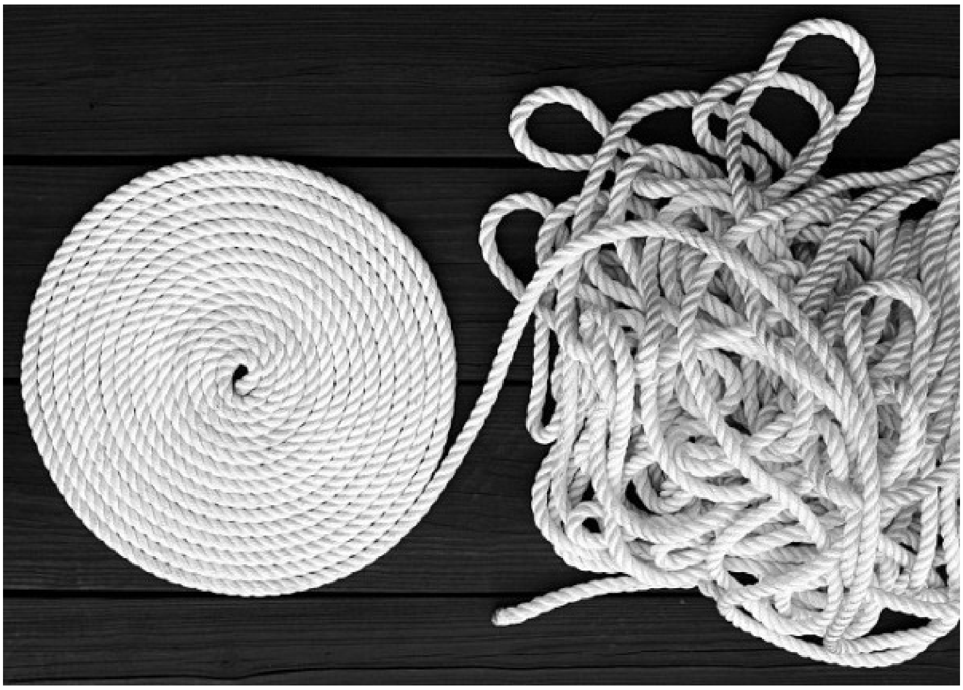
Fra harmoni til kaos



Prosjektoppgave FYS2130

Vår 2018

Innleveringsfrist:

Mandag, 07/05 - 2018, 09:00 CEST

L. B. N. Clausen

Om prosjektet og rapporten

Vi ønsker at arbeidet med prosjektoppgaven gir deg økt forståelse og innsikt i et fenomen som ligger innenfor kursets pensum. Nedover finner du mer informasjon om prosjektrapporten.

- Dine besvarelser av oppgavene skal samles i en rapport. Rapporten må skrives i en tekstbehandler (Word, LaTeX, etc.) og innleveringen skal skje i form av **en eneste PDF-fil**.
- Du kan skrive rapporten på norsk, svensk, dansk, eller engelsk.
- Innleveringen skal skje som elektronisk innlevering i **Devilry**.
- **Kandidatnummer** (og ikke navn) skal skrives på besvarelsen.
- Programmeringen skal skje i Python eller Matlab.
- Dataprogrammene skal legges ved rapporten som et appendiks. Iblant vil vi kjøre koden din etter å ha klippet den ut fra PDF-filen – derfor hjelper du oss ved å ikke bruke linjenummerering.
- Vi ønsker at du leverer kode som løser hver enkelt oppgave. Du kan allikevel gjenbruke kode ved å legge noe kode som felleskode (typisk funksjoner og klasser), og legge inn kode for hver oppgave som bruker felleskoden (kaller på funksjoner, instansierer objekter).
- Vi ønsker at rapporten ikke har mer enn 20 sider (uten appendiks). Det er mulig at du får trekk i poeng hvis rapporten din er for lang.
- Samarbeid med andre, både i programmering og ved skriving av deler av teksten, er fullt ut lovlig, men det skal gå fram av rapporten. Alle som samarbeider gjør rede for hvilke deler i rapporten man faktisk har samarbeidet om, og med hvilken person (kun kandidatnummer). Alle må levere sin egen rapport, og ingen rapporter må være 100% lik med andres.
- Vær nøyaktig med figurene! Alle figurene skal ha tekst langs aksene (tenk også på enheter) og må beskrives i teksten, samt ha figurtekst. Figurer og bilder skal utformes slik at de er optimale for den størrelsen figuren får i den endelige publikasjonen. Det betyr bl.a. at tekst langs akser bør være omtrent av samme størrelse som teksten i resten av dokumentet.
- **Husk å sjekke kurswebsidene for nye beskjeder minst to ganger per dag mens du jobber med prosjektoppgaven. Det kan skje at det blir noen endringer i prosjektoppgaveteksten og/eller endringer i det praktiske opplegget i løpet av uka.**

Veiledning og hjelp

Vi tilbyr utstrakt hjelp under prosjektuka. Vi har gruppelærere på Datalaboratorium (V329) i fysikkbygningen for

- Mandag, 30/04, kl 09-13
- Onsdag, 02/05, kl 12-16
- Torsdag, 03/05, kl 09-12
- Fredag, 04/05, kl 09-12

Datalaboratorium er tilgjengelig mesteparten av uka, unntatt når det foregår annen undervisning. Vi henger oppslag på døra. Når V329 er opptatt kan man for eksempel være i Entropia.

Prosjektoppgaven består av flere relaterte deler. Dersom du stanger hodet mot veggen i en av disse delene og veiledning ikke er tilgjengelig, anbefaler vi at du tar tak i en annen del eller jobber med analyse, figurer eller tekst, inntil du får tak i veiledning. Det er vanligvis ikke lurt å streve med enkeltdetaljer i timevis før du søker hjelp!

Poenggiving

Ved bedømming av prosjektoppgaven vil de ulike delene gi poeng som angitt nedenfor. Vi tar forbehold om endringer dersom det framkommer spesielle momenter ved rettingen som vi ikke hadde tenkt på på forhånd.

Oppgave	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Poeng	20	15	25	25	15	20	30	10	20

	Språk	**Figurer**	**Layout**
Poeng	10	30	10

Totalt vil det være mulig å få 230 poeng.

Man må bestå prosjektoppgaven for å kunne bestå kurset. Grensen for stryk vil vi først sette når vi ser på alle rapportene samlet. I prinsippet ligger grensen for stryk på om lag 40% av max, det vil si 92 poeng.

Lykke til!

Oppgave 1 (20 poeng)

Skriv et program som bruker Runge-Kutta 4 (RK4) for å løse differensialligningen for en fri harmonisk oscillator

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0.$$

Skriv RK4-funksjonen selv – bruk gjerne malen gitt i Kapittel 4 av pensumboka. Lag en figur som viser systemets bane (trajektorie) i faserommet for en masse $m = 500$ g og en fjærkonstant $k = 1$ N/m. Løs differensialligningen for 20 s med et tidssteg på $\Delta t = 10^{-2}$ s og initialbetingelser $x(0) = 1$ m og $\dot{x}(0) = 0$ m/s.
Gjennom å bruke forskjellige initialverdier for posisjonen $x(0)$ og hastigheten $\dot{x}(0)$, er det mulig å generere en bane i faserommet som ikke er en ellipse? Se på totalenergien for å begrunne ditt svar.
Forklar med fysikaliske argumenter hvorfor banen i faserommet altid står vinkelrett på x og y aksen!
Beveger systemet seg i faserommet med eller mot klokken? Gjennom å bruke forskjellige initialverdier for posisjonen $x(0)$ og hastigheten $\dot{x}(0)$, er det mulig å generere en bane i faserommet som går i motsatt retning? Forklar svaret!

Oppgave 2 (15 poeng)

Inkluder dempning i programmet for oppgave 1. Bruk en dempningkonstant $b = 0.1$ kg/s og diskuter banen i faserommet.
Står banen fortsatt loddrett på begge aksene? Begrunn svaret!
Hvorfor betegnes punktet $x = 0$ m og $\dot{x} = 0$ m/s som en attraktor? Hva er dimensjonen til attraktoren? Er kurven fra oppgave 1 også en attraktor?

Oppgave 3 (25 poeng)

For oscillatoren brukt i oppgave 1, inkluder en påtrykt kraft på formen $F(t) = F_D \cos(\omega_D t)$. Løs differensialligningen

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

for $x(t)$ med $x(0) = 2$ m og $\dot{x}(0) = 0$ m/s analytisk, dvs ikke numerisk. Skriv løsningen for $x(t)$ delvis som et produkt av to cosinus- eller sinusfunksjoner. Hvordan kan vi tolke en sånn løsning?

Oppgave 4 (25 poeng)

Løs nå differensialligningen fra oppgave 3 numerisk for $F_D = 0.7$ N og $\omega_D = 13/8\omega_0$, hvor ω_0 er svingefrekvensen til den frie harmoniske oscillatoren. Bruk initialbetingelsene $x(0) = 2$ m og $\dot{x}(0) = 0$ m/s. Studer bevegelsen i faserommet for 200 s. (Det numeriske resultatet burde være det samme som det analytiske!) Er bevegelsen periodisk? Bytt ut drivefrekvensen med $\omega_D = 2/(\sqrt{5} - 1)\omega_0$ – er bevegelen fortsatt periodisk? Kan du begrunne svaret?

Oppgave 5 (15 poeng)

Inkluder dempning i differensialligningen fra oppgave 3. Vis faseromsbane for de første 100 s for $b = 0.1$ kg/s. Prøv forskjellige initialbetingelser. Diskuter likheter og forskjeller fra banen i oppgave 2 og oppgave 4.

Oppgave 6 (20 poeng)

Modifisier differensialligningen fra oppgave 1 slik at du kan modellere en dråpe som henger i en vannkran. Overflatespenningen fra vannet gir den tilbakeforende kraften og friksjonen mellom kranen og vannet gir dempning. Videre lekker kranen slik at massen til dråpen øker med en rate ψ. Differensialligningssystemet blir da

$$m(t)\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = -m(t)g \tag{O.1}$$

$$\dot{m}(t) = \psi, \tag{O.2}$$

hvor g er tyngdeakselerasjonen $g = 9.81$ m/s^2. Bruk videre $\Delta t = 10^{-4}$ s, $x(0) = 0.001$ m, $\dot{x}(0) = 0.001$ m/s, $m(0) = 0.00001$ kg, $k = 0.475$ N/m, $b = 0.001$ kg/s, og masseøkningsraten $\psi = 0.00055$ kg/s. Bekriv bevegelsen i de første 3 s. Er bevegelsen realistisk?

Oppgave 7 (30 poeng)

Nå skal vi simulere en vannkran som drypper. Vi bruker differensialligningene fra oppgave 6 og modifisierer dem slik at hver gång dråpen beveger seg forbi en kritisk avstand x_c, mister den en del av massen Δm (som faller ned som en dråpe). Vi bruker $x_c = 0.0025$ m og

$$\Delta m = \alpha x(t_c)\dot{x}(t_c)$$

med $\alpha = 50$ s/m og t_c er tidpunktet når posisjonen passerer x_c, dvs $x(t_c) = x_c$.

Det er enklest å forandre programmet fra oppgave 6 slik at det etter hver integrasjon av bevegelsesligningene sjekker om $x(t_c) > x_c$. Hvis $x(t_c) <= x_c$, fortsetter programmet som vanlig. Hvis $x(t_c) > x_c$, reduseres massen med Δm beregnet fra den nåvarende posisjonen og hastigheten (husk å passe på at massen ikke blir null eller negativ!). Etterpå reduseres også posisjonen (posisjonen forandrer seg siden en del av dråpen nettopp falt ned) med

$$\Delta x = \sqrt[3]{\frac{3(\Delta m)^4}{4\pi \rho m(t_c)^3}}.$$

ρ er massetettheten av vann som vi kan anta som 1000 kg/m^3. Etter at m og x er oppdatert, fortsett å integrere bevegelsesligningen til kriteriet $x(t) > x_c$ igjen er oppfylt, og en ny dråpe faller av.

For $\Delta t = 10^{-4}$, $x(0) = 0.001$ m, $\dot{x}(0) = 0.001$ m/s, og $m(0) = 0.00001$ kg beskriv bevegelsen (også i faserommet) gjennom de første 20 s. Sjekk tiden mellom to dråper - er den konstant?

Varierer initialbetingelsene (innenfor fornuftige rammer). Beskriv bevelgelsen. Er tiden mellom to påfølgende dråper konstant? Sammenlign oppførselen til dette systemet i faserommet med systemene fra oppgave 2 og oppgave 4.

Oppgave 8 (10 poeng)

Hold initialbetingelsene konstant ($x(0) = 0.001$ m, $\dot{x}(0) = 0.001$ m/s, $m(0) = 0.00001$ kg), men varier nå masseøkningsraten ψ mellom 0.00055 kg/s og 0.00075 kg/s. Hva skjer når $\psi = 0.00060$ kg/s, $\psi = 0.00063$ kg/s, $\psi = 0.00065$ kg/s, $\psi = 0.00073$ kg/s?

Integrer bevegelsesligningene for 20 s for 100 forskjellige ψ mellom 0.00055 kg/s og 0.00075 kg/s, og lagre tidene mellom de 50 siste dråpene. Plot så alle 50 tidsverdier mot ψ. Beskriv resultatet. Har du sett en lignende figur i en annen sammenheng?

Oppgave 9 (20 poeng)

Bruk en relevant søkemotor til å finne én eller flere vitenskapelige artikler som beskriver fenomenet du har studert i denne oppgaven (dryppende vannkran). Finn gjerne både artikler fra eksperimentelle studier og fra modellstudier (eller kombinerte). Pek på resultater i disse artiklene som ligner på det du har sett i arbeidet med denne prosjektoppgaven. Husk å sitere og referere disse artiklene på riktig måte. (I denne oppgaven krever vi ikke en omfattende sammenligning. Med *pek på* mener vi for eksempel "Jeg ser at oppførselen til mitt system i faserommet som vist i figur N har egenskaper som ligner på dem i figur 3 i (Nordmann & Nordmann, 2018) fordi formen på banen i faserommet i begge tilfeller ser ut som en nisselue.")