f : U \cap \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorfa, entonces v y $\widetilde{v}$ inducen una misma foliación en $U \cap \widetilde{U}$. Tenemos así una foliación definida en $U \cap \widetilde{U}$. Recíprocamente, una foliación de dimensión 1 esta inducida localmente por campos de vectores no singulares.

Observación 3:

El siguiente conjunto:

Observación 3:

El siguiente conjunto:

(a) una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abiertos;

Observación 3:

El siguiente conjunto:

(a) una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abiertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, existe un campo de vectores holomorfos no singular v_α en U_α;

Observación 3:

El siguiente conjunto:

(a) una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M por abiertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, existe un campo de vectores holomorfos no singular v_α en U_α;

(c) siempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tenemos una función holomorfa

$$f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

tal que $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_{\beta|U_{\alpha\beta}}$.

Observación 3:

El siguiente conjunto:

(a) una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abiertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, existe un campo de vectores holomorfos no singular v_α en U_α;

(c) siempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tenemos una función holomorfa

$$f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

tal que $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_{\beta|U_{\alpha\beta}}$.

define una foliación de dimensión 1 en M.

Definición

Una foliación holomorfa singular de dimensión k (o codimensión $n-k$), donde $1 \leq k \leq n-1$, en una variedad compleja M es una foliación no singular de dimensión k en $M \setminus S$, donde S es un conjunto analítico en M de codimensión mayor o igual que 2.

Definición

Una foliación holomorfa singular de dimensión k (o codimensión $n-k$), donde $1 \leq k \leq n-1$, en una variedad compleja M es una foliación no singular de dimensión k en $M \setminus S$, donde S es un conjunto analítico en M de codimensión mayor o igual que 2.

En nuestro caso:

Exigiremos, aún más, que el conjunto S de la definición de arriba sea minimal en el siguiente sentido: no existe subconjunto analítico $S' \subset S$ tal que la foliación regular en $M \setminus S$ se extiende a $M \setminus S'$. Bajo estas condiciones, S es llamado el conjunto singular de la foliación. El conjunto singular de la foliación $\mathcal{F}$ es denotado por $Sing(\mathcal{F})$.

Los elementos de $Sing(\mathcal{F})$ son llamados puntos singulares o singularidades, en cuanto a los elementos de $M \setminus Sing(\mathcal{F})$ son llamados puntos regulares. Las hojas de $\mathcal{F}$ son, por definición, las hojas de la foliación regular $\mathcal{F}_{|M\setminus Sing(\mathcal{F})}$. Dos foliaciones singulares $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son iguales si:

De ahora en adelante, usaremos el termino foliación para designar foliación holomorfa singular.

Los elementos de $Sing(\mathcal{F})$ son llamados puntos singulares o singularidades, en cuanto a los elementos de $M \setminus Sing(\mathcal{F})$ son llamados puntos regulares. Las hojas de $\mathcal{F}$ son, por definición, las hojas de la foliación regular $\mathcal{F}_{|M \setminus Sing(\mathcal{F})}$. Dos foliaciones singulares $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son iguales si:

(i) $Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}')$;

De ahora en adelante, usaremos el termino foliación para designar foliación holomorfa singular.

Los elementos de $Sing(\mathcal{F})$ son llamados puntos singulares o singularidades, en cuanto a los elementos de $M \setminus Sing(\mathcal{F})$ son llamados puntos regulares. Las hojas de $\mathcal{F}$ son, por definición, las hojas de la foliación regular $\mathcal{F}_{|M\setminus Sing(\mathcal{F})}$. Dos foliaciones singulares $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son iguales si:

(i) $Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}')$;

(ii) las foliaciones regulares $\mathcal{F}_{|M\setminus Sing(\mathcal{F})}$ y $\mathcal{F}'_{|M\setminus Sing(\mathcal{F}')}$ son iguales;

De ahora en adelante, usaremos el termino foliación para designar foliación holomorfa singular.

Proposición

Toda foliación de dimensión 1 es inducida por un campo de vectores holomorfo.

Por esta última afirmación

Resulta que una foliación holomorfa de dimensión 1 en una variedad compleja M esta definida por el siguiente conjunto de datos:

(a) una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abiertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, existe un campo de vectores holomorfos v_α en U_α cuyo conjunto singular tiene codimensión mayor o igual a 2;

(c) siempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tenemos una función holomorfa

$$f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

tal que

Ahora la versión "dual"

Una foliación de codimensión 1 en una variedad compleja M esta definida por el siguiente conjunto:

Ahora la versión "dual"

Una foliación de codimensión 1 en una variedad compleja M esta definida por el siguiente conjunto:

(a) una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abiertos;

Ahora la versión "dual"

Una foliación de codimensión 1 en una variedad compleja M esta definida por el siguiente conjunto:

(a) una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abiertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, existe una 1-forma integrable ω_α en U_α cuyo conjunto singular tiene codimensión mayor o igual a 2;

Ahora la versión "dual"

Una foliación de codimensión 1 en una variedad compleja M esta definida por el siguiente conjunto:

(a) una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M por abiertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, existe una 1-forma integrable ω_α en U_α cuyo conjunto singular tiene codimensión mayor o igual a 2;

(c) siempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tenemos una función holomorfa

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

tal que $\omega_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta}\omega_{\beta|U_{\alpha\beta}}$.

Definición

Sea $\mathcal{F}$ una foliación de dimensión 1 en una variedad compleja M. Dado $p \in M$, la multiplicidad algebraica o simplemente la multiplicidad de $\mathcal{F}$ en p, denotada por $m_p(\mathcal{F})$, es la multiplicidad en p de algún campo holomorfo que induce $\mathcal{F}$ en un entorno de p.

Asociando un haz a una foliación:

Sea M una variedad compleja y $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de dimensión 1 sobre M. Tomamos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta de M por abiertos tales que para cada $\alpha \in A$, $\mathcal{F}_{|U_\alpha}$ esta inducida por un campo holomorfa v_α. Ahora siempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, existe $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$ tal que $v_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta$. El cociclo $(f_{\alpha\beta})$ induce un haz lineal holomorfo sobre M, el haz cotangente a $\mathcal{F}$, denotado por $T^*_{\mathcal{F}}$. Su dual $(T^*_{\mathcal{F}})^*$ es llamado el haz tangente a $\mathcal{F}$, y este no depende de la cubierta hasta isomorfismo.

Proposición

Existe una aplicación de haces $f : T_{\mathcal{F}} \longrightarrow TM$ tal que:

Además, si $\tilde{f} : T_{\mathcal{F}} \longrightarrow TM$ es una aplicación de haces que satisface (a), entonces existe $h \in \mathcal{O}^*(M)$ tal que $\tilde{f} = hf$.

Corolario

$\mathcal{F}$ es una foliación no singular si, y solamente si, $T_{\mathcal{F}}$ es subhaz de TM.

Proposición

Existe una aplicación de haces $f : T_{\mathcal{F}} \longrightarrow TM$ *tal que:*

(a) $\forall p \in M \setminus Sing(F)$, $f_{|(T_{\mathcal{F}})_p}$ *es inyectiva y* $f((T_{\mathcal{F}})_p)$ *es el haz tangente a la foliación* $\mathcal{F}$ *en* p;

Además, si $\tilde{f} : T_{\mathcal{F}} \longrightarrow TM$ *es una aplicación de haces que satisface (a), entonces existe* $h \in \mathcal{O}^*(M)$ *tal que* $\tilde{f} = hf$.

Corolario

$\mathcal{F}$ *es una foliación no singular si, y solamente si,* $T_{\mathcal{F}}$ *es subhaz de* TM.

Proposición

Existe una aplicación de haces $f : T_{\mathcal{F}} \longrightarrow TM$ *tal que:*

(a) $\forall p \in M \setminus Sing(F)$, $f_{|(T_{\mathcal{F}})_p}$ *es inyectiva y* $f((T_{\mathcal{F}})_p)$ *es el haz tangente a la foliación* $\mathcal{F}$ *en* p;

(b) $p \in Sing(\mathcal{F})$ *si, y solamente si,* $f_{|(T_{\mathcal{F}})_p} \equiv 0$.

Además, si $\tilde{f} : T_{\mathcal{F}} \longrightarrow TM$ *es una aplicación de haces que satisface (a), entonces existe* $h \in \mathcal{O}^*(M)$ *tal que* $\tilde{f} = hf$.

Corolario

$\mathcal{F}$ *es una foliación no singular si, y solamente si,* $T_{\mathcal{F}}$ *es subhaz de* TM.

Proposición

Existe una aplicación de haces $g : N^*_{\mathcal{F}} \longrightarrow T^*M$ *tal que:*

Además, si $\tilde{g} : N^*_{\mathcal{F}} \longrightarrow T^*M$ *es una aplicación de haces que satisface (a), entonces existe* $h \in \mathcal{O}^*(M)$ *tal que* $\tilde{g} = hg$.

Corolario

$\mathcal{F}$ *es foliación no singular si, y solamente si,* $N^*_{\mathcal{F}}$ *es subhaz de* T^*M.

Proposición

Existe una aplicación de haces $g : N^*_{\mathcal{F}} \longrightarrow T^*M$ *tal que:*

(a) $\forall p \in M \setminus Sing(F)$, $g_{|(N^*_{\mathcal{F}})_p}$ *es inyectiva y el espacio tangente a* $\mathcal{F}$ *en* p *coincide con el núcleo de cada elemento no nulo de* $g((N^*_{\mathcal{F}})_p)$*;*

Además, si $\tilde{g} : N^*_{\mathcal{F}} \longrightarrow T^*M$ *es una aplicación de haces que satisface (a), entonces existe* $h \in \mathcal{O}^*(M)$ *tal que* $\tilde{g} = hg$.

Corolario

$\mathcal{F}$ *es foliación no singular si, y solamente si,* $N^*_{\mathcal{F}}$ *es subhaz de* T^*M.

Proposición

Existe una aplicación de haces $g : N^*_{\mathcal{F}} \longrightarrow T^*M$ tal que:

(a) $\forall p \in M \setminus Sing(F)$, $g_{|(N^*_{\mathcal{F}})_p}$ *es inyectiva y el espacio tangente a* $\mathcal{F}$ *en* p *coincide con el núcleo de cada elemento no nulo de* $g((N^*_{\mathcal{F}})_p)$*;*

(b) $p \in Sing(\mathcal{F})$ *si, y solamente si,* $g_{|(N^*_{\mathcal{F}})_p} \equiv 0$.

Además, si $\tilde{g} : N^*_{\mathcal{F}} \longrightarrow T^*M$ *es una aplicación de haces que satisface (a), entonces existe* $h \in \mathcal{O}^*(M)$ *tal que* $\tilde{g} = hg$.

Corolario

$\mathcal{F}$ *es foliación no singular si, y solamente si,* $N^*_{\mathcal{F}}$ *es subhaz de* T^*M.

Lema

$$K_M = T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}},$$

donde K_M es el haz canónico de M.

Lema

$$K_M = T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}},$$

donde K_M es el haz canónico de M.

Demostración.

$\square$

Lema

$$K_M = T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}},$$

donde K_M es el haz canónico de M.

Demostración.

$$\mathcal{O}(K_M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(T_{\mathcal{F}}), \mathcal{O}(N^*_{\mathcal{F}}))$$

□

Lema

$$K_M = T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}},$$

donde K_M es el haz canónico de M.

Demostración.

$$\mathcal{O}(K_M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(T_{\mathcal{F}}), \mathcal{O}(N^*_{\mathcal{F}}))$$

Y tenemos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(T_{\mathcal{F}}), \mathcal{O}(N^*_{\mathcal{F}})) \cong \mathcal{O}(T^*_{\mathcal{F}}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(N^*_{\mathcal{F}})$$

□

Corolario

$$c_1(M) = c_1(T_{\mathcal{F}}) + c_1(N_{\mathcal{F}}).$$

Demostración.

Primero, sabemos que $c_1(K_M) = -c_1(M)$.
Ahora por propiedades de las clases de Chern tenemos que

$$c_1(T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}}) = c_1(T^*_{\mathcal{F}}) + c_1(N^*_{\mathcal{F}})$$

$$= -c_1(T_{\mathcal{F}}) - c_1(N_{\mathcal{F}})$$

□

Dada una foliación $\mathcal{F}$ de dimensión 1 sobre $\mathbb{P}^n$. Supongamos que $\mathcal{F}$ es de grado $d \geq 2$, la cual denotaremos por $\mathcal{F}^d$. Su haz tangente es $T_{\mathcal{F}} \cong \mathbb{L}(1-d)$. Supongamos que $Sing(\mathcal{F}^d)$, es un conjunto finito. Entonces podemos tomar un hiperplano en $\mathbb{P}^n$ que no es invariante por $\mathcal{F}^d$ y no contiene puntos de $Sing(\mathcal{F}^d)$, que denotaremos por H_∞. Entonces en $\mathbb{P}^n \setminus H_\infty$, $\mathcal{F}^d$ esta dada por un campo polinomial de la forma:

$$X = G\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + z_n\frac{\partial}{\partial z_n} + Q_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + Q_n\frac{\partial}{\partial z_n}\right),$$

donde $G \not\equiv 0$ es homogéneo de grado d y, Q_i son polinomios de grado $\leq d$. Supongamos que $\mathcal{F}^d$ es no degenerada, es decir el campo que la genera a la foliación es no degenerado.

Lema

Sea $d \in \mathbb{Z}$ con $d \geq 2$, entonces tenemos que

$$1 + d + d^2 + \cdots + d^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{n-j} (d-1)^j.$$

¿Donde utilizo esto?

En el caso de haces vectoriales de dimensión 1 tenemos que: Estos productos ya han manifestado su poder en las aplicaciones a la física: el espacio de la mecánica Newtoniana [Arnold, I. Mathematical Methods of the Classical Mechanics, Springer.] es el producto de tres copias de los números reales $\mathbb{R}$, el espacio de la configuración de la mecánica Lagrangiana [Goldstein. Mecánica Clásica. Aguilar.] es un producto de f copias de $\mathbb{R}$, siendo f el número de grados de libertad del sistema en consideración y el espacio de fase del mismo tiene 2f copias. En la mecánica cuántica no relativista se utiliza un producto de infinitas copias de R en una estructura llamada espacio de Hilbert [Dirac, P. Principios de la mecánica cuántica.].

Mundo real

Si representamos el tiempo con una copia de $\mathbb{R}$ y con $\mathbb{R}^3$ el espacio de tres dimensiones en que estamos ubicados y queremos describir el movimiento de un objeto pensado en un punto, debemos asignarle una posición (respecto a un sistema coordenado) en cada instante de tiempo. Es decir, sobre cada instante de tiempo ponemos una copia de $\mathbb{R}^3$, es decir, hacemos un haz vectorial con base $\mathbb{R}$ y fibra $\mathbb{R}^3$
Notemos que esto no es exactamente $\mathbb{R}^4$ pues físicamente tres de las copias tienen unidades de espacio y una tiene unidades de tiempo y por ahora no podemos resolverlo.
Esto se resuelve sin embargo en la cinemática relativista multiplicando la escala de tiempo por un factor constante y universal c que tiene unidades de velocidad (la velocidad de la luz). El espacio resultante se llama espacio–tiempo de Minkowski y tiene

Mundo real parte 2

Una sección s de un haz vectorial (E, p, B) es una aplicación que asigna a cada punto del conjunto base B un punto $s(x)$ sobre la fibra $p^{-1}(x)$ de tal manera que $p \circ s(x) = x$.
La existencia de secciones globales en general depende de la geometría del haz. Por ejemplo no existe una sección global sobre la banda de Möbius que conecte un punto al lado de la línea media con un punto en el otro lado y que no toque la línea media.
Estas obstrucciones que impiden construir secciones globales están vinculadas con la topología y la geometría del haz y da lugar a las llamadas clases características de las cuales una de las más conocidas es la característica de Euler [Graham, F. From geometry to topology, Crane (1974).] que determina la existencia de secciones globales no nulas en el haz tangente a una variedad (llamada campos vectoriales), ellas existen si su característica de

- M. Atiyah & I. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, London, 1969.
- R. Bott, *Vector Fields and characteristic numbers*, Mich. Math. J. 14 (1967), 231-244.
- M. Brunella, *Birrational geometry of foliations, First Latin American Congress of Mathematicians*, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.
- P. Baum & R. Bott, *On the zeros of meromorphic vector Fields, Essays on Topology and Related Topics.* Springer-Verlag, New York, 1970, 29-47.
- P. Baum & R. Bott, *Singularities of holomorphic foliations*, J. Diff. Geom. 7(1972), 279-342.

- Omegar Calvo Andrade *El espacio de foliaciones holomorfas de codimensión uno*. Tordesillas 2003.
- Do Carmo, Manfredo *Differential Geometry Of Curves And Surfaces*. Alianza , año.
- S.S. Chern, *Meromorphic vector fields and characteristic numbers, Selected Papers*. Springer–Verlag, New York, 1978, 435-443.
- D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geo- metry*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- Gomez-Mont, Xavier *Sistemas Dinamicos Holmorfos en Superficies*. Editorial, año.
- R. Gunning, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton University Press, Princeton, 1966.

- Phillip Griffiths & Joseph Harris. *Priciples of Algebraic Geometry*. Harvard University John Wiley & Sons, 1978.
- Daniel Huybrechts *Complex Geometry An Introduction*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- Lawson, H. Blaine *The Quantitative Theory of Foliations*. Editorial, año.
- Márcio G. Soares *Lectures on Point Residues*.Belo Horizonte, 2002.
- Michael Spivak *Cálculo en Variedades*. Reverté, S. A., 1988.
- Márcio G. Soares & Rogério S. Mol, *Indices de Campos Holomorfos y Aplicaciones*. Belo Horizonte, 2001.

Puntos claves de la demostración:

Dado P, escribimos $P(A) = P([a_{ij}])$ y $B = [\partial P / \partial a_{ij}]$. Observemos que

$$dP([a_{i,j}]) = \sum_{i,j} \frac{\partial P}{\partial a_{i,j}} da_{i,j}.$$

$$dP(A) = tr(B^T dA) \qquad (*)$$

$$AB^T = B^T A \qquad (**)$$

Regresar al lema

Puntos claves de la demostración:

Dado P, escribimos $P(A) = P([a_{ij}])$ y $B = [\partial P / \partial a_{ij}]$. Observemos que

$$dP([a_{i,j}]) = \sum_{i,j} \frac{\partial P}{\partial a_{i,j}} da_{i,j}.$$

$$dP(A) = tr(B^T dA) \qquad (*)$$

$$AB^T = B^T A \qquad (**)$$

Regresar al lema

Para demostrar la última igualdad:

Consideremos la matriz $E_{ji} = [e_{rs}]$, donde $e_{rs} = \delta_{jr}\delta_{is}$. Como $P((I + tE_{ji})A) = P(A(I + tE_{ji}))$ tenemos que derivando la relación en t y evaluando en $t = 0$, obtenemos que

$$\sum_s a_{is} \frac{\partial P}{\partial a_{js}} = \sum_r \frac{\partial P}{\partial a_{ri}} a_{rj}$$

ahora notemos que

$$(AB^T)_{ij} = \sum_s A_{is} B^T_{sj} = \sum_s a_{is} \frac{\partial P}{\partial a_{js}}$$

$$(B^T A)_{ij} = \sum_r B^T_{ir} A_{rj} = \sum_r \frac{\partial P}{\partial a_{ri}} a_{rj}$$

por lo tanto

Tomemos un abierto trivializador U_α de E y sea θ^α y $\Theta^\alpha = [\Theta^\alpha_{ij}]$ las matrices de ∇ y de K_∇ respecto a un sistema de coordenadas en U_α. Entonces denotando $B = \left[\partial P/\partial\Theta^\alpha_{ij}\right]$, (notemos que B es una matriz cuyas entradas son formas de grado par) tenemos por (*) que

$$dP(\Theta^\alpha) = tr(B^T \wedge d\Theta^\alpha) \qquad (***)$$

Como $\Theta^\alpha_{ij} = d\theta^\alpha_{ij} - \sum_k \theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj}$ tenemos que

$$d\Theta^\alpha = \theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha$$

Por último:

Ahora substituyendo en (***) tenemos que

$$dP(\Theta^\alpha) = tr(B^T \wedge (\theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha))$$

$$= tr(B^T \wedge \theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - B^T \wedge \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)$$

y por (**)

$$= tr((B^T \wedge \theta^\alpha) \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge (B^T \wedge \theta^\alpha))$$

lo que implica que

$$dP(\Theta^\alpha) = \sum_{i,k}((B^T \wedge \theta^\alpha)_{ik} \wedge \Theta^\alpha_{ki} - \Theta^\alpha_{ki} \wedge (B^T \wedge \theta^\alpha)_{ik})$$

pero Θ^α_{ki} es una dos forma, lo que implica que Θ^α_{ki} conmuta con

Puntos importantes de la demostración

Sea ahora $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial complejo de rango n sobre una variedad compleja M. Entonces

$$E \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{\pi \times id} M \times \mathbb{R}^q$$

define un haz vectorial sobre $M \times \mathbb{R}^q$ cuya fibra tiene la misma dimensión que la fibra de E. Tomando una cubierta trivializadora $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, común a E y $TM^{\mathbb{C}}$, en un sistema de coordenadas locales $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$, tenemos que las secciones de $(E \times \mathbb{R}^q)_{|U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{C}^n$ se expresan de la forma $(x^\alpha, t) \mapsto \sum_i f(x^\alpha, t) s_i^\alpha$, donde $t = (t_1, \ldots, t_q)$.
Tomemos 2 conexiones ∇^0, ∇^1 sobre E y consideremos la suma convexa

$$\nabla_c = (1 - t_1)\nabla^0 + t_1 \nabla^1.$$

Puntos importantes de la demostración

Sea ahora $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial complejo de rango n sobre una variedad compleja M. Entonces

$$E \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{\pi \times id} M \times \mathbb{R}^q$$

define un haz vectorial sobre $M \times \mathbb{R}^q$ cuya fibra tiene la misma dimensión que la fibra de E. Tomando una cubierta trivializadora $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, común a E y $TM^{\mathbb{C}}$, en un sistema de coordenadas locales $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$, tenemos que las secciones de $(E \times \mathbb{R}^q)_{|U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{C}^n$ se expresan de la forma $(x^\alpha, t) \mapsto \sum_i f(x^\alpha, t) s_i^\alpha$, donde $t = (t_1, \ldots, t_q)$.
Tomemos 2 conexiones ∇^0, ∇^1 sobre E y consideremos la suma convexa

$$\nabla_c = (1 - t_1)\nabla^0 + t_1 \nabla^1.$$

Puntos importantes de la demostración

Sea ahora $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial complejo de rango n sobre una variedad compleja M. Entonces

$$E \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{\pi \times id} M \times \mathbb{R}^q$$

define un haz vectorial sobre $M \times \mathbb{R}^q$ cuya fibra tiene la misma dimensión que la fibra de E. Tomando una cubierta trivializadora $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, común a E y $TM^{\mathbb{C}}$, en un sistema de coordenadas locales $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$, tenemos que las secciones de $(E \times \mathbb{R}^q)_{|U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{C}^n$ se expresan de la forma $(x^\alpha, t) \mapsto \sum_i f(x^\alpha, t) s_i^\alpha$, donde $t = (t_1, \ldots, t_q)$.
Tomemos 2 conexiones ∇^0, ∇^1 sobre E y consideremos la suma convexa

$$\nabla_c = (1 - t_1)\nabla^0 + t_1 \nabla^1.$$

∇_c define una conexión sobre $E \times \mathbb{R}^1$, cuya matriz sobre U_α es

$$\theta_c^\alpha = (1 - t_1)\theta^{0,\alpha} + t_1\theta^{1,\alpha}.$$

Similarmente a como calculamos la matriz de curvatura asociada a una conexión podemos calcular Θ_c de la siguiente manera. La curvatura K_{∇_c} en U_α esta entonces dada por

$$\Theta_c^\alpha = d\theta_c^\alpha - \theta_c^\alpha \wedge \theta_c^\alpha.$$

Recordemos que $I(n, \mathcal{C})$ denota el álgebra de polinomios invariantes.

Definamos

$$\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1) : I(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{A}^*(M)$$

por

$$\mathcal{P}(\nabla^0)(P) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} P(K_{\nabla^0}),$$

donde grP denota el grado de Py por

$$\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P) = (-1)^{[1/2]} \wp_*^{\Delta^1}(\mathcal{P}(\nabla^{0,1}),$$

donde $\wp_*^{\Delta^1} : \mathcal{A}^*(M \times \mathbb{R}^1) \longrightarrow \mathcal{A}^{*-1}(M)$ es la integración a lo largo de las fibras.

Vamos a examinar a $\mathcal{P}$ más detalladamente.

Todo se reduce simplemente a

$$\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P) = \wp_*^{\Delta^1}(\mathcal{P}(\nabla^{0,1})(P)) = \wp_*^{\Delta^1}\left(\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} P(K_{\nabla^{0,1}})\right).$$

Por el lema 3.5 tenemos que $dP(K_{\nabla^{0,1}}) = 0$ y aplicando la proposición 3.6,

$$d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P)) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} d(\wp_*^{\Delta^1} P(K_{\nabla^{0,1}})) =$$

$$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} \wp_*^{\partial\Delta^1}(i^* P(K_{\nabla^{0,1}})).$$

Ahora por una versión combinatoria del teorema de Stokes,

$$\wp_*^{\partial\Delta^1} \circ i^* = \sum_{j=0}^{1} (-1)^j \wp_*^{\Delta^1(j)} = i_0^* - i_1^*,$$

donde $i_j : M \longrightarrow M \times [0,1]$ es la inclusión $i_j(x) = (x,j)$. Luego,

$$d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P)) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} (i_0^* P(K_{\nabla^{0,1}}) - i_1^* P(K_{\nabla^{0,1}}))$$

$$= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} (P(K_{\nabla^0}) - P(K_{\nabla^1}))$$

$$= \mathcal{P}(\nabla^0)(P) - \mathcal{P}(\nabla^1)(P).$$

En particular, las formas cerradas $P(K_{\nabla^0})$ y $P(K_{\nabla^1})$ difieren en menos de la constante

Como vimos en el ejemplo 5, $(T''M, \overline{\partial})$ es una conexión en E que admite una extensión ∇ compatible con la estructura compleja, pues es del tipo $(1,0)$(Ver Lema 4.3). Sea $s^{\alpha} = (s_1^{\alpha}, \ldots, s_k^{\alpha})$ un marco local de E sobre U_{α}.

Regresar a la proposición

Como vimos en el ejemplo 5, $(T''M, \overline{\partial})$ es una conexión en E que admite una extensión ∇ compatible con la estructura compleja, pues es del tipo $(1,0)$(Ver Lema 4.3). Sea $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_k^\alpha)$ un marco local de E sobre U_α.

◂ Regresar a la proposición

Como vimos en el ejemplo 5, $(T''M, \overline{\partial})$ es una conexión en E que admite una extensión ∇ compatible con la estructura compleja, pues es del tipo $(1,0)$(Ver Lema 4.3). Sea $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_k^\alpha)$ un marco local de E sobre U_α.

Regresar a la proposición

Como vimos en el ejemplo 5, $(T''M, \overline{\partial})$ es una conexión en E que admite una extensión ∇ compatible con la estructura compleja, pues es del tipo $(1,0)$(Ver Lema 4.3). Sea $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_k^\alpha)$ un marco local de E sobre U_α.

Regresar a la proposición

Como vimos en el ejemplo 5, $(T''M, \overline{\partial})$ es una conexión en E que admite una extensión ∇ compatible con la estructura compleja, pues es del tipo $(1,0)$(Ver Lema 4.3). Sea $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_k^\alpha)$ un marco local de E sobre U_α.

Regresar a la proposición

Sea $\theta^\alpha = [\theta^\alpha_{ij}]$ la matriz de ∇, relativa al marco U_α. Supongamos que se cumple la condición de compatibilidad con la métrica. Como θ^α_{ij} es una $(1,0)$ forma

$$
\begin{aligned}
dh^\alpha_{ij} &= d\left\langle s^\alpha_i, s^\alpha_j \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla(s^\alpha_i), s^\alpha_j \right\rangle + \left\langle s^\alpha_i, \nabla(s^\alpha_j) \right\rangle \\
&= \left\langle [\theta^\alpha_{ij}] s^\alpha_i, s^\alpha_j \right\rangle + \left\langle s^\alpha_i, [\theta^\alpha_{ij}] s^\alpha_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{m=1}^n \theta^\alpha_{im} \otimes s^\alpha_m, s^\alpha_j \right\rangle + \left\langle s^\alpha_i, \sum_{m=1}^n \theta^\alpha_{jm} \otimes s^\alpha_m \right\rangle \\
&= \sum_{m=1}^n \theta^\alpha_{im} \left\langle s^\alpha_m, s^\alpha_j \right\rangle + \sum_{m=1}^n \overline{\theta^\alpha_{jm}} \left\langle s^\alpha_i, s^\alpha_m \right\rangle \\
&= \sum_m \theta^\alpha_{im} h^\alpha_{mj} + \sum_m \overline{\theta^\alpha_{jm}} h^\alpha_{im}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, como $dh^{\alpha}_{ij} = \partial h^{\alpha}_{ij} + \overline{\partial h^{\alpha}_{ij}}$, comparando los tipos de formas en cada lado de la igualdad anterior, obtenemos que:

$$\partial h^{\alpha}_{ij} = \sum_{m} \theta^{\alpha}_{im} h^{\alpha}_{mj};$$

i.e.,

$$\partial h^{\alpha} = \theta^{\alpha} h^{\alpha}.$$

También,

$$\overline{\partial} h^{\alpha}_{ij} = \sum_{m} \overline{\theta^{\alpha}_{jm}} h^{\alpha}_{im},$$

implica que

$$\overline{\partial} h^{\alpha} = (h^{\alpha})^{T} \overline{\theta^{\alpha}}.$$

Utilizando técnicas de ecuaciones diferenciales parciales se puede probar(ver [SM 1]) que la única solución del sistema es

$$\theta^{\alpha} = \partial h^{\alpha} (h^{\alpha})^{-1}.$$