习题讲解

程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

1.4

- 证明：任何简单图必有至少两个顶点具有相等的度。

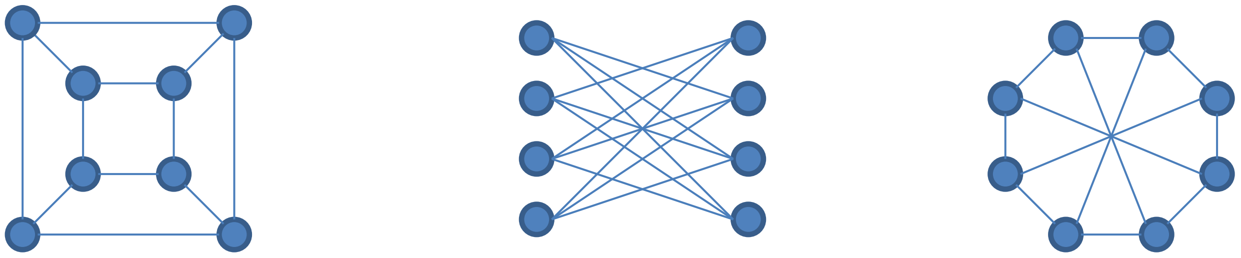
证明：反证法

1. 简单图 ⇒ $d \in [0, v-1]$
2. 假设顶点的度各不相等，则只能分别为0, 1, ..., v-1 ⇒ 0和v-1不可能同时出现 ⇒ 矛盾

1.35

- 讨论下列三个图的同构性。

答：左中同构；与右不同构。



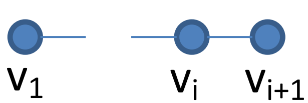
1.23

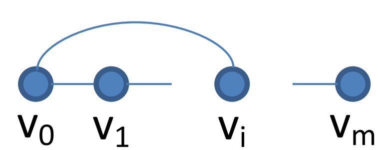
- 若G是简单图且δ(G)≥k，则G有长为至少k的路；如果k≥2，则G还包含一个长至少为k+1的圈。

证明：

1. 反证法：假设最长路为$v_1v_2…v_i \Rightarrow i \le k$
2. G是简单图且$\delta(G) \ge k \Rightarrow v_i$必有邻点$v_{i+1}$不在$v_1v_2…v_i$中 $\Rightarrow$ 找到路$v_1v_2…v_{i+1} \Rightarrow v_1v_2…v_i$不是最长路 $\Rightarrow$ 矛盾

1. 找到最长路$v_0v_1…v_m \Rightarrow m \ge k$
2. $\delta(G) \ge k \ge 2 \Rightarrow d(v_0) \ge k \ge 2 \Rightarrow v_0$与$v_2…v_m$中的k-1个顶点相邻 $\Rightarrow$ 其中必有v_i满足$i \ge k \Rightarrow$ 找到长为i+1的圈$v_0v_1…v_iv_0 \Rightarrow$ 找到长至少为k+1的圈





1.31

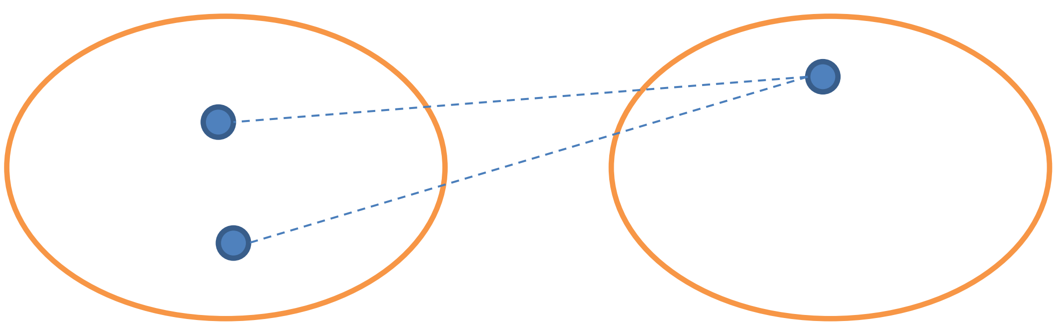
- 证明：如果图G不连通，则其补图$\overline{G}$必连通。

证明：

补图中任取两点：

- 如果在原图中的不同连通分支中 ⇒ 在原图中没有边 ⇒ 在补图中有边 ⇒ 在补图中连通
- 如果在原图中的同一连通分支中 ⇒ 与原图中其它连通分支中的顶点都没有边 ⇒ 在补图中与这些顶点都有边 ⇒ 在补图中连通

⇒ 补图连通

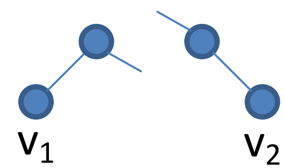


1.63

- 设G是一个简单图。证明：若 $diam(G) \geq 3$，则 $diam(\overline{G}) \leq 3$；若 $rad(G) \geq 3$，则 $rad(G) \leq 2$。

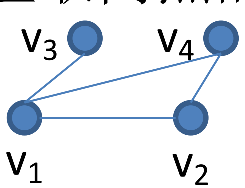
证明：

1. 反证法：假设 $diam(\overline{G}) > 3$ $\Rightarrow$ $\overline{G}$ 中存在两点v_1和v_2满足：
   - v_1和v_2之间无边 (1)
   - v_1和v_2无公共邻点 (2)
   - v_1的邻点和v_2的邻点之间无边 (3)



2. G中任取两点：
   - 若恰为v_1和v_2： 由(1) $\Rightarrow$ v_1和v_2之间有边 $\Rightarrow$ $d(v_1, v_2)=1<3$
   - 若恰有一个为v_1（或v_2同理），另一个为v_3：由(2) $\Rightarrow$ v_3与v_1/v_2之间有边 $\Rightarrow$ $d(v_1, v_3)=1$或$2<3$
   - 若为异于v_1和v_2的v_3和v_4：v_3和v_4与v_1/v_2之间有边 $\Rightarrow$
     - 若v_3和v_4均与v_1有边（或v_2同理）：$d(v_3, v_4)=2<3$
     - v_3与v_1、v_4与v_2有边：由(3) $\Rightarrow$ v_3与v_4之间有边 $\Rightarrow$ $d(v_3, v_4)=1<3$

综上 $\Rightarrow$ 任取两点的距离<3 $\Rightarrow$ $diam(G) < 3$ $\Rightarrow$ 矛盾

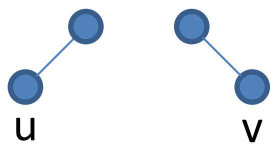


1.63 (续)

- 设G是一个简单图。证明：若$diam(G)\geq 3$，则$diam(\overline{G})\leq 3$；若$rad(G)\geq 3$，则$rad(\overline{G})\leq 2$。

证明：

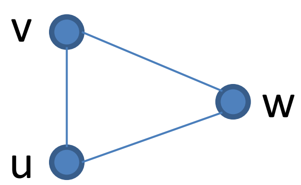
1. 反证法：假设$rad(\overline{G})>2 \Rightarrow \forall u\in V(\overline{G}), \exists v\in V(\overline{G}), d(u,v)>2 \Rightarrow$
   - u和v之间无边 $\Rightarrow \forall u\in V(G), \exists v\in V(G), u$与$v$之间有边 (1)
   - u和v无公共邻点 (2)



2. G中任取一点u，再任取一点w：
   - 若w与u之间有边：d(u, w)=1<3
   - 若w与u之间无边（此时w必不为v）：
     - 由(1) ⇒ u与v之间有边
     - 由(2) ⇒ w与v之间有边

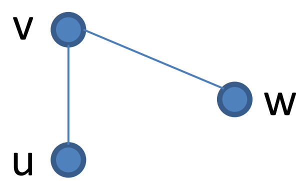
   ⇒ d(u, w)=2<3

综上 $\Rightarrow rad(G)<3 \Rightarrow$ 矛盾



2.1

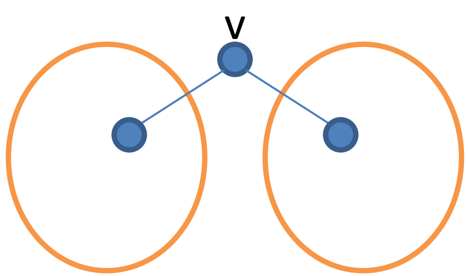
- 证明：若G是连通简单图但不是完全图，则G中必存在三个顶点u, v和w，使得uv, vw∈E(G)而uw∉E(G)。

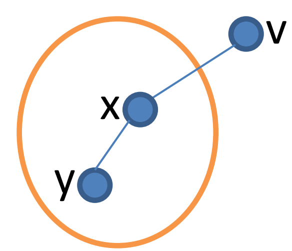


证明：对v(G)用数学归纳法证明。

1. v(G)=3时，显然成立。
2. 假设v(G)=k-1时成立，则v(G)=k时，∀v∈V(G)，讨论G-v
   - 如果G-v是连通简单图但不是完全图 ⇒ 得证
   - 如果G-v不是连通图 ⇒ v是割点 ⇒ G-v有连通分支G_1和G_2 ⇒ 从中各取与v相邻的一点 ⇒ 得证
   - 如果G-v是完全图：
     - G是连通图 ⇒ ∃(v, x)∈E(G)
     - G不是完全图而G-v是完全图 ⇒ ∃(v, y)∉E(G), (x, y)∈E(G)

   ⇒ 得证





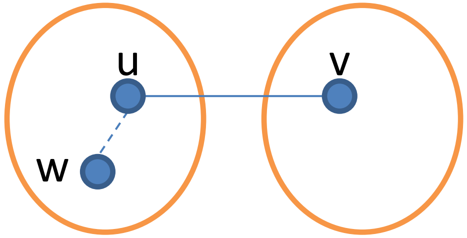
2.8

(1) 举反例说明如下命题不成立：如果e是图G的一条割边，则e至少有一个端点是G的割点。

(2) 试添加一个假设条件使其成立，并证明所得命题的正确性。

证明：$v \geq 3$的连通图

1. 设$e=(u, v) \Rightarrow G-e$中恰有两个连通分支且分别包含u和v
2. $v \geq 3 \Rightarrow$ 其中一个连通分支包含异于u、v的顶点w
3. w和v属于G-e的不同连通分支 $\Rightarrow$ w和v在G-u中无路 $\Rightarrow$ u是割点



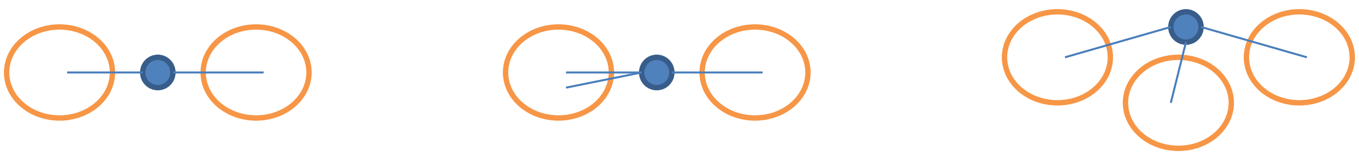
2.22

- 证明：若G是简单图且$\Delta(G)\le 3$，则$\kappa(G)=\kappa'(G)$。

证明：

$\kappa(G)\le\kappa'(G)\le\delta(G)\le\Delta(G)\le 3$

1. 完全图显然成立，仅讨论非完全图：
2. 如果$\kappa(G)=1$，设v为割点 $\Rightarrow 2\le d(v)\le 3 \Rightarrow$ 有三种情况，都有割边



2. 如果$\kappa(G)=2$，设$\{v_1, v_2\}$为最小点割集 $\Rightarrow$ 有四种情况（同时还有边更少的多种更简单情况不再讨论），都有势为2的边割集

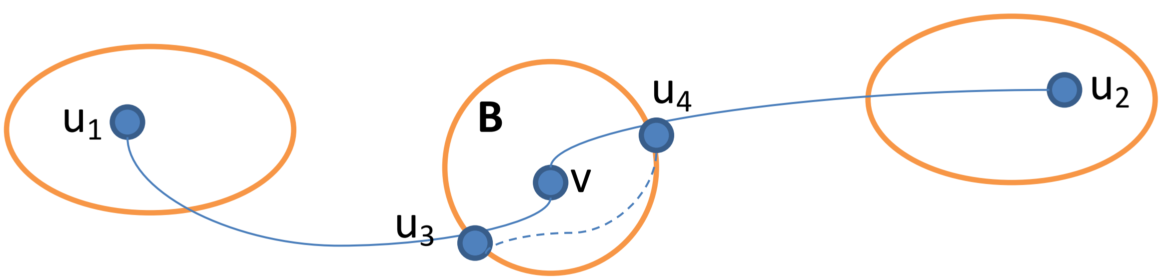
3. 如果$\kappa(G)=3$，显然$\kappa'(G)=3$
4. 如果$\kappa(G)=0$，显然$\kappa'(G)=0$

2.2

- 证明：点v是图G的割点当且仅当v至少属于G的两个不同的块。

证明：$\Rightarrow$

1. 反证法：v是G的割点 $\Rightarrow$ 存在异于v的u_1, u_2使得v在每条u_1u_2路上，且u_1和u_2不在同一个块中 $\Rightarrow$ 其中一条u_1u_2路有一段u_3u_4在v唯一所在的块B中，且u_3, u_4异于v（否则v跨块）
2. B是块 $\Rightarrow$ B内无割点 $\Rightarrow$ 去除v后u_3u_4在B内仍有路 $\Rightarrow$ u_1u_2仍有路 $\Rightarrow$ v不是割点 $\Rightarrow$ 矛盾

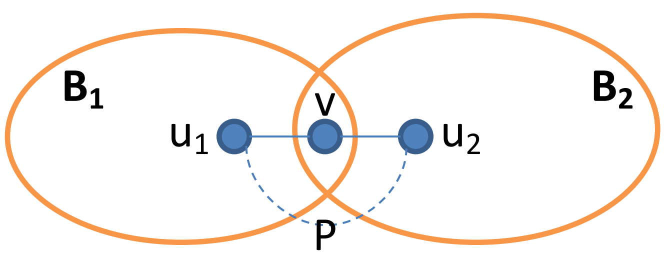


2.2 (续)

- 证明：点v是图G的割点当且仅当v至少属于G的两个不同的块。

证明：$\Leftarrow$

1. v在块B_1、B_2中 $\Rightarrow \exists vu_1 \in E(B_1), vu_2 \in E(B_2)$
2. 反证法：v不是割点 $\Rightarrow$ 去除v后u_1u_2仍有路P $\Rightarrow B_1+(v, u_2)+P$构成更大的块 $\Rightarrow B_1$不是块 $\Rightarrow$ 矛盾



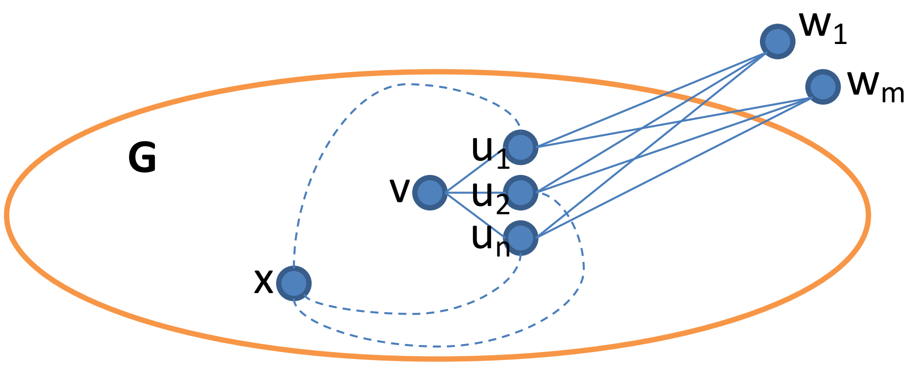
2.43

- 设G是一个k-连通图且v是G的一个顶点。对任意正整数m，定义G_m是由G添加m个新顶点$w_1, w_2, \dots, w_m$和所有形如w_iu, $(1\le i\le m, u\in N_G(v))$的边后所得之图。证明$G_m$是k-连通的。

证明：利用推论2.4.1

设$N_G(v)=\{u_1, \dots, u_n\}$

1. G内任二顶点：G是k-连通图 ⇒ G中任二顶点至少被k条两两内部无公共顶点的路所连
2. $w_1, w_2, \dots, w_m$内任二顶点：$w_1, w_2, \dots, w_m$中任二顶点有分别经过$u_1, \dots, u_n$的n条路，且$k\le\kappa(G)\le\delta(G)\le n \Rightarrow w_1, w_2, \dots, w_m$中任二顶点被k条两两内部无公共顶点的路所连
3. w_i和G内任一顶点$x\neq v$：G是k-连通图 ⇒ x和v至少被k条两两内部无公共顶点的路所连 ⇒ x沿着这些路到达v的至少k个不同邻点 ⇒ 与w_i相连
4. w_i和v：通过v的至少k个不同邻点相连

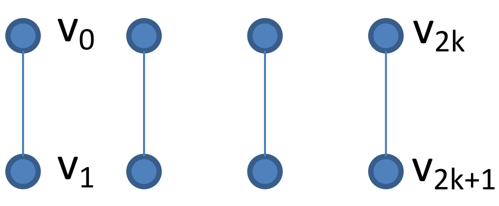


3.5

- 两个人在图G上做游戏：交替选择相异的顶点$v_0, v_1, v_2, \ldots$，使得对每个i>0，v_i与v_{i-1}相邻，选择最后一个顶点者获胜。证明：第一选点人有一个得胜策略当且仅当图G没有完美匹配。

证明：$\Rightarrow$

1. 假设该得胜策略的最后一个顶点是v_{2k}
2. 反证法：有完美匹配 $\Rightarrow$ 对手总是根据完美匹配选择相应的顶点 $\Rightarrow$ 对手仍能找到v_{2k+1} $\Rightarrow$ 矛盾

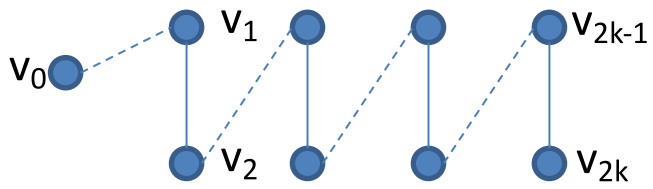


3.5 (续)

- 两个人在图G上做游戏：交替选择相异的顶点$v_0, v_1, v_2, \ldots$，使得对每个$i>0$，v_i与v_{i-1}相邻，选择最后一个顶点者获胜。证明：第一选点人有一个得胜策略当且仅当图G没有完美匹配。

证明：$\Leftarrow$

1. G没有完美匹配 $\Rightarrow$ G有最大非完美匹配M
2. 第一选点人先选一个未被M饱和的顶点 $\Rightarrow$ 对手只能选择一个被M饱和的顶点（否则与M是最大匹配矛盾）
3. 第一选点人根据M选择相应的顶点。
4. 对手能选择的全部是被M饱和的顶点（否则存在增广路，与M是最大匹配矛盾）。
5. 如此往复3和4，第一选点人总有办法接招，直到对手无法接招。

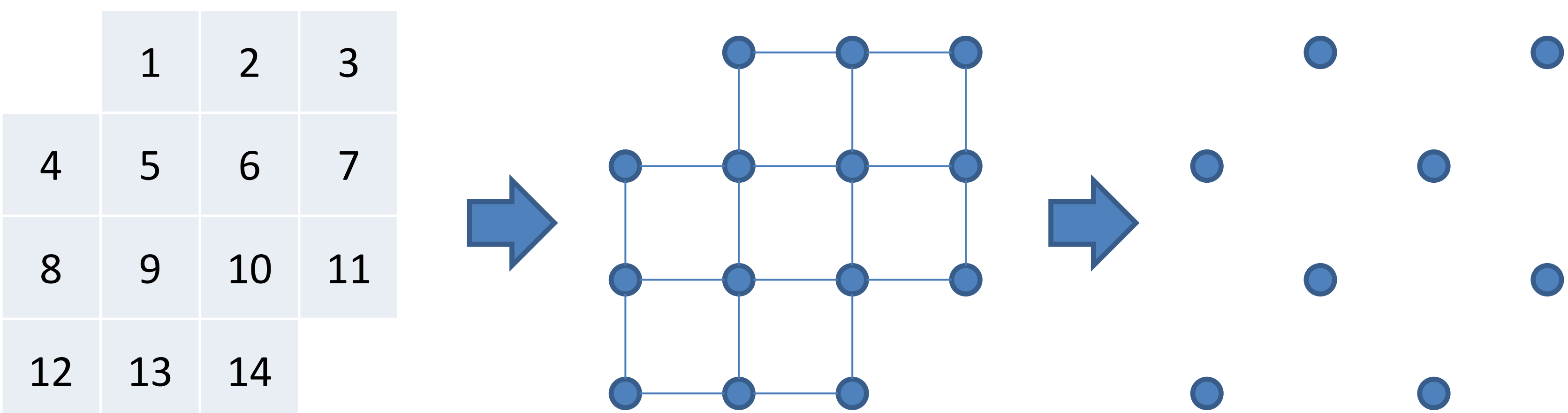


3.10

- 下图所示的是14个大小相同的正方形组成的图形。试证明：不论如何用剪刀沿着图形中所画的直线对它进行裁剪，总剪不出7个由相邻的两个小正方形组成的矩形来。

证明：

1. 相当于证明中图无完美匹配
2. 从中图去除$|S|=6$个顶点得到右图 $\Rightarrow$ $o(G-S)=8>6=|S|$ $\Rightarrow$ 无完美匹配



3.12

- 证明：每个无割边的3正则图可分解为一个1因子和一个2因子的并。

证明：

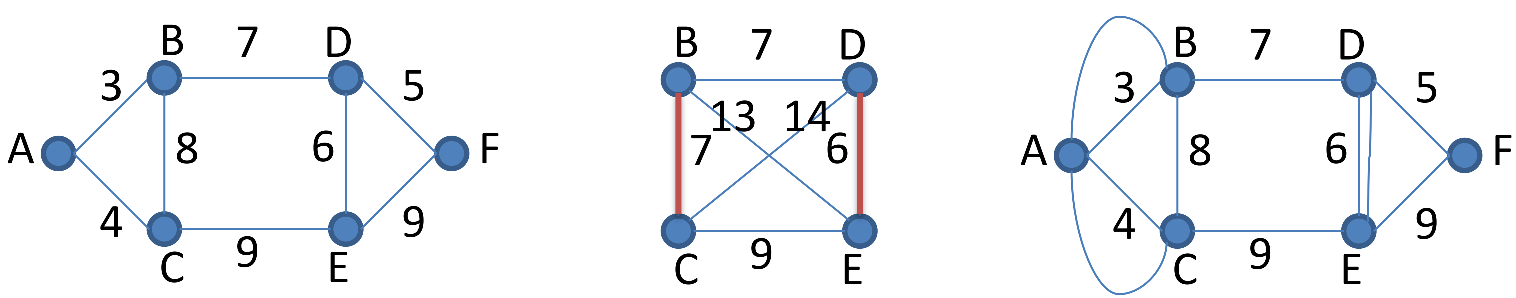
1. G是3正则图 $\Rightarrow$ v(G)是偶数 (*)
2. G是无割边的3正则图 $\Rightarrow$ G是2-边连通的3正则图 (#)
3. 由推论3.2.1：(*)和(#) $\Rightarrow$ G有完美匹配，即1因子
4. G是3正则图 $\Rightarrow$ G去除完美匹配后，剩余一个2正则生成子图，即2因子

4.12

- 求图2的一条最优邮路。

答：

1. 找到奇度顶点间的最短路，据此构造边带权的完全图。
2. 找最小权完美匹配。
3. 沿对应的最短路添加重边。
4. 找Euler闭迹：ABACBDEFDECA。

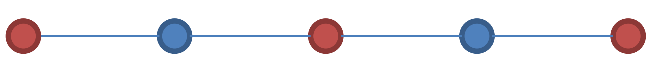


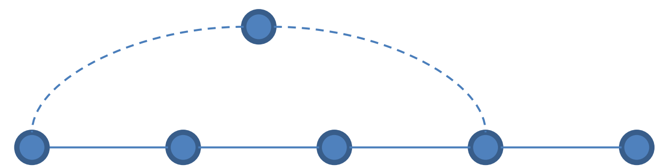
5.6

- 设G是简单图，证明：$\frac{1+diam(G)}{3} \le \gamma(G) \le \nu - \left\lceil \frac{diam(G)}{2} \right\rceil$。

证明：

1. diam(G)是G中最长的最短路P的长 ⇒ P中间隔地去除不少于一半顶点 ⇒ 剩余 $\nu - \left\lceil \frac{diam(G)}{2} \right\rceil$ 个顶点构成支配集 ⇒ 右式
2. P中任二个间隔超过1个顶点的顶点不可能被G中任何一个顶点同时支配（否则P就不是最短路了） ⇒ G中任意一个顶点最多支配P中的（连续）3个顶点，而P有1+diam(G)个顶点 ⇒ 左式



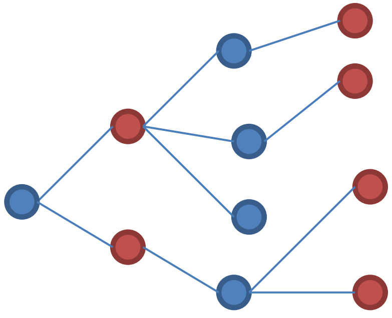


5.11

- 设G是恰含一个圈的非二部图，证明 $\alpha(G) \ge \left\lfloor \frac{\nu-1}{2} \right\rfloor$。

证明：

1. 去除圈中任意一个顶点u ⇒ G-u中没有圈 ⇒ G-u的每个连通分支都没有圈
2. 每个连通分支G_i中任取一个顶点v_i ⇒ 到v_i距离为奇数和偶数的所有顶点分别构成G_i的点独立集（否则就有圈），且其中较大的一个不少于顶点总数的1/2
3. 每个连通分支都取上述较大的一个点独立集，合并成为G的点独立集，且顶点总数不少于$\left\lfloor \frac{\nu-1}{2} \right\rfloor$ ⇒ $\alpha(G) \ge \left\lfloor \frac{\nu-1}{2} \right\rfloor$



5.15

- 证明推论5.1.4：$\alpha(G)+\beta(G)=\nu$。

证明：

1. G有最小点覆盖集F $\Rightarrow$
   - $|F|=\beta$
   - $V(G)\backslash F$是点独立集
2. 如果有比$V(G)\backslash F$更大的点独立集I $\Rightarrow$ $V(G)\backslash I$是比F更小的点覆盖集 $\Rightarrow$ 与F是最小点覆盖集矛盾 $\Rightarrow$ $V(G)\backslash F$是最大点独立集 $\Rightarrow$ $\alpha=|V(G)\backslash F|=\nu-\beta$

5.16

- 利用Konig定理证明：任一个二部图G有一个至少含ε/Δ条边的匹配。并由此证明：若H是完全二部图$K_{n,n}$的一个子图，且$\varepsilon>(k-1)n$，则H中存在至少含有k条边的匹配。

证明：

(1)

1. G是二部图，由Konig定理 $\Rightarrow \alpha'=\beta$
2. 每个点最多覆盖Δ条边 $\Rightarrow \beta\geq\varepsilon/\Delta \Rightarrow \alpha'=\beta\geq\varepsilon/\Delta$，得证

(2)

- $\nu(H)=1$时，H不是二部图，但由$\varepsilon>(k-1)n$得$k=0$，得证
- $\nu(H)>1$时，$\varepsilon>(k-1)n \Rightarrow \alpha' \geq \varepsilon/\Delta > (k-1)n/\Delta \geq (k-1)n/n = k-1$，得证

5.18

- 设G是一个无孤立点的图，M是G的一个极大匹配，L是G的一个极小边覆盖。证明：

(1) M是最大匹配当且仅当M含于某个最小边覆盖中。

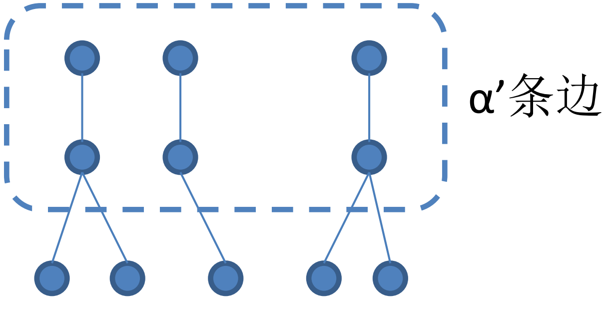
证明：

⇒：

1. M是最大匹配 ⇒ M覆盖$2\alpha'$个顶点，未覆盖$v-2\alpha'$个顶点
2. G无孤立点 ⇒ 将每个未覆盖顶点的一条关联的边加入M ⇒ 共$\alpha'+(v-2\alpha')=v-\alpha'=\beta'$条边 ⇒ 是最小边覆盖集，得证

⇐：

最小边覆盖包含$\beta'=v-\alpha'$条边 ⇒ 其中α'条边覆盖两个顶点，其余每条边将这些顶点中的一个连接到一个新顶点，且最小边覆盖的导出子图是若干个星（否则不是最小边覆盖） ⇒ 其中的极大匹配M（每个星选一条边）都是最大匹配，得证



5.18 (续)

- 设G是一个无孤立点的图，M是G的一个极大匹配，L是G的一个极小边覆盖。证明：

(2) L是最小边覆盖当且仅当L包含一个最大匹配。

证明：

$\Rightarrow$：

L是最小边覆盖集 $\Rightarrow |L|=\beta'=\nu-\alpha' \Rightarrow$ L中有α'条边覆盖两个顶点 $\Rightarrow$ 包含一个最大匹配，得证

$\Leftarrow$：

L中的最大匹配覆盖了$2\alpha'=2(\nu-\beta')$个顶点，剩余$\nu-2(\nu-\beta')=2\beta'-\nu$个顶点各被一条边覆盖 $\Rightarrow |L|=(2\beta'-\nu)+(\nu-\beta')=\beta'$，得证

5.20

- 证明：图G是二部图当且仅当对G的每个适合$\delta(H)>0$的子图H均有$\alpha(H)=\beta'(H)$。

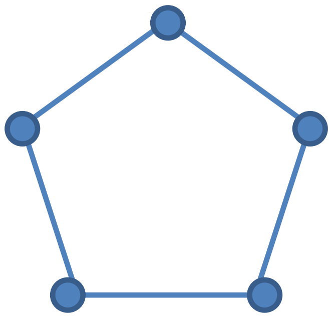
证明：

⇒：

1. $\delta(H)>0 \Rightarrow$ H至少包含2个顶点 $\Rightarrow$ H是二部图
2. H是二部图且$\delta(H)>0$，由定理5.2.6 $\Rightarrow \alpha(H)=\beta'(H)$

⇐：

反证法：如果G包含长为2n+1的奇圈H $\Rightarrow \alpha(H)=n$且$\beta'(H)=n+1$，与$\alpha(H)=\beta'(H)$矛盾 $\Rightarrow$ G不含奇圈 $\Rightarrow$ G是二部图



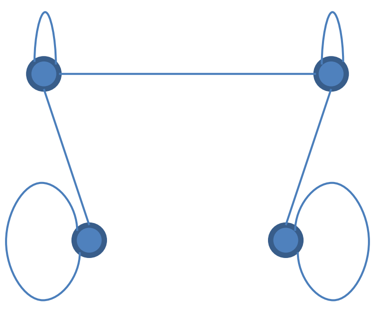
严格来说，这个结论不对。
反例：$G=K_1$。

7.4

- 画出一个具有7条边和5个面的连通的平面图。

解:

1. 欧拉公式 $\Rightarrow$ v=7-5+2=4
2. 任意画一个具有4个顶点和7条边的连通的平面图即可。

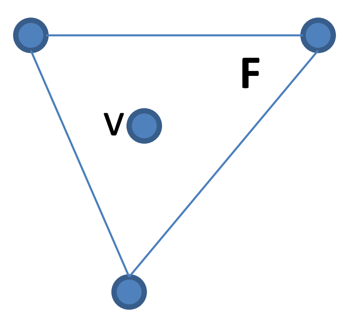


7.15(a)(b)

(a) 设G是一个极大可平面图，且顶点数v≥4。证明：G的最小度δ≥3。

证明：

1. 对于G的平面图P，对于G中的任意一个顶点v，考虑G-v在P中的子平面图P’，则v在P’的某个面F中
2. G是极大可平面图 ⇒ G是简单图 ⇒ G-v是简单图 ⇒ d(F)≥3
3. G是极大可平面图 ⇒ v与F边界上的每个顶点都相邻 ⇒ d(v)≥3



7.15(a)(b) (续)

(b) 若G是$v\geq 3$的极大平面图，则G中至少有4个顶点的度不超过5。

证明：

（仅考虑$v\geq 4$）

1. 由(a) $\Rightarrow \delta\geq 3$
2. 反证法：度不超过5的顶点少于4个 $\Rightarrow \sum d\geq 6(v-3)+3\text{x}3=6v-9$
3. 由定理7.2.6 $\Rightarrow \sum d=2\varepsilon=2(3v-6)=6v-12$，矛盾

7.23

- 证明：若G是连通的平面图，且$\delta \geq 3$，则G至少有一个面的度数不超过5。

证明：

1. $\delta \geq 3 \Rightarrow 2\varepsilon = \sum d(v_i) \geq 3\nu \Rightarrow \nu \leq 2\varepsilon/3$
2. 反证法：每个面的度数都超过5 $\Rightarrow 2\varepsilon = \sum d(F_i) \geq 6\varphi \Rightarrow \varphi \leq \varepsilon/3$
3. $\nu - \varepsilon + \varphi = 2 \Rightarrow 2 + \varepsilon = \nu + \varphi \leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$，矛盾

7.26

- 证明定理7.4.2 设G*是具有w个连通分支的平面图G的对偶图，则：
    1. $v^* = \varphi$
    2. $\varepsilon^* = \varepsilon$
    3. $\varphi^* = v - w + 1$
    4. 设G*的顶点v_i^*位于G的面F_i中，则$d_{G^*}(v_i^*) = d(F_i)$。

证明：

(1)(2)：显然。

(3)：

1. 欧拉公式 $\Rightarrow v - \varepsilon + \varphi = w + 1 \Rightarrow \varepsilon - \varphi = v - w - 1$
2. 对偶图总是连通图 $\Rightarrow v^* - \varepsilon^* + \varphi^* = 2 \Rightarrow \varphi^* = 2 + \varepsilon^* - v^* = 2 + \varepsilon - \varphi = 2 + (v - w - 1) = v - w + 1$

(4)：同定理7.4.1(4)的证明。

7.29

- 一个平面图如果与其对偶图同构，则称之为自对偶图。证明：

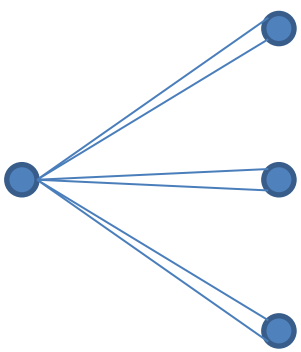
(1) 若G为自对偶图，则$\varepsilon=2\nu-2$。

证明：

对偶图总是连通图且与原图同构 ⇒ 原图是连通的 ⇒ $2=\nu-\varepsilon+\varphi=\nu-\varepsilon+\nu^*=\nu-\varepsilon+\nu=2\nu-\varepsilon$，得证

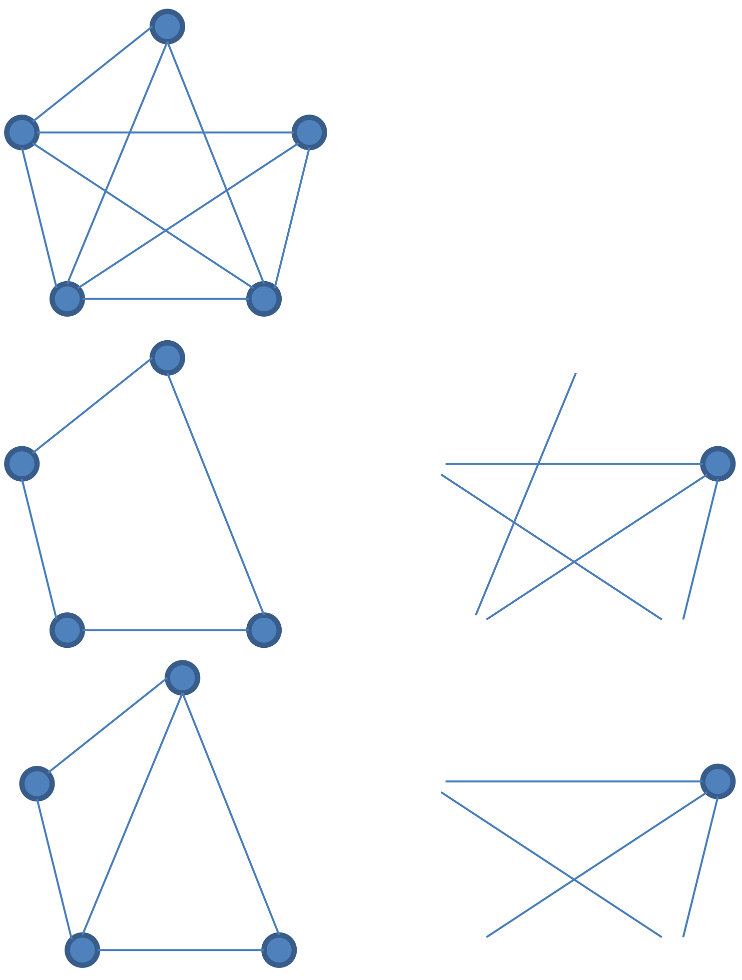
(2) 对每个n≥4，构造一个n顶点自对偶图。

解：



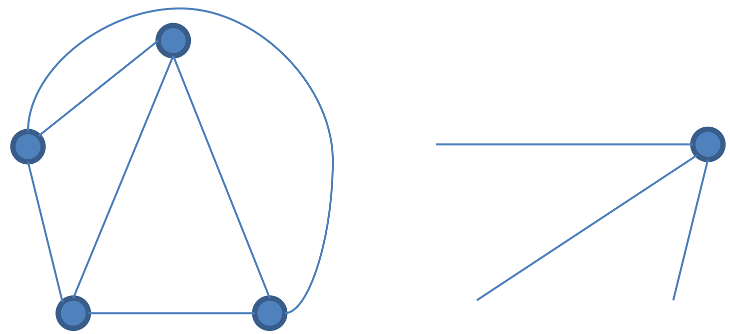
DMP算法

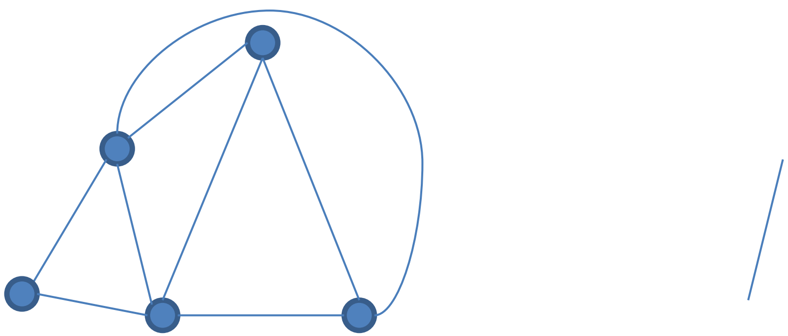
- 请用DMP算法将P214的G_2嵌入到平面中，要写出详细步骤。



DMP算法 (续)

- 请用DMP算法将P214的G_2嵌入到平面中，要写出详细步骤。





6.7

- 设G是一个无环边的图，$\Delta(G)=3$且G包含一个生成二部图H，使得$\forall v \in V(G)$，$d_H(v) \geq d_G(v)/2$，试证明（不使用Vizing定理）：$\chi'(G) \leq 4$。

证明：

1. $\Delta(G)=3 \Rightarrow \Delta(H) \leq 3$，由H是二部图 $\Rightarrow \chi'(H)=\Delta(H) \leq 3$
2. $d_H(v) \geq d_G(v)/2 \Rightarrow d_{G-H}(v) \leq d_G(v)/2 \leq \Delta(G)/2 = 3/2$，即$d_{G-H}(v) \leq 1$ $\Rightarrow$ G-H中的边互不相邻 $\Rightarrow$ 可染同一种色 $\Rightarrow \chi'(G) \leq 3+1=4$

6.16

- 证明或否定：如果G_1和G_2是第一类图，且$G_1 \subseteq H \subseteq G_2$，则H是第一类图。

解：

反例：$K_2 \subseteq K_3 \subseteq K_4$

第一类图 (Class 1)

$\chi' = \Delta$

举例：路、树、二部图、偶圈、K_{2n}

第二类图 (Class 2)

$\chi' = \Delta + 1$

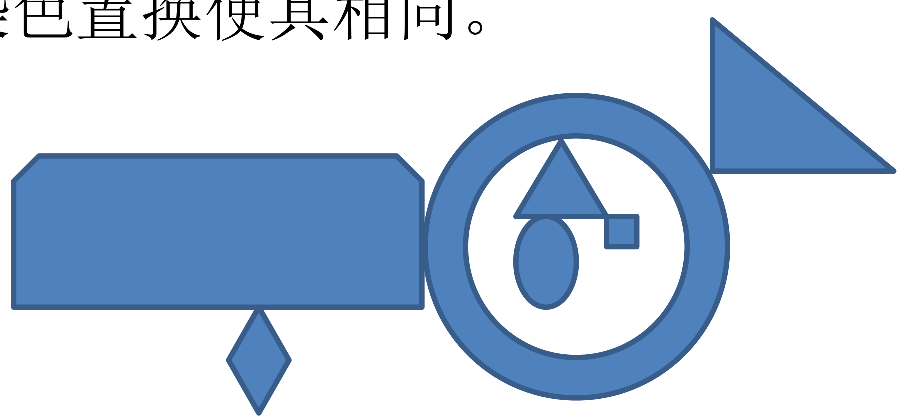
举例：奇圈、K_{2n+1}

6.26

- 设$G_1, G_2, \ldots, G_k$是图G的所有块，证明：$\chi(G)=\max_i\{\chi(G_i)\}$。

证明：

1. 只讨论连通图，不连通的图同理可证。
2. 每个块先各自正常染色，总共不超过$\max_i\{\chi(G_i)\}$种色，但两个块的公共顶点可能色不同，需要调整。
3. 由于块-割点图是树，任取一个块为根，由近及远逐个考虑，如果相邻的两个块的公共顶点（必唯一）色不同，将远块的染色置换使其相同。



6.35

- 证明：

(1) 若G的任二奇圈都有公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$；

证明：

任二奇圈都有公共顶点 ⇒ 删除最短的一个奇圈C，G中再无任何奇圈 ⇒ 由C的最短性，C无“弦边”，可以正常3染色，而剩余图可以正常2染色 ⇒ $\chi(G) \leq 5$

(2) 若G的任二圈都没有公共顶点，则$\chi(G) \leq 3$；

证明：

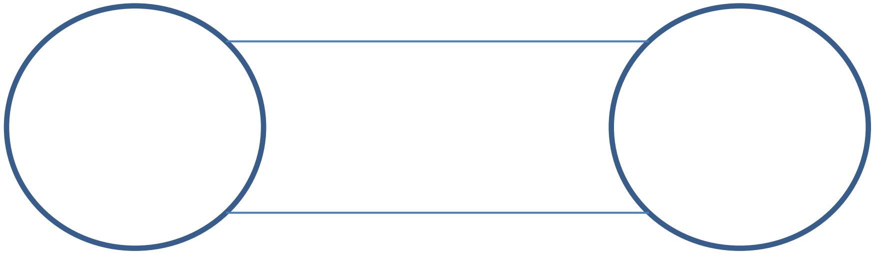
每个圈各自正常3染色，圈之间的路总有办法正常3染色⇒ $\chi(G) \leq 3$

6.35 (续)

(3) 若G中的奇圈个数不超过2个，则$\chi(G) \le 3$。

证明：

- 奇圈个数为0：$\chi(G)=2 \le 3$。
- 奇圈个数为1：从奇圈中去掉一个点，剩余图可以正常2染色，去掉的点染第三种色 $\Rightarrow \chi(G) \le 3$
- 奇圈个数为2：
  - 如果有公共顶点：去掉公共顶点，剩余图可以正常2染色，去掉的公共顶点染第三种色 $\Rightarrow \chi(G) \le 3$
  - 如果无公共顶点：总共只有2个奇圈 $\Rightarrow$ 总能各找到一个顶点彼此不相邻（否则存在第3个奇圈） $\Rightarrow$ 去掉这两个点，剩余图可以正常2染色，去掉的点染第三种色（因为不相邻） $\Rightarrow \chi(G) \le 3$



课堂练习

1. 证明或者否定：具有10个顶点的简单有向图中，顶点的出度不可能两两都互不相同。

否定：10个顶点任意排序，每个有且仅有出边指向所有后续顶点。

2. 证明或者否定：存在一个具有n个顶点(n>0)的竞赛图且每个顶点的出度和入度都相等，当且仅当n是奇数。

证明：

⇒：显然。

⇐：n个顶点围成圈，每个有且仅有出边指向顺时针的(n-1)/2个顶点。

我们学了什么

1. 图的基本概念 (1.1, 1.5, 1.6)

2. 割点、割边和连通度 (2.1, 2.2)
3. k-连通图 (2.3, 2.4)

4. 匹配的概念 (3.1, 3.2)
5. 最大匹配算法 (增广路算法、Hopcroft-Karp算法；Edmonds算法)

6. 中国邮递员问题和旅行商问题 (4.2, 4.4)

7. 支配集、点独立集和点覆盖集 (5.1)
8. 边独立集和边覆盖集 (5.2)

9. 平面图的概念 (7.1, 7.2, 7.4)
10. 可平面图的判断 (7.3；DMP算法)

11. 边染色和点染色 (6.1, 6.2, 6.5)
12. 平面图的面染色 (7.7)

13. 有向图和网络流 (8.1, 8.2, 8.3, 8.5, 9.1, 9.2)