MEK1100 - Oblig 1

Hans-Petter Harveg

Februar 2018

Oppgaver

Oppgave 1

a)

Vi har at:

$$x(t) = v_0 t \cos\theta$$
$$y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Og skal finne t_m og x_m:

$$v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$t(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t) = 0$$

Så får vi at:

$$t = 0 \quad \text{og} \quad v_0 \sin\theta - \tfrac{1}{2} g t = 0$$

Som da er tiden i start og stop. Løser vi så for t får vi:

$$\frac{1}{2} g t = v_0 \sin\theta$$

$$t_m = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

Dette setter vi inn i x som gir oss:

$$x_m = x(t_m)$$
$$= v_0(\frac{2v_0 \sin\theta}{g}) \cos\theta$$
$$= \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$
$$= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

b)

Vi skal så innføre dimensjonsløse variable. I og med at det ikke står noe om høyden går jeg ut fra at vi også her skal bruke x_m.

$$x^* = \frac{x}{x_m}$$
$$= \frac{v_0 t \cos\theta}{\frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}}$$
$$= \frac{v_0 t \cos\theta g}{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}$$
$$= \frac{gt}{2v_0 \sin\theta}$$

$$t^* = \frac{t}{t_m}$$
$$= \frac{t}{\frac{2v_0 \sin\theta}{g}}$$
$$= \frac{gt}{2v_0 \sin\theta}$$
$$= x^*$$

Vi ser at $t^* = x^*$.

For y^* får vi:

$$
\begin{aligned}
y^* = \frac{y}{x_m} &= \frac{v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2}{\frac{v_0^2 2\sin\theta\cos\theta}{g}} \\
&= \frac{v_0 t \sin\theta}{\frac{v_0^2 2\sin\theta\cos\theta}{g}} - \frac{\frac{1}{2}gt^2}{\frac{v_0^2 2\sin\theta\cos\theta}{g}} \\
&= \frac{v_0 x^* \sin\theta}{v_0\cos\theta} - \frac{\frac{1}{2}gtx^*}{v_0\cos\theta} \\
&= x^*\tan\theta - \frac{gtx^*}{2v_0\cos\theta} \\
&= x^*\tan\theta - \frac{x^* 2v_0\sin\theta x^*}{2v_0\cos\theta} \\
&= x^*\tan\theta - x^{*2}\tan\theta \\
&= (x^* - x^{*2})\tan\theta
\end{aligned}
$$

Grunnen til at vi ikke trenger å skalere vinkelen θ er fordi det er et forholdstall og alt skalert for alle størrelser.

c)

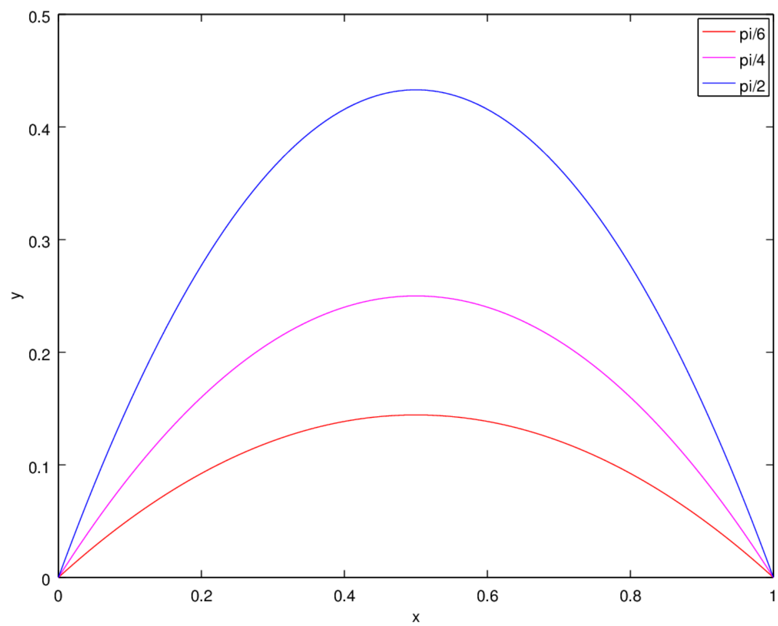
I denne oppgaven har jeg skrevet en MATLAB-funksjon.

```
function [x, y] = Problem1c(a, b, theta)
    x = linspace(a, b, 100);
    y = (x - x.^2)*tan(theta);
end
```

```
% Plot 1:
[x, y] = Problem1c(0, 1, pi/6);
plot(x, y, '-r');

hold on

% Plot 2:
[x, y] = Problem1c(0, 1, pi/4);
plot(x, y, '--m');

```

```
hold on

% Plot 3:
[x, y] = Problem1c(0, 1, pi/3);
plt = plot(x, y, '-b');

% Setup plot window:
legend('\pi/6','\pi/4','\pi/3');
xlabel('x');
ylabel('y');

axis([0 1, 0, 0.5]);
```

Plottet til dette scriptet ser ut som følger:



Oppgave 2

a)

Om vi betegner et vektorelement i tangetretning av strømlinjen med
$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ må vektorene $d\vec{r}$ og$\vec{v}$ være parallelle og kan uttrykkes ved:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0$$

Av dette får vi:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} v_y & 0 \\ dy & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} v_x & 0 \\ v_x & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ dx & dy \end{vmatrix} \vec{k} = (v_x dy - v_y dx)\vec{k} = 0$$

Som viser at vi kan skrive:

$$v_x dy = v_y dx$$

Og for vårt uttrykk får vi da:

$$xy\ dy = y\ dx$$

$$\int dy = \int \frac{1}{x}\ dx$$

$$y = \ln x + C$$

Som viser at $x \neq 0$

Ser vi på på komponenene til $\vec{v} \times d\vec{r}$:

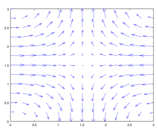
$$v_y \cdot 0 - 0 \cdot dy = 0$$

$$v_x \cdot 0 - 0 \cdot dx = 0$$

Den første ligningen impliserer at $y = 0$ eller $y = konstant$. Den andre at $x = 0$, $y = 0$ eller at $y = konstant$. Når $y = 0$ får vi x-aksen som løsning.

b)

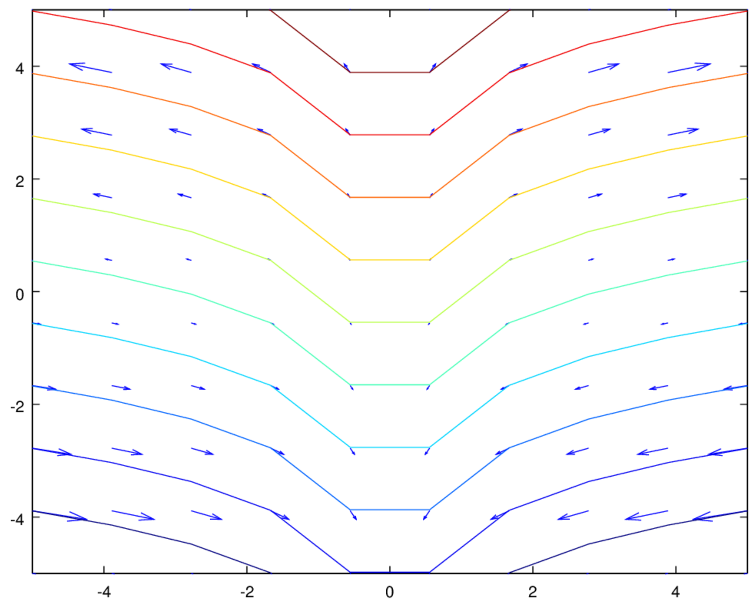
Vi finner stagnasjonspunkter når $\vec{v} = 0$. Fordi $x = 0$ ikke kan være en løsning for y, vil vi finne stagnasjonspunktene når $y = 0$. Dette betyr at hele x-aksen er stagnasjonspunkter. Beklager for en *særdeles* stygg tegning:



Koden min ser ut som følger:

```
x = linspace(-5, 5, 10);
y = linspace(-5, 5, 10);

[x, y] = meshgrid(x,y);

u = x.*y;
v = y;

plt = figure;

quiver(x, y, u, v, 0.7);
hold on;

c = y - log(abs(x));

contour(x, y, c);

saveas(plt, 'Problem2b.png');
```

Den gir plottet:



c)

Strømfunksjonen $\psi(x,y)$ har egenskapen at:

$$v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad og \quad v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Vi får da:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = -xy \quad \Rightarrow \quad \psi = -\frac{1}{2}xy^2 + g(x)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = y \quad \Rightarrow \quad \psi = xy + f(x)$$

Deriverer vi to ganger får vi:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\psi}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(-xy) = -y$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial\psi}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(y) = 1$$

Vi ser at de dobbelderiverte av ψ ikke er en konstant som betyr at det ikke finnes noen strømfunksjon.

Oppgave 3

a)

I denne oppgaven har vi at et hastighetsfelt i xy-planet git ved = u + v der:

$$u = \cos x \sin y \quad og \quad v = -\sin x \cos y$$

Divergens er definert ved:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Vi har at:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x \sin y$$

Og får dermed:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sin x \sin y - \sin x \sin y = \underline{\underline{0}}$$

Vrivling er definert ved:

$$\nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ v & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ u & v \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ u & v \end{vmatrix} \vec{k} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Vi har at:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \cos y$$

Og får dermed:

$$\nabla \times \vec{v} = (-\cos x \cos y - \cos x \cos y)\vec{k} = \underline{\underline{(-2\cos x \cos y)\vec{k}}}$$

b)

Vi har at:

$$\vec{v}(x, y) = v\vec{i} + v\vec{j}$$

$$= \cos x \sin y \vec{i} + (-\sin x \cos y)\vec{j}$$

$$= \cos x \sin y \vec{i} - \sin x \cos y \vec{j}$$

For x-aksen får vi:

$$\vec{v}(x, 0) = \cos x \sin 0 \vec{i} - \sin x \cos 0 \vec{j}$$

$$= -\sin x \vec{j}$$

For y-aksen får vi:

$$\vec{v}(0, y) = \cos 0 \sin y \vec{i} - \sin 0 \cos y \vec{j}$$

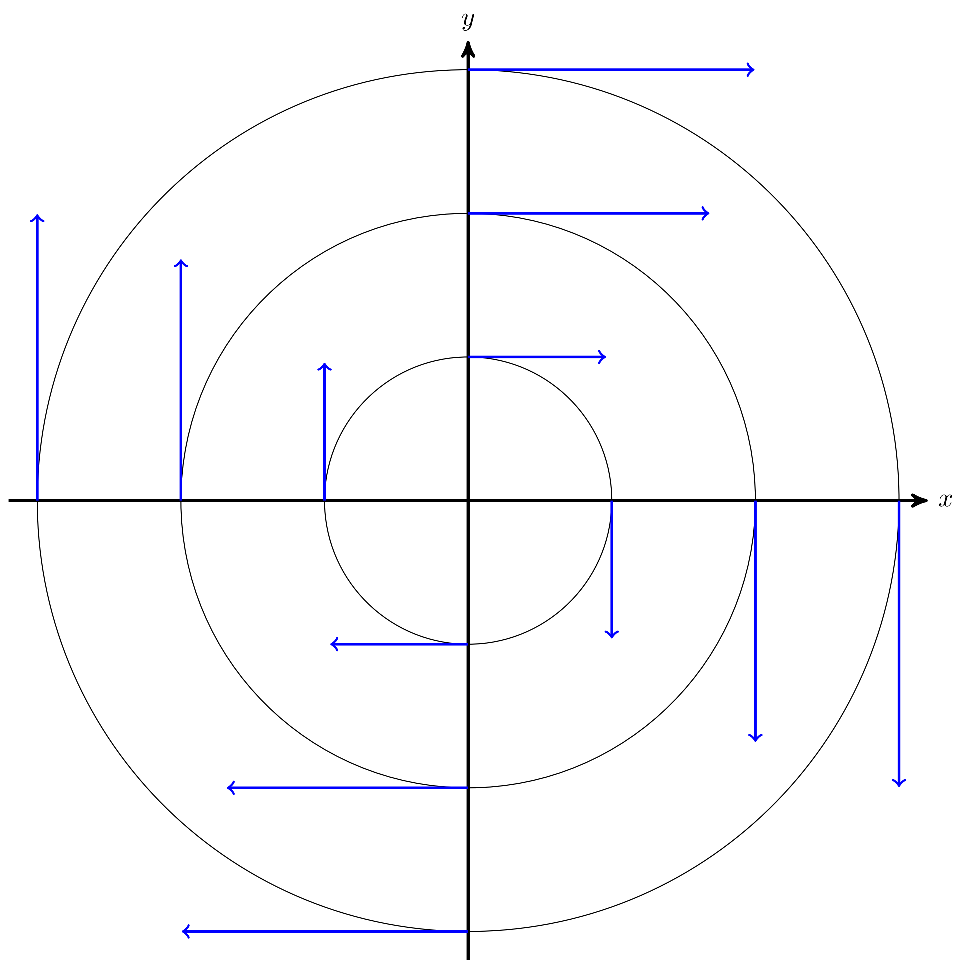
$$= \sin y \vec{j}$$

Størmvektorer langs x-aksen:

$x = -1.5 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 0.997$
$x = -1.0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 0.84$
$x = -0.5 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 0.48$
$x = \ -0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 0$
$x = \ 0.5 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = -0.48$
$x = \ 1.0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = -0.84$
$x = \ 1.5 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = -0.997$

Størmvektorer langs y-aksen:

$y = -1.5 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = -0.997$
$y = -1.0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = -0.84$
$y = -0.5 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = -0.48$
$y = \ -0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 0$
$y = \ 0.5 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 0.48$
$y = \ 1.0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 0.84$
$y = \ 1.5 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 0.997$



c)

Vi funner sirkulasjonen om randa ved linjeintegralene til kvadratet. Vi kan dele opp i fire sider og regne de ut integralene hver for seg for så å legge de sammen:

$$
\begin{aligned}
i_1 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}\left(x, -\frac{\pi}{2}\right)\, dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(-\frac{\pi}{2})\, dx \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx \\
&= -\Big[\sin(x)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\Big[\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})\Big] \\
&= -\Big[1 - (-1)\Big] \\
&= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_2 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \vec{v}\left(x, \frac{\pi}{2}\right)\, dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(\frac{\pi}{2})\, dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx \\
&= \Big[\sin(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \\
&= \Big[\sin(-\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2})\Big] \\
&= \Big[-1 - 1\Big] \\
&= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
j_1 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}\Big(\frac{\pi}{2}, y\Big)\ dy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(\frac{\pi}{2})\cos(y))\ dy \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\ dy \\
&= -\Big[\sin(y)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\Big[\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})\Big] \\
&= -\Big[1-(-1)\Big] \\
&= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
j_2 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \vec{v}\Big(-\frac{\pi}{2}, y\Big)\ dy \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (-\sin(-\frac{\pi}{2})\cos(y))\ dy \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos(y)\ dy \\
&= \Big[\sin(y)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \\
&= \Big[\sin(-\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2})\Big] \\
&= \Big[-1-1\Big] \\
&= -2
\end{aligned}
$$

Dermed får vi at sirkulasjonen om randa blir:

$$i_1 + i_2 + j_1 + j_2 = -2 + (-2) + (-2) + (-2) = \underline{\underline{-8}}$$

d)

Fra a) vet vi at $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ som betyr at det eksisterer en strømfunksjon $\psi(x,y)$

Vi har at:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = -u = -\cos(x)\sin(y) \Rightarrow \psi = \cos(x)\cos(y) + f(x)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = v = -\sin(x)\cos(y) \Rightarrow \psi = \cos(x)\cos(y) + g(y)$$

For å få en entydig løsning på ψ må $f(x) = g(y) = 0$ og dermed er:

$$\psi = \cos(x)\cos(y)$$

e)

Først regner vi ut de paritielderiverte til ψ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sin(x)\cos(y) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\cos x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\cos x \cos y \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\cos x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \sin x \sin y$$

Taylorutviklingen av annen orden for ψ er definert ved:

$$\psi(x,y)_{(0,0)} \approx \psi(0,0) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{0,0}(x-0) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{0,0}(y-0)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_{0,0}(x-0)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)_{0,0}(y-0)^2$$

$$+\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)_{0,0}(x-0)(y-0)$$

Vi får da:

$$= \cos(0)\cos(0) + (-\sin(0)\cos(0))x + (-\cos(0)\sin(0))y$$

$$+\frac{1}{2}(-\cos(0)\cos(0))x^2 + \frac{1}{2}(-\cos(0)\cos(0))y^2$$

$$+\sin(0)\sin(0)xy$$

Som blir:

$$1 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(-1)x^2 + \frac{1}{2}(-1)y^2 + 0$$

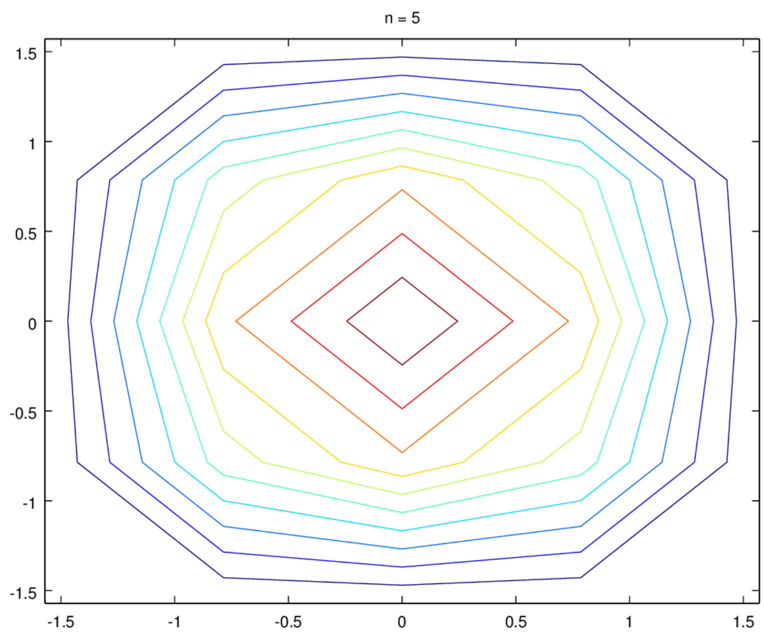
$$= \underline{\underline{1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2}}$$

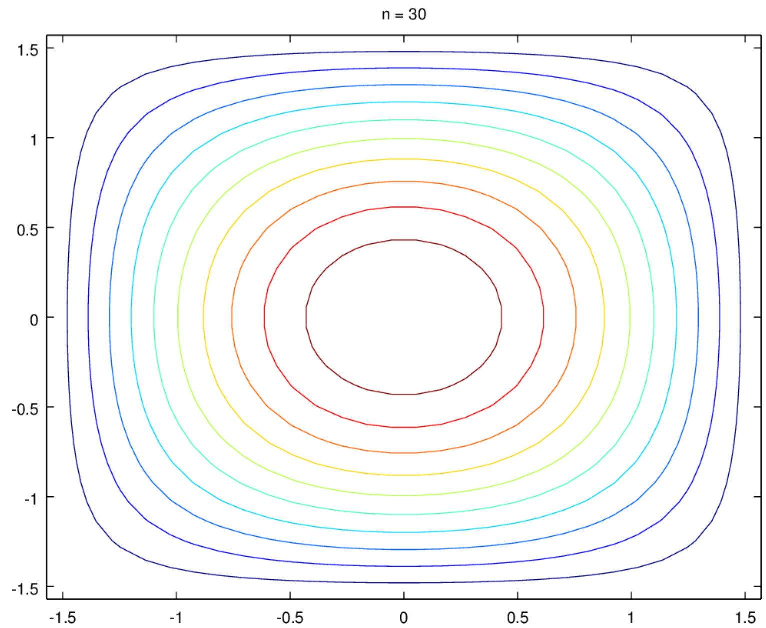
Oppgave 4

a)

```
for n=[5 30]
    [x, y, psi] = streamfun(n);
    plt = figure;
    contour(x, y, psi);
    title(sprintf('Antall punkter: %d', n));
    saveas(plt, sprintf('Problem4a_%d.png', n));
end
```

Plottene vi får for henholdsvis $n = 5$ og $n = 30$ ser ut som følger:





b)

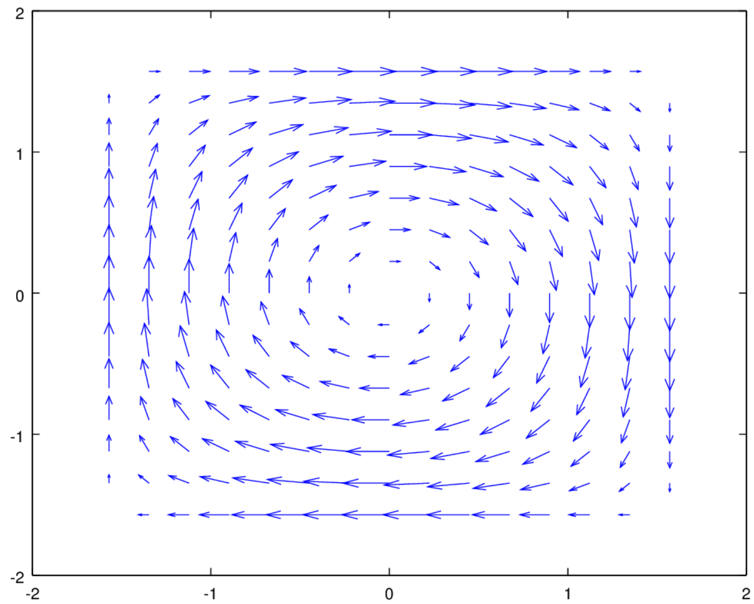
velfield-funksjonen ser ut som følger:

```
function [x, y, u, v] = velfield(n)

if nargin < 1;
    n=15;
end

x = linspace(-0.5*pi, 0.5*pi, n);

[x,y] = meshgrid(x,x);

u = cos(x).*sin(y);
v = -sin(x).*cos(y)
```

Vi kan bruke den på følgende måte:

```
n = 20;
[x,y,u,v] = velfield(n);
plt = figure;
quiver(x,y,u,v);
saveas(plt, sprintf('Problem4b_%d.png', n));
```

Plottet for $n = 15$ vil da se ut som følger:



Bazinga!