Tesis que para obtener el grado de
Licenciatura en Matemáticas
Presenta

José Luis Alonzo Velázquez

29 de Abril de 2009

Índice general

Introducción

El objetivo de esta tesis es demostrar el teorema de Baum–Bott(1970), dicho teorema nos dice que dada una variedad compleja compacta, al considerar una descomposición de la variedad en subvariedades de menor dimensión podemos encontrar ciertos invariantes topológicos

Recordando el teorema de Gauss–Bonnet en geometría diferencial es una proposición importante sobre superficies que conecta su geometría (utilizando explícitamente su curvatura) con su topología (utilizando la característica de Euler). Por otro lado, Heinz Hopf nos dice que el número de ceros de una variedad compacta es igual a la característica de Euler. Dándonos una fuerte relación entre la geometría de la variedad y el álgebra de la variedad.

En el primer capítulo estudiaremos residuos de puntos dando una estrecha relación entre el álgebra y la topología, comparando el número de Milnor que es una característica puramente algebraica con el índice de Poincaré–Hopf que es una característica topológica. Al final de este capítulo estudiaremos el Residuo de Grothendieck, el cual generaliza ambas nociones.

En el segundo capítulo veremos; haces vectoriales complejos sobre variedades complejas. También veremos conexiones definidas sobre el álgebra graduada de formas diferenciales complejas $\mathcal{C}^\infty$ sobre estos haces vectoriales. Todos estos conceptos son necesarios para poder entender la demostración del teorema de Baum-Bott.

En este capítulo veremos los preliminares necesarios para entender el enunciado y demostración del Teorema de Baum-Bott. Veremos las definiciones básicas y resultados principales de Clases Características que son necesarios en este trabajo. Dado un haz vectorial sobre una variedad le asociamos una cierta clase “característica” que cumplirá con ciertas propiedades interesantes relativas al haz. Recordemos que el teorema de Gauss–Bonnet en geometría diferencial es una proposición importante sobre superficies que conecta su geometría (utilizando explícitamente su curvatura) con su topología (utilizando la característica de Euler), la teoría de Chern–Weil aparece como un invariante através de la teoría de obstrucciones, por lo tanto estamos creando la herramienta necesaria para extender en un sentido especifico las ideas del capítulo uno.

En el tercer capítulo daremos la demostración del teorema principal de la tesis, para lo cual construiremos un invariante especifico para el espacio tangente a nuestra variedad compacta y utilizando las propiedades de un haz lineal, podremos definir una forma que nos ayudará a encontrar una relación entre la integral de la clase "característica" y dicha forma.

Capítulo 1

Residuo de Grothendieck

1.1. Preliminares en Análisis Complejo

En este capítulo veremos los preliminares necesarios de variable compleja tanto en una variable, como en varias variables. En una variable compleja tenemos una manera muy especifica de medir las singularidades de un campo, el teorema del residuo de Cauchy nos dice perfectamente la multiplicidad de dichas singularidades. Por otro lado en varias variables, tenemos el teorema de Cauchy donde solo tenemos una cota para este número. Sin embargo aunque el teorema de Cauchy en varias variables solo me da una cota, contamos con la multiplicidad y el índice, que suplen perfectamente a este teorema, dándonos una descripción precisa en el caso de que nuestras singularidades son aisladas, y diciéndonos además que ambos números coinciden.

1.1.1. Aplicaciones holomorfas en $\mathbb{C}^n$

Denotemos por $\mathbb{C}$ al conjunto de números complejos. Si $z \in \mathbb{C}$, escribiremos $z = x + iy, \overline{z} = x - iy$, donde $i = \sqrt{-1}$; equivalentemente $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$ con la norma dada por $||z||^2 = x^2 + y^2$.

El espacio cotangente a un punto en $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ es el generado por $\{dx, dy\}$, sin embargo es conveniente utilizar las bases complejas

$$dz = dx + idy, \qquad d\overline{z} = dx - idy,$$

y la base dual en el espacio tangente $\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\}$, donde

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Con esta notación, la formula para la diferencial total viene dada por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}.$$

Recordemos que si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemman:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Observación 1.1.1. *Es claro que si $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función, entonces f es holomorfa si, y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Luego, esta última observación nos motiva a dar la siguiente definición:*

Definición 1.1.2. *Sea $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Entonces, f es holomorfa en U si para cada $z_j = x_j + iy_j$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z_i}} = 0$.*

Definición 1.1.3. *Se dice que $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es* **parcialmente holomorfa** *si para cada punto $(p_1, \ldots, p_n) \in U$ y cada $j = 1, \ldots, n$, la función de una variable definida por*

$$z_j \longrightarrow (p_1, \ldots, p_{j-1}, z_j, p_{j+1}, \ldots, p_n)$$

es holomorfa. Una función continua parcialmente holomorfa se llama **holomorfa**.

Con esta notación, la formula para la diferencial total en varias variables viene dada por:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}dz_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_i}}d\overline{z_i}.$$

Denotaremos por ∂f al primer término y al segundo término por $\overline{\partial} f$; ∂ y $\overline{\partial}$ son operadores diferenciales invariantes bajo cambio de coordenadas.

Lema 1.1.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un subconjunto abierto y sea $V \subset \mathbb{C}$ una vecindad de la frontera de $\mathbb{B}_\epsilon(0) \subset \mathbb{C}$. Supongamos que $f : V \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa. Entonces, $g(z) = g(z_1, \ldots, z_n) = \int_{|\zeta|=\epsilon} f(\zeta, z_1, \ldots, z_n)d\zeta$ es una función holomorfa sobre U.*

Demostración. Sea $z \in U$. Si $|\xi| = \epsilon$, entonces existe $\mathbb{B}_{\delta(\xi)}(\xi) \times \mathbb{B}_{\delta'(\xi)}(z) \subset V \times U$ sobre la cual f tiene una serie de potencias.

Como $\partial\mathbb{B}_\epsilon(0)$ es compacta, existen $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \partial\mathbb{B}_\epsilon(0)$ y números reales $\delta(\xi_1), \ldots, \delta(\xi_k)$ tales que $\bigcup(\partial\mathbb{B}_\epsilon(0) \cap \mathbb{B}_{\delta(\xi_i)/2}(\xi_i))$ es una unión ajena y $\partial\mathbb{B}_\epsilon(0) = \bigcup(\partial\mathbb{B}_\epsilon(0) \cap \overline{\mathbb{B}_{\delta(\xi_i)/2}(\xi_i)})$.

Ahora,

$$g(z) = \int_{|\xi|=\epsilon} f(\xi, z_1, \ldots, z_n) d\xi = \sum_{i=1}^{k} \int_{|\xi|=\epsilon, |\xi_i - \xi| < \delta(\xi_i)} f d\xi.$$

Cada sumando es holomorfo, y como la serie converge uniformemente sobre $\overline{\mathbb{B}_{\delta(\xi_i)/2}}(\xi_i)$, tenemos que la suma conmuta con la integral. Por lo tanto, g es holomorfa sobre U. $\square$

Proposición 1.1.5 (Teorema de Hartog). *Supongamos que $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ $\epsilon' = (\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_n) \in \mathbb{R}^n$ son dados de tal forma que $\epsilon'_i < \epsilon_i$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Si $n > 1$, entonces cualquier función holomorfa $f : \mathbb{B}_\epsilon(0) \setminus \overline{\mathbb{B}_{\epsilon'(0)}} \longrightarrow \mathbb{C}$ se puede extender de manera única a una función holomorfa $f : \mathbb{B}_\epsilon(0) \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Demostración. Supongamos que $\epsilon = (1, \ldots, 1)$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que

$$V = \{z | 1-\delta < |z_1| < 1, |z_i| < 1, \text{ para } i \neq 1\} \cup \{z | 1-\delta < |z_2| < 1, |z_i| < 1 \text{ para } i \neq 2\}$$

está contenido en el complemento de $\mathbb{B}_{\epsilon'}(0)$. Luego, f es holomorfa en V. Sea $w = (z_2, \ldots, z_n)$ con $|z_i| < 1$. Entonces, $f_w(z_1) = f(z_1, \ldots, z_n)$ es holomorfa sobre el anillo $1 - \delta < |z_1| < 1$.

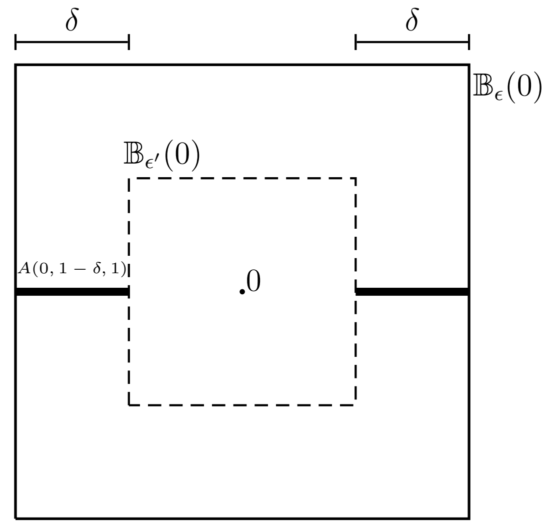


Figura (a)

Sea $f_w(z_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(w)z_1^n$ su serie de Laurent. Entonces,

$$a_n(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1-\delta/2} \frac{f_w(\zeta)d\zeta}{\zeta^{n+1}}.$$

Por el lema 1.1.4 tenemos que a_n es holomorfa para todo w en el polidisco unitario de $\mathbb{C}^{n-1}$. Por otra parte, la aplicación $z_1 \longmapsto f_w(z_1)$ es holomorfa sobre el disco unitario el fijar w tal que $1-\delta < |z_2| < 1$. Es decir, $a_n(w) = 0$ para toda $n < 0$ y $1-\delta < |z_2| < 1$. Por el principio de identidad, $a_n(w) \equiv 0$ para toda $n < 0$. Por lo tanto, podemos definir una extensión holomorfa $\widetilde{f}$ definida por la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w)z_1^n$. $\square$

Proposición 1.1.6. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto, el conjunto de funciones regulares $\mathcal{O}(U)$ es un álgebra cuyo conjunto de unidades $\mathcal{O}^*(U)$ consiste de las funciones holomorfas que no se anulan en U.*

Observemos ahora que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z_j}}$$

y

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z_j}$$

Veamos que la primera igualdad es cierta:
Si escribimos $f = u + iv$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Luego,

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}} = \overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} + i\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\right)$$

y

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial \overline{f}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Luego,

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Como

$$\overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

obtenemos lo que queremos.

Definición 1.1.7. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Una función $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \longrightarrow \mathbb{C}^m$, es holomorfa si cada componente de f es una función holomorfa. Si f es biyectiva y f^{-1} es holomorfa, entonces f es un biholomorfismo.*

Consideremos $\mathbb{R}^{2n} \otimes \mathbb{C}$. Y las siguiente bases de este espacio

$$B_1 = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$$

$$B_2 = \left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}}\right\}$$

$$B_3 = \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}} \right\}$$

Proposición 1.1.8. *Las aplicaciones biholomorfas preservan orientación.*

Demostración. Sea $f = (f_1, \ldots, f_n)$ un biholomorfismo, y escribamos $f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$.

Entonces,

$$[f^{'}(p)]_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(x_1,y_1)} & \cdots & \frac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(x_n,y_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(u_n,v_n)}{\partial(x_1,y_1)} & \cdots & \frac{\partial(u_n,v_n)}{\partial(x_n,y_n)} \end{pmatrix}$$

El cambio de base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\} \to \left\{ \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \right\}$ está dado por

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P \end{pmatrix},$$

$$\text{donde } P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -i/2 & i/2 \end{pmatrix} \text{ con } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Luego, $[f'(p)]_{B_2} = \mathbb{P}^{-1} [f'(p)]_{B_1} \mathbb{P}$ lo cual nos da la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial z_j} & 0 \\ 0 & \overline{\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right)} \end{pmatrix}_{1 \le i,j \le n}.$$

Ahora cambiando de la base B_2 a la base B_3, tenemos sólo que reacomodar los renglones y columnas de la otra matriz. La matriz resultante es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} & & & \\ & & & \overline{\frac{\partial f_1}{\partial z_1}} & \cdots & \overline{\frac{\partial f_1}{\partial z_n}} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \overline{\frac{\partial f_n}{\partial z_1}} & \cdots & \overline{\frac{\partial f_n}{\partial z_n}} \end{bmatrix}_{|p}.$$

Esto implica que $\det[f'(p)] = \det Jf(p) \cdot \det \overline{Jf(p)} = |\det Jf(p)|^2 > 0$, y por lo tanto, f preserva la orientación.

$\square$

1.2. El índice y la multiplicidad

1.2.1. El índice de Poincaré–Hopf

Sean X y Y variedades orientables de dimensión n, Y conexo y $f : X \longrightarrow Y$ diferenciable. Sea $p \in X$ un punto regular de f. Entonces, la aplicación tangente $f'(p) : T_pX \longrightarrow T_{f(p)}Y$ es un isomorfismo entre los espacios vectoriales orientados.

Definiremos *sign* de $f'(p)$ de la siguiente manera

$$sign f'(p) = \begin{cases} +1 & , \text{ si } f'(p) \text{ preserva su orientación.} \\ -1 & , \text{ si } f'(p) \text{ invierte su orientación.} \end{cases}$$

y la función grado dada por $\deg(f, q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} sign f'(p)$.

El índice

Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, q)$ un germen de función holomorfa. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(p) = q = 0$, es decir p es una raíz de $f = 0$.

Definición 1.2.1. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen de función holomorfa con $f^{-1}(0) = \{p\}$. El* índice de Poincaré–Hopf *de f en p, denotado por $\mathcal{I}_p(f)$, es el grado de la función (diferenciable)*

$$\frac{f}{|f|} : \mathbb{S}^{2n-1}_{\epsilon}(p) \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1}_1$$

donde $\mathbb{S}^{2n-1}_{\epsilon}(p) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - p| = \epsilon\}$ es la esfera euclidiana de radio $\epsilon > 0$ centrada en p, y $\mathbb{S}^{2n-1}_1$ es la esfera unitaria centrada en $0 \in \mathbb{C}^n$

Proposición 1.2.2. *Si $f : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ es el germen de un biholomorfismo, entonces $\mathcal{I}_p(f) = 1$.*

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $p = 0$. Sabemos que

$$df_0(z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tz)}{t}.$$

Sea

$$F(z) = \begin{cases} \frac{f(tz)}{t} & si \quad 0 < t \leq 1 \\ df_0(z) & si \quad\quad t = 0 \end{cases}$$

y definamos $F(z,t) := \left(\sum_{j=1}^{n} g_{1j}(tz).z_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} g_{nj}(tz).z_j\right)$, $\forall t \in [0,1]$. Notemos que $F(z,t) \neq 0$ para toda $t \in [0,1]$, ya que f es biyectiva. Esto implica que la aplicación $\dfrac{F(z,t)}{|F(z,t)|}$ es una homotopía suave entre $\frac{f}{|f|}$ y $\frac{f'(0)}{|f'(0)|}$, pero el grado es una aplicación invariante por homotopía. Por lo tanto $\mathcal{I}_0(f) = \mathcal{I}_0(f'(0)) = 1$. $\square$

Lema 1.2.3. *Sea U un subconjunto abierto y convexo de $\mathbb{C}^n$, $p \in U$ y $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces, existen funciones holomorfas $g_1, \ldots, g_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que:*

$$\varphi(z) = \varphi(p) + \sum_{i=1}^{n} g_i(z)(z_i - p_i)$$

donde $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Más aún, $g_i = \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(p)$.

Demostración. Fijemos $z \in U$ y definamos $h(t) = \varphi(p + t(z-p))$. Como U es convexo, h está bien definida en el intervalo $[0,1]$. Luego,

$$\varphi(z) - \varphi(p) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)dt.$$

Por regla de la cadena tenemos que $h'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(p + t(z-p))(z_j - p_j)$. Definiendo $g_j = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(p + t(z-p))dt$, obtenemos lo deseado. $\square$

Proposición 1.2.4. *$\mathcal{I}_p(f)$ es el número de puntos del conjunto $f^{-1}(\zeta) \cap \mathbb{B}_\epsilon(p)$, donde ζ es un valor regular de f suficientemente cercano al cero.*

Demostración. Sea $\delta = \inf_{\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}} |f| > 0$. Entonces, $|f(z) - t\zeta| \geq \delta - t|\zeta| > 0, \forall t \in [0,1]$, $z \in \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}(p)$ y ζ un valor regular suficientemente cercano a 0. Entonces, $f^{-1}(t\zeta) \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}(p) = \emptyset$ para todo $0 \leq t \leq 1$.

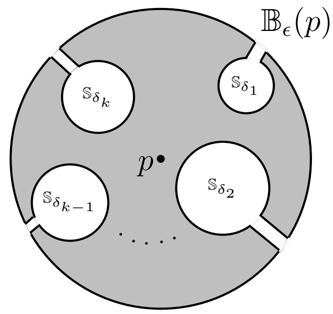
De aquí se sigue que $F(z,t) = \frac{f(z) - t\zeta}{|f(z) - t\zeta|}$ es una homotopía suave entre $\frac{f-\zeta}{|f-\zeta|}$ y $\frac{f}{|f|}$.

Esto implica que $\mathcal{I}_p(f) = \deg \frac{f-\zeta}{|f-\zeta|}$.

Supongamos ahora que $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\} = f^{-1}(\zeta) \cap \mathbb{B}_\epsilon(p)$ y escojamos esferas $\mathbb{S}_{\delta_j}^{2n-1}(\xi_j)$ tales que $\mathbb{S}_{\delta_j}^{2n-1}(\xi_j) \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}(p) = \emptyset$.

Consideremos la variedad orientada $X = \overline{\mathbb{B}}_\epsilon(p) \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \mathbb{B}_{\delta_j}(\xi_j)$ lo que implica que

$$\partial X = \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}(p) \cup \mathbb{S}_{\delta_1}^{2n-1}(\xi_1) \cup \ldots \cup \mathbb{S}_{\delta_k}^{2n-1}(\xi_k).$$



La función $\varphi = \frac{f-\zeta}{|f-\zeta|} : \partial X \longrightarrow \mathbb{S}_1^{2n-1}(0)$ tiene una extensión diferenciable $\frac{f-\zeta}{|f-\zeta|}$ en todo X, lo que implica que $\deg \varphi = 0$. Por la orientación de X, tenemos que

$$\deg \varphi = \mathcal{I}_p(f) - \mathcal{I}_{\xi_1}(f-\zeta) - \ldots - \mathcal{I}_{\xi_k}(f-\zeta).$$

Esto implica que

$$\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_{\xi_1}(f-\zeta) + \ldots + \mathcal{I}_{\xi_k}(f-\zeta) = k$$

ya que f es un bihomolomorfismo en cada ξ_j, y por lo tanto $\mathcal{I}_\xi(f-\zeta) = 1$. $\square$

Teorema 1.2.5. *Sea $X \subset \mathbb{C}^n$ una variedad diferenciable compacta y conexa, con frontera, de dimensión $2n$. Sea $f : U \subset X \longrightarrow \mathbb{C}^n$ una función holomorfa, $p \in X \setminus \partial X$, $f(p) = 0$ y $f^{-1}(0) \cap \partial X = \emptyset$. Supongamos que el grado de la función*

$$\varphi \equiv \frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{S}_1^{2n-1}(0)$$

es k. Entonces, la ecuación $f = 0$ tiene un número finito de soluciones en el interior de X y la suma de los índices de f en esos puntos es k.

Demostración. Supongamos que tenemos $k+1$ puntos $\xi_1, \ldots, \xi_{k+1} \subset X \setminus \partial X$ tales que $f(\xi_j) = 0$. Consideremos las esferas ajenas $\mathbb{S}_{\delta_j}^{2n-1}(\xi_j)$, centradas en ξ_j tales que $\mathbb{S}_{\delta_j}^{2n-1}(\xi_j) \cap \partial X = \emptyset$. Consideremos la variedad orientada

$$\widetilde{X} = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} \mathbb{B}_{\delta_i}(\xi_i).$$

Luego,

$$\partial\widetilde{X} = \partial X \cup \mathbb{S}^{2n-1}_{\delta_1}(\xi_1) \cup \ldots \cup \mathbb{S}^{2n-1}_{\delta_{k+1}}(\xi_{k+1})$$

lo que implica que la función $\widetilde{\varphi} : \partial\widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1}_1(0)$, dada por $\widetilde{\varphi}(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ puede ser extendida suavemente a $\frac{f}{|f|} : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1}_1(0)$ lo que implica que $\deg\widetilde{\varphi} = 0$.

Por lo tanto,

$$\deg\widetilde{\varphi} = \deg\varphi - \mathcal{I}_{\xi_1}(f) - \cdots - \mathcal{I}_{\xi_{k+1}}(f).$$

Esto implica que $\deg\varphi = \sum \mathcal{I}_{\xi_i}(f)$. Por la proposición anterior, sabemos que cada sumando es mayor que cero. Por lo tanto, $\deg\varphi \geq k+1$, contradiciendo nuestra hipótesis. Por lo tanto, tenemos a lo más k soluciones de $f = 0$ en X y la suma de los índices de f en X es k. $\square$

Teorema 1.2.6 (Carácter Aditivo del Índice de Poincaré–Hopf)**.** *Supongamos que tenemos un germen de función holomorfa f de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ y p una raíz aislada de $f = 0$. Consideremos una deformación holomorfa f_λ del germen $f = f_0$, que depende del parámetro complejo λ. Entonces, cuando λ varia en una vecindad pequeña de 0, la raíz p se descompone en un número finito de raíces de f_λ y la suma de los índices de f_λ en esas raíces de f_λ es igual al índice de f_0 en p.*

Demostración. Supongamos $p = 0$ y tomemos $\mathbb{B}_\delta(0)$ con δ tal que f no tiene ceros sobre $\partial\mathbb{B}_\delta(0)$. Sea $\delta_1 > 0$ tal que $|\lambda| \leq \delta_1$, y f_λ no tenga ceros en $\partial\mathbb{B}_\delta(0)$.

Definamos $\lambda_0 = \operatorname{ínf}_{|\lambda|\leq\delta_1, z\in\partial\mathbb{B}_\delta(0)} \{|f_\lambda(z)| > 0\}$

Dado $\epsilon < \lambda_0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|\lambda| < \delta_2$, entonces $\sup_{\partial\mathbb{B}_\delta(0)} |f(z) - f_\lambda(z)| < \epsilon$. Sea $\delta_3 = \operatorname{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Esto implica que para $|\lambda| < \delta_3$ las aplicaciones

$$\frac{f_\lambda}{|f_\lambda|} : \partial\mathbb{B}_\delta(0) \longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1}_1(0)$$

son homotópicas entre ellas.

Ahora sólo basta demostrar que son homotópicas a $f = f_0$.

Sea $\varphi_t = (1-t)f + tf_\lambda$ y supongamos que $t_0 \in (0,1)$ y $z_0 \in \partial\mathbb{B}_\delta(0)$ tales que $\varphi_{t_0}(z_0) = 0$. Entonces,

$$f(z_0) = \frac{-t_0}{1-t_0} f_\lambda(z_0)$$

lo que implica que

$$\epsilon > |f(z_0) - f_\lambda(z_0)| = \frac{1}{1-t_0}|f_\lambda(z_0)| \geq \frac{\lambda_0}{1-t0} > \lambda_0.$$

Por lo tanto, $\varphi_t(z)$ no se anula, lo que implica que $\frac{\varphi_t(z)}{|\varphi_t(z)|}$ es una homotopía entre $\frac{f_\lambda}{|f_\lambda|}$ y $\frac{f}{|f|}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{I}_0(f) = \deg \frac{f}{|f|} = \deg \frac{f_\lambda}{|f_\lambda|} = \sum_{\xi_i \in f_\lambda^{-1}(0)} \mathcal{I}_{\xi_i}(f_\lambda).$$

□

Definición 1.2.7. *Sean $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ gérmenes de funciones holomorfas. Decimos que f y g son* algebraicamente equivalentes *o* A-equivalentes*, si existe un germen de función holomorfa $A : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ tal que*

$$f(z) = A(z)g(z).$$

Proposición 1.2.8. *Si $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ son A-equivalentes y $f^{-1}(f(p)) = \{p\}$, entonces $\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_p(g)$.*

Demostración. Sabemos que $GL(n, \mathbb{C})$ es abierto, denso y conexo en $M(n, \mathbb{C})$, con la topología usual. Sea $V \subset GL(n, \mathbb{C})$ una vecindad abierta contraible de A(p). Entonces, existe una homotopía $G(z, t)$ tal que $G(z, 0) = A(z) \in V$ y $G(z, 1) = A(p)$, ya que al existir un único punto en la preimagen de $f(p)$, tenemos la condición de ser aislado. Con lo cual

$$\frac{G(z,t)g(z)}{|G(z,t)g(z)|}$$

es una homotopía entre

$$\frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{A(z)g(z)}{|A(z)g(z)|} \quad \text{y} \quad \frac{A(p)g(z)}{|A(p)g(z)|}.$$

Sea γ una trayectoria real diferenciable en $GL(n, \mathbb{C})$ tal que $\gamma(0) = A(p)$, $\gamma(1) = I$, entonces

$$\frac{\gamma(t)g(z)}{|\gamma(t)g(z)|}$$

es una homotopía suave entre

$$\frac{A(p)g(z)}{|A(p)g(z)|} \quad \text{y} \quad \frac{g(z)}{|g(z)|}.$$

Por lo tanto, $\frac{f(z)}{|f(z)|}$ es homotópica a $\frac{g(z)}{|g(z)|}$. Esto implica que $\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_p(g)$. $\square$

1.2.2. El número de Milnor

Primeros resultados de la multiplicidad

Denotaremos por $\mathcal{O}_p$ al anillo de gérmenes de funciones holomorfas en $p \in \mathbb{C}^n$. $\mathcal{O}_p$ es un $\mathbb{C}$–álgebra. Denotemos por m_p al conjunto $\{h \in \mathcal{O}_p : h(p) = 0\}$, que es un ideal máximo en $\mathcal{O}_p$.

Si $f : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow \mathbb{C}^k$ es un germen de función holomorfa en p, con $f = (f_1, \ldots, f_k)$ definiremos el ideal de f por

$$I_f = \{h_1 f_1 + \cdots + h_k f_k : h_j \in \mathcal{O}_p\} = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle_{\mathcal{O}_p}.$$

Definición 1.2.9. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen de función holomorfa. El* álgebra local *de f en p es la $\mathbb{C}-$álgebra cociente*

$$\mathcal{Q}_f = \mathcal{O}_p / I_f.$$

Un germen de biholomorfismo $\psi : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, p)$ induce un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\psi^* : \mathcal{O}_p \longrightarrow \mathcal{O}_p$ dado por $\psi^*(f) = f \circ \psi$.

Definición 1.2.10. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen de función holomorfa. La* multiplicidad *de f en p, o el* número de Milnor *de f en p, que denotaremos por $\mu_p(f)$, es la dimensión de $\mathcal{Q}_f$ como $\mathbb{C}$–espacio lineal.*

Lema 1.2.11. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen de función holomorfa de multiplicidad μ en p. Sean $h_1, \ldots, h_\mu$ gérmenes de funciones en m_p. Entonces, el producto $h_1 \cdots h_\mu$ está en I_f.*

Demostración. Consideremos los $\mu + 1$ gérmenes $H_1 = 1, H_2 = h_1, H_3 = h_1 \cdot h_2, \ldots, H_{\mu+1} = h_1 \cdots h_\mu$. Ya que la dimensión de $\mathcal{Q}_f$ como $\mathbb{C}$-espacio lineal es μ, las clases de H_i en $\mathcal{Q}_f$ son linealmente dependientes. Por lo tanto, existen números $a_0, \ldots, a_\mu \in \mathbb{C}$ tales que

$$a_0 + a_1 H_2 + \cdots + a_\mu H_{\mu+1} \in \mathcal{I}_f.$$

Sea k el entero más pequeño, tal que $a_k \neq 0$. Entonces,

$$a_k H_{k+1} + \cdots + H_{\mu+1} = H_{k+1} \left(a_k + a_{k+1} \frac{H_{k+2}}{H_{k+1}} + \cdots + a_\mu \frac{H_{\mu+1}}{H_{k+1}} \right) \in \mathcal{I}_f.$$

Pero,

$$\left(a_k + a_{k+1} \frac{H_{k+2}}{H_{k+1}} + \cdots + a_\mu \frac{H_{\mu+1}}{H_{k+1}} \right) = (a_k + a_{k+1} h_{k+1} + \cdots + a_\mu h_{k+1} \cdots h_\mu) \in U(\mathcal{O}_p),$$

lo que implica que $H_{k+1} \in I_f$. Como I_f es ideal en $\mathcal{O}_p$, tenemos que $H_{k+1} \cdot h_{k+1} \cdots h_\mu \in I_f$. Por lo tanto, $h_1 \cdots h_\mu \in I_f$. $\square$

Sea $F(z_1, \ldots, z_n)$ una función holomorfa alrededor de $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Entonces, podemos escribir

$$F = F_m + \cdots + F_{m+\ell} + \cdots \text{ , con } F_m \not\equiv 0$$

donde F_j es un polinomio homogéneo de grado j en las variables $z_1 - p_1, \ldots, z_n - p_n$. El número m se llama el orden de F en p.

Proposición 1.2.12. *Sean $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ gérmenes de funciones holomorfas donde f tiene multiplicidad μ. Supongamos que cada componente de la diferencia $g - f$ tiene una expansión de la forma $g_i - f_i = F^i_{\mu+r} + F^i_{\mu+r+1} + \cdots, r \geq 1$. Entonces, f y g son A-equivalentes.* $(r = r(i))$

Demostración. Cada término en la descomposición de $g_i - f_i$ se puede escribir en la forma

$$F^i_{\mu+\ell} = \sum_J a^i_J (z_1 - p_1)^{j_1} \cdots (z_n - p_n)^{j_n}, \text{ con } \sum j_k = |J| = \mu + \ell.$$

Cada término es un producto de $\mu + \ell$ funciones en m_p.

$$a^i_J (z_1 - p_1)^{j_1} \cdot \ldots \cdot (z_n - p_n)^{j_n}.$$

Como tiene más de μ factores, contando multiplicidades, por el lema anterior podemos escribir el producto en la forma

$$g^1_J f_1 + \cdots + g^n_J f_n, \text{ con } g^k_J \in m_p.$$

Además $g^k_J \in m_p$ lo que implica que $g^k_J(p) = 0$ con multiplicidad mayor o igual a 1.

Luego,

$$\begin{aligned}
F_{i_{\mu+\ell}} &= \textstyle\sum_J a^i_J (z_1 - p_1)^{j_1} \cdots (z_n - p_n)^{j_n} \\
&= \textstyle\sum_J \sum_{j=1}^n g^j_J f_j \\
&= \textstyle\sum_{j=1} \left(\sum_J^n g^j_J \right) f_j \\
&= \textstyle\sum_{j=1} b^{\mu+\ell}_{ij} f_j, \text{ con } b^{\mu+\ell}_{ij} \in m_p.
\end{aligned}$$

De aquí obtenemos

$$\begin{aligned}
g_i - f_i &= F^i_{\mu+r} + F^i_{\mu+r+1} + \cdots \\
&= \textstyle\sum_{\ell=r_i}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{\mu+\ell} f_j \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\ell=r_i}^{\infty} b_{ij}^{\mu+\ell} \right) f_j \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij} f_j, \text{ donde } c_{ij} \in m_p.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$g_i = f_i + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} f_j, \text{ con } c_{ij} \in m_p.$$

Por lo tanto,

$$g = f + Cf, \text{ donde } C = (c_{ij}) \text{ con } C(p) = 0.$$

Ahora bien $I + C$ es invertible en un vecindad de p. Por lo tanto, haciendo $A = I + C$, concluimos que $g = Af$. □

Proposición 1.2.13. *Si f y g son gérmenes de funciones holomorfas A-equivalentes, entonces tienen la misma multiplicidad en p.*

Demostración. Por hipótesis, $f(z) = A(z)g(z)$ para algún $A : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$. Además,

$$\begin{aligned}
I_f &= \{h_1 f_1 + \cdots + h_k f_k : h_j \in \mathcal{O}_p\} \\
&= \{(h_1 A) g_1 + \cdots + (h_k A) g_k : h_j \in \mathcal{O}_p\} \\
&\subset \{h'_1 g_1 + \cdots + h'_k g_k : h'_j \in \mathcal{O}_p\} \\
&= I_g.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $I_f \subset I_g$. Como $A(z)$ es invertible en una vecindad de p, se sigue que $g(z) = A^{-1}(z) f(z)$. Luego, $I_g \subset I_f$. Por lo tanto, $I_f = I_g$.

Entonces,

$$\mu_p(f) = \dim \mathcal{Q}_f = \dim(\mathcal{O}_p / I_f) = \dim(\mathcal{O}_p / I_g) = \dim \mathcal{Q}_g = \mu_p(g).$$

□

Observación 1.2.14. *Si $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es una transformación lineal invertible, entonces $\mu_0(T) = 1$. Esto se sigue del hecho de que*

$$I_T = I_{Id} = \mathcal{O}_p,$$

lo que implica que

$$\mu_0(T) = \dim(\mathcal{O}_p/\mathcal{O}_p) = \dim\{\mathbb{C}\} = 1.$$

Proposición 1.2.15. *Si $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ es un germen de biholomorfismo, entonces $\mu_0(f) = 1$.*

Demostración. El desarrollo en serie de Taylor de f es de la forma

$$f(z) = df_0(z) + F_2(z) + \cdots$$

Luego, $f(z) - df_0(z) = F_2 + \cdots$. Por la observación anterior, $\mu_0(df_0) = 1$. La proposición implica que f es A-equivalente a df_0. Por lo tanto, $\mu_0(f) = \mu_0(df_0) = 1$.

□

Definición 1.2.16. *Una* función de Pham *es una aplicación continua $\Upsilon : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ de la forma*

$$\Upsilon^J(z_1, \ldots, z_n) = (z_1^{j_1}, \ldots, z_n^{j_n}), \text{ donde } J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Lema 1.2.17. *$\mathcal{I}_0(\Upsilon^J) = \mu_0(\Upsilon^J)$.*

Demostración. Por la proposición 1.2.4 tenemos que $\mathcal{I}_0(\Upsilon^J)$ es el número de puntos del conjunto $f^{-1}(\zeta) \bigcap \mathbb{B}_\epsilon(0)$, donde ζ es un valor regular suficientemente cercano a 0. Equivalentemente, $\mathcal{I}_0(\Upsilon^J)$ es el número de soluciones de $z_1^{j_1} = \xi_1, \ldots, z_n^{j_n} = \xi_n$, para $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ un valor regular de Υ^J. Hay $j_1 \cdot \cdots \cdot j_n$ soluciones del sistema de ecuaciones.

Ahora bien $\mu_0(\Upsilon^J) = \dim \mathcal{Q} = \dim(\mathcal{O}_p/I_{\Upsilon^J})$. Una base para $\mathcal{Q}_{\Upsilon_0^J}$ es $z_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot z_n^{m_n}, 0 \leq m_1 < j_1, \ldots, 0 \leq m_n < j_n$. Por lo tanto, $\dim \mathcal{Q}_{\Upsilon_0^J} = j_1 \cdot \cdots \cdot j_n$.

□

Proposición 1.2.18. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen de función holomorfa, con multiplicidad μ en 0. Consideremos la función de Pham*

$$\Upsilon^{[\mu+1]}, [\mu + 1] = (\mu + 1, \ldots, \mu + 1)$$

y la deformación holomorfa $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]} = \Upsilon^{\mu+1} + \lambda f$, con λ en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$. Entonces, f es $A-$equivalente a $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}$ para $\lambda \neq 0$.

Demostración. $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]} - \lambda f = \Upsilon^{[\mu+1]}$ y los componentes de $\Upsilon^{[\mu+1]}$ tienen grado mayor o igual que μ, lo que implica que $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}$ es $A-$equivalente a λf que es $A-$equivalente a f. Por lo tanto, f es $A-$equivalente a $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}$. $\square$

Teorema 1.2.19. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen de función holomorfa. Entonces, $\mu_p(f) < \infty$ si y sólo si p es asilado en $f^{-1}(0)$.*

Demostración. Supongamos que $\mu_p(f) < \infty$. Para $i = 1, 2, \ldots, n$ tenemos que

$$(z_i - p_i)^\mu = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} f_j.$$

Sea $\{p_k\} = \{p_{1k}, \ldots, p_{nk}\}$ una sucesión de puntos que converge a p, tales que $p_k \neq p$ y $f(p_k) = 0$, como tenemos que los g_{ij} están definidos en una vecindad de p, $p_{ik} - p_i = 0$ para todo i, lo que contradice la hipótesis de que $p_k \neq p$, ya que cada coordenada tenemos que $(p_{ik} - p_i)^\mu = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(p_{ik}) f_j(p_{ik}) = 0$. Por lo tanto, p es aislado en $f^{-1}(0)$.

Supongamos que p es un punto aislado en $f^{-1}(0)$, por el teorema de los ceros de Hilbert tenemos que existe $m_i \geq 1$ tal que $(z_i - p_i)^{m_i} \in I_f$, para $i = 1, \ldots, n$ lo que implica que $\mu_p(f) = \dim \mathcal{Q}_{f_p} = \dim \mathcal{O}_p / I_f < \infty$. $\square$

1.2.3. Relación entre $\mathcal{I}$ y μ

En esta sección demostraremos que el índice de Poincare Hopf y el número de Milnor coinciden, cuando el número de Milnor es finito.

Definición 1.2.20. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$, el álgebra $\mathcal{Q}_f(U)$ es la $\mathbb{C}$-álgebra*

$$\mathcal{O}(U)/I_f.$$

El subálgebra de polinomios $\mathcal{Q}_f[U]$ es la imagen del álgebra de polinomios $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]_{|U}$ por la función cociente $q : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}_f(U)$ que es la proyección al cociente.

Lema 1.2.21. *Sea $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0)$ definida por $F(z, \lambda) = (f_\lambda(z), \lambda)$. Entonces las $\mathbb{C}$-álgebras $\mathcal{Q}_f$ y $\mathcal{Q}_F$ son isomorfas. Más aún, si $e_1, \ldots, e_\mu$ forman una base para $\mathcal{Q}_f$, entonces también forman una base para $\mathcal{Q}_F$.*

Demostración. Observemos que $F = (F_1, \ldots, F_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ con $F_j = f_{\lambda j}$. Entonces, el ideal generado por los componentes de F es el mismo que el ideal J generado por $f_1, \ldots, f_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Por lo tanto, $\mathcal{O}_{n \times m}/J \approx \mathcal{O}_n/I_f$, lo que implica que $\mathcal{Q}_F \approx \mathcal{Q}_f$. $\square$

Lema 1.2.22. *Existe una vecindad $U_1 \subset \mathbb{C}^n$ de 0 tal que para todo λ con $|\lambda|$ suficientemente pequeño, el espacio $\mathbb{C}$-lineal generado por las imágenes de $e_1, \ldots, e_\mu$ en el álgebra $\mathcal{Q}_{f_\lambda}(U_1)$ contiene a la subálgebra de polinomios $\mathcal{Q}_{f_\lambda}[U_1]$.*

Demostración. Por el lema A.0.19(Ver Apéndice) tenemos que existe $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ vecindad del cero y $V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ vecindad del cero, tal que $F(U_1 \times U_2) \subset V$ y que cada polinomio restringido a $U_1 \times U_2$ puede ser escrito de la forma

$$P(z) = \sum_{j=1}^{\mu} g_j(w, \lambda) e_j(z), \text{ con } w = f_\lambda(z).$$

Suponiendo que $U_1 \times U_2$ es convexo, por el lema 1.2.3 tenemos que

$$g_j(w, \lambda) = G_j(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} w_i g_{ij}(w, \lambda), \text{ con } g_{ij} : U \to \mathbb{C}.$$

Esto implica que $P(z) = \sum_{j=1}^{\mu} G_j(\lambda)e_j(z) + \sum_{i=1}^{n} w_i h_i(z,\lambda)$ con $w = f_\lambda(z)$. Ahora bien como

$$\sum_{i=1}^{n} f_{\lambda i} h_i(z,\lambda) \subset I_{f_\lambda}(U_1)$$

para $0 < |\lambda| << 1$ y $\lambda \in U_2$, concluimos que $\mathcal{Q}_{f_\lambda}(U_1)$ contiene al subálgebra de polinomios $\mathcal{Q}_{f_\lambda}[U_1]$.

□

Proposición 1.2.23. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen de función holomorfa de multiplicidad finita μ en 0. Consideremos una deformación holomorfa f_λ de f, con $\lambda \in \mathbb{C}^m$, $f_0 = f$. Entonces, existe una vecindad $U \subset \mathbb{C}^n$ de 0 tal que, para toda λ con $|\lambda|$ suficientemente pequeña, la dimensión del espacio $\mathbb{C}$-lineal $\mathcal{Q}_{f_\lambda}[U]$ es a lo más μ.*

Demostración. Por el lema anterior tenemos que $\mathcal{Q}_{f_\lambda}[U] \subset \mathcal{Q}_{f_\lambda}(U)$, para $|\lambda|$ suficientemente pequeño. Esto implica que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}[U] \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}(U)$. Por otro lado, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}(U) \leq \mu$, ya que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}(U) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_F(U)$. Pero $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_F(U) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f(U) = \mu$. □

Lema 1.2.24. *Supongamos que tenemos una función holomorfa $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^n, U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, tal que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f[U] < \infty$. Entonces, cada cero de f en U tiene multiplicidad finita. Más aún, el número de soluciones de la ecuación $f = 0$ en U(sin contar multiplicidades) está acotado por $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f[U]$.*

Demostración. Sea $\nu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f[U]$ y $\xi \in U$, tal que $f(\xi) = 0$. Sean $\ell_1, \ldots, \ell_\nu$ funciones lineales tales que $\ell_i(\xi) = 0$. Ahora consideremos las $\nu+1$ funciones $1, \ell_1, \ell_1\ell_2, \ldots, \ell_1 \cdot \cdots \cdot \ell_\nu$. Si p es la función cociente $p : \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]_{|U} \longrightarrow \mathcal{Q}_f[U]$, entonces tenemos que $p(1), \ldots, p(\ell_1 \cdot \cdots \cdot \ell_\nu)$ son linealmente dependientes. Y como hicimos en el lema 1.2.11, existe $u \in \mathcal{O}(U)$, $u(\xi) \neq 0$ tal que $u\ell_1 \cdot \cdots \cdot \ell_\nu \in I_f(U)$; esto implica que $u^{-1}(u\ell_1 \cdot \cdots \cdot \ell_\nu) = \ell_1 \cdot \cdots \cdot \ell_\nu \in I_{\xi f}$. Por lo tanto cualquier colección de ν funciones lineales en $\mathfrak{M}_{\xi,n}$(Ver Apéndice), cumplen que su producto está en $I_{\xi f}$.

Ahora bien como $\mathfrak{M}^\nu_{\xi,n} \subset I_{\xi f}$, tenemos que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\xi,n}/I_{\xi f} \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\xi,n}/\mathfrak{M}^\nu_{\xi n} < \infty$. Por lo tanto cada solución tiene multiplicidad finita.

Supongamos que existen $\nu+1$ soluciones en U de $f = 0$, digamos $\xi_0, \ldots, \xi_\nu$ y para cada $j = 0, \ldots, \nu$ escojamos un polinomio P_j, tal que $P_j(\xi_i) = \delta_{ij}$. Sean $c_i \in \mathbb{C}$ tales que $c_0P_0 + \cdots + c_\nu P_\nu = 0$. Evaluando en ξ_i, obtenemos que $c_i = 0$, lo que implica que $p(P_j)$ son linealmente independientes contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f[U] = \nu$. □

Definición 1.2.25. *Sea* $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *una función holomorfa y supongamos que* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *son soluciones de* $f = 0$ *en* U*. Consideremos los gérmenes de* f *en* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *y sus algebras locales* $\mathcal{Q}_{\xi_i f}$*. Llamaremos a* $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\xi_i f}$ *el* álgebra multilocal *de* f *en* U*.*

Definiremos el homomorfismo de $\mathbb{C}$–álgebras $\eta : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\xi_i f}$ de la siguiente manera. Dado $g \in \mathcal{O}(U)$, tomamos sus gérmenes en ξ_i, digamos g_{ξ_i}, y consideramos a $\overline{g_{\xi_i}} \in \mathcal{Q}_{\xi_i f}$. Entonces, $\eta(g) = (\overline{g_{\xi_1}}, \ldots, \overline{g_{\xi_k}})$.

Definición 1.2.26. *Sea* $g \in \mathcal{O}(U)$ *y* $\xi \in U$*. El* polinomio de Taylor de grado ℓ *de* g *en* ξ *lo denotaremos por* $T_{\xi}^{\ell} g$*.*

Lema 1.2.27. *Sea* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *un número finito de puntos distintos en* U*, y* P_i *polinomios de grado* d_i*, centrados en* ξ_i*, entonces existe un polinomio* Q *tal que* $T_{\xi_i}^{d_i} Q = P_i$*.*

Demostración. Dado que un polinomio de Taylor se puede escribir en la forma

$$P = \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_n} (z_1 - w_1)^{i_1} \cdot \ldots \cdot (z_n - w_n)^{i_n}$$

con

$$a_{i_1,\ldots,i_n} = \frac{1}{i_1!, \ldots, i_n!} \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n} P}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}},$$

tenemos que es suficiente encontrar un polinomio Q tal que

$$\left.\begin{array}{rcl} Q(\xi_1) & = & P_1(\xi_1) \\ & \vdots & \\ Q(\xi_k) & = & P_1(\xi_k) \end{array}\right\} *$$

Como

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial Q(\xi_1)}{\partial z_j} & = & \frac{\partial P_1(\xi_1)}{\partial z_j} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial Q(\xi_k)}{\partial z_j} & = & \frac{\partial P_1(\xi_k)}{\partial z_j} \end{array}\right\} **$$

Vemos que estas derivadas parciales determinan completamente las derivadas parciales de cualquier orden. Por lo tanto los polinomios de Taylor coincidirán. Basta ver entonces que es posible construir tal polinomio. Lo haremos para dos polinomios.

Supongamos que sólo tenemos dos polinomios P_1, P_2 de grados d_1, d_2 centrados en ξ_1, ξ_2, respectivamente.

Entonces, el polinomio

$$\widetilde{Q}(z) = P_1(z)\frac{(z_1-\xi_2^1)\dots(z_n-\xi_2^n)}{(\xi_1^1-\xi_2^1)\dots(\xi_1^n-\xi_2^n)} + P_2(z)\frac{(z_1-\xi_1^1)\dots(z_n-\xi_1^n)}{(\xi_2^1-\xi_1^1)\dots(\xi_2^n-\xi_1^n)}$$

cumple con $*$. Si $\xi_i^k = \xi_j^k$, suprimimos $\frac{(z_k-\xi_i^k)}{(\xi_j^k-\xi_i^k)}$ y $\frac{(z_k-\xi_j^k)}{(\xi_i^k-\xi_j^k)}$, en los respectivos términos, como por lo menos tienen una entrada diferente, de lo contrario Q no sería función, nuestra $\widetilde{Q}$ sigue funcionando. Ahora hay que ver que podemos crear un nuevo Q partir de este $\widetilde{Q}$ que cumple con $*$ y $**$.

Supongamos que $\frac{\partial\widetilde{Q}(\xi_i)}{\partial z_j} = \alpha_{ij}$, sea β_{ij} tal que $\alpha_{ij}+\beta_{ij} = \frac{\partial P(\xi_i)}{\partial z_j}$, entonces

$$Q(z) = \widetilde{Q}(z) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(z_j-\xi_i^j)\cdot\prod_{r\neq j, s\neq i}^{n,k}\frac{(z_r-\xi_s^r)}{(\xi_i^r-\xi_s^r)}$$

cumple con $*$ y $**$, si tuviésemos que $\xi_i^r = \xi_s^r$, suprimimos $\frac{(z_r-\xi_i^r)}{(\xi_s^r-\xi_i^r)}$ y $\frac{(z_r-\xi_s^r)}{(\xi_i^r-\xi_s^r)}$, en los respectivos términos, como por lo menos tienen una entrada diferente, de lo contrario Q no seria función, podemos asegurar que sobrevive almenos uno de estos términos para cada ξ_ℓ, por lo tanto nuestra Q sigue funcionando. $\square$

Lema 1.2.28. *Supongamos que* $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f[U] < \infty$. *Entonces*

$$\eta(\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]_{|U}) = \bigoplus_{i=1}^{k}\mathcal{Q}_{\xi_i f}.$$

Demostración. Por el lema 1.2.24 tenemos que el número de soluciones en U de la ecuación $f=0$ es finita, digamos que $\xi_1,\dots,\xi_k$ son dichas soluciones, y cada solución ξ_i es de multiplicidad finita μ_i.

Si $g \in \mathcal{O}(U)$, entonces g y $T_{\xi_i}^{\mu_i}g$ son enviados al mismo elemento de $\mathcal{Q}_{\xi_i f}$. Por el lema anterior tenemos que existe un polinomio Q tal que $T_{\xi_i}^{\mu_i}Q = T_{\xi_i}^{\mu_i}g$, lo que implica que $\eta(Q) = \eta(g)$, por lo tanto $\eta(\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]_{|U}) = \bigoplus_{i=1}^{k}\mathcal{Q}_{\xi_i f}$. $\square$

Proposición 1.2.29. *El número de soluciones en U de la ecuación $f=0$, contando multiplicidades está acotado por* $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{Q}_f[U]$.

Demostración. Sea $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Entonces, para cada componente de f tenemos que $\eta(f_j) = 0$, por lo cual $\eta(I_f(U)) = 0$. Por lo tanto, η induce un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\widetilde{\eta} : \mathcal{Q}_f[U] \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\xi_i f}$$

el cual es sobreyectivo por el lema anterior. Por lo tanto,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f[U] \geq \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{\xi_i f}.$$

□

Proposición 1.2.30. *Supongamos que $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ es un germen de función holomorfa tal que $\mu_0(f) < \infty$. Entonces, $\mu_0(f) \geq \mathcal{I}_0(f)$.*

Demostración. Por el teorema 1.2.19 sabemos que $\mu_p(f) < \infty$ si y sólo si $f^{-1}(0)$ es aislado. Por el teorema 1.2.6 sabemos que $\mathcal{I}_0(f)$ es el número de soluciones de la ecuación $f_\lambda = f - \lambda = 0$, con λ un valor regular de f, con $|\lambda| << 1$, en una vecindad U de 0 suficientemente pequeña. Por el lema 1.2.24 tenemos que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}[U] \geq \mathcal{I}_0(f).$$

Por la proposición 1.2.23,

$$\mu_0(f) \geq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}[U]$$

y por lo tanto $\mu_0(f) \geq \mathcal{I}_0(f)$. □

Teorema 1.2.31. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ un germen de funciones holomorfas. Si $\mu_0(f)$ es finito, entonces $\mu_0(f) = \mathcal{I}_0(f)$.*

Demostración. Consideraremos la función de Pham $\Upsilon^{[\mu+1]}$, donde $\mu = \mu_0(f)$, por la proposición 1.2.18 tenemos que f es A-equivalente a $\Upsilon^{[\mu+1]}_\lambda = \Upsilon^{[\mu+1]} + \lambda f, |\lambda| << 1$. Por la proposición 1.2.8 tenemos que

$$\mathcal{I}_0(\Upsilon^{[\mu+1]}_\lambda) = \mathcal{I}_0(f).$$

Por las proposiciones 1.2.13 y 1.2.18 tenemos que

$$\mu_0(\Upsilon^{[\mu+1]}_\lambda) = \mu_0(f).$$

Sea $\lambda \in \mathbb{B}_\epsilon(0)$, tal que vale la proposición 1.2.23, es decir $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}[U] < \mu$. Sea $\{\xi_i\}$ el conjunto de soluciones en $\mathbb{B}_\epsilon(0)$ de $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]} = 0$. Por la proposición 1.2.23 tenemos que

$$\mu_0(\Upsilon^{[\mu+1]}) \geq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}[\mathbb{B}_\epsilon(0)]$$

entonces por la proposición 1.2.29 tenemos que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}[\mathbb{B}_\epsilon(0)] \geq \sum_i \mu_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]})$$

y por la proposición 1.2.30 tenemos que

$$\mu_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) \geq \mathcal{I}_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]})$$

ahora por el teorema 1.2.5 tenemos que

$$\sum_i \mathcal{I}_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \deg \frac{\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}}{|\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}|}$$

este último restringido a $\partial\mathbb{B}_\epsilon(0)$.

Ahora por el teorema 1.2.6

$$\deg \frac{\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}}{|\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}|} = \deg \frac{\Upsilon^{[\mu+1]}}{|\Upsilon^{[\mu+1]}|} = \mathcal{I}_0(\Upsilon^{[\mu+1]})$$

y por el lema 1.2.17 tenemos que

$$\mathcal{I}_0(\Upsilon^{[\mu+1]}) = \mu_0(\Upsilon^{[\mu+1]})$$

que acotan por arriba y por abajo a las sumas, por lo tanto

$$\sum_i \mu_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \sum_i \mathcal{I}_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}).$$

Ahora tenemos que $\mu_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) \geq \mathcal{I}_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]})$ para toda i, por la proposición anterior y además todos los términos son positivos ya que los índices de Poincaré–Hopf son positivos, por lo tanto

$$\mu_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_{\xi_i}(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]})$$

ahora 0 es una solución de $\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]} = 0$ lo que implica que

$$\mu_0(f) = \mu_0(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_0(\Upsilon_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_0(f)$$

$\square$

1.3. Residuo de Grothendieck

1.3.1. La función traza

La función traza

Sea $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ una función holomorfa tal que $f(0) = 0$, con multiplicidad finita μ en 0. Tenemos que para f existe V vecindad abierta y conexa del 0 tal que, para todo $\zeta \in V$ $f^{-1}(\zeta)$ es un conjunto finito y

$$\sum_{\xi \in f^{-1}(\zeta)} \mu_\xi(f - \zeta) = \mu.$$

Sea $f : U \longrightarrow V$ como arriba y η una $n-$forma holomorfa en U, es decir η es de la forma

$$\eta = g(z)dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n, g \in \mathcal{O}(U).$$

En V tomemos las coordenadas $w = (w_1, \ldots, w_n)$, escribamos $f = (f_1, \ldots, f_n)$, ahora denotemos por $g_i df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ la expresión de η en estas coordenadas, entonces en estas coordenadas definamos la traza de w como

$$tr_{|V_\zeta}(w) = \sum_{i=1}^{\mu} g_i(w)$$

y que en U_{ξ_i}

$$g_i = \frac{g}{detJf}, \text{ donde } Jf = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right), 1 \leq i, j \leq n.$$

De donde tenemos que

$$tr(\eta) : V_{reg} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Consideremos las funciones

$|f| : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$|f|(z) = (|f_1(z)|, \ldots, |f_n(z)|)$

$|f - w| : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, w \in V$

$|f - w|(z) = (|f_1(z) - w_1|, \ldots, |f_n(z) - w_n|)$

Sea $\mathbb{D}(0, \epsilon)$ el polidisco centrado en $0 \in V, \epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ y $\mathbb{T}_\epsilon$ su frontera $|w_1| = \epsilon_1, \ldots, |w_n| = \epsilon_n$.

Fijemos $\Gamma_\epsilon = |f|^{-1}(\epsilon)$. Γ_ϵ es un $n-$ciclo real compacto en U, el cual también es una subvariedad suave de U si tomamos a ϵ un valor regular de

$|f|$. Tenemos como funciones coordenadas para Γ_ϵ en un conjunto abierto denso de Γ_ϵ, los argumentos $arg f_i$, y de ahora en adelante supondremos que la orientación para Γ_ϵ estará determinada por $darg f_1 \wedge \ldots \wedge darg f_n$.

Fijemos $w \in V$ y $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n), \rho_i > 0$, un valor regular de $|f - w|$. Entonces,

$$\Gamma_{w,\rho} = \{z \in U : |f_1 - w_1| = \rho_1, \ldots, |f_n - w_n| = \rho_n\} \subset U$$

es una variedad real suave de dimensión n.

La orientación para $\Gamma_{w,\rho}$ es obtenida de la misma manera que Γ_ϵ. Ahora sea ζ un valor regular de f suficientemente pequeño y $f^{-1}(\zeta) = \{\xi_1, \ldots, \xi_\mu\}$. Escogiendo ρ suficientemente pequeño, tenemos que los conjuntos

$$\{u \in V : |u_1 - \zeta_1| = \rho_1, \ldots, |u_n - \zeta_n| = \rho_n\}$$

están contenidos en V_ζ lo que implica que $\Gamma_{\zeta,\rho}$ consiste de μ toros $\mathbb{T}_{\zeta_i}$, correspondientes ξ_i.

Ahora consideremos la $n-$forma meromorfa sobre U, que depende de $w \in V$

$$\eta_w = \frac{\eta}{\prod_{i=1}^n (f_j - w_j)}.$$

Lema 1.3.1. *Sea ζ un valor regular de f entonces existen vecindades $W_\zeta \subset V_\zeta$ de ζ tal que, para todo $w \in W_\zeta$*

$$tr(\eta)(w) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_{w,\rho}} \eta_w.$$

Demostración. Escojamos W_ζ de tal manera que $\Gamma_{w,\rho} \subset f^{-1}(V_\zeta)$. Acabamos de ver que en V_ζ, la expresión local de $tr(\eta)$ es $\sum_{i=1}^\mu g_i(w)$. Entonces por la formula integral de Cauchy tenemos que

$$g_i(w) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\mathbb{T}_{w_i}} \frac{g_i(f_1, \ldots, f_n) df_i \wedge \ldots \wedge df_n}{\prod_{j=1}^n (f_j - w_j)}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} tr(\eta)(w) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \sum_{i=1}^\mu \int_{\mathbb{T}_{w_i}} \frac{g_i(f_1, \ldots, f_n) df_i \wedge \ldots \wedge df_n}{\prod_{j=1}^n (f_j - w_j)} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_{w,\rho}} \eta_w. \end{aligned}$$

□

Lema 1.3.2. *Sea ζ un valor regular de f suficientemente cercano a $0 \in V$ y ρ suficientemente pequeño. Entonces los ciclos $\Gamma_\epsilon = \Gamma_{0,\epsilon}$ y $\Gamma_{\zeta,\rho}$ son homólogos en $U \setminus f^{-1}(\zeta)$ y $[\Gamma_\epsilon] = [\Gamma_{\zeta,\rho}] \in H_n(U \setminus f^{-1}(\zeta), \mathbb{Z})$.*

Demostración. La función $F(z,t) = |f - t\zeta|, 0 \leq t \leq 1$, induce una homotopía $\Gamma_{t\zeta,\epsilon}$ entre Γ_ϵ y $\Gamma_{\zeta,\rho}$, para $|\zeta|$ suficientemente pequeño.

Ahora para ρ suficientemente pequeño tenemos que $\Gamma_{\zeta,t} = \Gamma_{\zeta,t\rho+\epsilon}$ da una homotopía suave entre $\Gamma_{\zeta,\epsilon}$ y $\Gamma_{\zeta,\rho+\epsilon}$.

Ahora consideremos la función $G(z,t) = |f - \zeta| - t\epsilon$. Si ρ es un valor regular de G tal que $\Gamma_{\zeta,\rho}$ es un μ toro, entonces $G^{-1}(\rho)$ es una subvariedad δ de dimensión real $n+1$ de $U \times \mathbb{R}$. La proyección $\pi : U \times \mathbb{R} \longrightarrow U$ envía $\delta \bigcap (U \times [0,1])$ sobre un $n+1$ ciclo cuya frontera es $\Gamma_{\zeta,\epsilon+\rho} \bigcup \Gamma_{\zeta,\rho}$, por lo tanto $\Gamma_{\zeta,\rho+\epsilon}$ es homólogo a $\Gamma_{\zeta,\rho}$.

Ahora como las homotopías eran suaves tenemos que Γ_ϵ es homólogo a $\Gamma_{\zeta,\rho}$.

□

Teorema 1.3.3 (Teorema de la traza)**.** *La función holomorfa*

$$tr(\eta) : V_{reg} \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite una extensión holomorfa en una vecindad abierta del 0 en V.

Demostración. Queremos demostrar que si ϵ es un valor regular de $|f|$, suficientemente pequeño y $\mathbb{D}(0,\epsilon)$ y $\mathbb{T}_\epsilon$ están contenidos en V entonces para $w \in \mathbb{D}(0,\epsilon)$, la función

$$\Psi(w) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\eta}{\prod_{j=1}^n (f_j - w_j)}$$

es la deseada extensión de $tr(\eta)$.

Si escribimos $\eta = g(z) dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, entonces

$$\Psi(w) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{g(z) dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{\prod_{j=1}^n (f_j - w_j)} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(0,\epsilon)).$$

Sea ζ un valor regular de f y ρ suficientemente pequeño tal que los dos lemas anteriores son válidos, entonces

$$tr(\eta)(w) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_{w,\rho}} \eta_w$$

en una pequeña vecindad de W_ζ contenida en $\mathbb{D}(0,\epsilon)$ y por los lemas anteriores tenemos que

$$tr(\eta)(w) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_{w,\rho}} \eta_w = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\epsilon} \eta_w = \Psi(w) \text{ en } W_\zeta.$$

$\square$

1.3.2. El Residuo

En lo subsiguiente sea $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \longrightarrow V$ una función holomorfa finita de multiplicidad μ y $g \in \mathcal{O}(U)$. Supongamos que ζ es un valor regular de f y sea $f^{-1}(\zeta) = \{\xi_1 \ldots, \xi_\mu\}$.

Definición 1.3.4 (Residuo de Grothendieck)**.** *El residuo en 0 de g relativo a f es el limite*

$$Res_0(g, f) = \lim_{\zeta \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{g_{\xi_i}}{\det Jf(\xi_i)}, \;\; donde \; Jf(\xi_i) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(\xi_i) \right)_{1 \le i,j \le n}.$$

Teorema 1.3.5. *Sea $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ con $\epsilon_i > 0$ y consideremos un $n-$ciclo real $\Gamma_\epsilon = \{z \in U : |f_i(z)| = \epsilon_i, 1 \le i \le n\}$ con la orientación definida por la $n-$forma $dargf_1 \wedge \ldots \wedge dargf_n$. Si ϵ es suficientemente pequeño, entonces*

$$Res_0(g, f) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{g(z) dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_1 \cdots f_n}.$$

Demostración. Consideremos la $n-$forma holomorfa $\eta = gdz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$. En un subconjunto abierto y denso de U tenemos que

$$gdz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = \frac{g}{detJf} df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$$

y debido a la manera en la cual el ciclo Γ_ϵ esta orientado

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{gdz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_1 \cdots f_n} = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{g}{detJf} \frac{df_1 \wedge \ldots \wedge df_n}{f_1 \cdots f_n}.$$

Sobre conjuntos abiertos y densos de valores regulares de f, la traza de la forma η es

$$tr(\eta)(w) = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{g(f_i^{-1})(w)}{detJf(f_i^{-1}(w))}$$

y por el teorema de la traza

$$tr(\eta)(w) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{gdz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{\prod_{j=1}^{n} (f_j - w_j)}$$

por lo tanto

$$\lim_{w \to 0} tr(\eta)(w) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{gdz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_1 \cdots f_n}.$$

□

Proposición 1.3.6. *Mostrar que cuando $n = 1$ esto se reduce al residuo clásico para funciones meromorfas debido a Cauchy.*

Demostración. Dado que $n = 1$, tenemos que

$$Res_0(g, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{g}{f} dz$$

mientras que el residuo clásico para funciones meromorfas dice que si $\frac{g}{f}$ es una función meromorfa sobre un dominio U y P es su conjunto de polos. Si γ_ϵ es un ciclo en $U \setminus P$ tal que $\mathcal{I}_{\gamma_\epsilon}(w) = 0$ para todo w que no esta en U entonces,

$$\sum_{\zeta \in P} \mathcal{I}_{\gamma_\epsilon} Res\left(\frac{g}{f}, \zeta\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{g}{f} dz.$$

Por lo tanto en dimensión 1 ambos residuos coinciden. □

Propiedades del Residuo

Lema 1.3.7. *Si $a, b \in \mathbb{C}$ y $g, h \in \mathcal{O}(U)$, entonces*

$$Res_0(ag + bh, f) = aRes_0(g, f) + bRes_0(h, f).$$

Más aún , $Res_0(g, f)$ es alternante en las componentes $f_1, \ldots, f_n$ de f debido a la orientación definida para el ciclo Γ_ϵ.

Demostración.

$$Res_0(ag + bh, f) = \lim_{\zeta \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{ag(\xi_i) + bh(\xi_i)}{\det Jf(\xi_i)}$$

$$= a \lim_{\zeta \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{g(\xi_i))}{\det Jf(\xi_i)} + b \lim_{\zeta \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{h(\xi_i)}{\det Jf(\xi_i)}$$
$$= aRes_0(g, f) + bRes_0(h, f).$$

□

Lema 1.3.8. *Si f es como arriba tenemos que*

$$Res_0(\det Jf, f) = \mu_0(f) = \mathcal{I}_0(f).$$

Demostración. Para ver esto simplemente notamos que si ζ es un valor regular de f y $f^{-1}(\zeta) = \{\xi_1, \ldots, \xi_\mu\}$, entonces la suma $\sum_{i=1}^{\mu} \frac{detJf(\xi_i)}{detJf(\xi_i)}$ es constante e igual a $\mu_0(f)$. Por lo tanto

$$Res_0(detJf, f) = \lim_{\zeta \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{detJf(\xi_i)}{\det Jf(\xi_i)} = \mu_0(f).$$

□

Lema 1.3.9. *Si f es un biholomorfismo, entonces*

$$Res_0(g, f) = \frac{g(0)}{\det Jf(0)}.$$

Demostración. En este caso para toda $\zeta \in V$ existe un único ξ tal que $f(\xi) = \zeta$ por ser valor regular de f. Por lo tanto

$$Res_0(g, f) = \lim_{\zeta \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{g(\xi_i)}{\det Jf(\xi_i)} = \lim_{\zeta \to 0} \frac{g(\xi)}{\det Jf(\xi)} = \frac{g(0)}{\det Jf(0)}.$$

□

Lema 1.3.10. *Si $g \in I_f$, entonces $Res_0(g, f) = 0$.*

Demostración. Escribamos $g = h_1 f_1 + \ldots + h_n f_n$. Por el primer lema basta ver que $Res_0(h_1 f_1, f) = 0$. Notemos que

$$\omega = \frac{h_1 f_1 dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_1 \cdot \cdots \cdot f_n} = \frac{h_1 dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_2 \cdot \cdots \cdot f_n}.$$

Ahora sea $D_i = \{z \in U : f_i(z) = 0\}$, entonces ω es una forma holomorfa en el abierto $U' = U \setminus (D_2 \cup \ldots \cup D_n) \supset U \setminus (D_1 \cup \ldots \cup D_n)$. La cadena $\Delta_\epsilon = \{z \in U : |f_1(z)| \leq \epsilon_1, |f_i(z)| = \epsilon_i, 2 \leq i \leq n\}$ esta contenida en U' y $\partial \Delta_\epsilon = \pm \Gamma_\epsilon$ con algún signo. Entonces por el teorema de Stokes

$$Res_0(h_1 f_1, f) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\epsilon} \omega = \pm \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Delta_\epsilon} d\omega.$$

□

Teorema 1.3.11. *Si f es como en los lemas anteriories tenemos que* $\det(Jf)$ *no pertenece al ideal I_f.*

Demostración. Por un lema anterior tenemos que $Res_0(\det(Jf), f) = \mu_0(f) \neq 0$, y si $\det(Jf)$ perteneciera al ideal I_f esto no podría ocurrir. Por lo tanto $\det(Jf)$ no pertenece al ideal I_f. □

Proposición 1.3.12. *Si $\mu_0(f) = 1$, entonces f es un biholomorfismo.*

Demostración.

$$1 = \mu_0(f) = Res_0(\det Jf, f) = \lim_{\zeta \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\det Jf(\xi_i)}{\det Jf(\xi_i)}$$

lo que implica que $\mu = 1$ para ζ suficientemente pequeño, por lo tanto f es un biholomorfismo. □

Lema 1.3.13 (Ley de Transformación)**.** *Supongamos $g : U \longrightarrow V$ es una función holomorfa con $g^{-1}(0) = \{0\}$ y $g(z) = A(z)f(z)$, donde $A(z) = (a_{ij}(z))$ es una matriz con entradas holomorfas. Entonces*

$$Res_0(h, f) = Res_0(h \det A, g).$$

Demostración. La condición $g(z) = A(z)f(z)$ implica que $I_g \subset I_f$.

Primero probaremos la afirmación para el caso en el cual f y g son $A-$equivalentes, lo que implica que $I_g = I_f$

Consideremos la deformación holomorfa $f_\lambda = f - \lambda$ y $g_\lambda = Af_\lambda$, de ser necesario encogemos V de tal manera que ocurra esto, lo que implica que g_λ y f_λ tienen los mismo ceros $\xi_1, \ldots, \xi_\mu$ para λ un valor regular de f. En cada punto ξ_i, tenemos que $Jg_\lambda(\xi_i) = A(\xi_i)Jf(\xi_i)$.

Como $\det Jg_\lambda(\xi_i) = \det A(\xi_i) \cdot \det Jf(\xi_i)$ y

$$\sum_{i=1}^{\mu} \frac{h(\xi_i)}{\det Jf(\xi_i)} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{h(\xi_i) \det A(\xi_i)}{\det Jg_\lambda(\xi_i)}.$$

Por lo cual

$$Res_0(h, f) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{h(\xi_i)}{\det Jf(\xi_i)} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{h(\xi_i) \det A(\xi_i)}{\det Jg_\lambda(\xi_i)} = Res_0(h \det A, g).$$

Ahora lo probaremos en general, donde no necesariamente ocurre que $\det A \neq 0$. Escojamos una familia de matrices holomorfas $A_t(z)$ con $A_0(z) =$

$A(z)$ y $\det A_t(0) \neq 0$ para $t \neq 0$. Sea $g_t(z) = A_t(z)f(z)$ lo que implica que para $t \neq 0$ g_t y f son $A-$equivalentes, y por el caso anterior tenemos que

$$Res_0(h, f) = Res_0(h \det A_t, g_t), \text{ para toda } t \neq 0.$$

Ahora sabemos que

$$Res_0(h \det A_t, g_t) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_{t,\epsilon}} \frac{h \det A_t dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{g_{t1} \cdots g_{tn}}$$

donde $\Gamma_{t,\epsilon} = \{z : |g_t(z)| = \epsilon\}$.

Escogiendo ϵ un valor regular de $|g| = |g_0|$, lo que implica que $\Gamma_{0,\epsilon}$ es un variedad suave y ϵ un valor regular de $|g_t|$ para $|t|$ suficientemente pequeño, lo que implica que $\Gamma_{t,\epsilon}$ es una pequeña deformación de la cero sección $\Gamma_{0,\epsilon}$ en una vecindad tubular de $\Gamma_{0,\epsilon}$, por lo tanto $\Gamma_{0,\epsilon}$ y $\Gamma_{t,\epsilon}$ son homólogos. Lo que implica que

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_{t,\epsilon}} \frac{h \det A_t dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{g_{t1} \cdots g_{tn}} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_{0,\epsilon}} \frac{h \det A_t dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{g_{t1} \cdots g_{tn}}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} Res_0(h, f) &= \lim_{t \to 0} Res_0(h \det A_t, g_t) \\ &= \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_{0,\epsilon}} \frac{h \det A_t dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{g_{t1} \cdots g_{tn}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_{0,\epsilon}} \frac{h \det A_0 dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{g_1 \cdots g_n} \\ &= Res_0(h \det A, g). \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Haces vectoriales complejos

En este capítulo veremos los preliminares necesarios para entender el enunciado y demostración del Teorema de Baum-Bott. Veremos las definiciones básicas y resultados principales de Clases Características que son necesarios en este trabajo. Para nuestro objetivo usaremos la descripción de Clases Características de Chern-Weil. Dado un haz vectorial sobre una variedad le asociamos una cierta clase "característica" del anillo de cohomología de la variedad que cumplirá con ciertas propiedades interesantes relativas al haz. En la teoría de Chern-Weil la clase asociada pertenece a la cohomología de De Rham de formas diferenciales de la variedad. Dichas clases de cohomología se definen en términos de la curvatura. Recordemos que el teorema de Gauss–Bonnet en geometría diferencial es una proposición importante sobre superficies que conecta su geometría (utilizando explícitamente su curvatura) con su topología (utilizando la característica de Euler), la teoría de Chern–Weil aparece como un invariante através de la teoría de obstrucciones.

2.1. Haces vectoriales

Variedades complejas

De ahora en adelante, consideraremos espacios topológicos Hausdorff, con base numerable y conexos.

Definición 2.1.1. *Una* variedad compleja *M de dimensión n es un espacio topológico, junto con una estructura compleja definida de la siguiente manera:*

existe una cubierta abierta de M, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, y homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$, donde $V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ es abierto, tales que las funciones de transición $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ son biholomorfas.

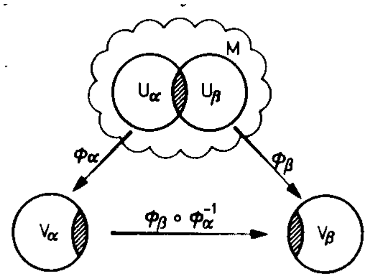


Figura 2.1: Cartas de la Variedad M.

Ejemplo 2.1.2. *Un ejemplo muy importante de variedad compleja es $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.*

El espacio proyectivo complejo de dimensión n, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, es el cociente de $\mathbb{C}^{n+1}\setminus 0/\sim$ con respecto a una relación de equivalencia

$$z \sim w \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } z = \lambda w.$$

La clase de z se denota por $[z]$ o $(z_0 : z_1 : \ldots : z_n)$ y la aplicación cociente $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ se denota por π. Dotamos a $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de la topología cociente: $U \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ abierto $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ abierto en $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$. Para definir la estructura compleja definamos $\{U_i, \varphi_i\}$, $i = 0, \ldots, n$, $U_i = \{[z] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} : z_i \neq 0\}$, y $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definidas por

$$\varphi_i([z]) := \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \widehat{1}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

donde $\widehat{\ }$ denota que omitimos esa coordenada. En particular,

$$\varphi_i([z]) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \frac{z_1}{z_i}, \ldots, \widehat{1}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right) = (x_{i0}, \ldots, \widehat{x_{ii}}, \ldots, x_{in})$$

La función de transición $\varphi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ está dada por

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_{j0}, \ldots, x_{jn}) = \left(\frac{x_{j0}}{x_{ji}}, \frac{x_{j1}}{x_{ji}}, \ldots, \frac{\widehat{x_{ji}}}{x_{ji}}, \ldots, \frac{1}{x_{ji}}, \ldots, \frac{x_{jn}}{x_{ji}}\right).$$

Esta aplicación es un biholomorfismo, por lo tanto $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ es una variedad compleja, de dimensión n.

Haces vectoriales complejos

Definición 2.1.3. *Sea M una variedad compleja. Un* haz vectorial complejo de rango n *sobre M es un espacio topológico E junto con una aplicación suprayectiva continua $\pi : E \longrightarrow M$ tales que satisfacen lo siguiente:*

(i) El conjunto $\pi^{-1}(x) := E_x$ tiene estructura de espacio vectorial complejo de dimensión n, para todo $x \in M$.

(ii) Existe una cubierta abierta de M, $M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ y homeomorfismos $\Theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ tales que para todo $\alpha \in A$, si $x \in U_\alpha$, entonces $\Theta_{\alpha x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales complejos.

E se llama el espacio total del haz, M se llama la base del haz y las funciones Θ_α se llaman las trivializaciones locales de E.

Ejemplo 2.1.4. *El haz trivial sobre M, denotado por*

$$\begin{array}{c} X \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow \quad \pi \\ M \end{array}$$

donde $\pi(x, v) = x$. Si $f : M \longrightarrow \mathbb{C}^n$, entonces su gráfica $s(x) = (x, f(x))$ es una sección de $M \times \mathbb{C}^n$. Recíprocamente, una sección $s : M \longrightarrow M \times \mathbb{C}^n$ define una función $f : M \longrightarrow \mathbb{C}^n$.

Definición 2.1.5. *Dada una variedad compleja M, y p un punto en la variedad y $z = (z_1, \ldots, z_n)$ un sistema de coordenadas locales. Podemos dar tres nociones de espacio tangente en p:*

1. $T_{\mathbb{R},p}(M)$ es el usual espacio tangente a M en p, donde consideraremos a M como una variedad real de dimensión $2n$. $T_{\mathbb{R},p}(M)$ puede ser visualizado como el espacio de derivaciones $\mathbb{R}$-lineales sobre el anillo de funciones real valuadas $\mathcal{C}^\infty$ en una vecindad de p; si $z_i = x_i + iy_i$. Entonces,

$$T_{\mathbb{R},p}(M) = \mathbb{R}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}.$$

2. $T_{\mathbb{C},p}(M) = T_{\mathbb{R},p}(M) \otimes \mathbb{C}$ es llamado el espacio tangente complexificado a M en p. $T_{\mathbb{C},p}(M)$ puede ser visualizado como el espacio de derivaciones $\mathbb{C}$-lineales sobre el anillo de funciones complejo valuadas $\mathcal{C}^\infty$ en una vecindad de p. Entonces, utilizando la notación del capítulo uno podemos escribir

$$T_{\mathbb{R},p}(M) = \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}$$

$$= \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}.$$

3. $T'_p(M) = \mathbb{C}\{\partial/\partial z_i\} \subset T_{\mathbb{C},p}(M)$ *es llamado el espacio tangente holomorfo a* M *en* p*. El cual puede ser visualizado como el subespacio de* $T_{\mathbb{C},p}(M)$ *que consiste de derivaciones que se anulan sobre las funciones antiholomorfas.*

Ejemplo 2.1.6. *Los espacios* $T'M$ *y* $T'M^*$ *son ejemplos de haces vectoriales sobre la variedad compleja* M*. Secciones de estos haces son los campos de vectores y 1-formas diferenciales. Si* U *es un abierto trivializador de estos haces, entonces*

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\}$$

es un marco de $T'M$ *sobre* U*,*

$$\{dz_1, \ldots, dz_n\}$$

es un marco de $T'M^*$ *sobre* U*.*

Es decir el espacio tangente en p*,* T_pM*, es el espacio vectorial complejo de las funciones* $v : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *que satisface que:*

(i) v *es* $\mathbb{C}$*-lineal.*

(ii) $v(fg) = g(p)v(f) + f(p)v(g)$.

Dado $p \in M$ *y una carta* $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ *tal que* $p \in M$ *tenemos que si* $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$*, entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi_\alpha)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(p) = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial y_i}(\varphi_\alpha).$$

De donde tenemos que

$$\begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) : & \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \frac{\partial f}{\partial y_i}(p) \end{array}$$

son vectores tangentes a M *en* p*. Ahora de aquí podemos pasar a la base*

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right\}$$

haciendo el mismo cambio de base que hicimos en el capitulo uno al probar que los biholomorfismos preservan orientación. Ahora el espacio tangente holomorfo a M en p T'_pM sera el generado por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\}$$

y el dual será el generado por

$$\{dz_1, \ldots, dz_n\}.$$

El haz tangente holomorfo a M, $T'M$, es la unión $T'M = \cup_{p\in M} T'_pM$, análogamente el dual. Con lo cual ya tenemos que secciones de estos haces son los campos de vectores y 1-formas diferenciales.

Definición 2.1.7. *Una* sección *de $\pi : E \longrightarrow M$ es una aplicación continua $s : M \longrightarrow E$ tal que $(\pi \circ s)(x) = x$ para todo $x \in M$, es decir $s(x)$ esta contenido en E_x.*

Si $s : M \longrightarrow E$ es una sección de E, entonces

$$\begin{array}{rccll} \Theta_\alpha \circ s_{|U_\alpha}: & U_\alpha & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{C}^n & \\ & x & \longmapsto & \Theta_\alpha(s(x)) & = (x, s_\alpha(x)) \end{array}$$

es la gráfica de $s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Luego, secciones son funciones con valores en $\mathbb{C}^n$.

Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un haz de rango n, $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta trivializadora y $\{\Theta_\alpha\}$ trivializaciones locales de E. Dado $x \in U_\alpha$, $\Theta_{\alpha x} : E_x \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es una restricción de $\Theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ en E_x. Denotemos por $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ y definamos $\Theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ por $\Theta_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha x}\Theta_{\beta x}^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[dl, "\Theta_\beta"'] \arrow[dr, "\Theta_\alpha"] & \\ U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \arrow[rr, "\Theta_{\alpha\beta}"'] & & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \\ (x, v) \arrow[rr, mapsto] & & (x, \Theta_{\alpha\beta}(x)v) \end{tikzcd}$$

Las $\Theta_{\alpha\beta}$ son aplicaciones continuas y satisfacen la condición de cociclo:

$$\Theta_{\alpha\beta}\Theta_{\beta\gamma}\Theta_{\gamma\alpha} = I, \text{ en } U_{\alpha\beta\gamma} \tag{I}$$

Las $\Theta_{\alpha\beta}$ se llaman funciones de transición de E . Observar que si s es una sección de E, entonces

$$\Theta_{\alpha\beta}s_\beta = s_\alpha, \text{ en } U_{\alpha\beta} \tag{II}$$

Definición 2.1.8. *Sean E y F dos haces vectoriales sobre M. Un morfismo $\varphi : E \longrightarrow F$ es una aplicación continua tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & F \arrow[d, "\pi_F"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad \pi_E = \pi_F \circ \varphi$$

y $\varphi_{|E_x} : E_x \longrightarrow F_x$ es lineal para toda $x \in M$. Si φ es una biyección y φ^{-1} es un morfismo, entonces φ se llama un isomorfismo.

Supongamos que E y F son haces vectoriales sobre M y que $\{U_\alpha\}$ es una cubierta trivializadora común a E y a F. Sean $\{\Theta_\alpha\}$ y $\{\eta_\alpha\}$ las trivializaciones de E y F, respectivamente. Si φ es un morfismo de E en F, entonces φ induce una aplicación $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{C}^n \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^m$ dada por:

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times \mathbb{C}^n \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] & \pi_E^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\Theta_\alpha"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ U_\alpha \times \mathbb{C}^m & \pi_F^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\eta_\alpha"] \end{tikzcd} \qquad \varphi_\alpha = \eta_\alpha \circ \varphi \circ \Theta_\alpha^{-1}$$

Ahora, φ_α se expresa en la forma $\varphi_\alpha(x, v) = (x, a_\alpha(x)v)$, donde $a_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ satisface

$$\eta_{\alpha\beta}a_\beta = a_\alpha\Theta_{\alpha\beta}, \text{ para todo, } \alpha, \beta \in A \tag{III}$$

De hecho considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] & \pi_E^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\Theta_\alpha"'] \arrow[r, "\Theta_\beta"] \arrow[d, "\varphi"] & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \arrow[d, "\varphi_\beta"] \\
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^m & \pi_F^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\eta_\alpha"] \arrow[r, "\eta_\beta"'] & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^m
\end{tikzcd}$$

obtenemos que

$$\varphi_\beta(x, v) = \eta_\beta \circ \eta_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \Theta_\alpha \circ \Theta_\beta^{-1}(x, v)$$

lo que implica que

$$\eta_\alpha \circ \eta_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta(x, v) = \varphi_\alpha \circ \Theta_\alpha \circ \Theta_\beta^{-1}(x, v).$$

Por lo tanto,

$$(x, \eta_{\alpha\beta}(x) a_\beta(x) v) = (x, a_\alpha(x) \Theta_{\alpha\beta}(x) v).$$

Recíprocamente, dada una familia $a_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ tales que $\eta_{\alpha\beta} a_\beta = a_\alpha \Theta_{\alpha\beta}$ en $U_{\alpha\beta}$ para todo α, β, entonces la familia $\{a_\alpha\}$ determina un morfismo de E en F.

Proposición 2.1.9 (Construcción de haces)**.** *Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M. Supongamos que se tienen bien definidas las funciones continuas $\Theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ que satisfacen la relacines $\Theta_{\alpha\beta}\Theta_{\beta\gamma}\Theta_{\gamma\alpha} = I$ en $U_{\alpha\beta\gamma}$ y $\Theta_{\alpha\beta} = \Theta_{\beta\alpha}^{-1}$ en $U_{\alpha\beta}$(de lo cual, deducimos que $\Theta_{\alpha\alpha} = I$). Entonces, podemos construir un haz vectorial complejo de rango n sobre M, único hasta isomorfismo, cuyas funciones de transición son las funciones $\Theta_{\alpha\beta}$ dadas.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}_1 = \coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ y definamos la siguiente relación de equivalencia en $\mathcal{F}_1$: $(x, v, \alpha) \sim (x', v', \beta)$ si, y solamente si, $x = x'$, $\Theta_{\alpha\beta}(x) v' = v$ y $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Esto es,

$$\mathcal{F}_1 = \coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{C}^n = \bigcup_{\alpha \in A} \{(x, v, \alpha) : (x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^n\}.$$

Definamos $\Theta_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathcal{F}_1$ por $(x, v) \longmapsto (x, v, \alpha)$. Por la relación de equivalencia tenemos que $[(x, v, \alpha)] = \{(x, \Theta_{\beta\alpha}(x) v, \beta) : U_{\alpha\beta} \neq \emptyset\}$ y por lo tanto, $\{[(x, v, \alpha)] : (x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^n\} = U_\alpha \times \mathbb{C}^n$.

Sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1/\sim$ y definamos $\pi : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}$ por $(x, v, \alpha) \longmapsto [(x, v, \alpha)]$.

Si $p : \mathcal{F} \longrightarrow X$ es la proyección en el primer elemento, entonces esta terna define un haz vectorial trivial de rango n en U_α, con funciones de transición $\Theta_{\alpha\beta}$. Ahora sólo nos falta dar explícitamente los homeomorfismos.

Sea $\Theta_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$, dada por

$$\Theta_\alpha([(x, v, \alpha)]) = (\pi \circ \theta_\alpha)^{-1}([(x, v, \alpha)]) = \theta_\alpha^{-1}((x, v, \alpha)) = (x, v)$$

con lo cual obtenemos los mismos cociclos.

Entonces, el cociente $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1/\sim$ tiene una estructura de haz vectorial complejo de rango n sobre M, único hasta isomorfismo, cuyas funciones de transición son las $\Theta_{\alpha\beta}$. □

2.1.1. Operaciones con haces vectoriales

La construcción de haces vectoriales complejos que dimos en la proposición 2.1.9 es muy útil, ya que nos permite construir haces a partir de familias de funciones, con la condición de que se cumplan las condiciones de cociclo.

Suma de Whitney

Si E y E' son haces vectoriales sobre M, de rangos n y m respectivamente, su suma directa $E \oplus E'$ es un haz vectorial sobre M cuya fibra sobre cada $x \in M$ es $E_x \oplus E'_x$. Las trivializaciones locales Θ_α y Θ'_α de E y E', relativas a la misma cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de M, inducen las trivializaciones locales de $E_x \oplus E'_x$:

$$\Theta_\alpha \oplus \Theta'_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m.$$

Luego los funciones de transición de $E_x \oplus E'_x$ vienen dados por:

$$(\Theta_{\alpha\beta} \oplus \Theta'_{\alpha\beta})(x) = \begin{pmatrix} \Theta_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \Theta'_{\alpha\beta} \end{pmatrix} : \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m.$$

El producto tensorial

Recordemos que el producto tensorial $E_x \otimes E'_x$ de dos espacios vectoriales E_x y E'_x lo podemos definir a partir de generadores y relaciones entre estos generadores, que en principio podemos considerar se encuentran en el espacio $E_x \times E'_x$. La clase de equivalencia $v \otimes w \in E_x \otimes E'_x$ de la pareja $(v, w) \in E_x \times E'_x$

se llama tensor. Tomemos el espacio vectorial generado por $E_x \otimes E'_x$ con las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{lcl} (v_1+v_2)\otimes w & = & v_1\otimes w + v_2\otimes w \\ v\otimes(w_1+w_2) & = & v\otimes w_1 + v\otimes w_2 \\ c(v\otimes w) & = & cv\otimes w = v\otimes cw. \end{array}$$

Cada elemento del producto tensorial es una suma finita de tensores. Dadas bases para E_x y E'_x, el conjunto de productos tensoriales de los vectores de base, uno de E_x y otro de E'_x, forman una base para $E_x \otimes E'_x$.

Por lo tanto, la dimensión del producto tensorial es el producto de las dimensiones.

Dadas funciones multilineales $f(x_1 \ldots x_k)$ y $g(x_1 \ldots x_m)$, su producto tensorial es la función multilineal

$$(f\otimes g)(x_1,\ldots,x_{k+m}) = f(x_1,\ldots,x_k)\, g(x_{k+1},\ldots,x_{k+m}).$$

Si E y E' son haces vectoriales complejos sobre M, de rangos n y m respectivamente, su producto tensorial $E\otimes E'$ es un haz vectorial complejo cuya fibra sobre $x\in M$ es $E_x\otimes E'_x$. Las funciones de transición vienen dadas por

$$\begin{array}{rcl} \Theta_{\alpha\beta}(x)\otimes\Theta'_{\alpha\beta}(x):\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m & \longrightarrow & \mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m \\ v_1\otimes v_2 & \longmapsto & \Theta_{\alpha\beta}(x)v_1\otimes\Theta'_{\alpha\beta}(x)v_2. \end{array}$$

Observación 2.1.10. *Si ambos haces vectoriales son de rango 1, entonces los cociclos de transición que acabamos de definir son simplemente el producto $\Theta_{\alpha\beta}\Theta'_{\alpha\beta}$ y $E\otimes E'$ es un haz vectorial de rango 1. Esta observación nos será bastante útil en demostraciones futuras.*

El haz dual

Si $E \xrightarrow{\pi} M$ es un haz vectorial complejo, entonces el haz dual E^*, es el haz cuyas fibras en cada punto $x\in M$ son $(E_x)^*$. Si $\Theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha)\longrightarrow U_\alpha\times\mathbb{C}^n$ es una trivialización de E, entonces

$$\left(\Theta_\alpha^T\right)_x^{-1} : E_x^* \longrightarrow x\times\mathbb{C}^{n^*}$$

y por definición, esta es una trivialización del haz dual E^*. Ahora los cociclos de transición relativos a E son:

$$\left(\Theta_\alpha^T\right)^{-1}\Theta_\beta^T = \left(\left(\Theta_\beta^T\right)^{-1}\Theta_\alpha^T\right)^{-1} = \left(\left(\Theta_\alpha\Theta_\beta^{-1}\right)^T\right)^{-1} = \left(\Theta_{\alpha\beta}^T\right)^{-1}.$$

Y de nuevo si el rango de E es uno, entonces los cociclos de transición de E^* son $\Theta_{\alpha\beta}^{-1}$.

Subhaces

Si $E \xrightarrow{\pi} M$ es un haz vectorial complejo, un subhaz consiste en un subconjunto $F \subset E$ tal que la proyección π con la trivializaciones locales de E restringidas a F, le dan a F un estructura de haz vectorial complejo.

Haz cociente

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial complejo de rango n. Dado un subhaz F de E de rango m, las fibras F_x son subespacios de E_x y el haz cociente E/F esta formado por las fibras E_x/F_x. Más precisamente, sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta trivializadora de E. Entonces, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n & \pi_E^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\Theta_\beta"'] \arrow[r, "\Theta_\alpha"] & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \\
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^m \arrow[u] & \pi_F^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[u] \arrow[l, "\eta_\beta"] \arrow[r, "\eta_\alpha"'] & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^m \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

conmuta. Luego,

$$(x, v) \longmapsto (x, \Theta_{\alpha\beta}(x)v).$$

Por otro lado tenemos que

$$(x, v) \longmapsto (x, \eta_{\alpha\beta}(x)v).$$

Ahora bien para todo v en $\mathbb{C}^m$ estas dos aplicaciones coinciden y por lo tanto, $\Theta_{\alpha\beta}(x)_{|\mathbb{C}^m} v = \eta_{\alpha\beta}(x)v$. Por lo tanto, $\Theta_{\alpha\beta}$ se puede expresar de la siguiente forma

$$\Theta_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} \eta_{\alpha\beta}(x) & \rho_{\alpha\beta}(x) \\ 0 & \zeta_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix}.$$

Esta nos permite definir un haz cociente E/F de la siguiente manera: dado un vector $w \in \mathbb{C}^n$ este se escribe de manera única como

$$w = v + u, v \in \mathbb{C}^m, u \in \mathbb{C}^{n-m},$$

ahora bien $\Theta_{\alpha\beta}(x)(v,u) = (\eta_{\alpha\beta}(x)v + \rho_{\alpha\beta}(x)u, \zeta_{\alpha\beta}(x)u)$ y como sabemos que $\eta_{\alpha\beta}v+\rho_{\alpha\beta}(x)u \in \mathbb{C}^m$. Entonces la clase de $\Theta_{\alpha\beta}(x)(v,u)$ que esta en el cociente $\mathbb{C}^n/\mathbb{C}^m$ coincide con la clase de $\zeta_{\alpha\beta}(x)u$. Con lo cual podemos definir el haz E/F a partir de los cociclos de transición $\zeta_{\alpha\beta}$.

Haz determinante

Recordemos que el producto exterior de ω con η se define como:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+m)!}{k!\,m!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

donde k y m son el número de variables para cada una de las dos funciones y las alternaciones antisimétricas de una función se definen como el promedio con signo de los valores sobre todas las permutaciones de sus variables:

$$\mathrm{Alt}(\omega) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\Sigma_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\omega[\sigma(x_1), ...\sigma(x_k)]$$

El haz determinante de E es el haz $\det E = \bigwedge^n E$, cuya fibra es $\bigwedge^n E_x$. Sus cociclos de transición son $\det \Theta_{\alpha\beta}$, de donde tenemos que para el caso de un subhaz, $\det \Theta_{\alpha\beta} = \det \eta_{\alpha\beta} \otimes \det \zeta_{\alpha\beta}$, de lo cual concluimos que $\det E \cong \det F \otimes \det E/F$.

Pic(M)

Supongamos que E es un haz vectorial complejo de rango 1 sobre M. Sea $\{\Theta_\alpha\}$ una familia de trivializaciones de E. Sea $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$ una colección de funciones continuas, que no se anulan en ningún punto de U_α. Entonces, las funciones $\eta_\alpha = f_\alpha\Theta_\alpha$ constituyen una nueva familia de trivializaciones de E. Los cociclos de transición están relacionados por $\eta_{\alpha\beta}f_\beta = f_\alpha\Theta_{\alpha\beta}$, de donde tenemos que generan haces isomorfos(Ver propiedad III). Por lo tanto, usando el producto tensorial como producto y del haz dual para obtener inversos podemos concluir que las clases de isomorfismos de haces complejos de rango 1 sobre M forman un grupo abeliano, el cual denotaremos por $Pic(M)$, con la operación

$$\otimes : Pic(M) \times Pic(M) \longrightarrow Pic(M)$$
$$(E, E') \longmapsto E \otimes E'.$$

Con respecto de esta operación, $E^{-1} = E^*$.

El haz inducido

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial complejo y $f : Y \longrightarrow M$ una función continua. Entonces, f induce un haz sobre Y, f^*E, llamado el *haz inducido* por f. Como conjunto, f^*E es el subconjunto de $Y \times E$ definido por

$$f^*E = \{(y, e) : f(y) = \pi(e)\}.$$

Este es el único subconjunto maximal de $Y \times E$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Y \times E \supset f^*E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
Y \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

Observemos que si E es trivial, i.e. $E = M \times \mathbb{C}^n$, entonces

$$f^*E = \{(y, (x, v)) : x = f(y)\} \cong \{(y, v) : y \in Y, v \in \mathbb{C}^n\} = Y \times \mathbb{C}^n.$$

Luego, si utilizamos las trivializaciones de E, podemos concluir que la fibra de f^*E sobre y es isomorfa a $E_{f(y)}$, y los cociclos vienen dados por $\{\varphi_{ij} \circ f\}$ para la cubierta $\{f^*(U_{ij})\}$, donde φ_{ij} son los cociclos que generan al haz $E \xrightarrow{\pi} M$. Además, si tenemos una composición $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$, entonces $(f \circ g)^*E \cong g^*f^*E$.

2.1.2. Ejemplos de haces holomorfos

El haz asociado a un conjunto analítico

Sea M una variedad compleja compacta y $V \subset M$ un subconjunto analítico de codimensión 1. Cubramos M por abiertos U_i, lo cuales están definidos en V por $f_i^{-1}(0)$. En U_{ij} tenemos una relación $f_i = \varphi_{ij} f_j$, donde φ_{ij} es holomorfa y no se anula en ningún punto.

El haz de rango 1 sobre V, $[V]$ está definido por las funciones de transición $\varphi_{ij} = f_i/f_j$. A continuación veremos que $[V]$ admite una sección holomorfa s_v definida por las funciones que definen al subconjunto analítico V. Sobre un abierto trivializador U_i, primero consideremos el siguiente diagrama donde tenemos

$$\begin{tikzcd}
{[V]_{|U_i}} \arrow[d, "\varphi_i"'] \arrow[dr, dashed, "\pi"] & \\
U_i \times \mathbb{C} \arrow[r, "p_1"'] & M
\end{tikzcd}$$

una sección $s_v : U_i \longrightarrow [V]_{|U_i}$, que está dada por las gráficas de f_i, $s_{V_{|U_i}}(z) = \varphi_i^{-1}(z, f_i(z))$. Además tenemos que los ceros de s_V definen V.

Ahora supongamos que V también esta definido por $g_i = 0$ en U_i. Entonces, f_i/g_i no se anula en ningún punto de U_i y

$$B_{ij} = \frac{g_i}{g_j} = \frac{f_i}{f_j} \cdot \frac{\frac{f_j}{g_j}}{\frac{f_i}{g_i}}.$$

Esto es,

$$\frac{f_i}{g_i} B_{ij} = \varphi_{ij} \frac{f_j}{g_j}$$

de lo cual concluimos por la propiedad (III) de fibrados vectoriales complejos, que el haz dado por las φ_{ij} es isomorfo al haz dado por las B_{ij}.

El haz tautológico $\mathbb{L}^*$

Recordemos que el espacio proyectivo complejo de dimensión n, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, es el cociente de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0/\sim$ con respecto a una relación de equivalencia

$$z \sim w \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } z = \lambda w.$$

Tomando el haz trivial $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. El haz tautológico o universal, es el subhaz de rango 1 de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{n+1}$ que consiste de los pares $([w], z) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{n+1}$ tales que z esta en la recta definida por $[w]$:

$$\mathbb{L}^* = \{([w], z) : \exists t \in \mathbb{C} \text{ tal que } z = tw\}$$

En coordenadas del abierto U_i, tenemos que

$$\mathbb{L}^*_{|U_i} = \{((z_0 : \ldots : z_n), t(z_0, \ldots, z_n) | t \in \mathbb{C})\}$$

Los cociclos (funciones de transición) están definidos por

$$\begin{array}{ccccc} U_{ij}\times\mathbb{C} & \overset{\Theta_j^{-1}}{\longrightarrow} & \mathbb{L}^*_{|U_{ij}} & \overset{\Theta_i}{\longrightarrow} & U_{ij}\times\mathbb{C} \\ ([z],t) & & \longmapsto & & (x,\Theta_{ij}([z])t)\,. \end{array}$$

Observemos que en cualquier abierto U_{ij} se cumple:

$$\left(\frac{z_0}{z_j},\ldots,\frac{z_i}{z_j},\ldots,1,\ldots,\frac{z_n}{z_j}\right)=\left(\frac{z_i}{z_j}\right)\left(\frac{z_0}{z_i},\ldots,1,\ldots,\frac{z_j}{z_i},\ldots,\frac{z_n}{z_i}\right)$$

Por lo tanto tenemos que las funciones de transición Θ_{ij} vienen dadas por

$$\Theta_{ij}([z])=\frac{z_i}{z_j}\text{ en }U_{ij}.$$

El haz hiperplano $\mathbb{L}$

Sea $H_1=\{z:P_1(z)=0\}$ un hiperplano en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, donde $P_1:\mathbb{C}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{C}$ es un polinomio de grado 1, con $P_1(0)=0$. Mediante un cambio de coordenadas, podemos suponer que $H_1=\{z:z_1=0\}$.

En U_i, $i\neq 0$ H está definido por $f_i=\frac{z_1}{z_i}=0$. El haz $\mathbb{L}$, que representa la clase de isomorfismo de los haces de la forma $[H]$, está definido por la funciones de transición

$$\varphi_{ij}=\frac{f_i}{f_j}=\frac{\frac{z_1}{z_i}}{\frac{z_1}{z_j}}=\frac{z_j}{z_i},\text{ en }U_{ij}.$$

Sea $H_2=\{z:P_2(z)=0\}$ otro hiperplano en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, donde $P_2:\mathbb{C}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{C}$ es un polinomio de grado 1, tal que $P_2(0)=0$. Ahora por un cambio lineal de coordenadas, podemos suponer que $H_2=\{z_2=0\}$.

En U_i, $i\neq 1$, H_1 esta definido por $f_i=\frac{z_1}{z_i}=0$ y análogamente, en U_i, $i\neq 2$, H_2 esta definido por $f_i=\frac{z_2}{z_i}=0$. Lo que implica que $\mathbb{L}_{H_1}$ está definido por $\varphi_{ij}=\frac{z_j}{z_i}$ en U_{ij} y $\mathbb{L}_{H_2}$ está definido por $\varphi_{rs}=\frac{z_s}{z_r}$ en U_{rs}, siempre que $i,j\neq 1$ y $r,s\neq 2$, por lo tanto $\mathbb{L}_{H_1}\approx\mathbb{L}_{H_2}$.

Observemos que $\mathbb{L}$ es el dual de $\mathbb{L}^*$, ya que $\varphi_{ij}=\Theta_{ij}^{-1}$.

Dado $d\in\mathbb{Z}$, el haz $\mathbb{L}(d)$ está definido por:

$$\mathbb{L}(d):=\begin{cases}\mathbb{L}^{\otimes d} = \underbrace{\mathbb{L}\otimes\ldots\otimes\mathbb{L}}_{d\text{ veces}},\ \text{si } d\geq 0,\\ \mathbb{L}^{*\otimes -d} = \underbrace{\mathbb{L}^*\otimes\ldots\otimes\mathbb{L}^*}_{d\text{ veces}},\ \text{si } d\leq 0.\end{cases}$$

Sea D el hiperplano definido por $P^{-1}(0) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, donde $P : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio homogéneo de grado $d > 0$. En U_i, D está dada por:

$$P\left(\frac{z_0}{z_i}\ldots,1,\ldots,\frac{z_j}{z_i},\ldots,\frac{z_n}{z_i}\right) = \frac{1}{z_i^d}P(z_0,\ldots,z_i,\ldots,z_j,\ldots,z_n) = 0$$

y en U_j, a través de

$$P\left(\frac{z_0}{z_j}\ldots,\frac{z_i}{z_j},\ldots,1,\ldots,\frac{z_n}{z_j}\right) = \frac{1}{z_j^d}P(z_0,\ldots,z_i,\ldots,z_j,\ldots,z_n) = 0.$$

Entonces el haz $[D]$ está dado por los cociclos

$$\psi_{ij} = \frac{\frac{P}{z_i^d}}{\frac{P}{z_j^d}} = \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^d.$$

Luego $\psi_{ij} = (\varphi_{ij})^d$ y $[D] \cong \mathbb{L}(d)$. Se sigue de 2.1.2 que D está definido por una sección de $[D]$.

El haz canónico K_M

Si M es una variedad compleja, el haz canónico K_M de M está definido por $K_M = (\det T'M)^*$. Si $M = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, un calculo nos muestra que los cociclos de transición de $\det T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ están dados por

$$\det \Theta_{ij} = (-1)^{i+j}\left(\frac{z_j}{z_i}\right)^{n+1},$$

lo cual nos lleva a que

$$(-1)^i \det \Theta_{ij} = \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^{n+1}(-1)^j,$$

y por la propiedad (III) de fibrados vectoriales $\det T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ es isomorfo al haz cuyos cociclos de transición son $\left(\frac{z_j}{z_i}\right)^{n+1}$, es decir, $\det T\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{L}(n+1)$.

Luego,

$$K_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} \cong \mathbb{L}(n+1)^* \cong \mathbb{L}(-n-1).$$

El haz canónico K_V

Supongamos que $V \hookrightarrow M$ es una subvariedad de la variedad compleja compacta M.

El haz normal N_V de V en M está dado por el cociente

$$N_V = \frac{T'M_{|V}}{T'V}.$$

Luego, tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow T'V \longrightarrow T'M_{|V} \longrightarrow N_V \longrightarrow 0$$

y del análisis hecho en 2.1.1, tenemos que $(\det T'M)_V \cong \det T'V \otimes \det N_V$.

Ahora como estos son haces de rango 1, podemos concluir que

$$K_V \cong K_{M|V} \otimes \det N_V.$$

Ahora supondremos que V tiene codimensión 1, y obtendremos una relación entre el haz canónico asociado a una subvariedad y el haz asociado a la variedad. La expresión anterior queda como

$$K_M \cong K_{M|V} \otimes N_V.$$

Tomando una cubierta trivializadora suficientemente fina $\{U_i\}$, como en los haces de arriba, tenemos que en el abierto U_i, V está definida por $f_i = 0$, debido a que esta es una subvariedad de codimensión 1 y $[V]$ está definida por los cociclos $\varphi_{ij} = \frac{f_i}{f_j}$.

En el abierto U_{ij} tenemos que $f_i = \varphi_{ij} f_j$, ahora tomando la derivada tenemos que

$$df_i = f_j d\varphi_{ij} + \varphi_{ij} df_j$$

Por lo tanto, tenemos que a lo largo de V

$$df_i = \varphi_{ij} df_j \text{ ya que } f_i = 0.$$

Por otro lado, en $U_i \cap V$, $T'V$ esta definido por el núcleo de df_i, y por lo tanto cada df_i define una sección holomorfa del dual N_V^*, que no se anula en ningún punto, ya que V es subvariedad.

Sea $\zeta_i : \pi^{-1}(U_i \cap V) \longrightarrow U_i \cap V \times \mathbb{C}$ una trivialización local de N_V^* y pongamos $s_i = \zeta_i df_i$. Entonces, tenemos que $\zeta_i^{-1} s_i = \varphi_{ij} \zeta_j^{-1} s_j$, es decir,

$s_i = \zeta_i \zeta_j^{-1} \varphi_{ij} s_j = \zeta_{ij} \varphi_{ij} s_j$ y por (I) concluimos que los df_i definen una sección holomorfa global de $N_V^* \otimes [V]_{|V}$ que no se anula en ningún punto. Luego, $N_V^* \otimes [V]_{|V}$ es isomorfo al haz trivial, y por lo tanto tenemos que $N_V \cong [V]_{|V}$. Con lo cual obtenemos la fórmula

$$K_V \cong K_{M|V} \otimes [V]_{|V}.$$

Proposición 2.1.11. *Supongamos que E es un haz vectorial holomorfo de rango n sobre M. Si E admite n secciones holomorfas linealmente independientes, entonces E es holomorfamente isomorfo al haz trivial $M \times \mathbb{C}^n$.*

2.2. Clases de Chern

2.2.1. Conexiones

Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un haz vectorial complejo $\mathcal{C}^\infty$ de rango n. Si $U \subset M$ es un abierto, denotemos por:

- $\mathcal{A}^0$ la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$.
- $\mathcal{A}^p(U)$ el $\mathcal{A}^0$-modulo de p- formas complejas $\mathcal{C}^\infty$ sobre U.
- $\mathcal{A}^*(U) = \bigoplus_{p=0}^{\dim M} \mathcal{A}^p(U)$ el álgebra graduada de formas diferenciales complejas $\mathcal{C}^\infty$ sobre U.
- $\mathcal{A}^p(U, E)$ el $\mathcal{A}^0$-modulo de secciones $\mathcal{C}^\infty(U, \bigwedge^p TM^{\mathbb{C}*} \otimes E)$.

Notemos que $\mathcal{A}^0(U, E)$ es el modulo de secciones $\mathcal{C}^\infty$ de E sobre U.

Definición 2.2.1. *Una conexión en E es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal*

$$\nabla : \mathcal{A}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M, E)$$

que satisface la regla de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s), \ \forall f \in \mathcal{A}^0(M), \ s \in \mathcal{A}^0(M, E).$$

Antes que nada, observemos que la noción de conexión es un concepto local, es decir, si una sección s es idénticamente nula en el abierto U, entonces $\nabla(s) = 0$. De hecho, dado $x \in U$, consideremos una función $\rho \in \mathcal{A}^0(U)$ con soporte compacto y cuyo valor es 1 en una vecindad $V \subset U$ de x y 0 en $U \setminus V$. Entonces, $d\rho \otimes s + \rho\nabla(\rho s) = 0$ nos dice que $\nabla(s)$ se anula en V. Esta es la característica local de una conexión que nos permite restringirla a abiertos de M. Además , si $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta de M, entonces una conexión ∇ en E es completamente determinada por sus restricciones $\nabla_{|U_\alpha}$. El siguiente lema nos dice que las conexiones existen para cualquier haz vectorial complejo E de rango n.

Lema 2.2.2. *Existen las conexiones en cualquier haz vectorial complejo E de rango n.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta abierta de M, tal que de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es también una cubierta trivializadora de $TM^{\mathbb{C}}$ y E. Para cada $\alpha \in I$, elijamos un sistema de coordenadas $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ de $E_{|U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$. Esto es, $s_i^\alpha \in \mathcal{A}^0(U_\alpha, E)$ y, para cada $x \in U_\alpha$, $\{s_1^\alpha(x), \ldots, s_n^\alpha(x)\}$ es una base de E_x.

Sea ρ_α una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$. Definamos ∇^α en U_α por $\nabla^\alpha(s_i^\alpha) = 0,$ para toda i (Notemos que $\nabla^\alpha(fs_i^\alpha) = df \otimes s_i^\alpha$). Luego, usando la definición, podemos extender ∇^α a secciones arbitrarias sobre U_α. Entonces,

$$\nabla = \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla^\alpha$$

es una conexión en E. En particular

$$\nabla(fs) = \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla^\alpha(fs) = \sum_\alpha \rho_\alpha df \otimes s.$$

□

Usando la notación de la demostración del lema anterior, tenemos que, en los abiertos U_α, ∇ se expresa en el sistema de coordenadas s^α por

$$\nabla(s_i^\alpha) = \sum_{j=1}^n \theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha,$$

donde las θ_{ij}^α son 1-formas $\mathcal{C}^\infty$ sobre U_α. La matriz de 1-formas $\theta^\alpha = \left[\theta_{ij}^\alpha\right]$ es, por definición, la matriz de ∇ en U_α.

Si s^α y s^β son sistemas de coordenadas sobre U_α y U_β, respectivamente, entonces, en $U_{\alpha\beta}$ estos están relacionados por una matriz invertible $g_{\alpha\beta} = [g_{ij}]$ tal que $s_i^\alpha = \sum_j g_{ij} s_j^\beta$, donde $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ es una función $\mathcal{C}^\infty$. Entonces, denotando $g_{\alpha\beta}^{-1} = [\widetilde{g}_{ij}]$, tenemos por un lado que

$$\nabla(s_i^\alpha) = \sum_\ell \theta_{i\ell}^\alpha \otimes s_\ell^\alpha.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\nabla(s_i^\alpha) &= \textstyle\sum_j dg_{ij} \otimes s_j^\beta + \sum_j g_{ij} \nabla(s_j^\beta) \\
&= \textstyle\sum_j dg_{ij} \otimes s_j^\beta + \sum_j g_{ij} \left(\sum_k \theta_{jk}^\beta \otimes s_k^\beta\right) \\
&= \textstyle\sum_j dg_{ij} \otimes \sum_\ell \widetilde{g}_{j\ell} s_\ell^\alpha + \sum_j g_{ij} \sum_k \theta_{jk}^\beta \otimes \sum_\ell \widetilde{g}_{k\ell} s_\ell^\alpha \\
&= \textstyle\sum_\ell \left(\sum_j dg_{ij} \widetilde{g}_{j\ell}\right) \otimes s_\ell^\alpha + \sum_\ell \left(\sum_{j,k} g_{ij} \theta_{jk}^\beta \widetilde{g}_{k\ell}\right) \otimes s_\ell^\alpha.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta^\alpha = dg_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}. \tag{IV}$$

Dada una conexión ∇ en E como la definimos anteriormente extendemos esta noción definiendo un operador

$$\nabla : \mathcal{A}^1(M,E) \longrightarrow \mathcal{A}^2(M,E),$$

que satisface la

$$\text{(Regla de Leibniz)} \quad \nabla(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla(s),$$

donde $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ y $s \in \mathcal{A}^0(M,E)$ (el signo menos es natural, ya que ω es una 1-forma).

Lema 2.2.3. *Mostrar que $\nabla(f(\omega \otimes s)) = df \wedge (\omega \otimes s) + f\nabla(w \otimes s)$, donde $f \in \mathcal{A}^0(M)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\nabla(f(\omega \otimes s)) &= \nabla(\omega \otimes fs) \\
&= d\omega \otimes fs - \omega \wedge \nabla(fs) \\
&= d\omega \otimes fs - \omega \wedge (df \otimes s + f\nabla(s)) \\
&= (d\omega \otimes s)f - \omega \wedge df \otimes s - \omega \wedge f\nabla(s) \\
&= df \wedge (\omega \otimes s) + f(d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla(s)) \\
&= df \wedge (\omega \otimes s) + f\nabla(\omega \otimes s).
\end{aligned}$$

□

Definición 2.2.4. *La curvatura de una conexión ∇ es $K_\nabla = \nabla \circ \nabla$.*

Observemos primero que

$$\nabla(\nabla(fs)) = \nabla(df \otimes s + f\nabla(s)) = 0 - df \wedge \nabla(s) + df \wedge \nabla(s) + f\nabla(\nabla(s)).$$

Esto nos dice que $K_\nabla(fs) = fK_\nabla(s)$; es decir, K_∇ es $\mathcal{A}^0(M)$-lineal. Por otro lado, el valor de $K_\nabla(s)$ en un punto $x \in M$ depende sólo del valor de la sección s en x, y no de valores de s en puntos de cualquier vecindad de x. De hecho, si $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ es un sistema de coordenadas locales de E sobre U_α, con $x \in U_\alpha$ y s, s' son dos secciones tales que $s(x) = s'(x)$, entonces

$$s - s' = \sum_i f_i s_i^\alpha$$

en U_α con $f_i(x)=0$.
Esto implica que

$$\begin{aligned} K_\nabla(s-s') &= K_\nabla(s)-K_\nabla(s') \\ &= K_\nabla(\textstyle\sum_i f_i s_i^\alpha) \\ &= \textstyle\sum_i f_i K_\nabla(s_i^\alpha) \end{aligned}$$

se anula en x. Por lo tanto, K_∇ es un tensor, llamado el tensor de curvatura de la conexión ∇. En términos de un sistema de coordenadas locales tenemos que

$$\begin{aligned} K_\nabla(s_i^\alpha) &= \nabla(\nabla(s_i^\alpha)) \\ &= \nabla\left(\textstyle\sum_j \theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha\right) \\ &= \textstyle\sum_j d\theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha - \sum_j \theta_{ij}^\alpha \wedge \nabla(s_j^\alpha) \\ &= \textstyle\sum_j d\theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha - \sum_j \theta_{ij}^\alpha \wedge \sum_k \theta_{jk}^\alpha \otimes s_k^\alpha \\ &= \textstyle\sum_k d\theta_{ik}^\alpha \otimes s_k^\alpha - \sum_k \left(\sum_j \theta_{ij}^\alpha \wedge \theta_{jk}^\alpha\right) \otimes s_k^\alpha \end{aligned}$$

Esto es, K_∇ está dada localmente por la matriz $\mathcal{C}^\infty$ de $n\times n$ 2-formas

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha$$

donde $\Theta_{ij}^\alpha = d\theta_{ij}^\alpha - \sum_k \theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha$.

Las matrices de curvatura gozan de las siguientes propiedades: sea s^α y s^β sistemas de coordenadas locales sobre U_α y U_β respectivamente, relacionados a través de $g_{\alpha\beta}=[g_{ij}]$, con $g_{\alpha\beta}^{-1}=[\widetilde{g}_{ij}]$. Entonces, en $U_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned} K_\nabla(s_i^\alpha) &= K_\nabla\left(\textstyle\sum_j g_{ij} s_j^\beta\right) \\ &= \textstyle\sum_j g_{ij} K_\nabla(s_j^\beta) \\ &= \textstyle\sum_j g_{ij} \sum_k \Theta_{jk}^\beta \otimes s_k^\beta \\ &= \textstyle\sum_{j,k} g_{ij}\Theta_{jk}^\beta \otimes s_k^\beta \\ &= \textstyle\sum_{j,k} g_{ij}\Theta_{jk}^\beta \otimes \sum_\ell \widetilde{g}_{k\ell} s_\ell^\alpha \\ &= \textstyle\sum_{j,k,\ell} g_{ij}\Theta_{jk}^\beta \widetilde{g}_{k\ell} \otimes s_\ell^\alpha, \end{aligned}$$

es decir,

$$\Theta^\alpha = g_{\alpha\beta}\Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}. \tag{V}$$

2.2.2. Polinomios invariantes

Sea $M(n,\mathbb{C})$ el álgebra de matrices de $n\times n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Definición 2.2.5. *Un* polinomio invariante *sobre $M(n,\mathbb{C})$ es una función*

$$P : M(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

que es polinomial en las entradas de una matriz y satisface

$$P(g^{-1}Ag) = P(A), \forall A \in M(n,\mathbb{C}), \forall g \in GL(n,\mathbb{C}).$$

Proposición 2.2.6. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(*i*) $P(g^{-1}Ag) = P(A)$, $\forall A \in M(n,\mathbb{C})$ *y* $\forall g \in GL(n,\mathbb{C})$.

(*ii*) $P(XY) = P(YX)$, $\forall X, Y \in M(n,\mathbb{C})$.

Demostración. (i) implica (ii). Por (i) tenemos que $P\left(g^{-1}(gA)g\right) = P(g(A))$ y $P(Ag) = P(gA)$ $\forall A \in M(n,\mathbb{C})$ y $\forall g \in GL(n,\mathbb{C})$. Como P es continua en un subconjunto denso $GL(n,\mathbb{C}) \subset M(n,\mathbb{C})$ esto implica que $P(Ag) = P(gA)$ $\forall g \in M(n,\mathbb{C})$.

(ii) implica (i). $P\left((Ag)g^{-1}\right) = P\left(g^{-1}Ag)\right)$ $\forall g \in Mn, \mathbb{C}$ por (ii), lo que implica que $\forall g \in M(n,\mathbb{C})$. $\square$

Los ejemplos básicos de tales polinomios son las funciones simétricas elementales de los autovalores de una matriz A, es decir, los polinomios C_i definidos por

$$\det(tI + A) = \sum_{i=0}^{n} C_{n-i}(A)t^i.$$

En particular, $C_n(A) = \det(A)$ y $C_1(A) = tr(A)$.

Denotemos por $I(n,\mathbb{C})$ el álgebra de polinomios invariantes, y observemos que

$$I(n,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[C_1, \ldots, C_n].$$

Proposición 2.2.7. *Mostrar que una serie de potencias $f(z_1, \ldots, z_n)$ simétrica, esto es, $f(z_{\tau(1)}, \ldots, z_{\tau(n)}) = f(z_1, \ldots, z_n)$, para toda permutación τ de $\{1, \ldots, n\}$, es una serie de potencias en las funciones elementales simétricas elementales $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, donde $\sigma_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} z_{i_1} \ldots z_{i_k}$.*

Demostración. Como $I(n,\mathbb{C})$ es isomorfo a $\mathbb{C}[C_1, \ldots, C_n]$, tenemos que f simétrica implica que f es una serie de potencias en las funciones simétricas elementales. $\square$

Proposición 2.2.8. *Mostrar que una función holomorfa $f : M(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, invariante por conjugación, es decir, $f(g^{-1}Ag) = f(A)\ \forall g \in GL(n,\mathbb{C})$, esta dada por una serie de potencias en los polinomios elementales C_i.*

Demostración. $f(g^{-1}Ag) = f(A)$ implica que $f(XY) = f(YX)\ \forall X, Y \in M(n,\mathbb{C})$, lo que implica que f es simétrica. Y por el lema 2.2.7 tenemos que es una serie de potencias en las funciones elementales. □

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial complejo $\mathcal{C}^\infty$, ∇ una conexión en E y K_∇ la curvatura de ∇. En un abierto trivializador U_α, K_∇ está dada por una matriz de 2-formas de $n \times n$, Θ^α . Como las 2-formas conmutan entre si, tiene sentido considerar $P(\Theta^\alpha)$, donde P es un polinomio invariante. Además, como las matrices de K_∇ satisfacen la relación crucial $\Theta^\alpha = g_{\alpha\beta}\Theta^\beta g_{ab}^{-1}$ en $U_{\alpha\beta}$, concluimos que

$$P(\Theta^\alpha) = P(g_{\alpha\beta}\Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}) = P(\Theta^\beta)$$

para cualquier polinomio invariante P. Luego, si P tiene grado k, entonces, definiendo $P(K_\nabla)_{|U_\alpha} = P(\Theta^\alpha)$, tenemos que $P(K_\nabla)$ es una $2k$-forma global en M, independientemente de cualesquiera trivializaciones de E. Nuestro próximo paso es mostrar que tales formas son elementos de $H^*_{DR}(M,\mathbb{C})$.

Observación 2.2.9. *La siguiente demostración es valida solamente para polinomios, y también para series de potencias formales.*

Lema 2.2.10. *Si P es un polinomio invariante, entonces $dP(K_\nabla) = 0$.*

Demostración. Dado P, escribimos $P(A) = P([a_{ij}])$ y $B = [\partial P/\partial a_{ij}]$. Observemos que

$$dP([a_{i,j}]) = \sum_{i,j} \frac{\partial P}{\partial a_{i,j}} da_{i,j}.$$

Una primera identidad formal es

$$dP(A) = tr(B^T dA), \tag{*}$$

donde la B^T es la transpuesta de B. De hecho, $(B^T dA)_{i,j} = \sum_k B^T_{i,k} da_{k,j}$ y entonces $tr(B^T dA) = \sum_{i,k} B^T_{i,k} da_{k,i} = \sum_{i,k} \frac{\partial P}{\partial a_{k,i}} = dP(A)$.

Una segunda identidad formal es

$$AB^T = B^T A. \tag{**}$$

Para ver esto notar que como P es invariante, por la proposición 2.2.6 tenemos que $P(XY) = P(YX)$.

Consideremos la matriz $E_{ji} = [e_{rs}]$, donde $e_{rs} = \delta_{jr}\delta_{is}$ (lo cual es la matriz que tiene entradas 1 en la posición (j,i) y 0 en las demás). Tenemos que

$$(E_{ji}A)_{rs} = \begin{cases} 0, & \text{si } r \neq j \\ a_{is}, & \text{si } r = j \end{cases} \text{ y } (AE_{ji})_{rs} = \begin{cases} 0, & \text{si } s \neq i \\ a_{is}, & \text{si } s = i \end{cases}$$

Para probar la identidad $P((I+tE_{ji})A) = P(A(I+tE_{ji}))$, derivamos la relación en t y evaluamos en $t = 0$;

$$\begin{aligned} \tfrac{d(P((I+tE_{ji})A))}{dt}(0) &= \tfrac{d(P(A(I+tE_{ji})))}{dt}(0) \\ &= \textstyle\sum_{r,s} \frac{\partial P}{\partial a_{rs}}(E_{ji}A)_{rs} \\ &= \textstyle\sum_{s} \frac{\partial P}{\partial a_{js}}(a_{is}) \\ &= \textstyle\sum_{s} a_{is}\frac{\partial P}{\partial a_{js}} \frac{d(P(A(I+tE_{ji})))}{dt}(0) \\ &= \tfrac{d(P(A+tAE_{ji}))}{dt}(0) \\ &= \textstyle\sum_{r,s} \frac{\partial P}{\partial a_{rs}}(AE_{ji})_{rs} \\ &= \textstyle\sum_{r} a_{rj}\frac{\partial P}{\partial a_{ri}}. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\sum_s a_{is}\frac{\partial P}{\partial a_{js}} = \sum_r \frac{\partial P}{\partial a_{ri}} a_{rj}.$$

Notemos ahora que

$$(AB^T)_{ij} = \sum_s A_{is}B^T_{sj} = \sum_s a_{is}\frac{\partial P}{\partial a_{js}}$$

$$(B^TA)_{ij} = \sum_r B^T_{ir}A_{rj} = \sum_r \frac{\partial P}{\partial a_{ri}} a_{rj}.$$

Por lo tanto,

$$AB^T = B^TA.$$

Tomemos ahora un abierto trivializador U_α de E y sean θ^α y $\Theta^\alpha = [\Theta^\alpha_{ij}]$ las matrices de ∇ y de K_∇ respecto a un sistema de coordenadas en U_α. Denotando por $B = \left[\partial P/\partial\Theta^\alpha_{ij}\right]$ (notemos que B es una matriz cuyas entradas son formas de grado par), tenemos, por (*):

$$dP(\Theta^\alpha) = tr(B^T \wedge d\Theta^\alpha) \tag{***}$$

Como $\Theta_{ij}^\alpha = d\theta_{ij}^\alpha - \sum_k \theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha$ tenemos que

$$\begin{aligned}
d\Theta_{ij}^\alpha &= d(d\theta_{ij}^\alpha - \textstyle\sum_k \theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha) \\
&= d^2\theta_{ij}^\alpha - d(\textstyle\sum_k \theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha) \\
&= 0 - \textstyle\sum_k d\theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha + \textstyle\sum_k \theta_{ik}^\alpha \wedge d\theta_{kj}^\alpha \\
&= -\textstyle\sum_k (d\theta_{ik}^\alpha - \textstyle\sum_r \theta_{ir}^\alpha \wedge \theta_{rj}^\alpha) \wedge \theta_{kj}^\alpha + \textstyle\sum_k \theta_{ik}^\alpha \wedge (d\theta_{kj}^\alpha - \textstyle\sum_r (\theta_{kr}^\alpha \wedge \theta_{rj}^\alpha)) \\
&= -\textstyle\sum_k (d\theta_{ik}^\alpha - \textstyle\sum_r \theta_{ir}^\alpha \wedge \theta_{rj}^\alpha) \wedge \theta_{kj}^\alpha - \textstyle\sum_k (d\theta_{kj}^\alpha - \textstyle\sum_r (\theta_{kr}^\alpha \wedge \theta_{rj}^\alpha)) \wedge \theta_{ik}^\alpha \\
&= -\textstyle\sum_k \Theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha - \textstyle\sum_k \Theta_{kj}^\alpha \wedge \theta_{ik}^\alpha
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$d\Theta^\alpha = \theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha$$

Ahora substituyendo en (***) tenemos que

$$\begin{aligned}
dP(\Theta^\alpha) &= tr(B^T \wedge (\theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)) \\
&= tr(B^T \wedge \theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - B^T \wedge \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha).
\end{aligned}$$

Por (**), tenemos que

$$dP(\Theta^\alpha) = tr((B^T \wedge \theta^\alpha) \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge (B^T \wedge \theta^\alpha))$$

lo que implica que

$$dP(\Theta^\alpha) = \sum_{i,k} ((B^T \wedge \theta^\alpha)_{ik} \wedge \Theta_{ki}^\alpha - \Theta_{ki}^\alpha \wedge (B^T \wedge \theta^\alpha)_{ik}).$$

Como Θ_{ki}^α es una dos forma, se sigue que Θ_{ki}^α conmuta con cualquier forma. Por lo tanto, $dP(\Theta^\alpha) = 0$. $\square$

2.2.3. Clases características

En la sección pasada vimos que si P es un polinomio invariante de grado k, lo que implica que $P(K_\nabla)$ define una clase en $H^{2k}(M, \mathbb{C})$, aunque también este elemento lo podemos ver en $H_{DR}^{2k}(M, \mathbb{C})$. En esta sección mostraremos que esta clase depende solo de la clase de isomorfismo del haz E, es decir, no depende de la conexión ∇.

Para demostrar esto utilizaremos una operación muy útil en la cohomología de De Rham, llamada integración a lo largo de las fibras, la cual describiremos en la situación que nos interesa.

Consideremos el haz trivial $M \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{p} M$. Localmente, una forma diferencial $\mathcal{C}^\infty$, ω sobre $M \times \mathbb{R}^q$ se escribe como una combinación lineal de formas de los siguientes dos tipos(nótese el cambio de orden en los elementos diferenciales):

$$\begin{cases} \text{TIPO(I):} & \omega = f(x^\alpha, t)dt_I \wedge dx^\alpha_J, \text{ con } |I| < q, \\ \text{TIPO(II):} & \omega = f(x^\alpha, t)dt_{I_q} \wedge dx^\alpha_J = f(x^\alpha, t)dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_q \wedge dx^\alpha_J, \end{cases}$$

donde $t = (t_1, \ldots, t_q)$, $dt_I = dt_{i_1} \wedge \ldots \wedge dt_{i_r}$, donde $i_1 < \ldots < i_r$, $|I| = r$, $dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_q$ determina una orientación de $\mathbb{R}^q$ y x^α son coordenadas locales en M. Definimos un operador lineal $\wp_*^{\Delta^q} : \mathcal{A}^*(M \times \mathbb{R}^q) \longrightarrow \mathcal{A}^{*-q}(M)$ por

$$\begin{cases} \wp_*^{\Delta^q} = 0 & \text{si } \omega \text{ es del TIPO(I)}, \\ \wp_*^{\Delta^q} = (\int_{\Delta^q} f(x^\alpha, t)dt_{I_q})dx^\alpha_J & \text{si } \omega \text{ es del TIPO(II)}, \end{cases}$$

donde Δ^q es el q-simplejo estándar. Notemos que $\wp_*^{\Delta^q}$ baja en q unidades el grado de una forma.

Sea $i : \partial(M \times \Delta^q) \longrightarrow M \times \Delta^q$ una inclusión. Esta inclusion induce un operador

$$i^* : \mathcal{A}^*(M \times \Delta^q) \longrightarrow \mathcal{A}^*(\partial(M \times \Delta^q))$$

La demostración de la siguiente proposición es técnica y se puede consultar en [Sor 2]:

Proposición 2.2.11. $\wp_*^{\Delta^q} \circ d + (-1)^{q+1} d \circ \wp_*^{\Delta^q} = \wp_*^{\partial\Delta^q} \circ i^*$.

Proposición 2.2.12. *La clase* $[P(K_\nabla)] \in H^*_{DR}(M, \mathbb{C})$ *es independiente de la conexión* ∇ *sobre* E.

Demostración. Sea ahora $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial complejo de rango n sobre una variedad compleja M. Entonces

$$E \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{\pi \times id} M \times \mathbb{R}^q$$

define un haz vectorial sobre $M \times \mathbb{R}^q$ cuya fibra tiene la misma dimensión que la fibra de E. Tomando una cubierta trivializadora $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, común a E y $TM^{\mathbb{C}}$, en un sistema de coordenadas locales $s^\alpha = (s^\alpha_1, \ldots, s^\alpha_n)$, tenemos que las secciones de $(E \times \mathbb{R}^q)_{|U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{C}^n$ se expresan de la forma $(x^\alpha, t) \mapsto \sum_i f(x^\alpha, t)s^\alpha_i$, donde $t = (t_1, \ldots, t_q)$.

Tomemos 2 conexiones ∇^0, ∇^1 sobre E y consideremos la suma convexa

$$\nabla_c = (1 - t_1)\nabla^0 + t_1\nabla^1.$$

∇_c define una conexión sobre $E \times \mathbb{R}^1$, cuya matriz sobre U_α es

$$\theta_c^\alpha = (1 - t_1)\theta^{0,\alpha} + t_1\theta^{1,\alpha}.$$

Similarmente a como calculamos la matriz de curvatura asociada a una conexión podemos calcular Θ_c de la siguiente manera. La curvatura K_{∇_c} en U_α esta entonces dada por

$$\Theta_c^\alpha = d\theta_c^\alpha - \theta_c^\alpha \wedge \theta_c^\alpha.$$

Recordemos que $I(n, \mathcal{C})$ denota el álgebra de polinomios invariantes. Definamos

$$\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1) : I(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{A}^*(M)$$

por

$$\mathcal{P}(\nabla^0)(P) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} P(K_{\nabla^0}),$$

donde grP denota el grado de Py por

$$\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P) = (-1)^{[1/2]}\wp_*^{\Delta^1}(\mathcal{P}(\nabla^{0,1}),$$

donde $\wp_*^{\Delta^1} : \mathcal{A}^*(M \times \mathbb{R}^1) \longrightarrow \mathcal{A}^{*-1}(M)$ es la integración a lo largo de las fibras.

Vamos a examinar a $\mathcal{P}$ más detalladamente. Todo se reduce simplemente a

$$\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P) = \wp_*^{\Delta^1}(\mathcal{P}(\nabla^{0,1})(P)) = \wp_*^{\Delta^1}\left(\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} P(K_{\nabla^{0,1}})\right).$$

Por el lema 2.2.10 tenemos que $dP(K_{\nabla^{0,1}}) = 0$ y aplicando la proposición 2.2.11,

$$d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P)) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} d(\wp_*^{\Delta^1} P(K_{\nabla^{0,1}})) =$$

$$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} \wp_*^{\partial\Delta^1}(i^* P(K_{\nabla^{0,1}})).$$

Ahora por el teorema de Stokes,

$$\wp_*^{\partial\Delta^1} \circ i^* = \sum_{j=0}^{1}(-1)^j \wp_*^{\Delta^1(j)} = i_0^* - i_1^*,$$

donde $i_j : M \longrightarrow M \times [0,1]$ es la inclusión $i_j(x) = (x, j)$. Luego,

$$\begin{aligned} d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P)) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} (i_0^* P(K_{\nabla^{0,1}}) - i_1^* P(K_{\nabla^{0,1}})) \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} (P(K_{\nabla^0}) - P(K_{\nabla^1})) \\ &= \mathcal{P}(\nabla^0)(P) - \mathcal{P}(\nabla^1)(P). \end{aligned}$$

En particular, las formas cerradas $P(K_{\nabla^0})$ y $P(K_{\nabla^1})$ difieren en menos de la constante $(i/2\pi)^{grP}$, por la forma exacta $d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P))$ con lo cual se prueba la proposición.

□

Observación 2.2.13. *La definición de ∇_c de la proposición anterior se puede extender. Tomemos $q+1$ conexiones $\nabla^0, \nabla^1, \ldots, \nabla^q$ sobre E y consideremos la suma convexa*

$$\nabla_c = (1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_q)\nabla^0 + t_1\nabla^1 + \ldots + t_q\nabla^q.$$

∇_c define una conexión sobre $E \times \mathbb{R}^q$, cuya matriz sobre U_α es

$$\theta_c^\alpha = (1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_1)\theta^{0,\alpha} + t_1\theta^{1,\alpha} + \ldots + t_q\theta^{q,\alpha}.$$

Similarmente a como calculamos la matriz de curvatura asociada a una conexión podemos calcular Θ^c de la siguiente manera. La curvatura K_{∇_c} en U_α esta entonces dada por

$$\Theta_c^\alpha = d\theta_c^\alpha - \theta_c^\alpha \wedge \theta_c^\alpha.$$

El polinomio quedaría definido por

$$\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1, \ldots, \nabla^q)(P) = (-1)^{[q/2]} \wp_*^{\Delta^q}(\mathcal{P}(\nabla^{0,1,\ldots,q-1})),$$

donde $\wp_*^{\Delta^q} : \mathcal{A}^*(M \times \mathbb{R}^q) \longrightarrow \mathcal{A}^{*-q}(M)$ es la integración a lo largo de las fibras.

El teorema de Stokes nos dice que

$$\wp_*^{\partial\Delta^q} \circ i^* = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \wp_*^{\Delta^q(j)}.$$

Esta igualdad y el lema 2.2.10, que nos dice que la forma $\mathcal{P}(\nabla^{0,\ldots,q})(P)$ es cerrada, esto nos da la posibilidad de mostrar que:

Proposición 2.2.14. $\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1, \ldots, \nabla^q)$ *es alternada en* $\nabla^0, \nabla^1, \ldots, \nabla^q$.

Proposición 2.2.15.

$$d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1, \ldots, \nabla^q)(P)) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \mathcal{P}(\nabla^0, \ldots, \widehat{\nabla^i}, \ldots, \nabla^q)(P).$$

Definición 2.2.16. *La clase* $[P(K_\nabla)] = [P(E)]$ *solo depende de la clase de isomorfismo de* E *y es llamada* ***clase característica*** *de* E.

Podemos resumir los hechos de arriba de la siguiente manera: dada $I(n, \mathbb{C})$ el álgebra graduada de polinomios invariantes y $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial complejo de rango n, obtuvimos un homomorfismo de algebras, llamado homomorfismo de Weil,

$$\begin{array}{ccc} I(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^{2*}_{DR}(M, \mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & [P(K)] \end{array}$$

donde K es la curvatura de cualquier conexión en E, que asigna a cada polinomio invariante un elemento en el grupo de cohomología.

Definición 2.2.17. *Sean* C_i, $i = 1, \ldots, n$, *los polinomios simétricos elementales de los autovalores de una matriz* $n \times n$. *Las* ***formas de Chern*** *de una curvatura* K_∇ *asociada a una conexión* ∇ *sobre* E *son*

$$c_i(K_\nabla) = C_i\left(\frac{i}{2\pi} K_\nabla\right)$$

y las clases de Chern de E *son* $c_0(E) = 1$,

$$c_i(E) = \left[C_i\left(\frac{i}{2\pi} K\right)\right] \in H^{2i}_{DR}(M, \mathbb{C}).$$

$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_n(E)$ *es la clase de Chern total de* E.

Este es un pequeño abuso, pues en realidad las clases de Chern $c_i(E)$ *están definidas en* $H^{2i}(M, \mathbb{C})$. *Pero, la teoría de Chern-Weil nos dice que estamos tratando esencialmente con los mismo objetos. Ahora, si* M *es una variedad compleja,* $c_i(M)$ *denotará la* i*-ésima clase de Chern del haz tangente holomorfo de* M.

Propiedades de las Clases de Chern

1) Naturalidad. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f \in \mathcal{C}^\infty} & M. \end{array}$$

Entonces $c_i(f^*E) = f^*c_i(E)$.

Demostración. Para ver esto, supongamos que ∇ es una conexión en E. La conexión $f^*\nabla$, inducida por ∇ en f^*E, esta definida de la siguiente manera: sean $g_{\alpha\beta}$ los cociclos de transición de E, relativos a la cubierta trivializadora $\{U_\alpha\}$. Poniendo $V_{\alpha\beta} = f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta)$, tenemos que los $f^*g_{\alpha\beta}$ son los cociclos de transición de f^*E. Ahora $f^*\nabla_{|\nabla_\alpha}$ esta definida por la matriz de 1-formas $f^*\theta^\alpha$, donde θ^α es la matriz de ∇ en U_α. Observemos que esto prueba el hecho de que es una conexión, ya que vale (IV),

$$f^*\theta^\alpha = d(f^*g_{\alpha\beta})(g_{\alpha\beta} \circ f)^{-1} + (g_{\alpha\beta} \circ f)f^*\theta^\beta(g_{\alpha\beta} \circ f)^{-1}$$

Por lo tanto, las curvaturas están relacionadas por $K_{f^*\nabla} = f^*K_\nabla$, de lo cual se sigue la proposición. □

2) Formula de Whitney del producto. Si $E \xrightarrow{\pi} M$ y $F \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$ son dos haces con conexiones ∇_E y ∇_F. Entonces

$$c(E \oplus F) = c(E)c(F).$$

En particular,

$$\begin{array}{rcl} c_1(E \oplus F) & = & c_1(E) + c_1(F), \\ c_2(E \oplus F) & = & c_2(E) + c_1(E)c_1(F) + c_2(F), \text{etc...} \end{array}$$

donde el producto es el inducido por el producto exterior de formas.

Demostración. Si $E \xrightarrow{\pi} M$ y $F \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$ son dos haces, de rangos n y m respectivamente, con conexiones ∇_E y ∇_F, entonces la suma $E \oplus F$ admite una conexión natural $\nabla_{E\oplus F} = \nabla_E \oplus \nabla_F$, cuya curvatura tiene una matriz expresada localmente por $\Theta^\alpha_{E\oplus F} = \Theta^\alpha_E \oplus \Theta^\alpha_F$.

Ahora tenemos que $\det(tI+\Theta^{\alpha}_{E\oplus F}) = \det(tI+\Theta^{\alpha}_{E})\det(tI+\Theta^{\alpha}_{F})$, entonces podemos comparar los coeficientes de t, ya que

$$\det(tI + A) = \sum_{i=0}^{n} C_{n-i}(A)t^i$$

por lo cual

$$\sum_{i=0}^{n+m} C_{n+m-i}(\Theta^{\alpha}_{E\oplus F})t^i = \left(\sum_{i=0}^{n} C_{n-i}(\Theta^{\alpha}_{E})t^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m} C_{m-i}(\Theta^{\alpha}_{F})t^i\right).$$

Para facilitar la comparación, nos olvidaremos de los haces y pondremos un super índice para diferenciar los respectivos coeficientes, así que la expresión anterior la podemos ver como

$$c_{n+m}t^0 + c_{n+m-1}t^1 + \ldots + c_0 t^{n+m} = (c^1_n t^0 + \ldots + c^1_0 t^n)(c^2_m t^0 + \ldots + c^2_0 t^m)$$

de aquí es claro que

$$\begin{aligned} c_0 &= c^1_0 c^2_0 = 1 \\ c_1 &= c^1_1 c^2_0 + c^1_0 c^2_1 = c^1_1 + c^2_1 \\ c_2 &= c^1_2 c^2_0 + c^1_0 c^2_2 + c^1_1 c^2_1 = c^1_2 + c^1_1 c^2_1 + c^2_2 \\ c_k &= \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} c^1_i c^2_j \end{aligned}$$

con lo cual tenemos el resultado. □

3) Clase de Chern del dual. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz sobre M, y $E^* \xrightarrow{\check{\pi}} M$ su dual.

Entonces $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$.

Demostración. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz sobre M, y $E^* \xrightarrow{\check{\pi}} M$ su dual. Si $g_{\alpha\beta}$ son los cociclos de transición de E, entonces $(g^T_{\alpha\beta})^{-1}$ son los de E^*.

Dada una conexión ∇ sobre E, sus matrices locales están relacionadas por (IV)

$$\theta^{\alpha} = dg_{\alpha\beta}g^{-1}_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\theta^{\beta}g^{-1}_{\alpha\beta}.$$

Transponiendo esta igualdad obtenemos la siguiente expresión

$$(\theta^{\alpha})^T = (g^T_{\alpha\beta})^{-1}dg^T_{\alpha\beta} + (g^T_{\alpha\beta})^{-1}(\theta^{\beta})^{-1}g^T_{\alpha\beta}. \qquad (*)$$

Como $d(g^T_{\alpha\beta}\cdot(g^T_{\alpha\beta})^{-1}) = 0$, tenemos que $dg^T_{\alpha\beta}\cdot(g^T_{\alpha\beta})^{-1}+g^T_{\alpha\beta}d((g^T_{\alpha\beta})^{-1}) = 0$, lo que implica que

$$d((g^T_{\alpha\beta})^{-1}) = -(g^T_{\alpha\beta})^{-1}dg^T_{\alpha\beta}\cdot(g^T_{\alpha\beta})^{-1}$$

ahora substituyéndolo en (*) tenemos que

$$(\theta^\alpha)^T = -d((g^T_{\alpha\beta})^{-1})g^T_{\alpha\beta} + (g^T_{\alpha\beta})^{-1}(\theta^\beta)^T g^T_{\alpha\beta}.$$

Ahora multiplicando por -1, tenemos que

$$(-\theta^\alpha)^T = d((g^T_{\alpha\beta})^{-1})g^T_{\alpha\beta} + (g^T_{\alpha\beta})^{-1}(-\theta^\beta)^T g^T_{\alpha\beta}.$$

Con lo cual tenemos (IV) para E^*, es decir, podemos definir una conexión ∇^* sobre E^* cuya matriz en un abierto trivializador U_α es $(-\theta^\alpha)^T$. La matriz de curvatura de ∇^* en U_α es

$$\begin{aligned}\Theta^{*\alpha} &= d((-\theta^\alpha)^T) - (-\theta^\alpha)^T \wedge (-\theta^\alpha)^T\\ &= -(d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)^T = -\Theta^{\alpha T}.\end{aligned}$$

Ahora la transposición $A \mapsto A^T$ es obtenida a través de la conjugación en $GL(n,\mathbb{C})$ y, por lo tanto, $P^i(-\Theta^{\alpha T}) = (-1)^i P_i(\Theta^\alpha)$, pues P^i es homogéneo de grado i. De ahí que,

$$c_i(E^*)^i = (-1)^i c_i(E).$$

□

4) Productos Tensoriales.(Caso especial)

$$c_1(E\otimes L) = c_1(E) + nc_1(L).$$

Demostración. Supongamos que el haz vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ tiene rango n y que $L \xrightarrow{p} M$ es un haz lineal. Sean $g_{\alpha\beta}$ y $h_{\alpha\beta}$ los cociclos de transición de E y L respectivamente. Como $h_{\alpha\beta}$ es una función escalar, las funciones de transición locales de $E\otimes L$ están dadas por el producto $v_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$. Sean ∇_E y ∇_L las conexiones sobre E y L, cuyas matrices en relación a una cubierta trivializadora común son θ^α_E y θ^α_L. Ambas satisfacen (IV), es decir, cumplen que

$$\begin{aligned}\theta^\alpha_E &= dg_{\alpha\beta}g^{-1}_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\theta^\beta_E g^{-1}_{\alpha\beta}\\ \theta^\alpha_L &= dh_{\alpha\beta}h^{-1}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\theta^\beta_L h^{-1}_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Consideremos la matriz $\theta_E^\alpha + \theta_L^\alpha I_n$, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\theta_E^\alpha + \theta_L^\alpha I_n &= dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta_E^\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + dh_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}^{-1}I_n + h_{\alpha\beta}\theta_L^\beta h_{\alpha\beta}^{-1}I_n \\
&= (dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1} + dh_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}^{-1}) + (g_{\alpha\beta}\theta_E^\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + h_{\alpha\beta}\theta_L^\beta h_{\alpha\beta}^{-1}I_n) \\
&= (dg_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}dh_{\alpha\beta}I_n)h_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}(\theta_E^\beta + \theta_L^\beta I_n)h_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} \\
&= d(g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta})h_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}(\theta_E^\beta + \theta_L^\beta I_n)h_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} \\
&= dv_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta}^{-1} + v_{\alpha\beta}(\theta_E^\beta + \theta_L^\beta I_n)v_{\alpha\beta}^{-1}.
\end{aligned}$$

Esta última expresión es exactamente (IV) para la matriz de 1-formas $\theta_E^\alpha + \theta_L^\alpha I_n$. Por lo tanto, esta define una conexión en $E \otimes L$ cuya curvatura es $K_{\nabla_E} + K_{\nabla_L} I_n$, notemos que utilizamos fuertemente el hecho de que $h_{\alpha\beta}$ es una función escalar, para poder definir esta conexión.

Ahora con esta curvatura podemos realizar el siguiente calculo

$$c_1(E \otimes L) = tr\left(\frac{i}{2\pi}(K_{\nabla_E} + K_{\nabla_L} I_n)\right) = c_1(E) + nc_1(L).$$

$\square$

Proposición 2.2.18. *Con esta misma curvatura se puede ver que*

$$c_i(E \otimes L) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n-j}{i-j} c_j(E)c_1(L)^{i-j}, 2 \leq i \leq n.$$

Haces holomorfos de rango 1

Sea M una variedad compleja de dimensión n y $L \xrightarrow{\pi} M$ un haz lineal holomorfo de rango 1.

Definición 2.2.19. *Diremos que $H = \{H_z\}_{z \in M}$ es una métrica hermitiana en L si*

i H_z es un producto interno hermitiano en L_z.

ii dados $U \subset M$ abierto y $s : U \longrightarrow L_U$ una sección holomorfa, la función

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & H_z(s(z), s(z)) \end{array}$$

es $\mathcal{C}^\infty$.

Ahora supongamos que $\{U_\alpha\}$ es una cubierta trivializadora de L y que $\{g_{\alpha\beta}\}$ son los cociclos de transición holomorfos correspondientes. Si s^α es un sistema local de coordenadas sobre U_α entonces $s^\alpha = g_{\alpha\beta} s^\beta$ y, haciendo $H_\alpha(z) = H(s^\alpha(z), s^\alpha(z))$, tenemos que

$$H_\alpha(z) = H(s^\alpha(z), s^\alpha(z)) = g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}} H(s^\beta(z), s^\beta(z)) = |g_{\alpha\beta}|^2 H_\beta(z)$$

es decir $H_\alpha = g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}} H_\beta$. Ahora el recíproco lo obtenemos del siguiente lema:

Lema 2.2.20. *Sea $\{H_\alpha\}$ una colección de funciones $\mathcal{C}^\infty$ definidas en $\{U_\alpha\}$ que satisfacen que $H_\alpha(z) > 0$ y $H_\alpha = g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}} H_\beta$. Entonces existe una única métrica hermitiana en L tal que $H_\alpha(z) = H(s^\alpha(z), s^\alpha(z))$.*

Una consecuencia de lo de arriba es lo siguiente: supongamos que $\{H_\alpha\}$ esta inducida por una métrica hermitiana en L. Entonces, dado $k \in \mathbb{Z}$, la colección $\left\{H_\alpha^k\right\}$ satisface las condiciones del lema relativa a las funciones $g_{\alpha\beta}^k$. Por lo tanto, $\left\{H_\alpha^k\right\}$ determinan una métrica hermitiana en el haz L^k.

Un haz holomorfo equipado con una métrica hermitiana es llamado *haz hermitiano*. Definimos una conexión ∇_H en un haz hermitiano L, llamada la *conexión métrica*, a través de la familia de 1-formas del tipo $(1,0)$

$$\theta^\alpha = \partial \log H_\alpha$$

en cada abierto trivializador U_α. Para ver que esto define una conexión, observemos que $\log H_\alpha = \log(g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}H_\beta)$. Definiendo $\varphi = g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\theta^\alpha &= \partial \log(g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}} \cdot H_\beta) \\
&= \tfrac{1}{g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}H_\beta}(\partial H_\beta \cdot g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}} + H_\beta \partial(g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}})) \\
&= \tfrac{\partial H_\beta}{H_\beta} + \tfrac{\partial(g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}))}{g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}}, \text{ notemos que } g_{\alpha\beta}\cdot\overline{g_{\alpha\beta}} \neq 0 \\
&= (g_{\alpha\beta}\cdot\overline{g_{\alpha\beta}})\partial\log H_\beta (g_{\alpha\beta}\cdot\overline{g_{\alpha\beta}})^{-1} + d(g_{\alpha\beta}\cdot\overline{g_{\alpha\beta}})(g_{\alpha\beta}\cdot\overline{g_{\alpha\beta}})^{-1} \\
&= d\varphi\cdot\varphi^{-1} + \varphi\theta^\beta\varphi^{-1}
\end{aligned}$$

de acuerdo con la propiedad (IV), esto implica que $\partial\log H_\alpha$ define una conexión sobre L.

La curvatura K_{∇_H} asociada a la conexión métrica esta entonces dada por la 2-forma del tipo $(1,1)$

$$\begin{aligned}
\Theta^\alpha &= d\theta^\alpha - \theta^\alpha\wedge\theta^\alpha, \text{ pero } \theta^\alpha \text{ es una 1-forma, por lo cual } \theta^\alpha\wedge\theta^\alpha = 0 \\
&= d\theta^\alpha \\
&= \partial\partial\log H_\alpha + \overline{\partial}\partial\log H_\alpha, \text{ pero } \partial\partial\equiv 0 \\
&= \overline{\partial}\partial\log H_\alpha.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $c_1(K_{\nabla_H}) = \frac{i}{2\pi}K_{\nabla_H}$ y de ahí

$$c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi}K_{\nabla_H}\right] = \left[\frac{i}{2\pi}\overline{\partial}\partial\log H\right] \in H^2_{DR}(M,\mathbb{C}).$$

Recordemos que el laplaciano complejo se define por $\Delta^\alpha_H = \overline{\partial}\partial\log H_\alpha$, por lo tanto tenemos una extensión de la curvatura que ya conocíamos.

supongamos ahora que M es compacto y $D\subset M$ una variedad analítica de codimensión 1. Sea $\{f_\alpha, U_\alpha\}$ las cartas locales que definen a D. Sea $[D]\xrightarrow{\pi} M$ el haz asociado a D, entonces $[D]$ admite una métrica hermitiana H y K la curvatura de la conexión métrica inducida por H.

Proposición 2.2.21. *La integral de la clase hiperplana es 1, es decir,*

$$\int_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} \omega^n = 1.$$

2.3. Haces virtuales

Sea M una variedad compleja. Denotaremos por $Vec(M)$ al conjunto de las clases de isomorfismos de haz vectoriales complejos $\mathcal{C}^\infty$ sobre M, $E \xrightarrow{\pi} M$. $Vec(M)$ es un semigrupo conmutativo en relación a la operación $\oplus$, cuyo elemento 0 es el haz de rango cero sobre M. Si denotamos por $Vec_n(M)$ el subconjunto de $Vec(M)$ formado por las clases de isomorfismos de haz de rango n, entonces $Vec_n(M)$ posee un elemento distinguido natural, la clase del haz trivial de rango n, $\mathbb{C}^n \times M$.

Al semigrupo $Vec(M)$ le asociamos un grupo abeliano $K(M)$, que satisface la siguiente propiedad universal: existe un homomorfismo de semigrupos $\Upsilon : Vec(M) \longrightarrow K(M)$, tal que, para cualquier grupo G y $\Gamma : Vec(M) \longrightarrow G$ homomorfismo de semigrupos, existe un único homomorfismos $\aleph : K(M) \longrightarrow G$ tal que el diagrama de abajo conmuta.

$$\begin{tikzcd} Vec(M) \arrow[d, "\Upsilon"'] \arrow[dr, dashed, "\Gamma"] & \\ K(M) \arrow[r, "\aleph"'] & G \end{tikzcd} \qquad \Gamma = \aleph \circ \Upsilon$$

$K(M)$ es construido de la siguiente manera: consideremos el homomorfismo diagonal de semigrupos

$$\begin{array}{rrcl} \Delta : & Vec(M) & \longrightarrow & Vec(M) \times Vec(M) \\ & E & \longmapsto & (E, E) \end{array}$$

y pongamos $K(M) = Vec(M) \times Vec(M)/\Delta(Vec(M))$, es decir, $[(F, G)] = [(F', G')]$ si, y solamente si, $F = F' \oplus E$, $G = G' \oplus E$. $K(M)$ es un semigrupo pues definiendo la suma "+" por $[(F_1, G_1)] + [(F_2, G_2)] = [(F_1 \oplus F_2, G_1 \oplus G_2)]$, tenemos que esta suma esta bien definida, ya que

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = F_1' \oplus E, G_1 = G_1' \oplus E \\ F_2 = F_2' \oplus E', G_2 = G_2' \oplus E' \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \oplus F_2 = (F_1' \oplus F_2') \oplus (E \oplus E') \\ G_1 \oplus G_2 = (G_1' \oplus G_2') \oplus (E \oplus E'). \end{array} \right.$$

Ahora, la permutación

$$\begin{array}{rrcl} \sigma : & Vec(M) \times Vec(M) & \longrightarrow & Vec(M) \times Vec(M) \\ & (F, G) & \longmapsto & (G, F) \end{array}$$

induce un elemento simétrico, pues $[(F,G)] + [(G,F)] = [(F \oplus G, F \oplus G)]$ y $(F \oplus G, F \oplus G) \in \Delta(Vec(M))$. Por lo tanto $K(M)$ es un grupos abeliano, el llamado grupo de Grothendieck de M.

Definamos $\Upsilon : Vec(M) \longrightarrow K(M)$ por $\Upsilon = q \circ i$, donde estos son los homomorfismo de semigrupos

$$\begin{array}{rcccc} Vec(M) & \xrightarrow{i} & Vec(M) \times Vec(M) & \xrightarrow{q} & K(M) \\ E & \longmapsto & (E,0) & \longmapsto & [(E,0)]. \end{array}$$

Proposición 2.3.1. *Mostrar que, si $\Gamma : Vec(M) \longrightarrow G$ es un homomorfismo de semigrupos, entonces tenemos un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} Vec(M) \arrow[r, "\Upsilon"] \arrow[d, "\Gamma"'] & K(M) \arrow[d, "K(\Gamma)"] \\ G \arrow[r, "\Upsilon_G"'] & K(G). \end{tikzcd}$$

Además de esto, si G es un grupo, entonces Υ_G es un isomorfismo. Conclúyase de ahí que la propiedad universal es satisfecha por $K(M)$.

Como $Vec(M)$ es un semi-anillo con el producto $(E,F) \mapsto E \otimes F$, $K(M)$ tiene, en realidad estructura de anillo.

Denotando por $[E]$ la clase $[(E,0)]$ en $K(M)$, tenemos que

$$[(F,G)] = [(F,0)] + [(0,G)] = [(F,0)] - [(G,0)] = [F] - [G],$$

es decir, los elementos de $K(M)$ son de la forma $[F] - [G]$.

Al final obtenemos una caracterización más operacional de los elementos de $K(M)$, ahora solo necesitamos el siguiente lema:

Lema 2.3.2. *Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial complejo $\mathcal{C}^\infty$ de M,donde M es compacta. Entonces, existe un haz vectorial complejo $\mathcal{C}^\infty$, $F \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$, tal que $E \oplus F$ es trivial.*

Definición 2.3.3. *La clase de Chern total de E,c(E), es el elemento*

$$c(E) = \prod_{i=0}^{k} c(E_i)^{(-1)^i} \in H^*_{DR}(M, \mathbb{C}).$$

La componente de $c(E)$ *en* $H^{2j}_{DR}(M, \mathbb{C})$ *es la* $j-$*esima clase de Chern,* $c_j(E)$*, de* E*.*

Capítulo 3

El teorema de Baum–Bott

3.1. Conexiones

En este capítulo veremos que el operador $\overline{\partial}$ se puede extender a una conexión sobre el haz tangente después a partir de dicha conexión y la conexión inducida por la métrica sobre un haz lineal, definiremos una $(n, n-1)$ forma cuya derivada resultara ser una clase característica sobre $T'M \otimes L$, después utilizando una métrica apropiada veremos que dicha forma es igual al producto de una constante por el kernel de Bochner–Martinelli, cuyas propiedades nos ayudaran a demostrar el teorema de Baum–Bott, está versión de la demostración es debida a S. S. Chern en su articulo [Che].

3.1.1. Conexiones parciales

Sea E un haz vectorial complejo, $\mathcal{C}^\infty$, sobre la variedad compleja M y H un subhaz vectorial complejo, $\mathcal{C}^\infty$, de TM. El dual de H, H^*, es un subhaz de TM^*.

Denotemos por $p : TM^* \longrightarrow H^*$ la proyección del haz cotangente en el dual de H.

Definición 3.1.1. *Una* conexión parcial *en E es un par (H, δ), donde H es un subhaz vectorial de TM^* y δ es una aplicación $\mathbb{C}$–lineal*

$$\delta : \mathcal{A}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M, H^* \otimes E),$$

que satisface

$$\delta(fs) = p(df) \otimes s + f\delta(s), \qquad \forall f \in \mathcal{A}^0(M, E).$$

Definición 3.1.2. *Sea $\nabla : \mathcal{A}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M, E)$ una conexión en E. Entonces diremos que ∇ es una* extensión *de (H, δ) si el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^0(M,E) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[dr, "\delta"'] & \mathcal{A}^1(M,E) \arrow[d, "p\otimes 1"] \\ & \mathcal{A}^1(M, H^* \otimes E) \end{tikzcd} \qquad \delta = (p \otimes 1) \circ \nabla$$

Lema 3.1.3. *Toda conexión parcial (H, δ) admite una extensión ∇.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M, que es trivializadora tanto de E, como de H^* y de TM^*. Sea $e^\alpha = (e_1^\alpha, \ldots, e_n^\alpha)$ un marco de E sobre U_α. Entonces,

$$\delta(e_i^\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}^\alpha \otimes e_j^\alpha.$$

Usando la proyección natural $p : TM^* \longrightarrow H^*$, podemos encontrar 1-formas θ_{ij}^α, tales que $p(\theta_{ij}^\alpha) = \gamma_{ij}^\alpha$. Podemos definir una conexión ∇_α, sobre $E_{|U_\alpha}$, a través de la matriz de uno formas $[\theta_{ij}^\alpha]$ de la siguiente manera:

$$\nabla_\alpha(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}^\alpha \otimes e_j^\alpha.$$

Así que sobre U_α tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^0(U_\alpha, E_{|U_\alpha}) \arrow[r, "\nabla_\alpha"] \arrow[dr, "\delta"'] & \mathcal{A}^1(U_\alpha, E_{|U_\alpha}) \arrow[d, "p\otimes 1"] \\ & \mathcal{A}^1(U_\alpha, H^* \otimes E_{|U_\alpha}) \end{tikzcd} \qquad \delta = (p \otimes 1) \circ \nabla$$

es conmutativo. Tomando una partición de la unidad $\{\rho_\alpha\}$, subordinada a la cubierta $\{U_\alpha\}$, tenemos que $\nabla := \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla_\alpha$ define una conexión en E que extiende a (H, δ). $\square$

Lema 3.1.4. *Sean (H, δ) una conexión parcial y $s \in \mathcal{A}^0(M, E)$ una sección que satisface lo siguiente: $s(x) \neq 0$ para todo $x \in M$ y $\delta(s) \equiv 0$. Entonces, existe una conexión ∇ sobre E, que es una extensión de (H, δ) tal que $\nabla(s) \equiv 0$.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M, que es también trivializadora tanto de E, como de H^* y de TM^*. Ya que $s(x)$ no se anula en ningún punto, podemos completar su restricción $s_\alpha = s_{|U_\alpha}$ a un marco de $E_{|U_\alpha}$ de la siguiente manera: si $e_1 = s$, entonces podemos encontrar $e_2, \ldots, e_n$ tal que $e^\alpha = (s_\alpha, e_2^\alpha, \ldots, e_n^\alpha)$ es un marco holomorfo. Usando la misma notación de la demostración del lema anterior tenemos que $\gamma_{1j}^\alpha = 0$, ya que $\delta(s) \equiv 0$; en particular, $\delta(s_\alpha) \equiv 0$. Escogiendo $\theta_{1j}^\alpha = 0$ y repitiendo lo que hicimos en el lema anterior tenemos los que deseábamos. $\square$

La siguiente observación nos será de mucha utilidad en las siguientes secciones.

Observación 3.1.5. *Observemos que tenemos definida una aplicación natural*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^0(M, H) \times \mathcal{A}^0(M, H^*) & \longrightarrow & \mathcal{A}^0(M) \\ (u, \omega) & \longmapsto & \omega(u). \end{array}$$

También, $u \in \mathcal{A}^0(M, H)$ determina una aplicación

$$\begin{array}{ccc} i(u) : \mathcal{A}^0(M, H^*) & \longrightarrow & \mathcal{A}^0(M) \\ \omega & \longmapsto & \omega(u). \end{array}$$

Podemos generalizar esta aplicación de la siguiente manera. Dada $u \in \mathcal{A}^0(M, H)$, podemos definir una aplicación

$$\begin{array}{ccc} i(u) : \mathcal{A}^0(M, H^* \otimes E) & \longrightarrow & \mathcal{A}^0(M, E) \\ \omega \otimes s & \longmapsto & \omega(u)s. \end{array}$$

Observemos ahora que si $f \in \mathcal{A}^0(M)$, entonces $u(f) = i(u)\,(p(df)) \in \mathcal{A}^0(M)$. Si (H, δ) es una conexión parcial en E, de la definición de conexión *parcial y las propiedades anteriores tenemos las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} i(u_1+u_2)\delta(s) &= i(u_1)\delta(s)+i(u_2)\delta(s)\\ i(fu)\delta(s) &= fi(u)\delta(s)\\ i(u)(\delta(s_1+s_2)) &= i(u)(\delta(s_1))+i(u)(\delta(s_2))\\ i(u)\delta(fs) &= u(f)s+fi(u)\delta(s). \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo ilustra un caso interesante de conexiones parciales:

Ejemplo 3.1.6. *Sea E es un haz vectorial holomorfo sobre M. Entonces, el operador $\overline{\partial}:\mathcal{A}^0(M)\longrightarrow\mathcal{A}^1(M)$ induce*

$$\overline{\partial}:\mathcal{A}^0(M,E)\longrightarrow\mathcal{A}^1(M,T''M^*\otimes E)$$

por

$$\overline{\partial}(fs)=\overline{\partial}f\otimes s+f\overline{\partial}s.$$

El par $(H,\delta)=(T''M,\overline{\partial})$ es una conexión parcial en E. Notemos que si $U\subset M$ es abierto y $\Gamma(E_{|U})$ denota el espacio de secciones holomorfas de $E_{|U}$, entonces

$$\Gamma(E_{|U})=\ker\left\{\overline{\partial}:\mathcal{A}^0(U,E)\longrightarrow\mathcal{A}^1((U,T''M^*\otimes E)_{|U})\right\}.$$

Dado un marco holomorfo $s^\alpha=(s_1^\alpha,\ldots,s_n^\alpha)$ de E sobre el abierto trivializador U_α, se tiene que $\overline{\partial}(s_i^\alpha)=0$ para $i=1,2,\ldots,n$. Luego, si ∇ es una conexión en E que extiende a $(T''M,\overline{\partial})$, entonces, con respecto a cualquier marco holomorfo de E, la matriz $[\theta_{ij}^\alpha]$ de ∇ consiste de formas del tipo $(1,0)$. De hecho, con respecto a una cubierta trivializadora $\{U_\alpha\}$ de E, como haz holomorfo, tenemos que $\nabla(s_i^\alpha)=\sum_j\theta_{ij}^\alpha\otimes s_j^\alpha$. La proyección

$$p:TM^*\longrightarrow T''M^*$$

está dada por

$$p(\theta_{ij}^\alpha)=p(\theta_{ij}^{(1,0)\alpha}+\theta_{ij}^{(0,1)\alpha})=\theta_{ij}^{(0,1)\alpha}.$$

Luego, si ∇ extiende a $\overline{\partial}$, tenemos que

$$\overline{\partial}(s_i^\alpha)=\sum_j\theta_{ij}^{(0,1)\alpha}\otimes s_j^\alpha=0,$$

lo que nos dice que $\theta_{ij}^{(0,1)\alpha}=0$. Estas conexiones son llamadas del tipo *(1,0) o también* compatibles con la estructura compleja de M.

3.1.2. Conexiones métricas

En la sección de haces lineales, introdujimos el concepto de métrica hermitiana. Extenderemos ahora esta noción para haces vectoriales de rango arbitrario.

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial complejo sobre M.

Definición 3.1.7. *La familia $h = \{h_z\}_{z\in M}$ es una* métrica hermitiana *en E si:*

i) *h_z es un producto interno hermitiano en E_z.*

ii) *Si U_α es un abierto trivializador de E y $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ es un marco de E sobre U_α, entonces, las funciones*

$$\begin{array}{rccl} h_{ij}^\alpha : & U_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & h_z(s_i^\alpha(z), s_j^\alpha(z)) \end{array}$$

son de clase $\mathcal{C}^\infty$ para toda $1 \leq i, j \leq n$.

Definición 3.1.8. *Un haz vectorial holomorfo equipado con una métrica hermitiana se llama* haz hermitiano.

Un marco local de E, $s = (s_1, \ldots, s_k)$, es unitario si $\{s_1(z), \ldots, s_k(z)\}$ es una base ortonormal en E_z.

Observación 3.1.9. *Estos marcos existen, pues si U_α es un abierto trivializador, podemos aplicar el proceso de Gram-Schmidt a un marco de $E_{|U_\alpha}$.*

Proposición 3.1.10. *Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta de M que trivializa a E, h_α es una métrica hermitiana en $E_{|U_\alpha}$ y $\{\rho_\alpha\}$ es una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Entonces,*

$$h = \sum_{\alpha\in I} \rho_\alpha h_\alpha$$

es una métrica hermitiana en E.

Demostración. Sea $h = \{h_z\}_{z\in M}$. Dado $z \in U_\alpha$ tenemos que:

a) $h_z = h_{\alpha_{|z}}$ ya que $\rho_\alpha h_\alpha \equiv h_\alpha$ para todo $z \in U_\alpha$.

b) Si U_α es un abierto trivializador de E y s^α un marco de E sobre U_α entonces, $h_{ij} : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$, la aplicación que manda $z \mapsto h_z(s^i(z), s^j(z))$ es $\mathcal{C}^\infty$ ya que h_α lo es. Por lo tanto, h es una métrica hermitiana en E.

□

Dadas u y s secciones de E, denotaremos por $\langle u, s\rangle$ el producto interno de estas secciones; esto es, $\langle u(z), s(z)\rangle = h_z(u(z), s(z))$. Sea ∇ una conexión en un haz hermitiano E. Decimos que ∇ es compatible con la métrica si

$$d\langle u, s\rangle = \langle \nabla(u), s\rangle + \langle u, \nabla(s)\rangle .$$

Proposición 3.1.11. *Si E es un haz hermitiano, entonces existe una única conexión ∇ en E que es compatible con la estructura compleja y con la métrica.*

Demostración. Como vimos en el ejemplo 3.1.6, $(T''M, \overline{\partial})$ es una conexión en E que admite una extensión ∇ compatible con la estructura compleja, pues es del tipo $(1,0)$(Ver Lema 3.1.3). Sea $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_k^\alpha)$ un marco local de E sobre U_α.

Sea $\theta^\alpha = [\theta_{ij}^\alpha]$ la matriz de ∇, relativa al marco U_α. Supongamos que se cumple la condición de compatibilidad con la métrica. Como θ_{ij}^α es una $(1,0)$ forma

$$\begin{aligned}
dh_{ij}^\alpha &= d\left\langle s_i^\alpha, s_j^\alpha\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla(s_i^\alpha), s_j^\alpha\right\rangle + \left\langle s_i^\alpha, \nabla(s_j^\alpha)\right\rangle \\
&= \left\langle [\theta_{ij}^\alpha] s_i^\alpha, s_j^\alpha\right\rangle + \left\langle s_i^\alpha, [\theta_{ij}^\alpha] s_j^\alpha\right\rangle \\
&= \left\langle \textstyle\sum_{m=1}^n \theta_{im}^\alpha \otimes s_m^\alpha, s_j^\alpha\right\rangle + \left\langle s_i^\alpha, \textstyle\sum_{m=1}^n \theta_{jm}^\alpha \otimes s_m^\alpha\right\rangle \\
&= \textstyle\sum_{m=1}^n \theta_{im}^\alpha \left\langle s_m^\alpha, s_j^\alpha\right\rangle + \textstyle\sum_{m=1}^n \overline{\theta_{jm}^\alpha} \left\langle s_i^\alpha, s_m^\alpha\right\rangle \\
&= \textstyle\sum_m \theta_{im}^\alpha h_{mj}^\alpha + \textstyle\sum_m \overline{\theta_{jm}^\alpha} h_{im}^\alpha
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $dh_{ij}^\alpha = \partial h_{ij}^\alpha + \overline{\partial h_{ij}^\alpha}$, comparando los tipos de formas en cada lado de la igualdad anterior, obtenemos que:

$$\partial h_{ij}^\alpha = \sum_m \theta_{im}^\alpha h_{mj}^\alpha;$$

i.e.,

$$\partial h^\alpha = \theta^\alpha h^\alpha.$$

También,

$$\overline{\partial} h^{\alpha}_{ij} = \sum_m \overline{\theta^{\alpha}_{jm}} h^{\alpha}_{im},$$

implica que

$$\overline{\partial} h^{\alpha} = (h^{\alpha})^T \overline{\theta^{\alpha}}.$$

Utilizando técnicas de ecuaciones diferenciales parciales se puede probar(ver [SM 1]) que la única solución del sistema es

$$\theta^{\alpha} = \partial h^{\alpha} (h^{\alpha})^{-1}.$$

$\square$

Definición 3.1.12. *La conexión obtenida anteriormente es llamada la* conexión métrica.

Observación 3.1.13. *Si s^{α} es un marco unitario, entonces*

$$\theta^{\alpha}_{ij} + \overline{\theta^{\alpha}_{ji}} = 0.$$

Sean E y F dos haces hermitianos. Entonces, en $E \otimes F$ tenemos una métrica hermitiana definida por

$$\langle s \otimes u, s' \otimes u' \rangle = \langle s, s' \rangle \langle u, u' \rangle .$$

Sean E y F haces hermitianos sobre M y ∇_{h_E}, ∇_{h_F} las conexiones métricas en E y F. Definimos las siguientes conexiones métricas en $E \otimes F$:

$$(\nabla_{h_E} \otimes 1)(s \otimes u) = \nabla_{h_E}(s) \otimes u \quad \text{y} \quad (1 \otimes \nabla_{h_F})(s \otimes u) = s \otimes \nabla_{h_F}(u).$$

Lema 3.1.14. *Sean E y F haces hermitianos sobre M y ∇_{h_E}, ∇_{h_F} las conexiones métricas en E y F. Entonces $\nabla_{h_E} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_{h_F}$ es una conexión métrica en $E \otimes F$.*

Demostración. Sabemos que $p(\nabla_{h_E} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_{h_F}) = \overline{\partial}$. Entonces, esta conexión es compatible con la estructura compleja. Por definición de métrica se cumple que:

$$d\left(\langle s, s' \rangle \langle u, u' \rangle\right) = d\left(\langle s, s' \rangle\right) \langle u, u' \rangle + \langle s, s' \rangle d\left(\langle u, u' \rangle\right).$$

La compatibilidad de la conexión con la métrica, nos dice que:

$$\begin{aligned} d\langle s \otimes u, s' \otimes u' \rangle &= \langle u, u' \rangle \left(\langle \nabla_{h_E}(s), s' \rangle + \langle s, \nabla_{h_E}(s') \rangle\right) + \\ & \quad \langle s, s' \rangle \left(\langle \nabla_{h_F}(u), u' \rangle + \langle u, \nabla_{h_F}(u') \rangle\right) \\ &= \langle (\nabla_{h_E} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_{h_F})(s \otimes u), s' \otimes u' \rangle + \\ & \quad \langle s \otimes u, (\nabla_{h_E} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_{h_F})(s' \otimes u') \rangle \end{aligned}$$

$\square$

La curvatura

El lema 3.1.11 tenemos que la matriz de la conexión métrica en E es de la forma:

$$\theta^\alpha = \partial h^\alpha (h^\alpha)^{-1}.$$

De ahí tenemos que $\partial h^\alpha = \theta^\alpha h^\alpha$ y entonces $0 = \partial\partial h^\alpha = \partial\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \partial h^\alpha$, es decir, $\partial\theta^\alpha h^\alpha = \theta^\alpha \wedge \partial h^\alpha$, lo que prueba que

$$\partial\theta^\alpha = \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha.$$

Por lo tanto la curvatura K_{∇_h} de la conexión métrica tiene una matriz local

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha = \partial\theta^\alpha + \overline{\partial}\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha = \overline{\partial}\theta^\alpha.$$

Luego,

$$\overline{\partial}\Theta^\alpha = 0.$$

La torsión

Supongamos ahora que $E = T'M$, el haz tangente holomorfo de M. Equipamos a $T'M$ con una métrica hermitiana y tomamos la conexión métrica ∇_h correspondiente. Si $(z_1^\alpha, \ldots, z_n^\alpha)$ son coordenadas locales en M, *la torsión* $\tau^\alpha = (\tau_1^\alpha, \ldots, \tau_n^\alpha)$ es el vector definido por las $(2,0)$ formas

$$\tau_i^\alpha = \sum_{j=1}^{n} dz_j^\alpha \wedge \theta_{ji}^\alpha, \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

Recordemos que una variedad M es llamada de Kähler si $T''M$ puede ser equipada con una métrica hermitiana cuya torsión es nula(ver [Hum]). Aplicando $\overline{\partial}$ a ambos lados de la ecuación anterior y utilizando el hecho de que $\Theta = \overline{\partial}\theta$, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\overline{\partial}\tau_i^\alpha = -\sum_{j=1}^{n} dz_j^\alpha \wedge \Theta_{ji}^\alpha, 1 \leq i \leq n.$$

La relación entre la curvatura y la torsión

Supongamos ahora que L es un haz holomorfo de rango 1 sobre M. Recordemos que si H_α es la métrica hermitiana en L, entonces, si $g_{\alpha\beta}$ son las funciones de transición (holomorfas) de L, tenemos que

$$H_\alpha = g_{\alpha\beta}\overline{g_{\alpha\beta}}H_\beta.$$

Por lo tanto, la conexión métrica ∇_H está dada por las matrices

$$\varphi^\alpha = \partial \log H_\alpha$$

en el abierto trivializador U_α.

En coordenadas locales la ecuación anterior se escribe como

$$\varphi^\alpha = \sum_i \left(\frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_i^\alpha}\right) dz_i^\alpha.$$

Ya que la curvatura K_{∇_H} está dada por las 2-formas del tipo $(1,1)$

$$\Phi^\alpha = \overline{\partial}\partial \log H_\alpha$$

entonces, la curvatura toma la forma

$$\Phi^\alpha = \sum_i \overline{\partial}\left(\frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_i^\alpha}\right) \wedge dz_i^\alpha = \sum_i \psi_i^\alpha \wedge dz_i^\alpha,$$

donde $\psi_i^\alpha = \overline{\partial}\left(\frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_i^\alpha}\right)$, para $1 \le i \le n$. Observemos que $\overline{\partial}\psi_i^\alpha = 0$.

Consideremos ahora la matriz $\Omega^\alpha = \left[\Omega_{ij}^\alpha\right]$, definida en U_α por

$$\Omega_{ij}^\alpha = \Theta_{ij}^\alpha - dz_j^\alpha \wedge \psi_i^\alpha, \text{ para } 1 \le i \le j \le n.$$

Lema 3.1.15. *Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta trivializadora común a $T'M$ y L. Sea Ξ^α la matriz de (1,1) formas en U_α, definida por $\Xi_{ij}^\alpha = -dz_j^\alpha \wedge \psi_i^\alpha$, para $1 \le i, j \le n$. Si $B_{\alpha\beta}$ son las funciones de transición de $T'M$, entonces*

$$\Xi^\alpha = B_{\alpha\beta}\Xi^\beta B_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Demostración. Supongamos que las funciones de transición de $T'M^*$ y de $T'M$ están dadas por

$$dz_i^\alpha = \sum_j A_{\alpha\beta}^{ij} dz_j^\beta,$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} = \sum_j B_{\alpha\beta}^{ij} \frac{\partial}{\partial z_j^\beta},$$

donde $A_{\alpha\beta} = (B_{\alpha\beta}^T)^{-1}$. Denotando $B_{\alpha\beta}^{-1} = \left[C_{\alpha\beta}^{ij}\right]$, tenemos que $A_{\alpha\beta} = \left[C_{\alpha\beta}^{ji}\right]$.

$$\overline{\partial}\left(\frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_i^\alpha}\right) = \sum_j B_{\alpha\beta}^{ij} \overline{\partial}\left(\frac{\partial \log H_\beta}{\partial z_j^\beta}\right)$$

es decir, $\psi_i^\alpha = \sum_j B_{\alpha\beta}^{ij} \psi_j^\beta$.

Luego,

$$\begin{aligned} \Xi_{ij}^\alpha &= -dz_j^\alpha \wedge \psi_i^\alpha \\ &= -\textstyle\sum_\ell A_{\alpha\beta}^{j\ell} dz_\ell^\beta \wedge \sum_u B_{\alpha\beta}^{iu} \psi_u^\beta \\ &= \textstyle\sum_{\ell,u} C_{\alpha\beta}^{\ell j} B_{\alpha\beta}^{iu} \Xi_{u\ell}^\beta. \end{aligned}$$

Por otro lado, la entrada ij de la matriz $B_{\alpha\beta}\Xi^\beta B_{\alpha\beta}^{-1}$ es:

$$\left(B_{\alpha\beta}\Xi^\beta B_{\alpha\beta}^{-1}\right)_{ij} = \sum_{\ell,u} B_{\alpha\beta}^{iu} C_{\alpha\beta}^{\ell j} \Xi_{u\ell}^\beta.$$

Comparando las dos igualdades anteriores obtenemos que $\Xi_{ij}^\alpha = \left(B_{\alpha\beta}\Xi^\beta B_{\alpha\beta}^{-1}\right)_{ij}$.

□

La curvatura para $T'M \otimes L$

Podemos resumir el análisis de la sección anterior de la siguiente manera: Consideremos el haz $T'M \otimes L$, cuyas funciones de transición son $B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$, ya que L tiene rango 1.

Luego, las matrices definidas por

$$\Omega^\alpha = \Theta^\alpha + \Xi^\alpha$$

satisfacen que

$$\Omega^\alpha = (B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta})\Omega^\beta (B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta})^{-1}.$$

3.1.3. Polinomios invariantes

Recordemos que un polinomio invariante $P : M(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ es invariante si:

$$P(gAg^{-1}) = P(A) \qquad \forall A \in M(n, \mathbb{C}),\ \forall g \in GL(n, \mathbb{C}).$$

Los polinomios C_i definidos por

$$\det(tI + A) = t^n + C_1(A)t^{n-1} + \cdots + C_n(A)$$

son tales que cualquier polinomio invariante P se escribe como un polinomio en los C_i. En particular, cualquier polinomio de grado n es una combinación lineal de los polinomios de la forma:

$$P^\nu(A) = C_1^{\nu_1}(A) \cdots C_n^{\nu_n}(A)$$

donde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n, \nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n = n$.

Consideremos ahora una aplicación k-lineal

$$\widetilde{P} : M(n, \mathbb{C}) \times \cdots \times M(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

simétrica; es decir, $\widetilde{P}(A_1, \ldots, A_k) = \widetilde{P}(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(k)})$, donde σ es una permutación de $\{1, \ldots, n\}$. Entonces, diremos que $\widetilde{P}$ es invariante si

$$\widetilde{P}(A_1, \ldots, A_k) = \widetilde{P}(gA_1g^{-1}, \ldots, gA_kg^{-1}), \qquad \forall g \in GL(n, \mathbb{C})$$

Toda aplicación k-lineal invariante $\widetilde{P}$, determina un polinomio invariante P, de grado k, de la siguiente manera

$$P(A) = \widetilde{P}(A, \ldots, A).$$

Recíprocamente, cualquier polinomio invariante P es la restricción de una aplicación k-lineal simétrica invariante $\widetilde{P}$. La aplicación $\widetilde{P}$ es determinada de manera única por P y se llama la polarización completa de P.

Ejemplo 3.1.16. *La polarización de los C_r es la siguiente: dada una matriz A de $n \times n$ y multi-indices I, $J \subset \{1, \ldots, n\}$, denotemos por $A_{I,J}$ el menor $[a_{ij}]_{i \in I, j \in J}$. Si $(A_1, \ldots, A_r) \in (M(n, \mathbb{C}))^r$, σ es una permutación de r elementos e $I \subset \{1, \ldots, n\}$ es un multi-índice de orden r, denotemos por A_I^σ la matriz $r \times r$ cuya i-ésima columna es la i-ésima columna de la matriz $A_{I,J}^{\sigma(I)}$. Entonces,*

$$\widetilde{C_r}(A_1, \ldots, A_r) = \frac{1}{r!} \sum_\sigma \sum_{|I|=r} \det A_I^\sigma,$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones de r elementos.

3.2. Localización de clases características

La clase del jacobiano de una sección de $T'M \otimes L$

Consideremos una sección holomorfa ξ del haz $T'M \otimes L$. Si $\{U_\alpha\}$ es una cubierta trivializadora de $T'M$ y L, tomemos sobre cada U_α, coordenadas locales $z^\alpha = (z_1^\alpha, \ldots, z_n^\alpha)$ y el marco holomorfo $\{\partial/\partial z_1^\alpha, \ldots, \partial/\partial z_n^\alpha\}$ de $T'M$. En estas coordenadas tenemos que $\xi_{|U_\alpha}$ se escribe como

$$\xi^\alpha = \sum_i \xi_i^\alpha \frac{\partial}{z_i^\alpha},$$

donde ξ_i^α es una sección holomorfa de L, $1 \leq i \leq n$. Sea $p \in M$ un cero de ξ. Tomemos coordenadas en una vecindad de p tales que $z^\alpha(p) = 0$. Expandiendo ξ_i^α en serie de potencias, tenemos que

$$\xi_i^\alpha = \sum_j a_{ij} z_j^\alpha + s_i^\alpha(z^\alpha),$$

donde los términos s_i^α tienen grado mayor o igual a 2. La parte lineal de ξ^α en p es

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij} z_j^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha},$$

donde $a_{ij} = \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_i^\alpha}(p),\ 1 \leq i,j \leq n$.

La siguiente proposición nos permite ver que el jacobiano define una clase característica.

Proposición 3.2.1. *Si P es un polinomio invariante, entonces,*

$$P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_j^\alpha}(p) \right] \right) = P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial z_j^\beta}(p) \right] \right).$$

Esto es, el número

$$P(J(\xi)(p)) = P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_j^\alpha}(p) \right] \right) \in \mathbb{C}$$

no depende de las trivializaciones locales de $T'M \otimes L$.

Demostración. Si $p \in U_\beta$ con $z^\beta(p) = 0$ y $\alpha \neq \beta$, entonces ξ^β tiene parte lineal en p

$$\sum_i \left(\sum_j a'_{ij} z_j^\beta \right) \frac{\partial}{\partial z_i^\beta},$$

donde $a'_{ij} = \frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial z_i^\beta}(p),\ 1 \leq i, j \leq n$.

Pasando de las coordenadas z^β a las coordenadas z^α y usando la notación del lema 3.1.15 tenemos que

(i) Sea $z_i^\alpha = \varphi_{ij}^\alpha(z_1^\beta, \ldots, z_n^\beta)$. Expandiendo z_i^α en series de potencias obtenemos

$$z_i^\alpha = \sum_j C_{\alpha\beta}^{ji}(p) z_j^\beta + R_i^\beta,$$

donde los términos R_i^β tienen grado mayor o igual a 2, $B_{\alpha\beta}^{-1} = \left[C_{\alpha\beta}^{ij}\right]$ y $B_{\alpha\beta}$ son funciones de transición de $T'M$.

(ii) La parte lineal de ξ^α la podemos calcular en el sistema de coordenadas z^β, tomando en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} = \sum_j B_{\alpha\beta}^{ij} \frac{\partial}{\partial z_j^\beta},$$

Esto es,

$$\sum_i \left[\left(\sum_j \sum_\ell a_{ij} C_{\alpha\beta}^{\ell j}(p) z_\ell^\beta \right) \left(\sum_k B_{\alpha\beta}^{ik}(p) \frac{\partial}{\partial z_k^\beta} \right) \right] =$$
$$\sum_{i,j,k,\ell} \left(C_{\alpha\beta}^{\ell j}(p) a_{ij} B_{\alpha\beta}^{ik}(p) \right) \frac{\partial}{\partial z_k^\beta}$$

Por lo tanto,

$$a'_{k\ell} = \sum_{ij} B_{\alpha\beta}^{ik}(p) a_{ij} C_{\alpha\beta}^{\ell j}(p).$$

Como $C_{\alpha\beta}^{\ell j} = \left((B_{\alpha\beta}^T)^{-1}\right)_{j\ell}$ y $B_{\alpha\beta}^{ik}(p) = \left(B_{\alpha\beta}^T\right)_{ki}$, se sigue que

$$a'_{k\ell} = \sum_{i,j} \left(B_{\alpha\beta}^T\right)_{ki} a_{ij} \left((B_{\alpha\beta}^T)^{-1}\right)_{j\ell}.$$

Esto implica que

$$\left[\frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial z_j^\beta}(p)\right] = (B_\alpha^T(p) \otimes g_{\alpha\beta}^T(p)) \left[\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_j^\alpha}(p)\right] (B_\alpha^T(p) \otimes g_{\alpha\beta}^T(p))^{-1}.$$

Con lo cual

$$P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_j^\alpha}(p)\right]\right) = P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial z_j^\beta}(p)\right]\right).$$

□

Ω como (1,1) forma invariante en $T'M \otimes L$

Ahora vamos a considerar las derivadas covariantes (véase [Car]) de la sección ξ. La conexión métrica en $T'M \otimes L$ está dada por

$$\nabla = (\nabla_h \otimes 1) + (1 \otimes \nabla_H),$$

donde ∇_h y ∇_H son las conexiones métricas de $T'M$ y de L, respectivamente. Escribiendo la matriz de la conexión ∇_h en la forma

$$\theta_{ij}^\alpha = \sum_k \Gamma_{ik}^{\alpha j} dz_k,$$

tenemos que

$$\begin{array}{rcl}
[\nabla_H \otimes 1) + (1 \otimes \nabla_h)] \left(\xi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}\right) & = & \nabla_H(\xi_i^\alpha) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \xi_i^\alpha \otimes \nabla_h \left(\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}\right) \\
& = & (d\xi_i^\alpha + \xi_i^\alpha \partial \log H_\alpha) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \sum_j \xi_i^\alpha \theta_{ij}^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \\
& = & (d\xi_i^\alpha + \xi_i^\alpha \partial \log H_\alpha) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \\
& & \left(\sum_{j,k} \xi_i^\alpha \Gamma_{ik}^{\alpha j} dz_k^\alpha\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}
\end{array}$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl}
\nabla(\xi^\alpha) & = & \nabla\left(\sum_i \xi_i^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}\right)\right) \\
& = & \sum_i \left(d\xi_i^\alpha + \xi_i^\alpha \partial \log H_\alpha + \sum_{j,k} \xi_i^\alpha \Gamma_{jk}^{\alpha i} dz_k^\alpha\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}.
\end{array}$$

Ahora definiremos una sección sobre $T'M \otimes L$ que nos será de utilidad. Antes de hacerlo recordemos que dada $u \in \mathcal{A}^0(M, H)$, podemos definir una aplicación:

$$\begin{array}{rcl}
i(u) : \mathcal{A}^0(M, H^* \otimes E) & \longrightarrow & \mathcal{A}^0(M, E) \\
\omega \otimes s & \longmapsto & \omega(u)s.
\end{array}$$

Proposición 3.2.2. *Definamos* $E_k^{\alpha i}$ *por*

$$E_k^{\alpha i} = -\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_k^\alpha} - \xi_i^\alpha \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_k^\alpha} - \sum_j \Gamma_{kj}^{\alpha i} \xi_j^\alpha,$$

entonces

$$\overline{\partial} E_k^{\alpha i} = i(\xi^\alpha)\Omega_{ki}^\alpha.$$

Demostración. Tenemos que

$$\overline{\partial}(E_k^{\alpha i}) = \overline{\partial}\left(-\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_k^\alpha} - \xi_i^\alpha \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_k^\alpha} - \sum_j \Gamma_{kj}^{\alpha i} \xi_j^\alpha\right)$$

Dado que ξ_i^α es una sección holomorfa de L, tenemos que

$$\overline{\partial} E_k^{\alpha i} = -\xi_i^\alpha \overline{\partial} \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_k^\alpha} - \sum_j \xi_j^\alpha \overline{\partial} \Gamma_{kj}^{\alpha i},$$

como $\psi_k^\alpha = \overline{\partial} \frac{\partial \log H_\alpha}{dz_k}$, se sigue que:

$$\overline{\partial} E_k^{\alpha i} = -\xi_i^\alpha \psi_k^\alpha - \sum_j \xi_j^\alpha \overline{\partial} \Gamma_{kj}^{\alpha i}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\Omega_{ki}^\alpha &= \Theta_{ki}^\alpha - dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha \\
&= \overline{\partial}\theta_{ki}^\alpha - dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha \\
&= \overline{\partial}\left(\textstyle\sum_j \Gamma_{kj}^{\alpha i} dz_i^\alpha\right) - dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha \\
&= -\textstyle\sum_j dz_j^\alpha \wedge \overline{\partial}\Gamma_{kj}^{\alpha i} - dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
i(\xi^\alpha)\Omega_{ki}^\alpha &= -i(\xi^\alpha)\left(\sum_j dz_j^\alpha \wedge \overline{\partial}\Gamma_{kj}^{\alpha i}\right) - i(\xi^\alpha)(dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha) \\
&= -\sum_j \xi_j^\alpha \overline{\partial}\Gamma_{kj}^{\alpha i} - \xi_i^\alpha \psi_k^\alpha,
\end{aligned}$$

ya que $i(\xi^\alpha)d\overline{z}_\ell^\alpha = 0$, debido a que ξ^α es una sección holomorfa.
Comparando esta última expresión con $\overline{\partial}(E)$ obtenemos

$$\overline{\partial} E_k^{\alpha i} = i(\xi^\alpha)\Omega_{ki}^\alpha$$

□

$P(\Omega)$ **como elemento de** $H^{2n}_{DR}(M \setminus \{p : \xi(p) = 0\}, \mathbb{C})$

Sea P un polinomio invariante de grado $n = \dim_{\mathbb{C}} M$. Por el lema 3.2.1 tenemos que $P(\Omega^\alpha) = P(\Omega^\beta)$. La colección $\{P(\Omega^\alpha)\}$ define una (n, n) forma global en M, que denotaremos por $P(\Omega)$. Sea $\widetilde{P}$ la polarización de P y sea

$$P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) = \binom{n}{r} \widetilde{P}(\underbrace{E^\alpha, \dots, E^\alpha}_{n-r}, \underbrace{\Omega^\alpha, \dots, \Omega^\alpha}_{r}), 0 \leq r \leq n$$

Es claro que $P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha)$ es una (r, r) forma con coeficientes en $L^{n-r}_{|U_\alpha}$. Como $\overline{\partial}\Theta^\alpha = 0$ y $\Phi^\alpha = \sum_i \overline{\partial}\left(\frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_i^\alpha}\right) \wedge dz_i^\alpha = \sum_i \psi_i^\alpha \wedge dz_i^\alpha$, pero tenemos que $\Omega^\alpha_{ij} = \Theta^\alpha_{ij} - dz_j^\alpha \wedge \psi_i^\alpha$. Por lo tanto,

$$\overline{\partial}\Omega^\alpha = 0$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{\partial} P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) &= \binom{n}{r} \sum_{r=1}^{n-1} \widetilde{P}(E^\alpha, \dots, i(\xi^\alpha)(\Omega^\alpha), \dots, E^\alpha, \Omega^\alpha, \dots, \Omega^\alpha) \\ &= i(\xi^\alpha) P_{r+1}(\Omega^\alpha, E^\alpha). \end{aligned}$$

Ahora con lo obtenido hasta el momento, construiremos una forma que nos ayudara a decir quien es explícitamente $P(\Omega)$.

Sea ω una $(1, 0)$ forma de la sección ξ, definida por:

$$\omega^\alpha = \frac{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k} \overline{\xi^\alpha_k} dz_i^\alpha}{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k} \overline{\xi^\alpha_k} \xi_i^\alpha},$$

fuera de los ceros de ξ. Observemos que

$$\begin{aligned} i(\xi^\alpha)\omega^\alpha &= i(\xi^\alpha) \frac{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k} \overline{\xi^\alpha_k} dz_i^\alpha}{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k} \overline{\xi^\alpha_k} \xi_i^\alpha} \\ &= \frac{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k} \overline{\xi^\alpha_k} i(\xi^\alpha) dz_i^\alpha}{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k} \overline{\xi^\alpha_k} \xi_i^\alpha} \\ &= \frac{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k} \overline{\xi^\alpha_k} dz_i^\alpha(\xi^\alpha)}{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k} \overline{\xi^\alpha_k} \xi_i^\alpha} \\ &= \frac{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k} \overline{\xi^\alpha_k} \xi_i^\alpha}{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k} \overline{\xi^\alpha_k} \xi_i^\alpha} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esto es, $i(\xi^\alpha)\omega^\alpha = 1$. Además calculando $\overline{\partial}$ de ω^α tenemos que,

$$
\begin{aligned}
i(\xi^\alpha)\overline{\partial}\omega^\alpha &= i(\xi^\alpha)\overline{\partial}\frac{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}dz^\alpha_i}{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i} \\
&= i(\xi^\alpha)\left(\frac{\overline{\partial}\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}dz^\alpha_i\right)\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)}{\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)^2}\right) - \\
&\quad\; i(\xi^\alpha)\left(\frac{\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}dz^\alpha_i\right)\overline{\partial}\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)}{\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)^2}\right) \\
&= \left(\frac{i(\xi^\alpha)\overline{\partial}\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}dz^\alpha_i\right)\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)}{\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)^2}\right) - \\
&\quad\; \left(\frac{i(\xi^\alpha)\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}dz^\alpha_i\right)i(\xi^\alpha)\overline{\partial}\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)}{\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)^2}\right) \\
&= \left(\frac{i(\xi^\alpha)\left(\sum_{i,k} \overline{\partial}(h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k})dz^\alpha_i\right)\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)}{\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)^2}\right) - \\
&\quad\; \left(\frac{i(\xi^\alpha)\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}dz^\alpha_i\right)i(\xi^\alpha)\left(\sum_{i,k} \overline{\partial}(h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k})\xi^\alpha_i\right)}{\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)^2}\right) \\
&= \left(\frac{\left(\sum_{i,k} i(\xi^\alpha)\overline{\partial}(h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k})\xi^\alpha_i\right)\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)}{\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)^2}\right) - \\
&\quad\; \left(\frac{\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)\left(\sum_{i,k} i(\xi^\alpha)\overline{\partial}(h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k})\xi^\alpha_i\right)}{\left(\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\overline{\xi^\alpha_k}\xi^\alpha_i\right)^2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$i(\xi^\alpha)\overline{\partial}\omega^\alpha = 0.$$

Sea Π^α_r la $(n, n-1)$ forma definida por:

$$\Pi^\alpha_r = \omega^\alpha \wedge \left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r-1} \wedge P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha),\ 1 \leq r \leq n-1.$$

Definamos también la $(n, n-1)$ forma Υ definida por:

$$\Upsilon^\alpha = -\sum_{r=0}^{n-1} \Pi^\alpha_r.$$

Para ver que $P(\Omega)$ es una forma exacta probaremos que $d\Upsilon = P(\Omega)$.

Lema 3.2.3. *$P(\Omega)$ es una forma exacta.*

Demostración. Para ver esto basta ver que

$$i(\xi^\alpha)\left\{\overline{\partial}\left[\sum_{r=0}^{n-1}\Pi_r^\alpha\right]+P_n(\Omega^\alpha,E^\alpha)\right\}=0.$$

Como

$$\Pi_r^\alpha=\omega^\alpha\wedge\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r-1}\wedge P_r(\Omega^\alpha,E^\alpha),\ 1\leq r\leq n-1$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
i(\xi^\alpha)\overline{\partial}\Pi_r^\alpha &= i(\xi^\alpha)\left[\overline{\partial}(\omega^\alpha\wedge\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r-1}\wedge P_r(\Omega^\alpha,E^\alpha))\right]\\
&= i(\xi^\alpha)\left[\overline{\partial}(\omega^\alpha)\wedge\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r-1}\wedge P_r(\Omega^\alpha,E^\alpha)+\right.\\
&\quad \left.(-1)^{\deg\omega}\omega^\alpha\wedge\overline{\partial}\left(\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r-1}\wedge P_r(\Omega^\alpha,E^\alpha)\right)\right]\\
&= i(\xi^\alpha)\left[\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r}\wedge P_r(\Omega^\alpha,E^\alpha)-\omega^\alpha\wedge\left(\left(\overline{\partial}\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r-1}\wedge P_r(\Omega^\alpha,E^\alpha)+\right.\right.\\
&\quad \left.\left.(-1)^{\deg\overline{\partial}\omega^{\alpha^{n-r-1}}}\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r-1}\wedge\overline{\partial}P_r(\Omega^\alpha,E^\alpha)\right)\right]\\
&= i(\xi^\alpha)\left[(\overline{\partial}\omega^\alpha)^{n-r}\wedge P_r(\Omega^\alpha,\mathrm{E}^\alpha)-\omega\wedge\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r-1}\wedge\overline{\partial}P_r(\Omega^\alpha,E^\alpha)\right]\\
&\quad \text{pero } i(\xi^\alpha)\overline{\partial}\omega^\alpha=0 \text{ y } \overline{\partial}\omega^\alpha\omega=1,\text{ tenemos entonces que}\\
i(\xi^\alpha)\overline{\partial}\Pi_r^\alpha &= (\overline{\partial}\omega^\alpha)^{n-r}\wedge i(\xi^\alpha)P_r(\Omega^\alpha,\mathrm{E}^\alpha)-\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r-1}\wedge i(\xi^\alpha)P_{r+1}(\Omega^\alpha,E^\alpha).
\end{aligned}$$

De lo cual se sigue que:

$$\begin{aligned}
i(\xi^\alpha)\left\{\overline{\partial}\left[\textstyle\sum_{r=0}^{n-1}\Pi_r^\alpha\right]+P_n(\Omega^\alpha,E^\alpha)\right\} &= \textstyle\sum_{r=0}^{n-1}i(\xi^\alpha)\overline{\partial}\Pi_r^\alpha+i(\xi^\alpha)P_n(\Omega^\alpha,E^\alpha)\\
&= \textstyle\sum_{r=0}^{n-1}\left[(\overline{\partial}\omega^\alpha)^{n-r}\wedge i(\xi^\alpha)P_r(\Omega^\alpha,\mathrm{E}^\alpha)\right.\\
&\quad \left.-\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r-1}\wedge i(\xi^\alpha)P_{r+1}(\Omega^\alpha,E^\alpha)\right]\\
&\quad +i(\xi^\alpha)P_n(\Omega^\alpha,E^\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\overline{\partial}\omega^\alpha)^n\wedge i(\xi^\alpha)P_0(\Omega^\alpha,\mathrm{E}^\alpha)-\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-1}\wedge i(\xi^\alpha)P_1(\Omega^\alpha,E^\alpha)+\\
&\quad (\overline{\partial}\omega^\alpha)^{n-1}\wedge i(\xi^\alpha)P_1(\Omega^\alpha,\mathrm{E}^\alpha)-\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-2}\wedge i(\xi^\alpha)P_2(\Omega^\alpha,E^\alpha)+\\
&\quad \vdots\\
&\quad (\overline{\partial}\omega^\alpha)^1\wedge i(\xi^\alpha)P_{n-1}(\Omega^\alpha,\mathrm{E}^\alpha)-\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^0\wedge i(\xi^\alpha)P_n(\Omega^\alpha,E^\alpha)+\\
&\quad i(\xi^\alpha)P_n(\Omega^\alpha,E^\alpha)\\
&= i(\xi^\alpha)\left((\overline{\partial}\omega^\alpha)^n\wedge P_0(\Omega^\alpha,\mathrm{E}^\alpha)\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.2.4. *$P(\Omega)$ es un elemento de $H^{2n}_{DR}(M \setminus \{p : \xi(p) = 0\}, \mathbb{C})$.*

Demostración. Notemos que $P_n(\Omega^\alpha, E^\alpha) = P(\Omega)_{|U_\alpha}$.

Luego, $\overline{\partial}\left[\sum_{r=0}^{n-1} \Pi_r^\alpha\right] + P(\Omega)_{|U_\alpha}$ es una (n,n) forma en $U_\alpha \setminus \{p \in M : \xi(p) = 0\}$ y por el lema (3.2.3) tenemos que

$$P(\Omega)_{|U_\alpha} - \overline{\partial}\Upsilon^\alpha = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} d\Upsilon^\alpha &= \partial\Upsilon + \overline{\partial}\Upsilon \\ &= \overline{\partial}\Upsilon \\ &= P(\Omega)_{|U_\alpha}, \end{aligned}$$

en $U_\alpha \setminus \{p : \xi(p) = 0\}$.

Como $\{\Upsilon^\alpha\}$ define una $(n, n-1)$ forma global Υ en $M \setminus \{p : \xi(p) = 0\}$, podemos concluir que

$$P(\Omega) = d\Upsilon \text{ en } M \setminus \{p : \xi(p) = 0\}. \tag{1}$$

Esta última igualdad nos dice que la (n,n) forma $P(\Omega)$ es exacta fuera de los ceros de ξ. Por lo tanto,

$$\left[P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right)\right] = 0 \in H^{2n}_{DR}(M \setminus \{p : \xi(p) = 0\}, \mathbb{C})$$

$\square$

Independencia de las métricas

Sabemos que Ω está dada localmente por $\Omega^\alpha = \Theta^\alpha + \Xi^\alpha$ invariantes por conjugación, donde Θ^α es la matriz de curvatura de la conexión métrica en $T'M$ y Ξ^α es la producida a partir de Φ^α, la cual es la matriz de curvatura de la conexión métrica en L. En otras palabras Ω contiene información de las clases de Chern de $T'M$ y de L; Esto nos permitirá demostrar que la integral de un polinomio invariante evaluado en Ω no depende de las métricas elegidas.

Antes de probar este resultado, probaremos un lema técnico muy útil. Sea C_r el polinomio simétrico elemental en la forma Ω. Entonces C_r admite una expresión de la forma

$$C_r(\Omega^\alpha) = \frac{1}{r!}\sum_{I_r} \delta^{I_r}_{J_r} \Omega^\alpha_{i_1,j_1} \cdots \Omega^\alpha_{i_r,j_r}$$

.

Lema 3.2.5. *Dado C_r polinomio simétrico elemental en la forma Ω, lo podemos escribir como*

$$C_r(\Omega^\alpha) = \sum_{0\le s\le r} C_s(\Theta^\alpha)\wedge(\Phi^\alpha)^{r-s} + \overline{\partial}\Lambda_r^\alpha, \qquad (2)$$

donde las Λ_r^α son obtenidas de las formas de torsión.

Demostración. Como $\Omega_{ij}^\alpha = \Theta_{ij}^\alpha - dz_j^\alpha \wedge \psi_i^\alpha$, tenemos que,

$$C_r(\Omega^\alpha) = \frac{1}{r!}\sum_{0\le s\le r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}\Big\{\sum \delta_{j_1,\dots,j_r}^{i_1,\dots,i_r}$$

$$\Theta_{i_1,j_1}^\alpha \wedge \ldots \wedge \Theta_{i_s,j_s}^\alpha \wedge dz_{j_{s+1}}^\alpha \wedge \psi_{i_{s+1}}^\alpha \wedge \ldots \wedge dz_{j,r}^\alpha \wedge \psi_{i,r}^\alpha\Big\}$$

donde en la segunda suma $i_1,\dots,i_r$ es una permutación de $j_1,\dots,j_r$ y la suma se toma sobre todos los elementos $\{i_1,\dots,i_r\}\subset\{1,\dots,n\}$. De entre todas las permutaciones tenemos dos posibilidades:

I.$i_1,\dots,i_s$ es una permutación de $j_1,\dots,j_s$ y en ese caso $i_{s+1},\dots,i_r$ es una permutación de $j_{s+1},\dots,j_r$ o bien,

II. el bloque $i_1,\dots,i_s$ no es una permutación de $j_1,\dots,j_s$

Si estamos en el caso II, entonces, para cada s, con $j_{s+1}\in\{i_1,...,i_s\}$. Tenemos un término de la forma $\sum_{i=1}^n \Theta_{ij}^\alpha \wedge dz_i^\alpha$. Pero sabemos que $\overline{\partial}\tau_j^\alpha = -\sum_{i=1}^n \Theta_{ij}^\alpha \wedge dz_i^\alpha$, por lo tanto ese término se encuentra en la imagen de $\overline{\partial}$.

Por lo tanto, la suma de arriba es de la forma

$$C_r(\Omega^\alpha) = \frac{1}{r!}\sum_{0\le s\le r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}$$

$$\Big\{\sum \delta_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_s}\Theta_{i_1,j_1}^\alpha \wedge \ldots \wedge \Theta_{i_s,j_s}^\alpha \wedge \sum \delta_{j_{s+1},\dots,j_r}^{i_{s+1},\dots,i_r} dz_{j_{s+1}}^\alpha \wedge \psi_{i_{s+1}}^\alpha \wedge \ldots \wedge dz_{j,r}^\alpha \wedge \psi_{i,r}^\alpha\Big\}$$
$$+\overline{\partial}\Lambda_r^\alpha$$

Por otro lado,

$$(\Phi^\alpha)^{r-s} = \frac{(-1)^{r-s}}{(r-s)!}\sum \delta_{j_{s+1}\dots j_r}^{i_{s+1}\dots i_r} dz_{j_{s+1}^\alpha} \wedge \psi_{i_{s+1}}^\alpha \wedge \ldots \wedge dz_{j_r}^\alpha \wedge \psi_{i_r}^\alpha$$

y ahora lo escribimos como

$$C_r(\Omega^\alpha) = \sum_{0\le s\le r} C_s(\Theta^\alpha)\wedge(\Phi^\alpha)^{r-s} + \overline{\partial}\Lambda_r^\alpha$$

□

Proposición 3.2.6. *Sea P un polinomio invariante de grado n, entonces*

$$\int_M P(\Omega)$$

es independiente de las métricas hermitianas elegidas.

Demostración. Notemos que las Λ_r^α del lema (3.2.5) son obtenidas de las formas de torsión, por lo tanto definen una forma global Λ_r en M.

Sea ahora

$$C_r(\Theta^\alpha, \Lambda^\alpha) = \sum_{0\leq s\leq r} C_s(\Theta^\alpha) \wedge (\Phi^\alpha)^{r-s},\ 1 \leq r \leq n.$$

Entonces, $C_r(\Theta^\alpha, \Lambda^\alpha)$ es invariante por conjugación con respecto a las funciones de transición de $T'M\otimes L$. Si denotamos por K_h y K_H las curvaturas de $T'M$ y de L, respectivamente, tenemos que $C_r(\Theta^\alpha, \Lambda^\alpha)$ define una (r, r) forma global en M. Esto es,

$$C_r(K_h, K_H) = \sum_{0\leq s\leq r} C_s(K_h) \wedge (K_H)^{r-s},\ 1 \leq r \leq n.$$

Como

$$C^\nu(K_h, K_H) = C_1^{\nu_1}(K_h, K_H) \wedge \ldots \wedge C_n^{\nu_n}(K_h, K_H)$$

y $c_m(E - L) = c_m(E \otimes L^*)$, se sigue que

$$c^\nu(T'M - L^*) = c^\nu(T'M \otimes L) = \left[\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\nu|} C^\nu(K_h, K_H)\right] \in H^{2|\nu|}_{DR}(M, \mathbb{C})$$

donde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $|\nu| = \nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n$, y $C^\nu(T'M - L^*)$ es el polinomio en las clases de Chern de $T'M - L^*$:

$$c^\nu(T'M - L^*) = c_1^{\nu_1}(T'M - L^*) \cdots c_n^{\nu_n}(T'M - L^*).$$

De acuerdo con la expresión (2), tenemos que

$$C^\nu(\Omega) = C^\nu(K_h, K_H) + \overline{\partial}\Psi_\nu.$$

Por lo tanto, si $|\nu| = n$, entonces Ψ_ν es una $(n, n-1)$ forma y $\overline{\partial}\Psi_\nu = d\Psi_\nu$. De lo cual tenemos que

$$c^\nu(T'M - L^*) = \left[\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{n} C^\nu(\Omega)\right] \in H^{2n}_{DR}(M, \mathbb{C})$$

Por otro lado, si P es un polinomio invariante de grado n, entonces $P(\Omega)$ es una combinación lineal de los $C^\nu(\Omega)$ y la cual escribiremos como $P(\Omega) = S(C^\nu(\Omega))$. Luego,

$$\left[\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n P(\Omega)\right] = S(c^\nu(T'M - L^*)).$$

Sabemos que $P(\Omega)$ es exacta fuera de los ceros de ξ y que las clases características $c^\nu(T'M - L^*), |\nu| = n$, se anulan fuera de los ceros de ξ. De lo anterior se sigue que

$$\int_M C^\nu(\Omega) = \int_M (C^\nu(K_h, K_H) + d\Psi_\nu) = \int_M C^\nu(K_h, K_H). \tag{3}$$

y la última igualdad se sigue del teorema de Stokes. Como la integral

$$\int_M C^\nu(K_h, K_H),$$

es de una clase característica, concluimos que no depende de las métricas. $\square$

3.3. El teorema de Baum–Bott

Teorema 3.3.1 (Teorema de Baum-Bott)**.** *Sea M una variedad compleja, compacta de dimensión n, L un haz holomorfo de rango 1 sobre M y ξ una sección holomorfa de $T'M \otimes L$, cuyos ceros son aislados y no degenerados. Consideremos las clases de Chern del haz virtual $TM - L^*$:*

$$c^\nu(TM - L^*) = c_1^{\nu_1}(TM - L^*) \dots c_n^{\nu_n}(TM - L^*)$$

donde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n), n = \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + n\nu_n$ entonces

$$\int_M c^\nu(T'M - L^*) = \sum_{\{p:\xi(p)=0\}} \frac{C^\nu(J\xi(p))}{\det J\xi(p)}$$

Demostración. Sean $p_1, \dots, p_k$ los ceros de ξ. Escojamos vecindades disjuntas $\mathbb{B}_{2\epsilon}(p_i)$ de cada uno de esos puntos. En cada una de esas vecindades tomaremos un marco holomorfo $\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_n$ donde $\{z_1, \dots, z_n\}$ son las coordenadas locales. Sea h_i la métrica hermitiana en $\mathbb{B}_{2\epsilon}(p_i)$ definida por

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_\ell} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \ell \\ 0 & \text{si } j \neq \ell. \end{cases}$$

Tomemos cualquier métrica hermitiana h_0 en $M \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ y sea $\{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k\}$ una partición de la unidad subordinada a la cubierta

$$\{M \setminus \cup \mathbb{B}_\epsilon(p_i), \mathbb{B}_{2\epsilon}(p_1), \mathbb{B}_{2\epsilon}(p_2), \dots, \mathbb{B}_{2\epsilon}(p_k)\}$$

Ahora definamos la métrica hermitiana en M,

$$h = \sum_{i=1}^k \rho_i h_i.$$

Por un lado tenemos que $K_h \equiv 0$ en $\mathbb{B}_\epsilon(p_i)$. Ocurre lo mismo con el haz lineal L, escogiendo la métrica dada por $H_i = 1$ en $\mathbb{B}_{2\epsilon}(p_i)$ y H_0 cualquier métrica en $M \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Por lo tanto $K_H \equiv 0$ en $\mathbb{B}_\epsilon(p_i)$.

Sea P un polinomio invariante de grado n. Entonces por (1)

$$\int_{M \setminus \cup \mathbb{B}_\epsilon(p_i)} P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \int_{M \setminus \cup \mathbb{B}_\epsilon(p_i)} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n d\Upsilon$$

Ahora por el teorema de Stokes tenemos que

$$\int_{M\setminus\cup\mathbb{B}_\epsilon(p_i)}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n d\Upsilon=\sum_i\int_{\partial\mathbb{B}_\epsilon(p_i)}-\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n\Upsilon$$

En $\mathbb{B}_\epsilon(p_i)$ sabemos que $K_h = K_H = 0$, entonces utilizando el hecho de que

$$E_k^{\alpha i}=-\frac{\partial\xi_i^\alpha}{\partial z_k^\alpha}-\xi_i^\alpha\frac{\partial\log H_\alpha}{\partial z_k^\alpha}-\sum_j\Gamma_{kj}^{\alpha i}\xi_j^\alpha,$$

tenemos que $E_j^i = -\partial\xi_i/\partial z_j$ y que $\Theta_{ij} = 0$. Luego, $P_r(\Omega, E) = 0$ para $1 \leq r \leq n$. Por lo tanto,

$$P_0(\Omega,E)=P(E)=(-1)^nP(J\xi),\ \text{donde}\ J\xi=\left[\frac{\partial\xi_i}{\partial z_j}\right].$$

Ahora como

$$\Pi_r^\alpha=\omega^\alpha\wedge\left(\overline{\partial}\omega^\alpha\right)^{n-r-1}\wedge P_r(\Omega^\alpha,E^\alpha),\ 1\leq r\leq n-1$$

y

$$\Upsilon^\alpha=-\sum_{r=0}^{n-1}\Pi_r^\alpha,$$

tenemos que

$$\Upsilon=-\sum_{r=0}^{n}\Pi_r=-\Pi_0=(-1)^{n+1}P(J\xi)\omega\wedge(\overline{\partial}\omega)^{n-1}.$$

Además en estas coordenadas

$$\omega=\frac{\sum_i\overline{\xi_i}dz_i}{\sum_i\overline{\xi_i}\xi_i}=\frac{\langle dz,\xi\rangle}{\langle\xi,\xi\rangle}$$

De lo cual obtenemos las siguiente expresión

$$\overline{\partial}\omega=-\frac{\langle dz,d\xi\rangle}{\langle\xi,\xi\rangle}-\frac{\langle dz,\xi\rangle\,\langle\xi,d\xi\rangle}{\langle\xi,\xi\rangle^2}$$

Por lo tanto,

$$\omega\wedge(\overline{\partial}\omega)^{n-1}=\frac{\langle dz,\xi\rangle}{\langle\xi,\xi\rangle}\wedge(-1)^{n-1}\frac{\langle dz,d\xi\rangle^{n-1}}{\langle\xi,\xi\rangle^{n-1}}.$$

Desarrollando el lado derecho de la igualdad, obtenemos

$$\langle \xi, \xi \rangle^{-(n-1)} \left\{ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)! dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge \sum_i (-1)^{i-1} \overline{\xi}_i d\overline{\xi}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\overline{\xi}_i} \right\} \tag{4}$$

La hipótesis de que $\det(J\xi(p_i)) \neq 0$ nos dice que podemos hacer el cambio de variable

$$dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = \frac{1}{\det(J\xi)} d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n$$

Con lo cual tenemos que la siguiente expresión para (4)

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!}{\det(J\xi) \langle \xi, \xi \rangle^{(n-1)}} \sum_i (-1)^{i-1} \overline{\xi}_i d\overline{\xi}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\overline{\xi}_i} \wedge \ldots \wedge d\overline{\xi}_n \wedge d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n.$$

Con lo cual tenemos que la expresión anterior es igual a (Ver Bochner-Martinelli B_n en [Sor 2])

$$\frac{(2\pi i)^n}{\det(J\xi)} B_n.$$

Y ahora comparando con Υ tenemos que

$$\Upsilon = (-1)^{n+1} (2\pi i)^n \frac{P(J\xi)}{\det (J\xi)} B_n$$

de lo cual tenemos que

$$-\left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \Upsilon = \frac{P(J\xi)}{\det (J\xi)} B_n.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\partial \mathbb{B}_\epsilon(p_i)} -\left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \Upsilon = \int_{\partial \mathbb{B}_\epsilon(p_i)} \frac{P(J\xi)}{\det (J\xi)} B_n = \frac{P(J\xi(p_i))}{\det (J\xi(p_i))}.$$

Luego,

$$\int_{M \setminus \cup \mathbb{B}_\epsilon(p_i)} P\left(\frac{i}{2\pi} \Omega \right) = \sum_i \frac{P(J\xi(p_i)}{\det (J\xi(p_i))}.$$

Ahora tomando el limite cuando ϵ tiende a 0, tenemos que,

$$\int_M P\left(\frac{i}{2\pi} \Omega \right) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{M \setminus \cup \mathbb{B}_\epsilon(p_i)} P\left(\frac{i}{2\pi} \Omega \right) = \sum_i \frac{P(J\xi(p_i)}{\det (J\xi(p_i))}.$$

Como

$$c^{\nu}(TM - L^*) = c_1^{\nu_1}(TM - L^*) \dots c_n^{\nu_n}(TM - L^*),$$

y prevalece (3), si $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ tal que $n = \nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n$, entonces

$$\int_M c^{\nu}(T'M - L^*) = \sum_{\{p:\xi(p)=0\}} \frac{C^{\nu}(J\xi(p))}{\det J\xi(p)}.$$

$\square$

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. Aplicaciones

En este capítulo daremos una pequeña introducción a foliaciones holomorfas las cuales nos permiten analizar variedades al descomponerlas en subvariedades de dimensión menor y una herramienta para estudiar dichas foliaciones es el teorema de Baum–Bott. Como ejemplo encontraremos el número de singularidades de una foliación de dimensión 1 sobre $\mathbb{P}^n$.

4.1.1. Foliaciones Holomorfas

Sea M una variedad compleja de dimensión $n \geq 2$.

Definición 4.1.1. *Una foliación holomorfa no singular de dimensión k(o codimensión $n-k$) en M, donde $1 \leq k \leq n-1$, esta dada por:*

(a) una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M;

(b) para cada $\alpha \in A$, tenemos un biholomorfismo $\Phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$, donde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ es un disco unitario en el origen;

(c) siempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\alpha\beta} : & \Phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) & \longrightarrow & \Phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \\ & (z, w) & \longmapsto & \Phi_\beta \circ \Phi_{\alpha^{-1}}(z, w) = (\varphi_1, \varphi_2) \end{array}$$

satisface que $\Phi_{\alpha\beta}(z, w) = (\varphi_1(z, w), \varphi_2(w))$.

Cada abierto U_α es llamado es llamado *abierto trivializador de la foliación*.

Por la propiedad (b) de una foliación tenemos que cada abierto U_α de nuestra cubierta, esta descompuesto en variedades de dimensión k de la forma

$$P_{w_0} = \Phi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}^k \times w_0),$$

donde $w_0 \in \mathbb{D}^{n-k}$, estas variedades de dimensión k son llamadas las *placas* de la foliación.

Por la propiedad (c), las placas se sobreponen en las intersecciones de los abiertos trivializadores de la siguiente forma: si $P_\alpha \subset U_\alpha$ y $P_\beta \subset U_\beta$ son placas, entonces $P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset$, o $P_\alpha \cap P_\beta = P_\alpha \cap U_\beta = P_\beta \cap U_\alpha$.

Definimos la siguiente relación de equivalencia en M:
$p \sim q$ si existen placas $P_1, \ldots, P_n$, con $p \in P_1$ y $q \in P_n$ tales que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n-1$.

La clase de equivalencia de $p \in M$ por esta relación es llamada *la hoja por* p. Cada hoja, con la topología generada por los abiertos de sus placas, posee estructura de variedad compleja de dimensión k inmersa en M.

Una foliación proporciona por lo tanto, una descomposición de la variedad en subvariedades inmersas en M de dimensión k, dos a dos disjuntas.

El *espacio tangente a la foliación* $\mathcal{F}$ en $p \in M$, denotado por $T_p\mathcal{F}$, esta definido como el espacio tangente, en el punto p, a la hoja que pasa por ese punto. Tiene, por lo tanto, dimensión k. Decimos que dos foliaciones son iguales, si todas sus hojas coinciden.

Proposición 4.1.2. *Una foliación puede ser definida por el siguiente conjunto:*

(a) una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abiertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, existe una submersión holomorfa $\Psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^{n-k}$;

(c) siempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tenemos una aplicación holomorfa

$$\Psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

que satisface $\Psi_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = \Psi_{\alpha\beta}\Psi_{\beta|U_{\alpha\beta}}$.

Ejemplo 4.1.3. *Sea v un campo de vectores holomorfos no singular en un abierto $U \subset M$, entonces el teorema del flujo tubular holomorfo implica que U posee una estructura de foliación holomorfa de dimensión 1. Observar* *que, si $\widetilde{U} \subset M$ es un abierto tal que $U \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$, entonces admite un campo de vectores no singular $\widetilde{v}$ que satisface $v_{|U\cap\widetilde{U}} = f\widetilde{v}_{|U\cap\widetilde{U}}$ para alguna función $f : U \cap \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorfa, entonces v y $\widetilde{v}$ inducen una misma foliación en $U \cap \widetilde{U}$. Tenemos así una foliación definida en $U \cap \widetilde{U}$. Recíprocamente, una foliación de dimensión 1 esta inducida localmente por campos de vectores no singulares. Basta tomar, en cada abierto trivializador U_α, el campo $v_\alpha = D(\Phi_\alpha^{-1})\partial/\partial z_1$, donde $(z_1, (z_2, \ldots, z_n))$ son las coordenadas de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}^{n-1}$. Notemos que, si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ para cada $p \in U_{\alpha\beta}$, entonces existe $f_{\alpha\beta}(p) \in \mathbb{C}^*$ tal que $v_\alpha(p) = f_{\alpha\beta}(p)v_\beta(p)$. La función $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ esta bien definida y es holomorfa.Por lo tanto, el siguiente conjunto de datos:*

(a) una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M por abiertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, existe un campo de vectores holomorfos no singular v_α en U_α;

(c) siempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tenemos una función holomorfa

$$f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

tal que $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_{\beta|U_{\alpha\beta}}$.

define una foliación de dimensión 1 en M.

Definición 4.1.4. *Una foliación holomorfa singular de dimensión k (o codimensión $n-k$), donde $1 \leq k \leq n-1$, en una variedad compleja M es una foliación no singular de dimensión k en $M \setminus S$, donde S es un conjunto analítico en M de codimensión mayor o igual que 2.*

Exigiremos, aún más, que el conjunto S de la definición de arriba sea minimal en el siguiente sentido: no existe subconjunto analítico $S' \subset S$ tal que la foliación regular en $M \setminus S$ se extiende a $M \setminus S'$. Bajo estas condiciones, S es llamado el conjunto singular de la foliación. El conjunto singular de la foliación $\mathcal{F}$ es denotado por $Sing(\mathcal{F})$. Los elementos de $Sing(\mathcal{F})$ son llamados puntos singulares o singularidades, en cuanto a los elementos de $M \setminus Sing(\mathcal{F})$ son llamados puntos regulares. Las hojas de $\mathcal{F}$ son, por definición, las hojas de la foliación regular $\mathcal{F}_{|M\setminus Sing(\mathcal{F})}$. Dos foliaciones singulares $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son iguales si:

(i) $Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}')$;

(ii) las foliaciones regulares $\mathcal{F}_{|M \setminus Sing(\mathcal{F})}$ y $\mathcal{F}'_{|M \setminus Sing(\mathcal{F}')}$ son iguales;

De ahora en adelante, usaremos el termino foliación para designar foliación holomorfa singular.

Teorema 4.1.5 (Teorema extensión de Levi). *Sea f una función meromorfa definida fuera de una variedad V de codimensi'on mayor que 1 sobre una variedad compleja M. Entonces f se extiende a una función meromorfa sobre M.*

Demostración. Véase [GH], página 396. □

Proposición 4.1.6. *Toda foliación de dimensión 1 es inducida por un campo de vectores holomorfo.*

Demostración. Una vez que el problema es local, podemos considerarlo en un polidisco $P \subset \mathbb{C}^n$. Sea $\mathcal{F}$ la foliación en P. $\mathcal{F}_{|P \setminus Sing(\mathcal{F})}$ es una foliación holomorfa no singular y de acuerdo con el ejemplo de arriba, existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $P \setminus Sing(\mathcal{F})$ y campos de vectores v_α en U_α induciendo $\mathcal{F}_{|U_\alpha}$, que satisface $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_{\beta|U_{\alpha\beta}}$ siempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, donde $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es holomorfa. Escribimos cada uno de esos campos en coordenadas locales: $v_\alpha = (v_1^\alpha, \ldots, v_n^\alpha)$. Dado que $P \setminus Sing(\mathcal{F})$ es conexo, podemos suponer que $v_n^\alpha \not\equiv 0$ para toda $\alpha \in A$. Para cada $\alpha \in A$,

$$g_1^{(\alpha)} = \frac{v_1^\alpha}{v_n^\alpha}, \ldots, g_{n-1}^{(\alpha)} = \frac{v_{n-1}^\alpha}{v_n^\alpha} \tag{*}$$

son funciones meromorfas en U_α. Si $U_{ab} \neq \emptyset$,es sabido que $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_{\beta|U_{\alpha\beta}}$, por lo cual tenemos que

$$g_1^{(\alpha)} = g_1^{(\beta)}, \ldots, g_{n-1}^{(\alpha)} = g_{n-1}^{(\beta)}.$$

Así que, las definiciones locales de (*) son compatibles y definen funciones meromorfas, $g_1, \ldots, g_{n-1}$ en $P \setminus Sing(\mathcal{F})$. Y ya que $Sing(\mathcal{F})$ tiene por lo menos codimensión 2, el teorema de extensión de Levi, nos permite extender $g_1, \ldots, g_{n-1}$ a funciones meromorfas en P, aún denotadas por $g_1, \ldots, g_{n-1}$. Sea h el mínimo común múltiplo de esos denominadores (en un polidisco, una función meromorfa es el cociente de funciones holomorfas ver [Gun]). El campo $v = (hg_1, \ldots, hg_{n-1})$ es holomorfo en P, su conjunto singular esta contenido en $Sing(\mathcal{F})$ e induce $\mathcal{F}$ en $M \setminus Sing(\mathcal{F})$. □

Sea $\mathcal{F}$ una foliación de dimensión 1 en una variedad compleja M. Sean U_α y $U_\beta \subset M$ abiertos, con $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, en los cuales $\mathcal{F}$ esta inducida por campos holomorfos v_α y v_β, respectivamente. Sabemos que existe $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \setminus Sing(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorfa la cual satisface que $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}\setminus Sing(McF)} = f_{\alpha\beta} v_{\beta|U_{\alpha\beta}\setminus Sing(McF)}$. Por el teorema de extensión de Hartog, extendemos $f_{\alpha\beta}$a una función holomorfa en $U_{\alpha\beta}$, aun detonada por $f_{\alpha\beta}$. Esta función no se anula. De hecho, si el conjunto de ceros, es diferente del vació, seria una variedad analítica de codimensión 1 enteramente contenida en $Sing(\mathcal{F})$, un conjunto analítico de codimensión por lo menos 2. Por fin, tenemos que $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_{\beta|U_{\alpha\beta}}$, una vez que esta relación es satisfecha en $U_{\alpha\beta} \setminus Sing(\mathcal{F})$.

Resulta de esto último que una foliación holomorfa de dimensión 1 en una variedad compleja M esta definida por el siguiente conjunto de datos:

(a) una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M por abiertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, existe un campo de vectores holomorfos v_α en U_α cuyo conjunto singular tiene codimensión mayor o igual a 2;

(c) siempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tenemos una función holomorfa

$$f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

tal que $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_{\beta|U_{\alpha\beta}}$.

Sea M una variedad compleja y $U \subset M$ abierto. Sea ω una 1-forma diferencial holomorfa en U tal que $Sing(\omega) = \{p \in U : \omega(p) = 0\}$ tiene codimensión mayor o igual que 2. Diremos que ω es integrable si existe una foliación $\mathcal{F}$ no singular de codimensión 1 en $U \setminus Sing(\omega)$ tal que $T_p\mathcal{F}$ coincide con el núcleo de $\omega(p)$ para todo $p \in U \setminus Sing(\omega)$. El teorema de Frobenius, dice que una 1-forma ω es integrable si, y solamente si, $\omega \wedge d\omega = 0$ (observemos que esta condición es trivialmente satisfecha si M tiene dimensión 2). Recíprocamente, siguiendo los mismos pasos de lo que hicimos para campos de vectores, mostraremos que toda foliación holomorfa de codimensión 1 esta inducida localmente por una 1-forma holomorfa integrable.

Sean $U, \widetilde{U} \subset M$ abiertos tales que $U \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$, ω y $\widetilde{\omega}$ 1-formas holomorfas en U y $\widetilde{U}$, respectivamente, ambas integrables y con conjunto singular de codimensión por lo menos 2. Supongamos que existe una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión 1 en $U \cup \widetilde{U}$ tal que $\mathcal{F}_{|U}$ y $\mathcal{F}_{|\widetilde{U}}$ son inducidas por ω y $\widetilde{\omega}$, respectivamente. Notemos que, si $p \in (U \cup \widetilde{U}) \setminus (Sing(\omega) \cup Sing(\widetilde{\omega}))$, entonces existe $g(p) \in \mathbb{C}^*$

tal que $\omega(p) = g(p)\widetilde{\omega}(p)$. La función $g : (U \cup \widetilde{U}) \setminus (Sing(\omega) \cup Sing(\widetilde{\omega})) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ así definida es holomorfa. Se extiende, por el teorema de Hartog, a una función holomorfa $g : U \cap \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $\omega = g\widetilde{\omega}$ en $U \cap \widetilde{U}$.

Resumiendo, una foliación de codimensión 1 en una variedad compleja M esta definida por el siguiente conjunto de datos:

(a) una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abiertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, existe una 1-forma integrable ω_α en U_α cuyo conjunto singular tiene codimensión mayor o igual a 2;

(c) siempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tenemos una función holomorfa

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

tal que $\omega_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta}\omega_{\beta|U_{\alpha\beta}}$.

Definición 4.1.7. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación de dimensión 1 en una variedad compleja M. Dado $p \in M$, la multiplicidad algebraica o simplemente la multiplicidad de $\mathcal{F}$ en p, denotada por $m_p(\mathcal{F})$, es la multiplicidad en p de algún campo holomorfo que induce $\mathcal{F}$ en un entorno de p.*

4.1.2. Aplicaciones a foliaciones en espacios proyectivos

Dada una foliación $\mathcal{F}$ de dimensión 1 sobre $\mathbb{P}^n$. Supongamos que $\mathcal{F}$ es de grado $d \geq 2$, la cual denotaremos por $\mathcal{F}^d$. Su haz tangente es $T_{\mathcal{F}} \cong \mathbb{L}(1-d)$. Supongamos que $Sing(\mathcal{F}^d)$, es un conjunto finito. Entonces podemos tomar un hiperplano en $\mathbb{P}^n$ que no es invariante por $\mathcal{F}^d$ y no contiene puntos de $Sing(\mathcal{F}^d)$, que denotaremos por H_∞. Entonces en $\mathbb{P}^n \setminus H_\infty$, $\mathcal{F}^d$ esta dada por un campo polinomial de la forma:

$$X = G\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + z_n\frac{\partial}{\partial z_n} + Q_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + Q_n\frac{\partial}{\partial z_n}\right),$$

donde $G \not\equiv 0$ es homogéneo de grado d y, Q_i son polinomios de grado $\leq d$. Supongamos que $\mathcal{F}^d$ es no degenerada, es decir el campo que la genera a la foliación es no degenerado.

Lema 4.1.8. *Sea $d \in \mathbb{Z}$ con $d \geq 2$, entonces tenemos que*

$$1 + d + d^2 + \cdots + d^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{n-j}(d-1)^j.$$

Demostración. Sabemos que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, entonces $\binom{n+1}{n-j} = \binom{n+1}{j+1}$.

Ahora por el teorema del binomio de Newton tenemos que

$$((d-1)+1)^n = \sum_{j=0}^{n}(d-1)^j 1^{n-j}\binom{n}{j}.$$

Por lo tanto,

$$1 + d + d^2 + \cdots + d^n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(d-1)^j,$$

agrupando con respecto a $(d-1)^j$,

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(d-1)^j = \sum_{j=0}^{n}(d-1)^j\left(\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\right).$$

Por otro lado sabemos que,

$$\left(\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\right) = \binom{n+1}{j+1}.$$

Por lo tanto,

$$1 + d + d^2 + \cdots + d^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{n-j} (d-1)^j.$$

$\square$

Proposición 4.1.9. *El número de singularidades de $\mathcal{F}^d$ es*

$$d^n + d^{n-1} + \cdots + d + 1.$$

Demostración. Sea X es el campo vectorial asociado a la foliación. Entonces, X tiene un polo de orden $d-1$ a lo largo del hiperplano H_∞, por lo cual sabemos que este induce una sección holomorfa de $T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \otimes \mathbb{L}(d-1)$, cuyos ceros son aislados y no degenerados.

Sabemos que $c_n(DX(p)) = \det DX(p)$. Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} - \mathbb{L}(1-d)) = \sum_{\{p \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} : X(p)=0\}} \frac{c_n(DX(p))}{\det DX(p)}$$

$$= \#\{p \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} : X(p) = 0\}.$$

Ahora solo basta hacer el calculo de la clase de Chern en el fibrado virtual $c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} - \mathbb{L}(1-d)) =$

$$\begin{aligned}
&= c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) + c_{n-1}(T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})c_1(\mathbb{L}(d-1)) + \cdots + c_1(\mathbb{L}(d-1))^n \\
&= c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) + (d-1)c_{n-1}(T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})c_1(\mathbb{L}(1)) + \cdots + (d-1)c_1(\mathbb{L}(1))^n \\
&= c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) + (d-1)c_{n-1}(T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})h + \cdots + (d-1)^n h^n,
\end{aligned}$$

donde h es la clase hiperplana(ver [GH]).

Ahora $c_i(T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) = \binom{n+1}{i} h^i$, con lo cual tenemos que

$$c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} - \mathbb{L}(1-d)) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{n-j} (d-1)^j h^n, \text{ donde } \int_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} h^n = 1.$$

Por lo tanto,

$$\#\{p \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} : X(p) = 0\} = \int_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{n-j} (d-1)^j h^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{n-j} (d-1)^j \int_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} h^n \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{n-j} (d-1)^j \\
&= 1 + d + d^2 + \cdots + d^n.
\end{aligned}
$$

$\square$

Apéndice **A**

Apéndice

A.0.3. Teorema de Preparación de Weierstrass

Definición A.0.10. *Un* polinomio de Weierstrass *de grado $k > 0$ es un elemento $h \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$ de la forma*

$$h(z_n) = z_n^k + a_1 z_n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} z_n + a_k,$$

donde los a_j son gérmenes de funciones en $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$, que se anulan en 0; es decir, $a_j \in m_{0,n-1} \subset \mathcal{O}_{0,n-1}$ para $1 \leq j \leq k$.

Definición A.0.11. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$ un germen de funciones holomorfas. Se dice que f es regular de orden k si $f(0, \ldots, 0, z_n) = c_k z_n^k + \ldots$, con $c_k \neq 0$, es decir $f(0, \ldots, 0, z_n)$ tiene un cero de orden k en $0 \in \mathbb{C}$.*

Teorema A.0.12 (Teorema de División)**.** *Supongamos que $h \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$ es un polinomio de Weierstrass de orden k. Entonces, toda función $f \in \mathcal{O}_{0,n}$ puede ser escrita de manera única como*

$$f = gh + r,$$

,donde $g \in \mathcal{O}_{0,n}$ y $r \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$ es un polinomio en z_n de grado k. Más aún, si $f \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$, entonces $g \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$.

Demostración. Primero veamos la unicidad, supongamos que tenemos dos representaciones distintas, es decir $f = g_1 h + r_1 = g_2 h + r_2$, lo que implica que $r_1 - r_2 = h(g_2 - g_1)$. Para $w = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ consideramos la función $h_w(z_n) =$

$h(z_1, \ldots, z_n)$. Como h es un polinomio de Weierstrass, h_w en $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{n-1}$ tiene un cero de orden k, por lo tanto para cualquier w, tal que $0 < |w| << 1$ se tiene que h_w tiene k ceros cercas del cero, contando multiplicidades,lo que implica que $(r_1 - r_2)_w$ tiene un cero de al menos orden k cerca del cero, contradiciendo el hecho de que el grado de $r_1 - r_2$ es menor que k, por lo tanto $(r_1 - r_2)_w \equiv 0$ para todo w, lo que implica que $r_1 = r_2$ y $g_1 = g_2$.

Para ϵ_i con $i = 1, \ldots, n$ suficientemente pequeños podemos asumir que $h_w(\xi) \neq 0$ para cualquier $|\xi| = \epsilon_n$ y $|z_i| < \epsilon_i$ para $i = 1, \ldots, n-1$.

Ahora demostraremos la existencia de g y r. Definamos

$$g(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\epsilon_n} \frac{f_w(\xi) d\xi}{h_w(\xi) \cdot (\xi - z_n)}, \text{ donde } |z_n| < \epsilon_n$$

Ahora por el lema 1.1.4 que utilizamos para demostrar el teorema de Hartog tenemos que g es holomorfa.

Ahora solo falta ver que $r = f - gh \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$ es de grado menor que k.

$$r(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\epsilon_n} \frac{f_w(\xi) d\xi}{(\xi - z_n)} - h_w(z_n) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\epsilon_n} \frac{f_w(\xi) d\xi}{h_w(\xi) \cdot (\xi - z_n)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\epsilon_n} \frac{f_w(\xi) h_w(\xi) - h_w(z_n) f_w(\xi)}{h_w(\xi) \cdot (\xi - z_n)} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\epsilon_n} \frac{f_w(\xi)(h_w(\xi) - h_w(z_n))}{h_w(\xi) \cdot (\xi - z_n)} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\epsilon_n} \frac{f_w(\xi)}{h_w(\xi)} \cdot \left(\frac{(\xi^k - z_n^k) + \alpha_1(w)(\xi^{k-1} - z_n^{k-1}) + \ldots + \alpha_{k-1}(w)(\xi - z_n)}{(\xi - z_n)} \right) d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\epsilon_n} \frac{f_w(\xi)}{h_w(\xi)} \cdot \left(z_n^{k-1} \beta_1(\xi, w) + \ldots + z_n \beta_{k-1}(\xi, w) + \beta_k(\xi, w) \right) d\xi$$

$$= z_n^{k-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\epsilon_n} \frac{f_w(\xi)}{h_w(\xi)} \beta_1(\xi, w) d\xi + \ldots + z_n^1 \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\epsilon_n} \frac{f_w(\xi)}{h_w(\xi)} \beta_{d-1}(\xi, w) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\epsilon_n} \frac{f_w(\xi)}{h_w(\xi)} \beta_d(\xi, w) d\xi$$

Por lo tanto, r es un polinomio en z_n de grado menor que k cuyos coeficientes son funciones holomorfas en (ξ, w). $\square$

Teorema A.0.13 (Teorema de Preparación de Weierstrass)**.** *Supongamos que $f \in \mathcal{O}_{0,n}$ es regular de orden k en z_n. Entonces, existe un único polinomio de Weierstrass $h \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$ de grado k en z_n tal que $f = uh$, donde $u \in \mathcal{O}_{0,n}$ es una unidad.*

Demostración. Sea f una función regular de orden k y consideremos la función $H(z_1, \ldots, z_n) = z_n^k$. Por el teorema de división de Weierstrass, tenemos que existen únicos $g \in \mathcal{O}_{0,n}$ y $r \in \mathcal{O}_{0,n-1}[z_n]$ tales que $f = gH + r$. Luego,

$$f = gz_n^k + a_1 z_n^{k-1} + \ldots + a_{k-1}z_n + a_k, \text{ con } a_j \in \mathcal{O}_{0,n-1}, \forall j$$

Si $k = 0$, tenemos que $f \equiv a_0$, por lo tanto es unidad.

Si $k \geq 1$, tenemos que, $f(0) = 0$ implica que $a_k(0) = 0$. Por lo tanto, $a_k \in m_{0,n-1}$. Ahora, como $f^{(i)}(0) = 0$, tenemos que $a_i \in m_{0,n-1}$ para $i = 1, \ldots, k-1$. Además, $f(0, z_n) = g(0, z_n)z_n^k$; por lo tanto, $g(0, z_n)$ no es idénticamente 0, por lo tanto g es una unidad.

Supongamos que existen dos representaciones, es decir $f = u_1h_1 = u_2h_2$. Luego, $h_1 = u_1^{-1}u_2h_1$ y por lo tanto, $h_1 \in [h_2]$. Por lo tanto h es único. $\square$

Definición A.0.14. *Sea R un anillo conmutativo con unidad y B un grupo abeliano. B es un R–modulo si podemos definir una acción de R en B,*

$$R \times B \longrightarrow B$$

dada por:

$$(x, \alpha) \longmapsto x\alpha$$

tal que se cumplen las siguientes propiedades

$$\begin{cases} (x+y)\alpha & = & x\alpha + y\alpha \\ (xy)\alpha & = & x(y\alpha) \\ x(\alpha+\beta) & = & x\alpha + x\beta \\ 1.\alpha & = & \alpha \end{cases}$$

Se dice que B es finitamente generado *sobre R si existe un número finito de elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in B$ tales que cada elemento $\beta \in B$ se puede escribir como una combinación lineal de los α_j con coeficientes en R; es decir,*

$$\beta = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, \text{ donde } x_j \in R$$

.

Lema A.0.15 (Lema de Nakayama)**.** *Sea R un anillo conmutativo local, $\mathfrak{M} \subset R$, su ideal maximal y B un R-modulo. Supongamos que:*

(i) B es finitamente generado.

(ii) $B = \mathfrak{M}B = \{\sum_{i=1} x_i\alpha_i : x_i \in \mathfrak{M}, \alpha_i \in B\}$.

Entonces $B = \{0\}$.

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una R–base de B. Dado que $B = \mathfrak{M}B$, tenemos que para cada $1 \leq k \leq n$,

$$e_k = \sum_{i=1}^{m} x_i\alpha_i, \text{ con } x_i \in \mathfrak{M}, \alpha_i \in B.$$

Como $B = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle_R$, se tiene que $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}e_j$; esto implica que

$$e_k = \sum_{i=1}^{m} x_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}e_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_{ij}e_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_iy_{ij}\right)e_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} z_{kj}e_k, \text{ donde } z_{kj} = \sum_{i=1}^{m} x_iy_{ij} \in \mathfrak{M}.$$

Esto es equivalente a la igualdad $(I - Z)\, e = 0$, donde I es la matriz identidad de nxn y $Z = (z_{k,j})$, donde $1 \leq k, j \leq n, e = (e_1, \ldots, e_n)$.

Sabemos que $\mathfrak{M}$ es el conjunto de elementos no invertibles de R. Supongamos que $x \in \mathfrak{M}$ y que x es invertible, ya que $\mathfrak{M}$ es un ideal tenemos que $1 \in \mathfrak{M}$, por lo tanto $\mathfrak{M} = R$ contradiciendo el hecho de que $\mathfrak{M}$ es un ideal maximal. Si x no esta en $\mathfrak{M}$, entonces $U = \langle x\rangle_R \nsubseteq \mathfrak{M}$, lo que implica que $U = R$, ya que $R/\mathfrak{M}$ es un campo.

Ahora el determinante de la matriz $(I - Z)$ es de la forma $1 + x$, con $x \in \mathfrak{M}$. Por lo tanto $I - Z$ es invertible, lo que implica que la única solución del sistema $(I - Z)e = 0$, es $e = 0$, por lo tanto $B = \{0\}$.

□

Corolario A.0.16. *Sea B un R-modulo finitamente generado. Entonces, $B/\mathfrak{M}B$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $R/\mathfrak{M}$. Sea $p : B \longrightarrow B/\mathfrak{M}B$ la proyección sobre el cociente y $u_1, \ldots, u_n$ una base para $B/\mathfrak{M}B$. Sean elementos $e_1, \ldots, e_n \in B$ tales que $p(e_i) = u_i$. Entonces los elementos del conjunto $\{e_1 \ldots, e_n\}$ generan a B sobre R.*

Demostración. Supongamos que $B \neq \{0\}$.

Como B es un R-modulo finitamente generado, y $\mathfrak{M}B$ es un submódulo de B tenemos que $B/\mathfrak{M}B$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre R. Más aún $B/\mathfrak{M}B$ es un espacio vectorial sobre $R/\mathfrak{M}$, ya que $\mathfrak{M}$ y actúa en el cociente.

Sea $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \rangle$ una R-base de B. Dado $u \in B/\mathfrak{M}B$, existe $\beta \in B$ tal que $p(\beta) = u$, con $\beta = x_1\alpha_1 + \cdots + x_\ell\alpha_\ell$ lo que implica que $u = P(\beta) = \widetilde{x}_1 p(\alpha_1) + \cdots + \widetilde{x}_\ell p(\alpha_\ell)$, donde $\widetilde{x}_j$ es la clase de equivalencia de x_j en $R/\mathfrak{M}$. Por lo tanto, $\{p(\alpha_1), \dots, p(\alpha_\ell)\}$ es una base para $B/\mathfrak{M}B$ lo que implica que $\dim_{R/\mathfrak{M}}(B/\mathfrak{M}B) < \infty$.

Supongamos que $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ es una $R/\mathfrak{M}$ base de $B/\mathfrak{M}B$ y $e_1, \dots, e_n$ un conjunto de B tal que $p(e_i) = u_i$. Ahora consideremos el R submódulo A generado por $\{e_1 \dots, e_n\}$ y sea $C = B/A$ el submódulo cociente. Como B es finitamente generado, C también lo es.

Sea $\alpha \in B$, entonces $\alpha = x_1e_1 + \cdot 6s + x_ne_n + t$, donde $t \in \mathfrak{M}B$, por lo cual $p(\alpha) = \widetilde{x}_1 p(\alpha_1) + \cdots + \widetilde{x}_n p(\alpha_n)$, y como $B = A + \mathfrak{M}B$, tenemos que $C = B/A = (A + \mathfrak{M}B)/A = \mathfrak{M}(B/A) = \mathfrak{M}C$. Por el lema de Nakayama $C = \{0\}$, lo que implica que $B = A$. $\square$

Definición A.0.17. *Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ un germen de funciones holomorfas y B un $\mathcal{O}_{0,n}$-modulo. Entonces f induce un homomorfismo de anillos: el* ***pullback*** *f^* dado por $f^*h = h \circ f$*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{0,m} \times B & \longrightarrow & B \\ (h, \alpha) & \longmapsto & (h \circ f)\alpha \end{array}$$

la cual nos permite ver a B como un $\mathcal{O}_{0,m}$-modulo; de hecho, para ser más precisos, como un $f^*\mathcal{O}_{0,m}$-modulo.

Teorema A.0.18 (Teorema de Preparación)**.** *Consideremos un germen de función holomorfa $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ y sea B un $\mathcal{O}_{0,n}$-modulo finitamente generado. Entonces:*

B es un $f^*\mathcal{O}_{0,m}$-modulo finitamente generado si, y solamente si, el espacio $\mathbb{C}$-lineal $B/(f^*\mathfrak{M}_{0,m})B$ es de dimensión finita.

Demostración. Supongamos que B es finitamente generado como $f^*\mathcal{O}_{0,m}$-modulo. Entonces existen $e_1, \dots, e_k$ tales que $B = \langle e_1, \dots, e_k \rangle_{f^*\mathcal{O}_{0,m}}$.

Sea $u \in B/(f^*\mathfrak{M}_{0,m}B)$. Si $p : B \longrightarrow B/(f^*\mathfrak{M}_{0,m})B$ es la proyección natural, entonces $u = p(\alpha)$ para algún $\alpha \in B$, $\alpha = (h_1 \circ f)e_1 + \cdots + (h_k \circ f)e_k$, con $h_j \in \mathcal{O}_{0,m}$ y $h_j = c_j + H_j$, con $c_j \in \mathbb{C}$ y $H_j \in \mathfrak{M}_{0,m}$. Por lo tanto $h_j \circ f = c_j + \varphi$, con $\varphi \in f^*\mathfrak{M}_{0,m}$, lo que implica que $u = p(\alpha) = c_1 p(e_1) + \cdots + c_k p(e_k)$; i.e., $\langle p(e_1), \ldots, p(e_k) \rangle_{\mathbb{C}} = B/(f^*\mathfrak{M}_{0,m}B)$.

Ahora supongamos que $B/(f^*\mathfrak{M}_{0,m}B)$ es un espacio $\mathbb{C}$-lineal de dimensión finita. Analicemos los dos casos:

f es una submersión:

Supongamos que $n = m+1$ y $f : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ es la proyección $f(w,z) = z$. Notemos que $f^*\mathfrak{M}_{0,m} = \mathfrak{M}_{0,m}$ como subconjunto de $\mathfrak{M}_{0,m+1}$.

Sean $e_1, \ldots, e_k \in \mathfrak{B}$ tales que $\langle p(e_1), \ldots, p(e_k) \rangle_{\mathbb{C}} = B/(f^*\mathfrak{M}_{0,m}B)$, ahora como $f^*\mathfrak{M}_{0,m} \subset \mathfrak{M}_{0,m+1}$ existe una surjección natural

$$q : B/(f^*\mathfrak{M}_{0,m}B) \hookrightarrow B/(f^*\mathfrak{M}_{0,m+1}B)$$

$\{q(p(e_1)), \ldots, q(p(e_k))\}$ es un conjunto generador de $B/(f^*\mathfrak{M}_{0,m+1}B)$ y por el corolario anterior tenemos que $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle_{\mathcal{O}_{0,m+1}} = B$ (I)

Ahora demostraremos que para todo $\beta \in B$, β es de la forma $\sum_{j=1}^{k}(c_j e_j + h_j e_j)$, donde $c_j \in \mathbb{C}$ y $h_j \in \mathfrak{M}_{0,m}.\mathcal{O}_{0,m+1}$. (II)

Sea $\{p(e_1), \ldots, p(e_k)\}$ una base para $B/(f^*\mathfrak{M}_{0,m}B)$. Sea $\alpha \in B$, entonces $\alpha = c_1 e_1 + \cdots + c_k e_k + \widetilde{\beta}$ con $\widetilde{\beta} \in f^*\mathfrak{M}_{0,m}B$, $\widetilde{\beta} = \sum_{i=1}^{\ell} g_i \sigma_i$, donde $g_i \in \mathfrak{M}_{0,m}B$ y $\sigma_i \in B$.

Como $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle_{\mathcal{O}_{0,m+1}} = B$ tenemos que $\sigma_i = \sum_{s=1}^{k} \varphi_s e_s$ con $\varphi_s \in \mathcal{O}_{0,m+1}$, por lo tanto $\widetilde{\beta} = \sum_{i=1}^{\ell} g_i \sum_{s=1}^{k} \varphi_s e_s = \sum_{s=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{\ell} g_i \varphi_s \right) e_s$ definiendo $h_j = \sum_{i=1}^{\ell} g_i \varphi_i$ tenemos que lo que deseábamos.

Por (II) tenemos que para $we_i, i = 1, \ldots, k$, $we_i = \sum_{j=1}^{k}(c_{ij}e_j + h_{ij}e_j)$, donde $c_{ij} \in C$, $h_{ij} \in \mathfrak{M}_{0,m+1}.\mathcal{O}_{0,m+1}$.

Si (δ_{ij}) es la matriz identidad y $e = (e_1, \ldots, e_n)$, entonces $(w\delta_{ij} - c_{ij} - h_{ij})e = 0$.

Definamos (b_{ij}) como la matriz con entradas $b_{ij} = w\delta_{ij} - c_{ij} - h_{ij}$, y (B_{ij}) como la matriz transpuesta de la matriz de cofactores de (b_{ij}), lo que implica que

$$(B_{ij})(b_{ij}) = \det(b_{ij}) \cdot (\delta_{ij})$$

esto último por la regla de Cramer.

Definamos $P(w,z) = \det(b_{ij})$, por lo anterior tenemos que $P(w,z)e_i = 0$. Como $h_{ij} \in \mathfrak{M}_{0,m}.\mathcal{O}_{0,m+1}$, tenemos que $P(w,0) = \det(w\delta_{ij} - c_{ij})$ es un polinomio en w de orden $d \leq k$. Es decir $P(w,0) = u(w)w^d$, con $u(0) \neq 0$

y $P(z,w)$ es un polinomio regular de orden d en $(0,0)$. Por el teorema de Weierstrass $p = vH$, donde $v \in U^*(\mathcal{O}_{0,m+1})$ y $H \in \mathcal{O}_{0,m}[w]$.

Dado $\alpha \in B$ tenemos que $\alpha = \sum_{i=1}^{k}(c_i e_i - \rho_i e_i)$, donde $c_i \in \mathbb{C}$ y $\rho_i \in \mathfrak{M}_{0,m}.\mathcal{O}_{0,m+1}$, ahora por el teorema de división de Weierstrass tenemos que

$$\rho_i = q_i H + \sum_{j=1}^{d-1} R_{ij}(z_1, \ldots, z_m) w_j = \left(\frac{q_i}{v}\right)(vH) + \sum_{j=1}^{d-1} R_{ij}(z_1, \ldots, z_m) w_j$$

$$= \left(\frac{q_i}{v}\right) P + \sum_{j=1}^{d-1} R_{ij}(z_1, \ldots, z_m) w_j$$

Como $Pe_i = 0$, tenemos que $\rho_i e_i = \sum_{j=1}^{d-1} R_{ij}(z_1, \ldots, z_m) w^j e_i$, por lo tanto $\alpha = \sum_{i=1}^{k}(c_i e_i + \rho_i e_i) = \sum_{i=1}^{k}(c_i e_i + \sum_{j=0}^{d-1} R_{ij}(z_1, \ldots, z_m) w^j e_j)$, por lo cual B es generado por kd elementos

$$e_1, \ldots, e_k, we_1, \ldots, we_k, \ldots, w^{d-1}e_1, \ldots, w^{d-1}e_k$$

como un $\mathcal{O}_{0,m}$ modulo ya que $R_{ij} \in \mathcal{O}_{0,m}$.

f es una inmersión:

Sea $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ un germen de funciones holomorfas de rango n. Por el teorema del rango existe un cambio de coordenadas tales que $f : (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$. Además cualquier germen de funciones $g : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$, puedes ser extendido de manera holomorfa a $(\mathbb{C}^m, 0)$, definiendo $g(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_m) = g(z_1, \ldots, z_n)$. Lo que implica que $f^* : \mathcal{O}_{0,m} \longrightarrow \mathcal{O}_{0,n}$ es una suprayección. Y dado que $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle_{\mathcal{O}_{0,n}} = B$, entonces $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle_{f^*\mathcal{O}_{0,m}} = B$.

Caso General

Dada

$$F : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \times (\mathbb{C}^m, 0)$$

definida por

$$\zeta \longmapsto (\zeta, f(\zeta))$$

Definamos $\pi_i : \mathbb{C}^i \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^{i-1} \times \mathbb{C}^m$ la proyección definida por $\pi_i(z_1, \ldots, z_i, w) = (z_2, \ldots, z_i, w)$, por lo tanto $f = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \ldots \circ \pi_n \circ F$. Por lo tanto F es una inmersión, lo que implica que B es finitamente generado como $\mathcal{O}_{(0,0),n\times m}$ modulo.

Ahora supongamos que $B/(f^*\mathfrak{M}_{0,m}B)$ es un espacio $\mathbb{C}$-lineal de dimensión finita. Como podemos considerar a $\mathfrak{M}_{0,m} \subset \mathfrak{M}_{(0,0),(n-1)\times m}$, tenemos que

$$B/\mathfrak{M}_{0,m}B \hookrightarrow B/\mathfrak{M}_{(0,0),(n-1)\times m}B$$

es suprayección de un espacio vectorial de dimensión finita, lo que implica que $B/\mathfrak{M}_{(0,0),(n-1)\times m}B$ es de dimensión finita.

Como π_n es una submersión, tenemos que B es finitamente generado como $\mathcal{O}_{(0,0),(n-1)\times m}$ modulo.

Ahora notemos que

$$\pi_{n-1}^* : \mathcal{O}_{(0,0),(n-2)\times m} \longrightarrow \pi_{n-1}^* : \mathcal{O}_{(0,0),(n-1)\times m}$$

y aplicando lo mismo que en el caso de submersión tenemos que B es finitamente generado como un $\mathcal{O}_{(0,0),(n-2)\times m}$ modulo, siguiendo este razonamiento sucesivamente llegamos a que B es finitamente generado como $\mathcal{O}_{0,m}$ modulo. $\square$

Lema A.0.19. *Sea* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ *un germen de función holomorfa de multiplicidad finita* μ *en 0. Existen vecindades de* $0, U$ *en el dominio y* V *en el contradominio, tales que todos los gérmenes que aparecen en la preparación de todos los polinomios están definidos en* U *y* V*.*

Demostración. Consideremos la colección finita de funciones $1, z_k$ y e_j con $1 \leq k \leq n$, y $1 \leq j \leq \mu$. Escribimos cada una como $f^*(h_1(w))e_1(z) + \cdots + f^*(h_\mu(w))e_\mu(z)$. Sea V un abierto en el codominio tal que los h_ℓ que aparecen en la demostración del teorema de preparación de esta colección estan bien definidos.

Sea $U \subset f^{-1}(V) \subset \mathbb{C}^n$ una vecindad de 0 tal que los e_j están bien definidas.

Ahora supongamos que $\deg(P) = 0$, entonces tenemos que $P = c \cdot 1$, con $c \in \mathbb{C}$. Cualquier polinomio de $\deg(p) = d$ es tal que $P(z) = \sum_j z_j Q_j + c$, con $\deg(Q_j) < d$. Asumiendo que el lema permanece para Q_j también lo hace para $z_j Q_j$ y por lo tanto para P. $\square$

Bibliografía

[AM] M. Atiyah & I. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, London, 1969.

[Bot] R. Bott, *Vector Fields and characteristic numbers*, Mich. Math. J. 14 (1967), 231-244.

[Bru] M. Brunella, *Birrational geometry of foliations, First Latin American Congress of Mathematicians*, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[BB 1] P. Baum & R. Bott, *On the zeros of meromorphic vector Fields, Essays on Topology and Related Topics*. Springer-Verlag, New York, 1970, 29-47.

[BB 2] P. Baum & R. Bott, *Singularities of holomorphic foliations*, J. Diff. Geom. 7(1972), 279-342.

[Cal] Omegar Calvo Andrade *El espacio de foliaciones holomorfas de codimensión uno*. Tordesillas 2003.

[Car] Do Carmo, Manfredo *Differential Geometry Of Curves And Surfaces*. Alianza , año.

[Che] S.S. Chern, *Meromorphic vector fields and characteristic numbers, Selected Papers*. Springer–Verlag, New York, 1978, 435-443.

[Eis] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Gom] Gomez-Mont, Xavier *Sistemas Dinamicos Holmorfos en Superficies.* Editorial, año.

[Gun] R. Gunning, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton University Press, Princeton, 1966.

[GH] Phillip Griffiths & Joseph Harris. *Priciples of Algebraic Geometry.* Harvard University John Wiley & Sons, 1978.

[Hum] Daniel Huybrechts *Complex Geometry An Introduction.* Springer-Verlag, New York, 2004.

[Law] Lawson, H. Blaine *The Quantitative Theory of Foliations.* Editorial, año.

[Sor 2] Márcio G. Soares *Lectures on Point Residues.*Belo Horizonte, 2002.

[Spi] Michael Spivak *Cálculo en Variedades.* Revertė, S. A., 1988.

[SM 1] Márcio G. Soares & Rogério S. Mol, *Indices de Campos Holomorfos y Aplicaciones.* Belo Horizonte, 2001.