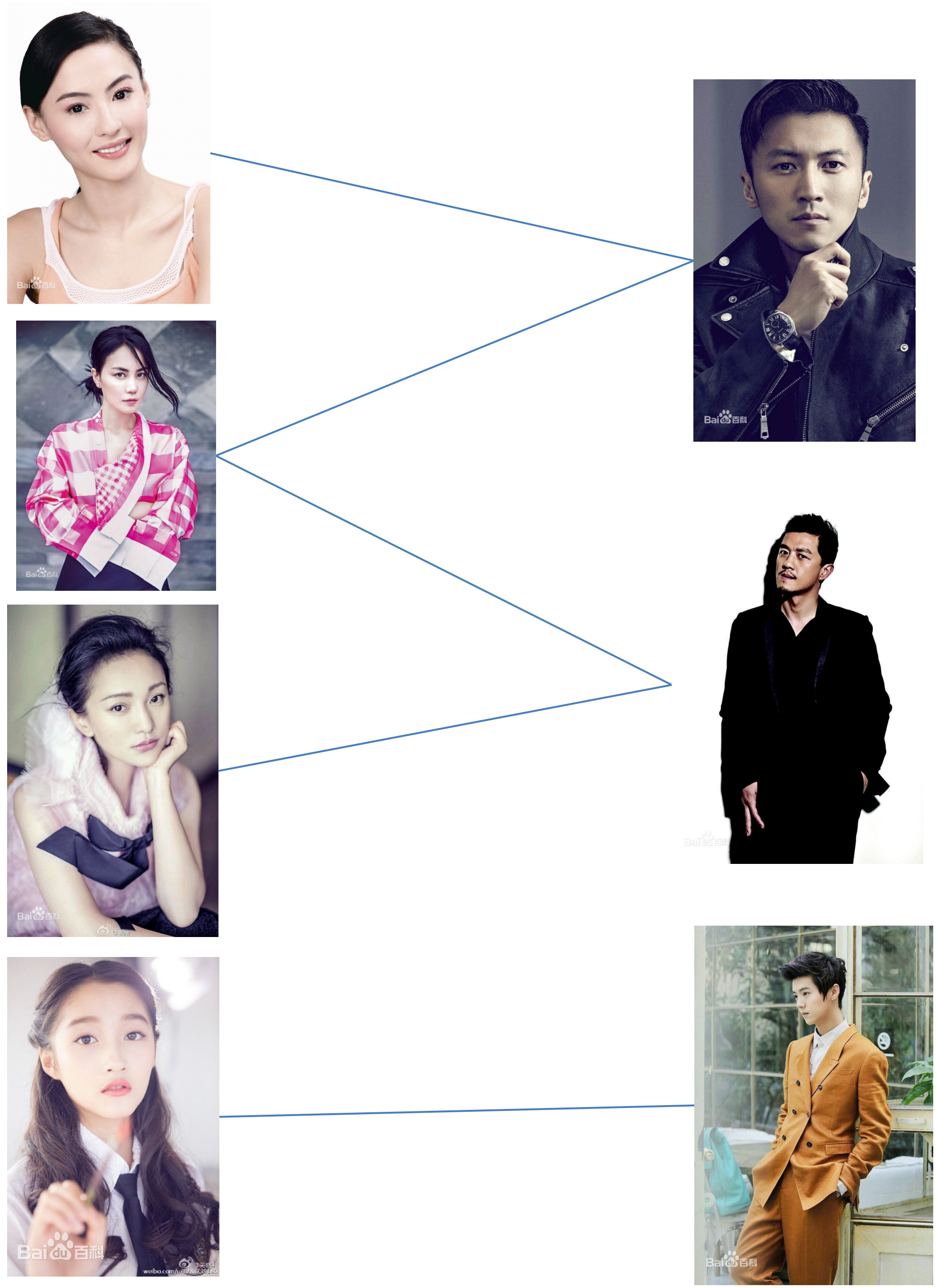
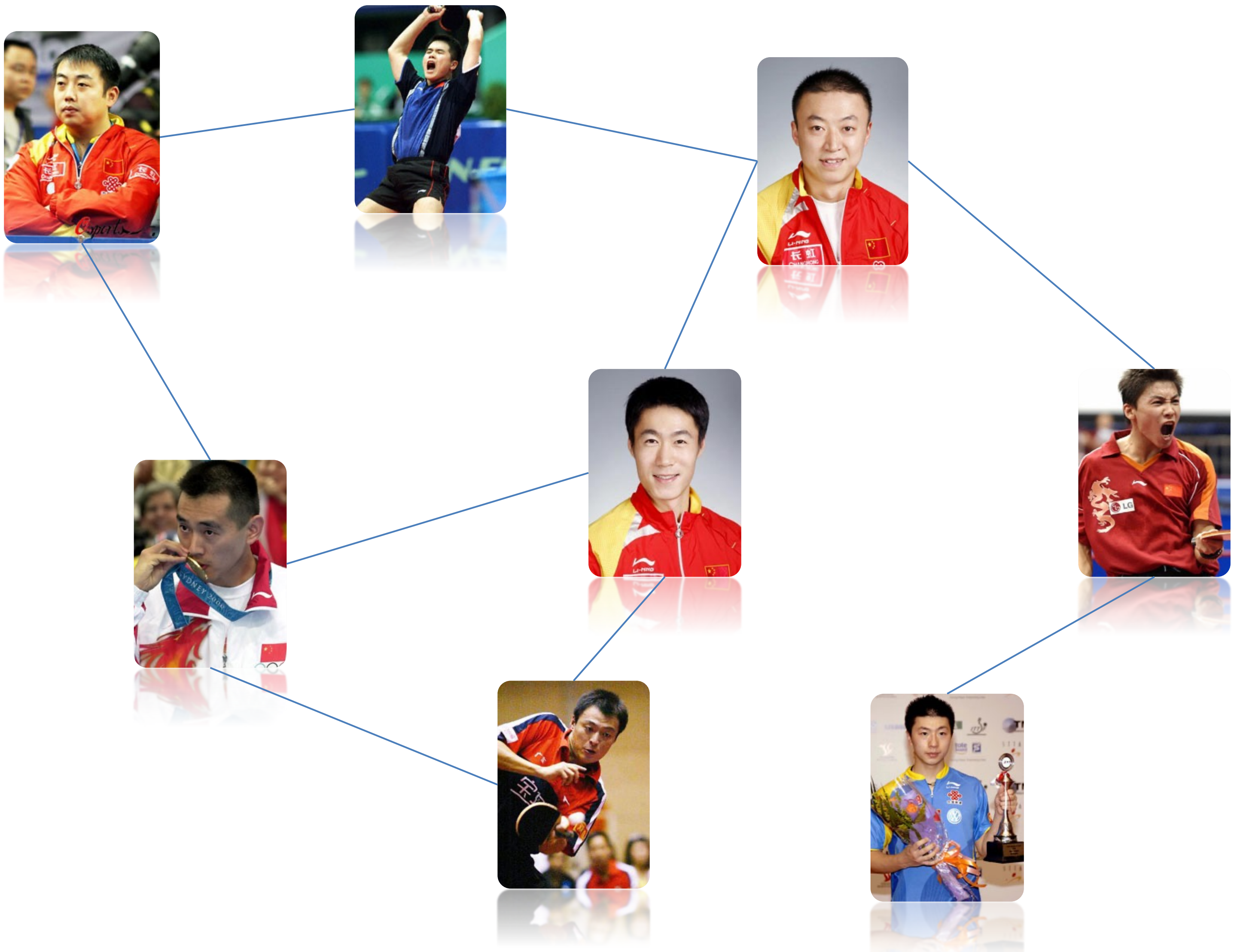
匹配的概念

程龚 (gcheng@nju.edu.cn)



http://baike.baidu.com/



http://sports.sina.com.cn/star/sports/tt/

Passage: Susan held a birthday party. She made a big cake, and hung up some balloons. Meanwhile, her parents bought chocolate ice creams because she enjoyed it. Soon, her friends showed up. Then, Susan hugged her friends. Each friend had a present for Susan. Therefore, Susan was happy and sent each friend a thank you card. So, her friends were happy, too.

Question 1: What did Susan do before her friends came out?
(A) Susan bought ice cream. (B) Susan hung up balloons. (C) Susan hugged her friends. (D) Susan sent friends thank you cards.

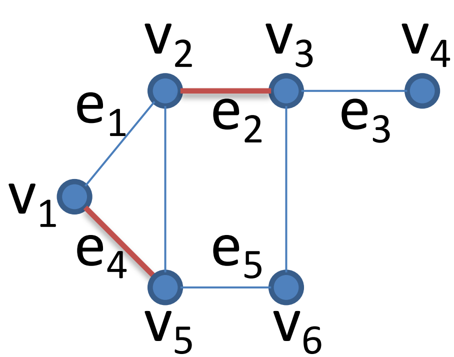
本节课的主要内容

3.1 匹配与最大匹配

3.2 完美匹配

匹配

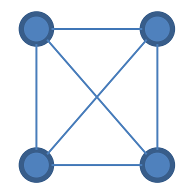
- 匹配 (matching)
  - M是G的匹配: G中两两不相邻的边构成的集合
- 被饱和的顶点 (saturated vertex)
  - M中边的端点被M饱和

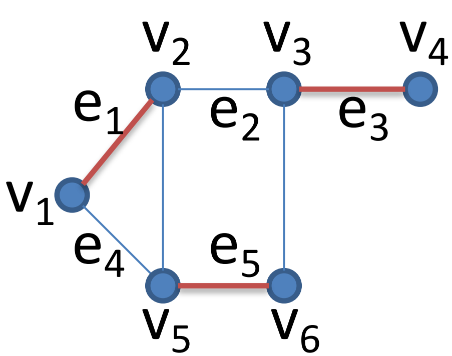


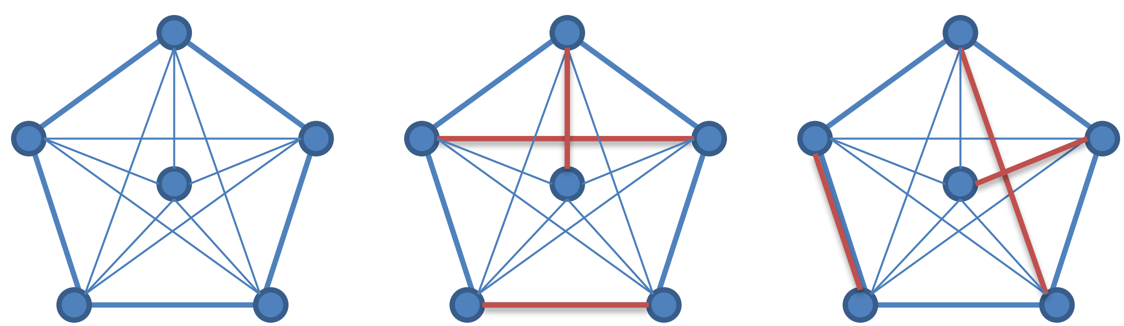
完美匹配

- 完美匹配 (perfect matching)　　猜猜看是什么意思？
  - G中每个顶点都被M饱和

- 有完美匹配的图，阶是多少？完美匹配包含多少条边？
- K_{2n}包含多少个边不重的完美匹配？为什么？
  - 2n-1



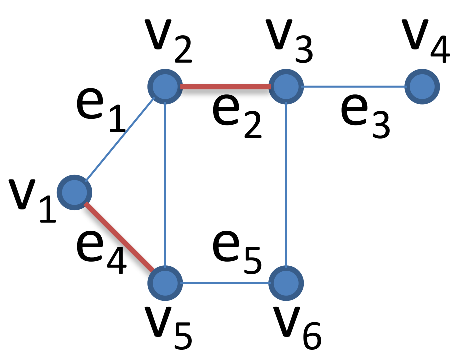


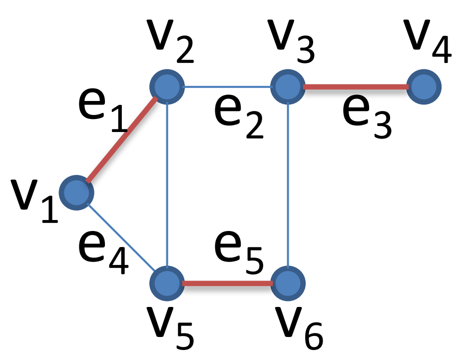


最大匹配

- 极大匹配 (maximal matching)
  – 势极大的匹配（不是任何一个匹配的真子集）
- 最大匹配 (maximum matching)
  – 势最大的匹配

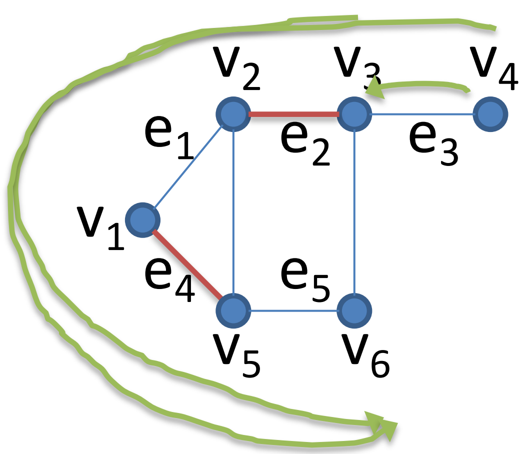
- 完美匹配和最大匹配是什么关系？





匹配的增广路

- M交错路 (M-alternating path)
  - 边交替属于M和E(G)\M的路
- M增广路 (M-augmenting path)
  - 起点和终点未被M饱和的M交错路

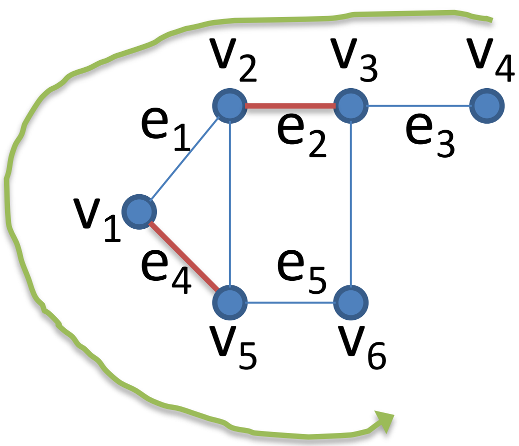


最大匹配的充要条件

- 图G的一个匹配M是最大匹配的充分必要条件是G中不存在M增广路。

证明：⇒ 你能自己证明吗？

反证法：假设存在M增广路P ⇒ 将M中在P上的边替换为P上的其它边 ⇒ 得到另一个匹配且势更大 ⇒ M不是最大匹配 ⇒ 矛盾



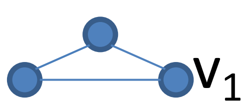
为什么替换之后得到的一定是一个匹配？

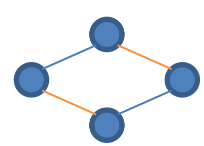
最大匹配的充要条件 (续)

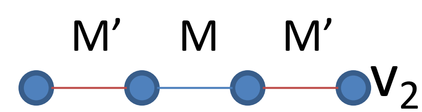
- 图G的一个匹配M是最大匹配的充分必要条件是G中不存在M增广路。

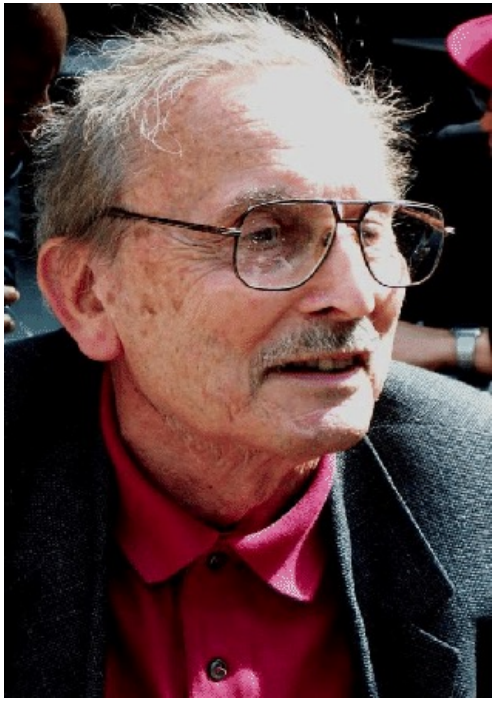
证明：$\Leftarrow$

1. 反证法：假设M不是最大匹配 $\Rightarrow$ 存在匹配M'且$|M'|>|M|$
2. 取$H=G[(M'\cup M)\setminus(M'\cap M)]$　（你看懂H的含义了吗？）
   1. M和M'是匹配 $\Rightarrow$ $\Delta(H)\leq 2$ $\Rightarrow$ H的连通分支是什么？
      H的连通分支是偶圈或路，且边在M和M'之间交替出现
   2. $|M'|>|M|$ $\Rightarrow$ H的某个连通分支是路且始于并终于M'中的边 $\Rightarrow$ 在G中是M增广路 $\Rightarrow$ 矛盾
      为什么v_2未被M饱和？









Claude Berge, 法国, 1926--2002

(弱)完美图猜想(定理)：一个图是完美图当且仅当其补图是完美图 (6.4)

http://www.les-mathematiques.net/p/p/b/img7.png

奇分支

- 奇分支 (odd component)
  - 阶为奇数的连通分支
  - 图G的奇分支的数量记作o(G)

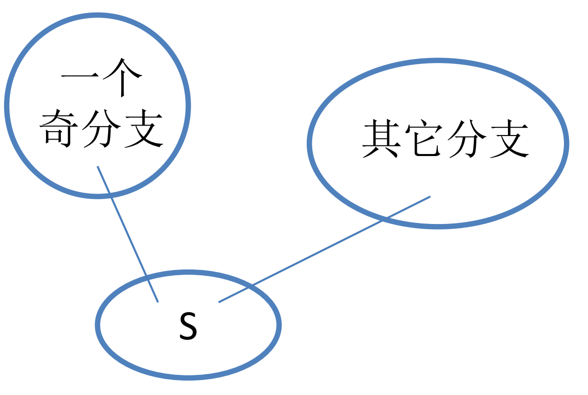
- 向图中增加边会增加奇分支的数量吗？为什么？
  - 连通一个分支内部的两个顶点：o(G)不变
  - 连通一个奇分支和一个偶分支：o(G)不变
  - 连通两个奇分支：o(G)变小
  - 连通两个偶分支：o(G)不变

有完美匹配的充要条件

- 图G有完美匹配的充分必要条件是对$\forall S \subset V(G)$，$o(G-S) \le |S|$。

证明：$\Rightarrow$ 你能自己证明吗？

G有完美匹配M $\Rightarrow$ 对于G-S的每个奇分支，M中至少有一条边关联该分支中的一个顶点和S中的一个顶点，且S中的这些顶点互不相同 $\Rightarrow$ $o(G-S) \le |S|$

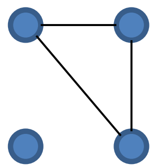


有完美匹配的充要条件 (续)

- 图G有完美匹配的充分必要条件是对∀S⊂V(G)，o(G-S)≤|S|。

证明：⇐

1. 反证法：假设图G满足∀S⊂V(G)，o(G-S)≤|S|，但无完美匹配。
2. 取S=∅ ⇒ o(G-S)=0 ⇒ v(G)是偶数
3. 向G中添加一些边得到G*，使得G*无完美匹配但添加任意边都会有完美匹配 ⇒ ∀S⊂V(G)，o(G*-S)≤o(G-S)≤|S|
4. 通过证明G*有完美匹配，导致矛盾。
5. 取S=U={v∈V(G*) | d(v)=v(G*)-1} ⇒ o(G*-U)≤|U|
6. 分情况讨论G*-U：
   - G*-U是零图 ⇒ U=V(G) ⇒ G*是偶数阶完全图 ⇒ G*有完美匹配 ⇒ 矛盾
   - G*-U的连通分支都是完全图
   - G*-U的某个连通分支不是完全图



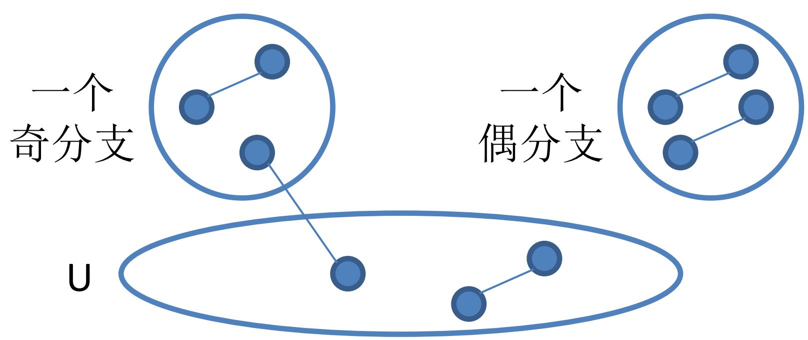
有完美匹配的充要条件 (续)

- 图G有完美匹配的充分必要条件是对∀S⊂V(G)，o(G-S)≤|S|。

证明：⇐

… G*-U的连通分支都是完全图

1. 构造G*的一个完美匹配（你能造一个出来吗？）
   - 偶分支是完全图 ⇒ 偶分支内的顶点任意配对
   - U内的顶点与G*中的每个顶点都相邻，且o(G*-U)≤|U| ⇒ 每个奇分支内的一个顶点与U内的一个顶点配对，且U内这些顶点互不相同
   - 奇分支是完全图 ⇒ 奇分支内剩余偶数个顶点任意配对
   - U内的顶点与G*中的每个顶点都相邻 ⇒ U内剩余偶数个顶点任意配对
2. ⇒ 矛盾



有完美匹配的充要条件 (续)

- 图G有完美匹配的充分必要条件是对∀S⊂V(G)，$o(G\text{-}S) \le |S|$。

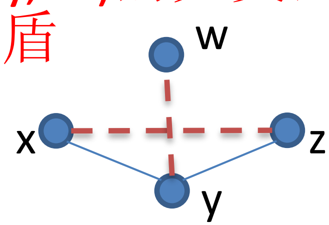
证明：⇐

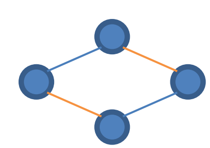
… G*-U的某个连通分支H不是完全图

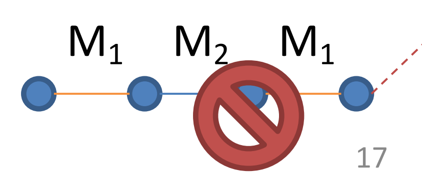
1. 习题2.1 ⇒ 有x, y, z∈V(H)使得(x, y), (y, z)∈E(H)且(x, z)∉E(H)
2. y∈V(H) ⇒ y∉U ⇒ 有w∈V(G*-U)与y不相邻
3. G*的性质 ⇒ G*+(x, z)有完美匹配M_1且(x, z)∈M_1，G*+(y, w)有完美匹配M_2且(y, w)∈M_2 ⇒ G*中的每个顶点各与M_1和M_2中的一条边关联

为什么不会出现路的情况？

4. 取$F=(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$ ⇒ G*中的每个顶点与F中的0或2条边关联，即G[F]的连通分支是偶圈，且边在M_1和M_2之间交替出现
5. (x, z)仅在M_1中，(y, w)仅在M_2中 ⇒ (x, z), (y, w)∈F ⇒ 设法构造一个G*+(x, z)+(y, w)的完美匹配但又不含(x, z)和(y, w) ⇒ 是G*的完美匹配 ⇒ 矛盾

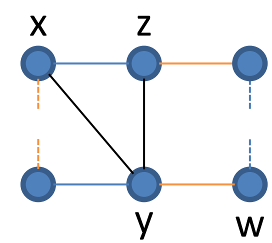




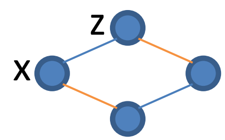


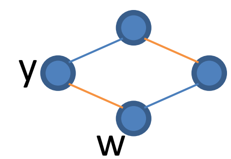
有完美匹配的充要条件 (续)

- 图G有完美匹配的充分必要条件是对∀S⊂V(G)，o(G-S)≤|S|。



证明：⇐





… 讨论(x, z)和(y, w)的关系

- (x, z)和(y, w)不在同一个偶圈中 ⇒ 构造G*+(x, z)+(y, w)的一个完美匹配
  - (x, z)所在的圈内，取M_2中的边 ⇒ 不含(x, z)和(y, w)
  - (x, z)所在的圈外，取M_1中的其它所有边 ⇒ 不含(x, z)和(y, w)
- (x, z)和(y, w)在同一个偶圈中 ⇒ 构造G*+(x, z)+(y, w)的一个完美匹配
  - 圈内从y到w到z（或x）的路，取M_1中的边 ⇒ 不含(x, z)和(y, w)
  - 取(z, y) ⇒ 不含(x, z)和(y, w)
  - 圈内从y不经过w到x（或z）的路，取M_2中的边 ⇒ 不含(x, z)和(y, w)
  - 圈外，取M_1或M_2中的其它所有边 ⇒ 不含(x, z)和(y, w)

⇒ 构造的G*+(x, z)+(y, w)的完美匹配不含(x, z)和(y, w) ⇒ 是G*的完美匹配
⇒ 矛盾

二战中解密了大量的德军密码

William Thomas Tutte, 英国/加拿大, 1917--2002

http://squaring.net/history_theory/gfx/250px-WTTutte.gif

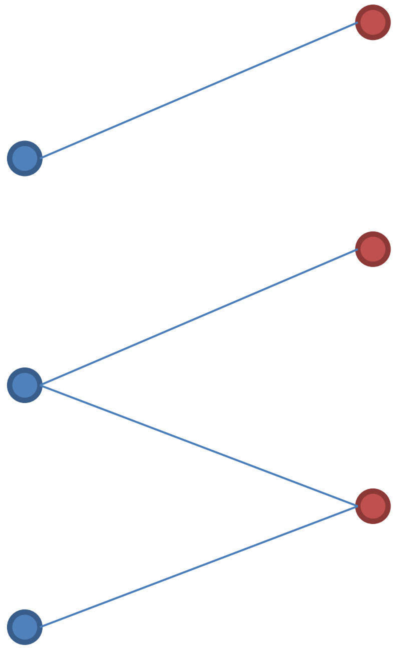
推论：二部图有完美匹配的一个必要条件

- $|X|=|Y|$。

证明：你能利用“$\forall S\subset V(G)$，$o(G-S)\le|S|$”证明吗？

- 令$S=X$，则$o(G-S)=|Y|\le|S|=|X|$。
- 令$S=Y$，则$o(G-S)=|X|\le|S|=|Y|$。

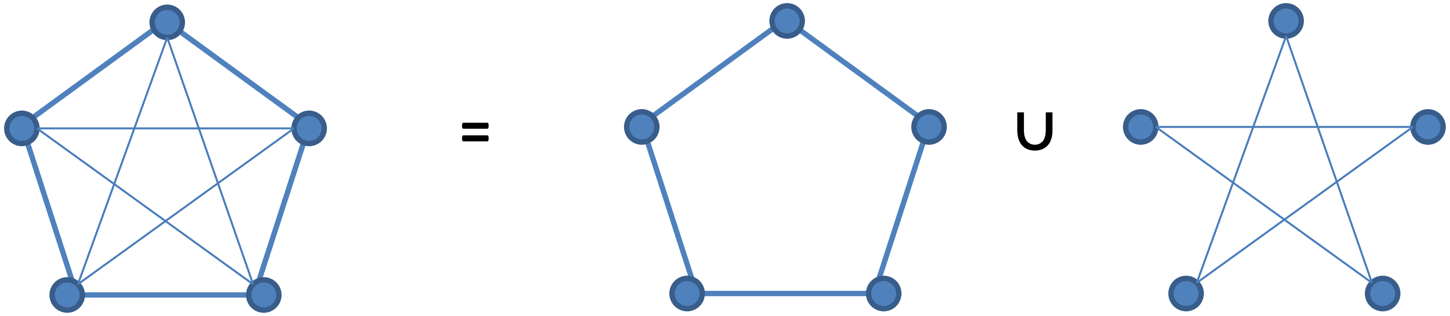
$\Rightarrow |X|=|Y|$



因子

- k-因子 (k-factor)
  - 图G的k-正则生成子图
- 1-因子对应什么？
  - 完美匹配

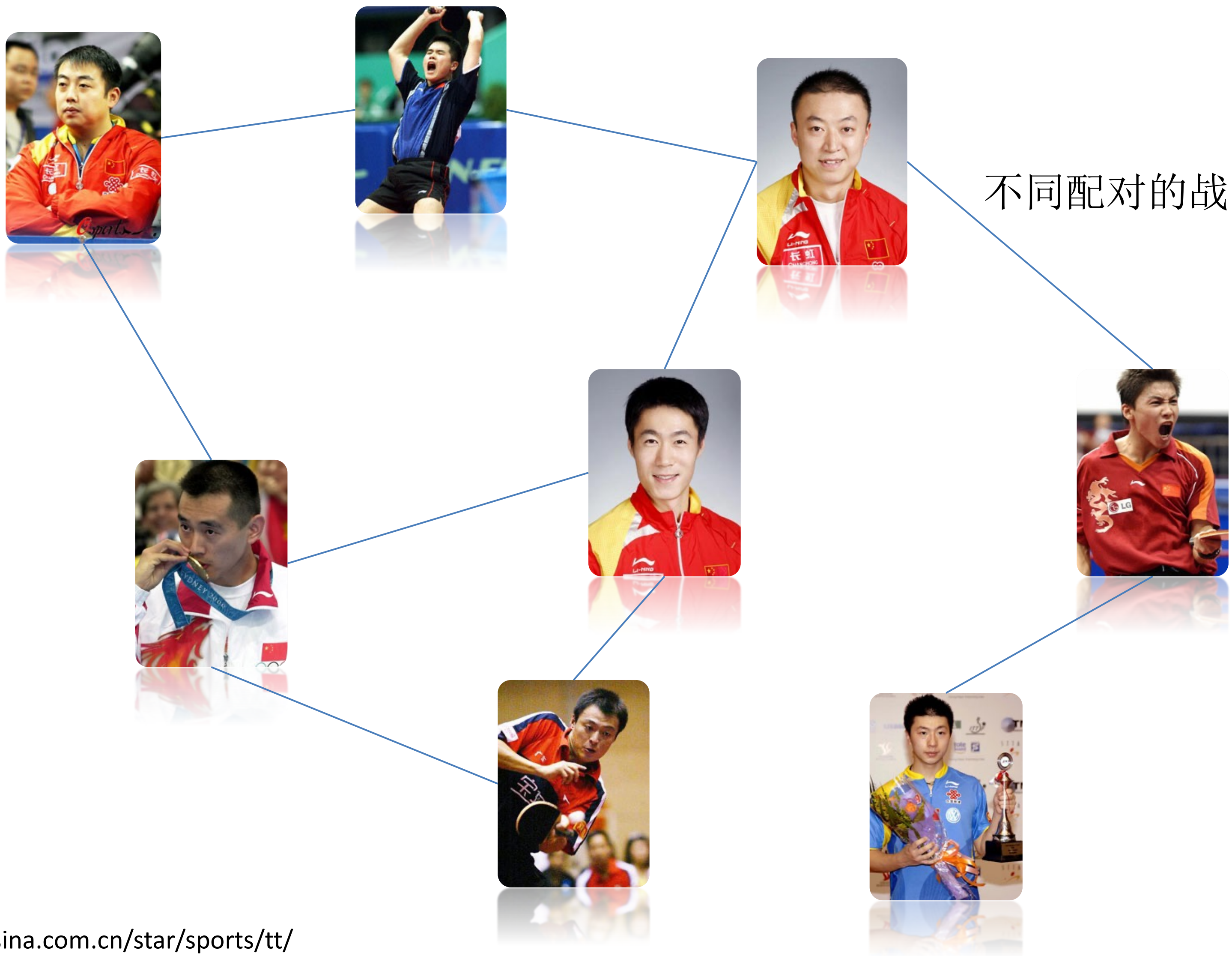
- 可k-因子分解的 (k-factorable)
  - 图G有一组k-因子的边集构成E(G)的一个划分
- 你还记得吗：K_{2n}是可1-因子分解的
- 你能证明吗：对任意n>0，K_{2n+1}是可2-因子分解的



二部图的匹配

- Hall定理及其推论留给大家自学 (3.3)
  - 《离散数学》中已有所介绍

最大权匹配



不同配对的战斗力不同

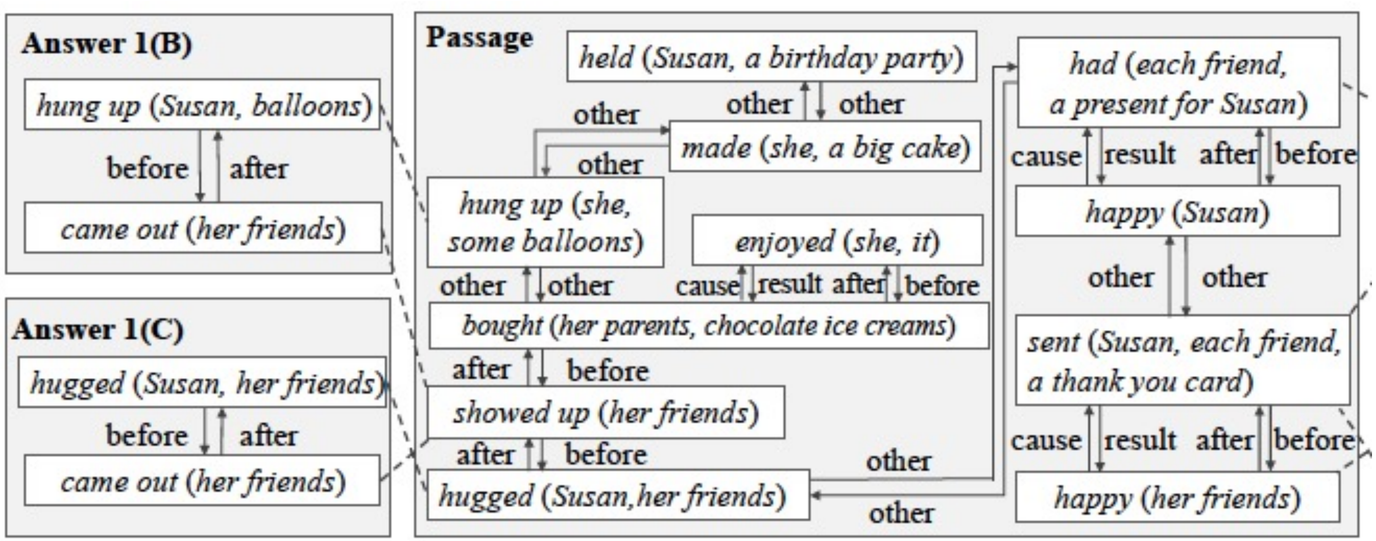
http://sports.sina.com.cn/star/sports/tt/

最大（权）匹配的应用

- 你认为什么样的应用适合表示为最大（权）匹配来求解？

Passage: Susan held a birthday party. She made a big cake, and hung up some balloons. Meanwhile, her parents bought chocolate ice creams because she enjoyed it. Soon, her friends showed up. Then, Susan hugged her friends. Each friend had a present for Susan. Therefore, Susan was happy and sent each friend a thank you card. So, her friends were happy, too.

Question 1: What did Susan do before her friends came out?
(A) Susan bought ice cream. (B) Susan hung up balloons. (C) Susan hugged her friends. (D) Susan sent friends thank you cards.



作业

- 3.5 //完美匹配和最大匹配及其充要条件
- 3.10 //有完美匹配的充要条件
- 3.12 // 因子