最大匹配算法

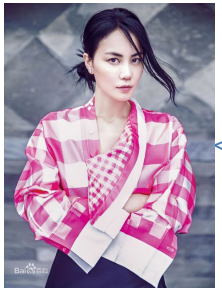
程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

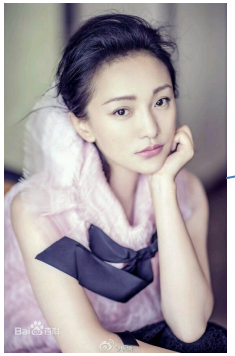
上节课的要点回顾

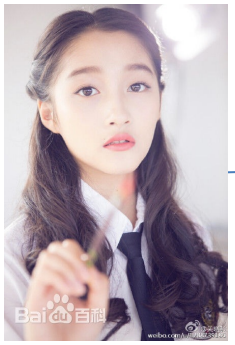
- 匹配
  - 最大匹配、增广路
  - 完美匹配、奇分支

本节课的主要内容

- 面向二部图的增广路算法
- 面向二部图的Hopcroft-Karp算法
- 面向一般图的Edmonds算法



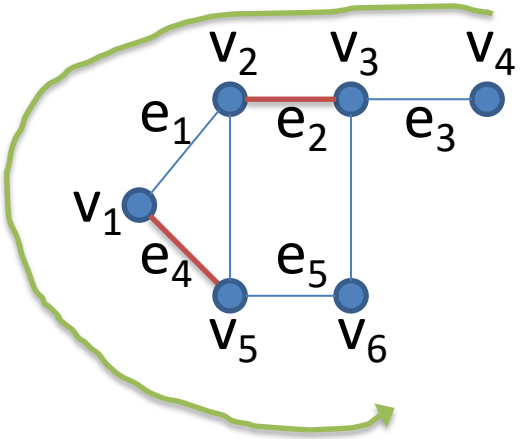


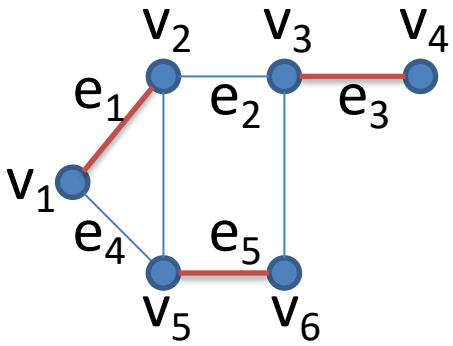


http://baike.baidu.com/

最大匹配的充要条件 (复习)

- 图G的一个匹配M是最大匹配的充分必要条件是G中不存在M增广路。
  - 假设存在M增广路P ⇒ 将M中在P上的边替换为P上的其它边 ⇒ 得到另一个匹配且势更大





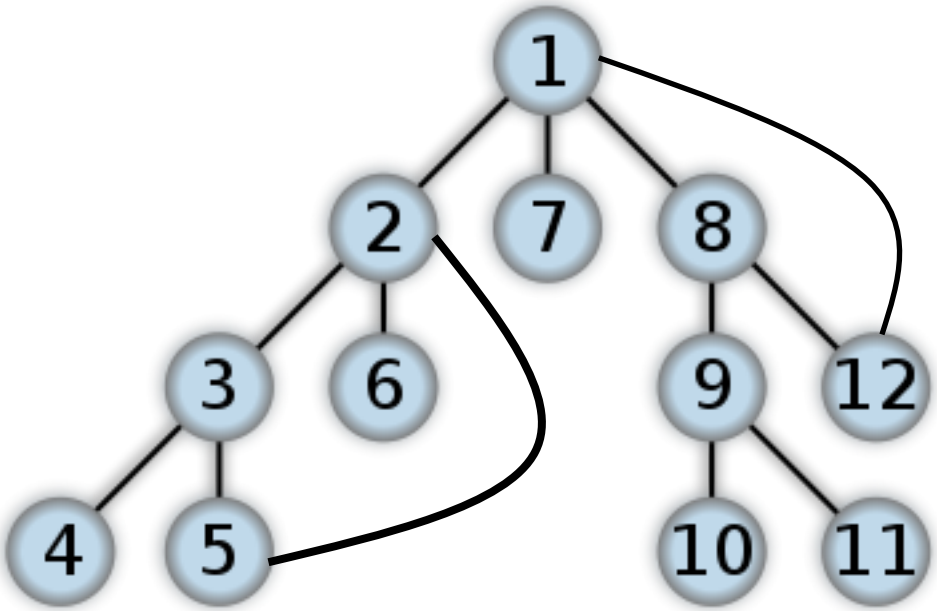
基于这个充要条件，
你能不能给出一种求最大匹配的方法？

面向二部图的增广路算法*

- 基本思路
  1. 搜索一条增广路
  2. 如果找到了：替换得到更大的匹配，回到第1步
  3. 否则：结束

面向二部图的增广路算法 (续)

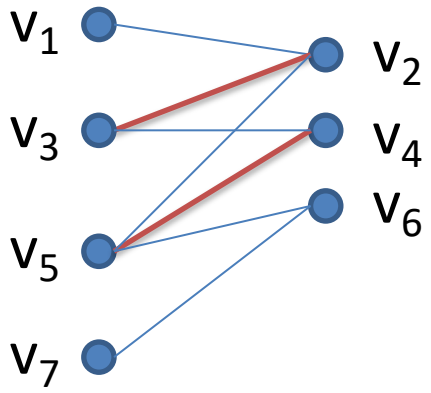
- 深度优先搜索（复习）



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/1f/Depth-first-tree.svg/390px-Depth-first-tree.svg.png

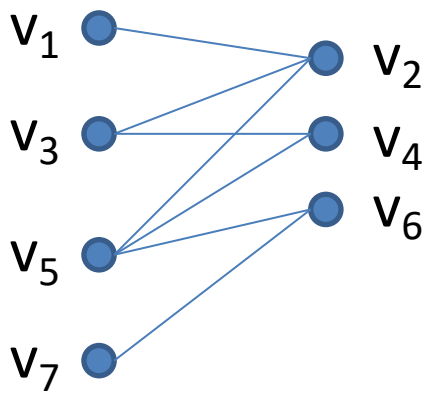
面向二部图的增广路算法 (续)

- 每轮搜索仅需从二部图的任意一侧顶点中开始（会漏掉一些增广路吗？）
  - 增广路的长度是奇数 ⇒ 起点和终点位于二部图的两侧 ⇒ 仅从任何一侧开始搜索都能确保找到
- 每轮搜索的起点怎么选？
  - 从一侧中（不妨选左侧）未被当前匹配饱和的顶点开始
- 在搜索中允许经过哪些边？
  - 左侧到右侧：不在当前匹配中的边
  - 右侧到左侧：当前匹配中的边
- 每轮搜索的终止条件是什么？（哪些情况下，本轮搜索任务完成可以结束？）
  - 找到一个未被当前匹配饱和的顶点（起点除外） ⇒ 找到一条增广路，替换得到更大的匹配 ⇒ 进入下一轮搜索
  - 或：已搜索所有的点和边，仍未找到 ⇒ 无增广路 ⇒ 找到最大匹配



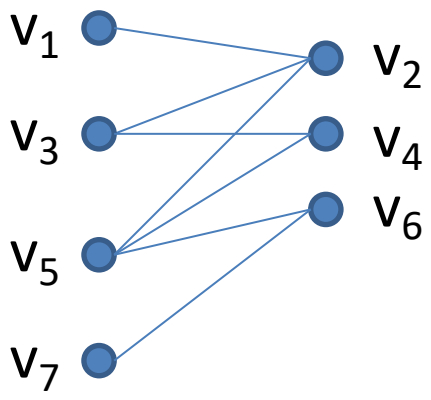
面向二部图的增广路算法 (续)

- 举例



面向二部图的增广路算法 (续)

- 举例

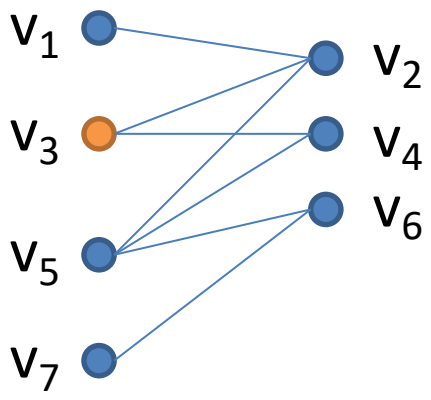


第一轮搜索开始

- 当前匹配：{}
- 未饱和的左侧顶点：{v_1, v_3, v_5, v_7}

面向二部图的增广路算法 (续)

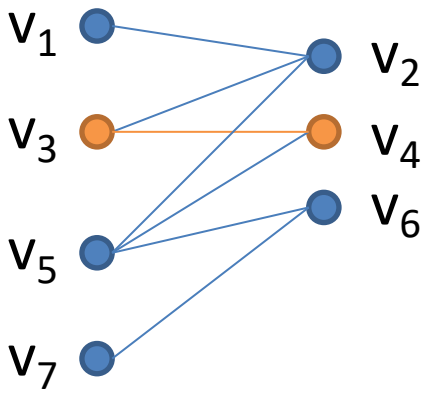
- 举例



从$\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$中选择v_3开始搜索

面向二部图的增广路算法 (续)

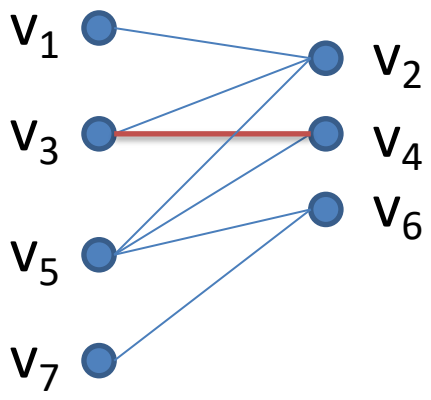
- 举例



沿不在当前匹配中且本轮未搜索过的(v_3, v_4)到达v_4 ⇒ v_4未饱和

面向二部图的增广路算法 (续)

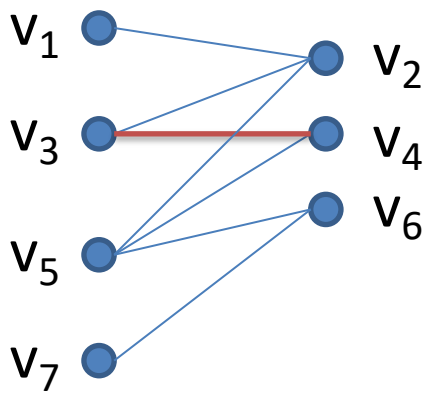
- 举例



找到增广路v_3v_4 ⇒ 替换进当前匹配中 ⇒ 本轮搜索结束

面向二部图的增广路算法 (续)

- 举例

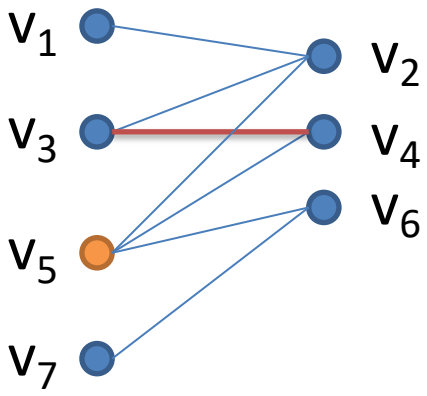


第二轮搜索开始

- 当前匹配：$\{(v_3, v_4)\}$
- 未饱和的左侧顶点：$\{v_1, v_5, v_7\}$

面向二部图的增广路算法 (续)

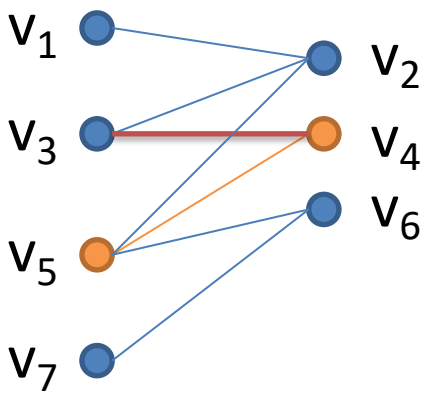
- 举例



从$\{v_1, v_5, v_7\}$中选择v_5开始搜索

面向二部图的增广路算法 (续)

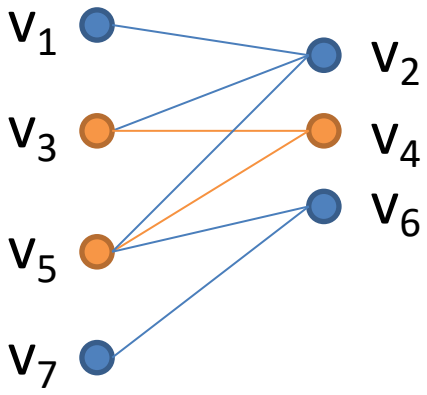
- 举例



沿不在当前匹配中且本轮未搜索过的(v_5, v_4)到达v_4 ⇒ v_4已被当前匹配中的(v_3, v_4)饱和

面向二部图的增广路算法 (续)

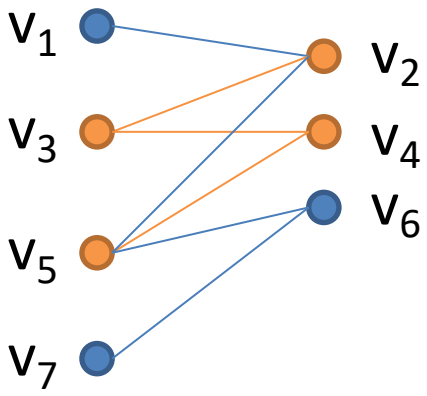
- 举例



沿当前匹配中的(v_3, v_4)到达v_3

面向二部图的增广路算法 (续)

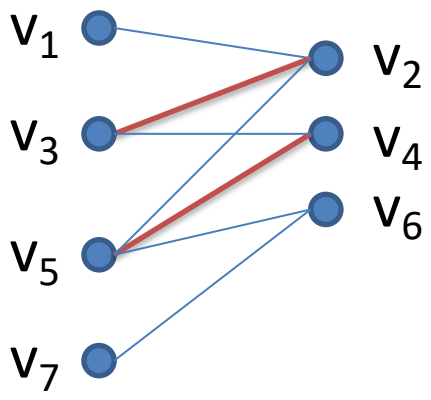
- 举例



沿不在当前匹配中且本轮未搜索过的(v_3, v_2)到达v_2 ⇒ v_2未饱和

面向二部图的增广路算法 (续)

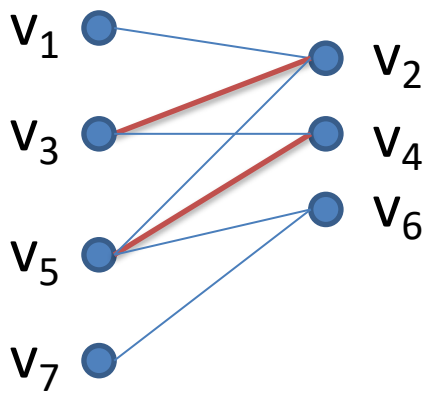
- 举例



找到增广路$v_5v_4v_3v_2$ ⇒ 替换进当前匹配中
⇒ 本轮搜索结束

面向二部图的增广路算法 (续)

- 举例

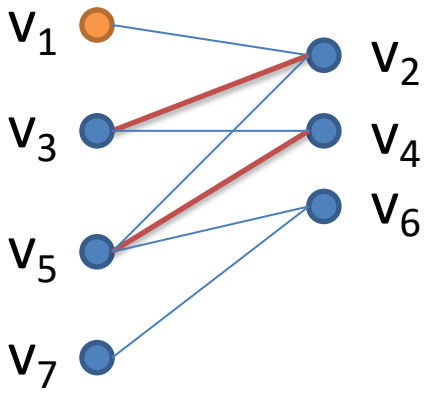


第三轮搜索开始

- 当前匹配：$\{(v_3, v_2), (v_5, v_4)\}$
- 未饱和的左侧顶点：$\{v_1, v_7\}$

面向二部图的增广路算法 (续)

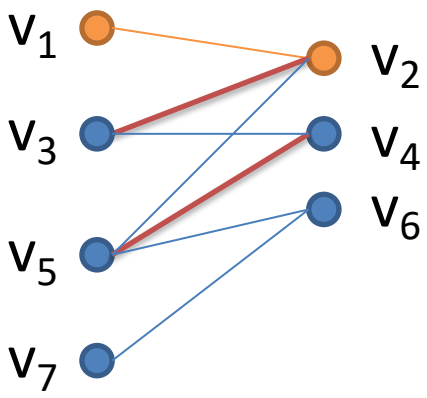
- 举例



从$\{v_1, v_7\}$中选择v_1开始搜索

面向二部图的增广路算法 (续)

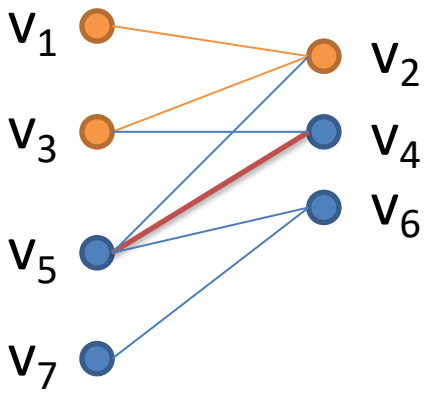
- 举例



沿不在当前匹配中且本轮未搜索过的(v_1, v_2)到达v_2 ⇒ v_2已被当前匹配中的(v_3, v_2)饱和

面向二部图的增广路算法 (续)

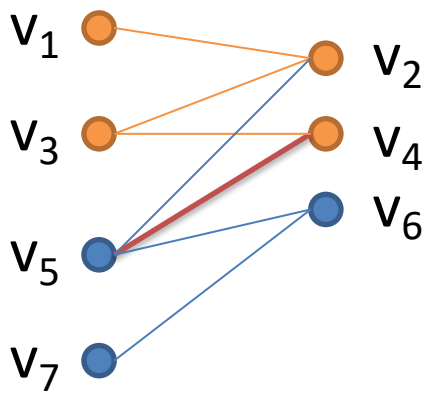
- 举例



沿当前匹配中的(v_3, v_2)到达v_3

面向二部图的增广路算法 (续)

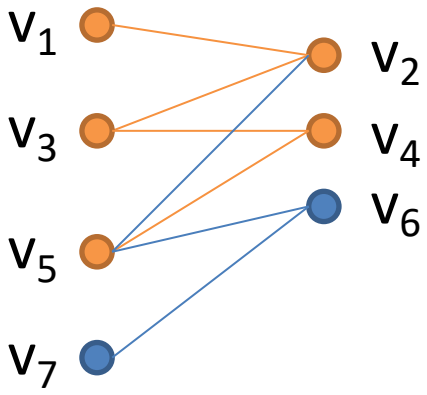
- 举例



沿不在当前匹配中且本轮未搜索过的(v_3, v_4)到达v_4 ⇒ v_4已被当前匹配中的(v_5, v_4)饱和

面向二部图的增广路算法 (续)

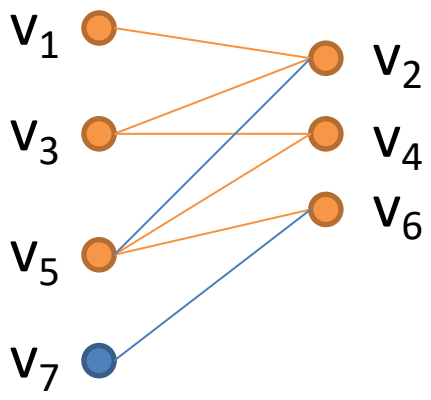
- 举例



沿当前匹配中的(v_5, v_4)到达v_5

面向二部图的增广路算法 (续)

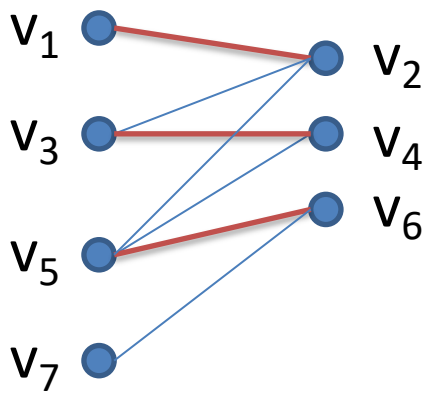
- 举例



沿不在当前匹配中且本轮未搜索过的(v_5, v_6)到达v_6 ⇒ v_6未饱和

面向二部图的增广路算法 (续)

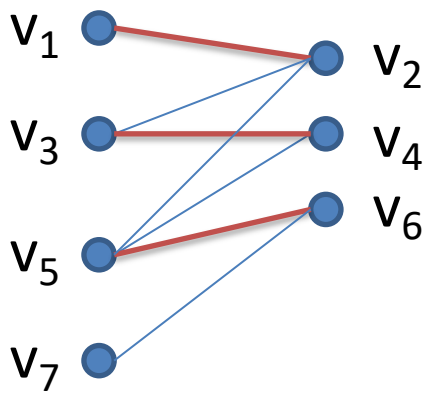
- 举例



找到增广路$v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ ⇒ 替换进当前匹配中 ⇒ 本轮搜索结束

面向二部图的增广路算法 (续)

- 举例

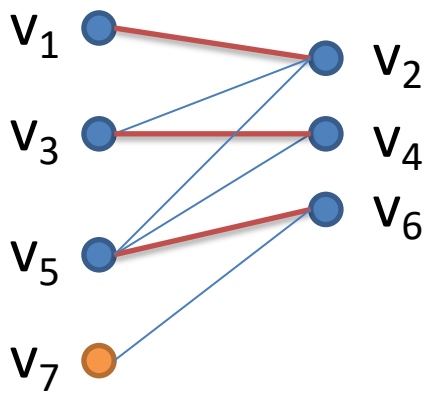


第四轮搜索开始

- 当前匹配：$\{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6)\}$
- 未饱和的左侧顶点：$\{v_7\}$

面向二部图的增广路算法 (续)

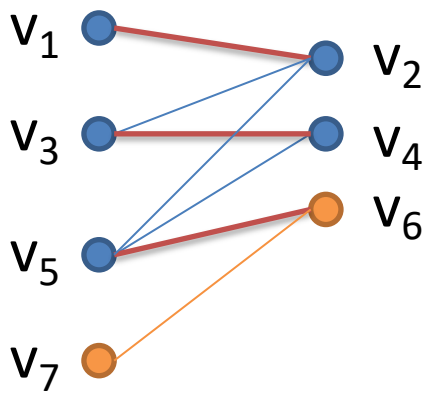
- 举例



从$\{v_7\}$中选择v_7开始搜索

面向二部图的增广路算法 (续)

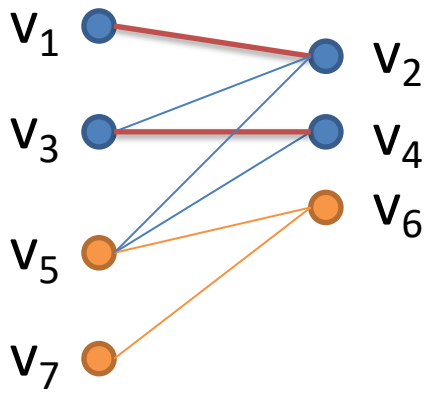
- 举例



沿不在当前匹配中且本轮未搜索过的(v_7, v_6)到达v_6 ⇒ v_6已被当前匹配中的(v_5, v_6)饱和

面向二部图的增广路算法 (续)

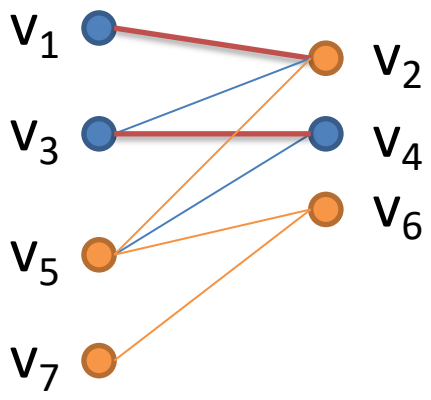
- 举例



沿当前匹配中的(v_5, v_6)到达v_5

面向二部图的增广路算法 (续)

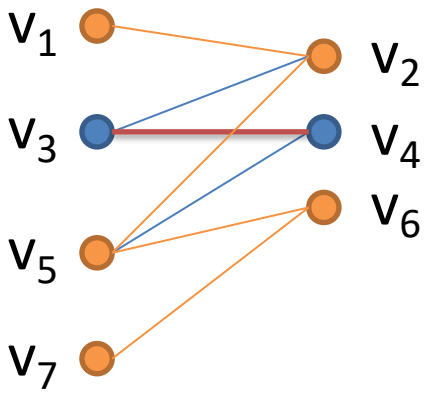
- 举例



沿不在当前匹配中且本轮未搜索过的(v_5, v_2)到达v_2 ⇒ v_2已被当前匹配中的(v_1, v_2)饱和

面向二部图的增广路算法 (续)

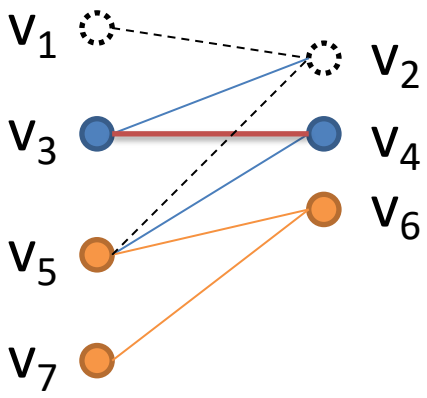
- 举例



沿当前匹配中的(v_1, v_2)到达v_1

面向二部图的增广路算法 (续)

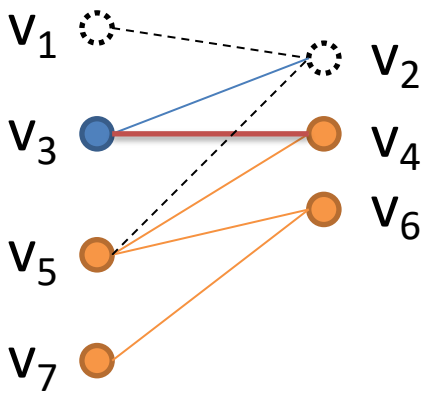
- 举例



v_1没有关联到任何不在当前匹配中且本轮未搜索过的边 ⇒ 回溯到v_5 (为什么不是V_2)

面向二部图的增广路算法 (续)

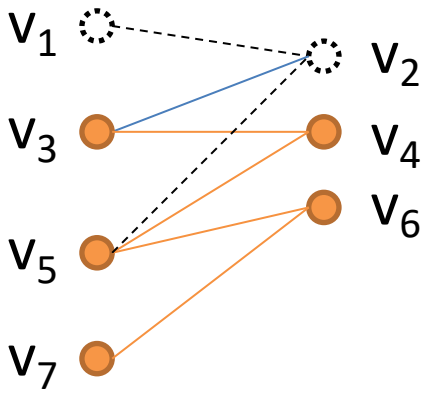
- 举例



沿不在当前匹配中且本轮未搜索过的(v_5, v_4)到达v_4 ⇒ v_4已被当前匹配中的(v_3, v_4)饱和

面向二部图的增广路算法 (续)

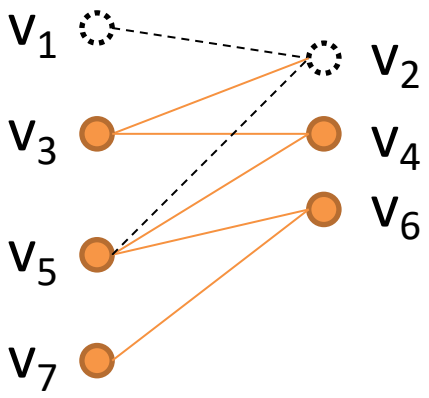
- 举例



沿当前匹配中的(v_3, v_4)到达v_3

面向二部图的增广路算法 (续)

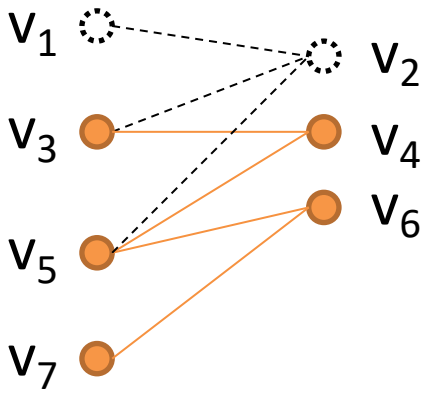
- 举例



沿不在当前匹配中且本轮未搜索过的(v_3, v_2)到达v_2

面向二部图的增广路算法 (续)

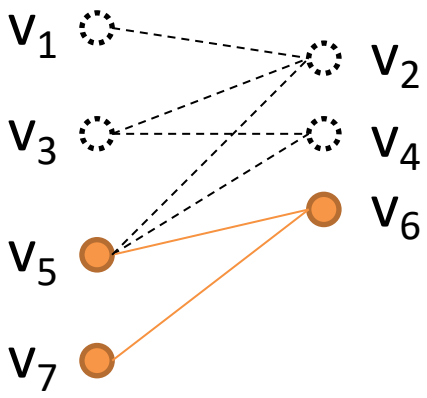
- 举例



v_2本轮已搜索过 ⇒ 回溯到v_3

面向二部图的增广路算法 (续)

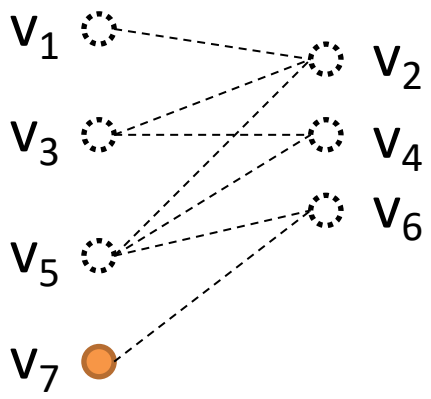
- 举例



v_3没有关联到任何不在当前匹配中且本轮未搜索过的边 ⇒ 回溯到v_5

面向二部图的增广路算法 (续)

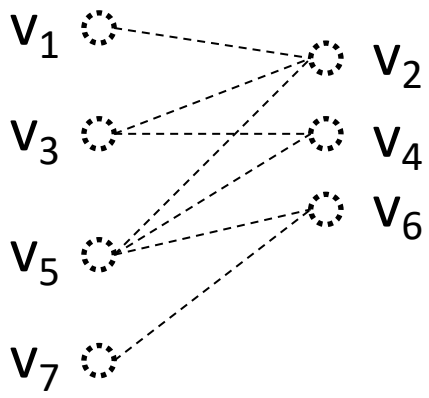
- 举例



v_5没有关联到任何不在当前匹配中且本轮未搜索过的边 ⇒ 回溯到v_7

面向二部图的增广路算法 (续)

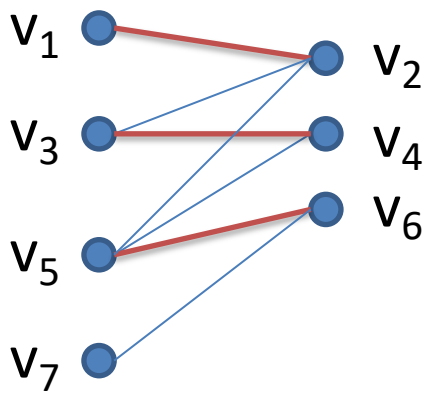
- 举例



v_7没有关联到任何不在当前匹配中且本轮未搜索过的边 ⇒ 回溯到头了⇒ 图中所有点和边都搜索过了 ⇒ 本轮搜索结束

面向二部图的增广路算法 (续)

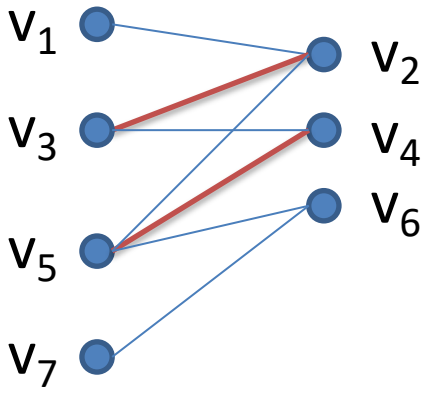
- 举例

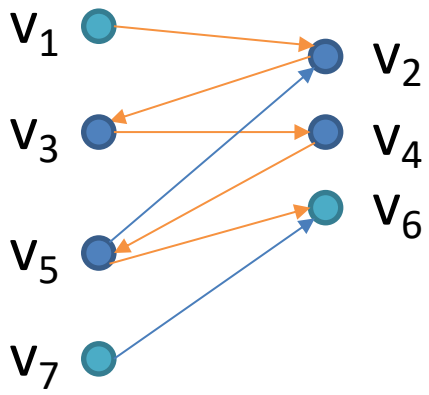


未搜索到增广路 ⇒ 无增广路 ⇒ 找到最大匹配

面向二部图的增广路算法 (续)

- 算法的正确性（要证明的结论是什么？）
  - 算法一定会终止（为什么？）
    - 每轮搜索一定会结束（为什么？）
    - 轮数一定是有限的（为什么？）
  - 算法一旦终止，找到的一定是最大匹配（为什么？）
    - 存在增广路 ⇒ 一定能找到
    - 找不到增广路 ⇒ 无增广路 ⇒ 找到最大匹配

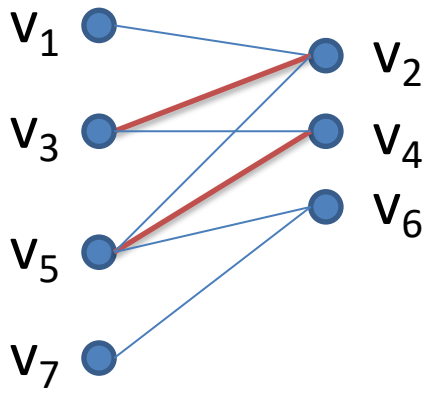




实现技巧

面向二部图的增广路算法 (续)

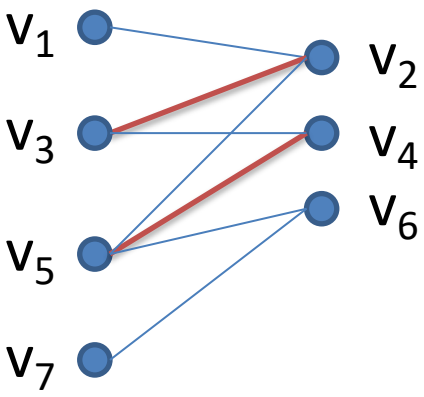
- 算法的运行时间
  - 搜索的最大轮数？
    - O(v)
  - 每轮搜索的最大步骤数？
    - O(v+ε)

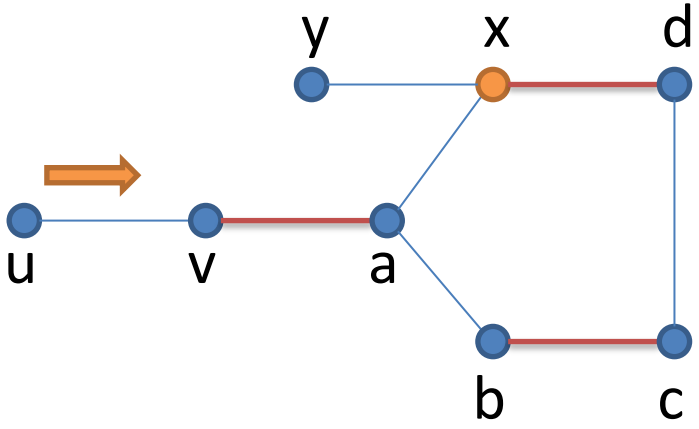


面向二部图的增广路算法 (续)

- 为什么增广路算法只适用于二部图？
  - 直观上
    - 二部图中，可以基于左右两侧为边定向
    - 一般图中，没有两侧的概念，不好定向
  - 本质上
    - 二部图中，每个左侧顶点在每一轮搜索中最多到达一次（作为起点，或当前匹配中一条边的终点）
    - 一般图中，可能有奇圈，第一次到达其中的“左侧”顶点可能是错误地作为不在当前匹配中的一条边的终点，即错误地将其当作“右侧”顶点了

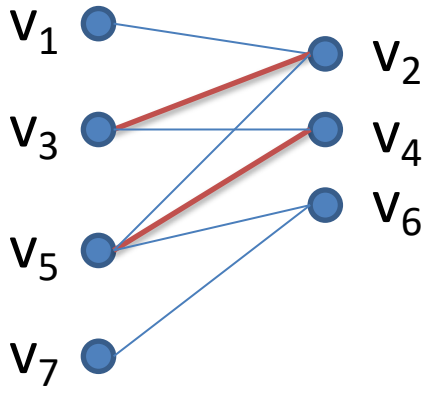
能不能在一般图中强行使用这个算法？





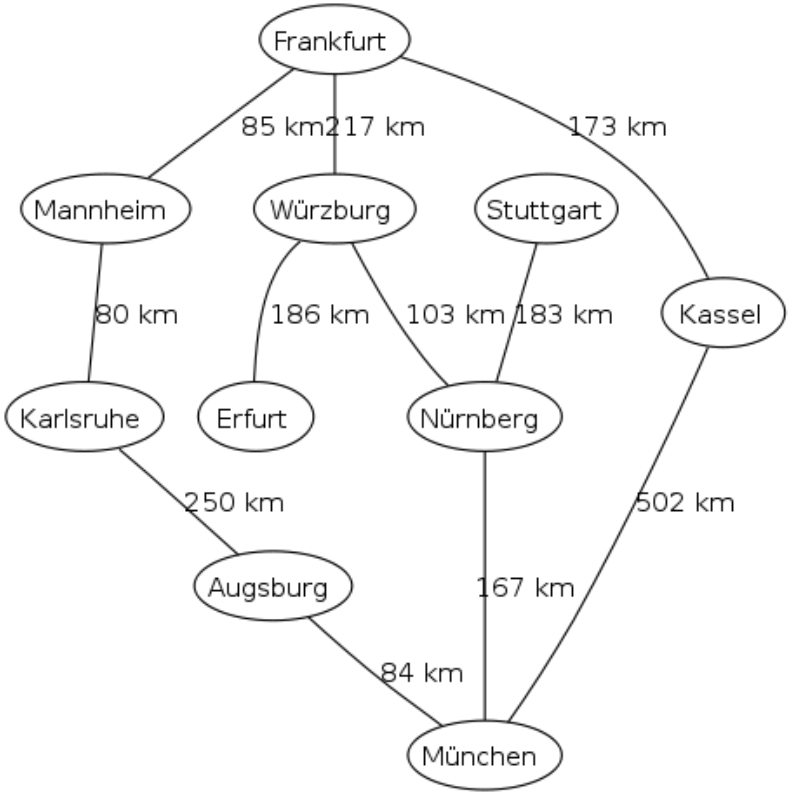
面向二部图的Hopcroft-Karp算法*

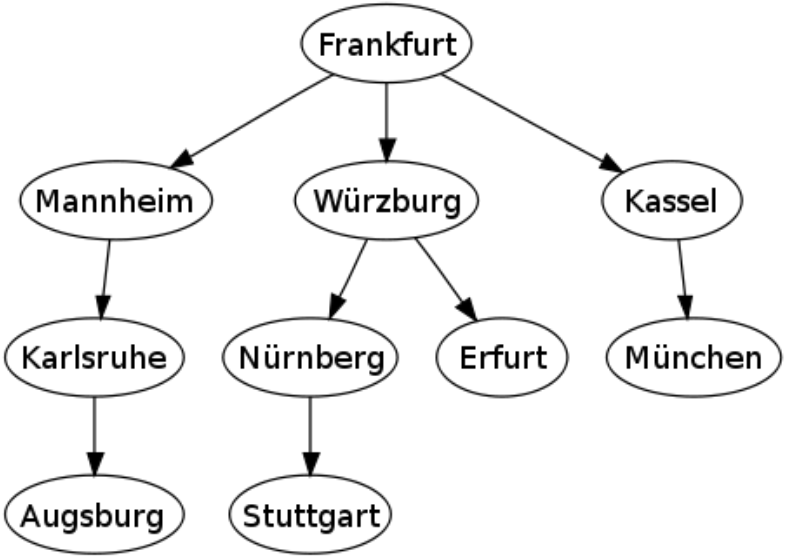
- 基本思路（在增广路算法的基础上）
  - 总是搜索最短的增广路
  - 每轮搜索多条无公共顶点的增广路，全部替换
- 你能根据这个思路设计一个算法吗？



面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 广度优先搜索（复习）



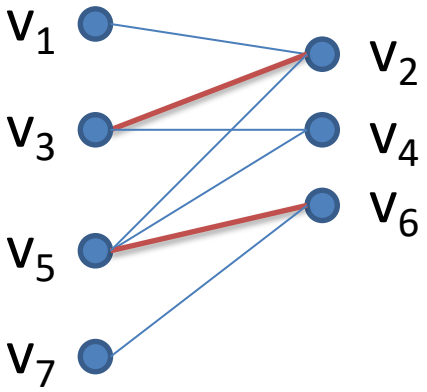


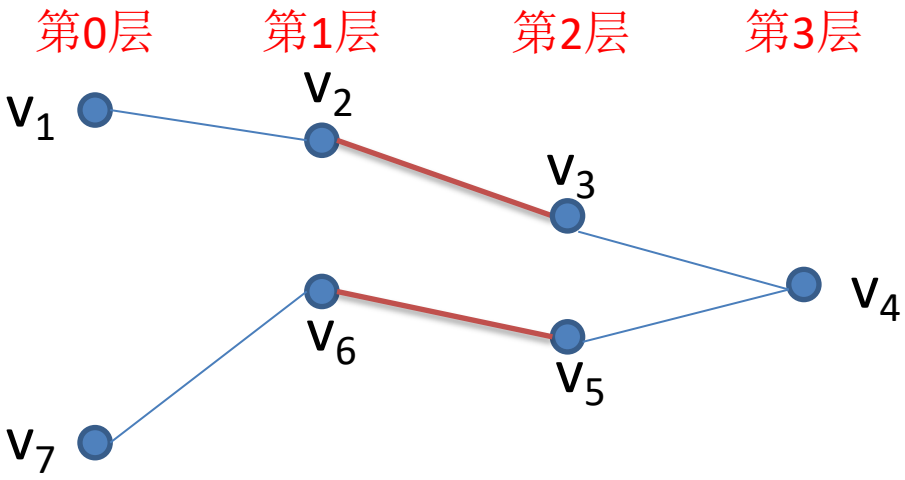
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/ad/MapGermanyGraph.svg/461px-MapGermanyGraph.svg.png
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/63/GermanyBFS.svg/460px-GermanyBFS.svg.png

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

每轮搜索的步骤

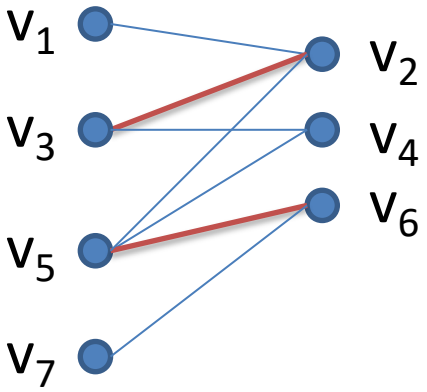
1. 最短增广路所有可能的起点？
   - 所有未饱和的左侧顶点
2. 最短增广路的长度及所有可能的终点？
   - 利用“并发的”广度优先搜索，对所有顶点进行分层
   - 上述所有可能的起点构成第0层
   - 与第i层相邻的所有未分层顶点构成第i+1层
     - i为偶数时，只能通过不在当前匹配中的边关联
     - i为奇数时，只能通过当前匹配中的边关联
   - 搜索终止于第k层的条件：第k层包含未饱和的右侧顶点，或已搜完所有顶点



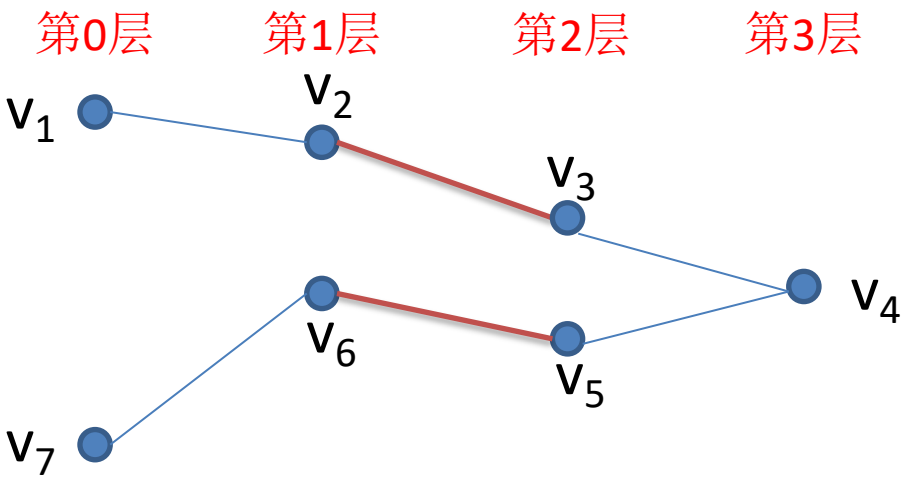


面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

3. 如何找到多条无公共顶点的最短增广路，
从而全部替换得到更大的匹配？
   - 在分层信息的引导下，利用反向的深度优先搜索降回第0层，从而找到一条增广路
   - 每找到一条增广路，就将其经过的顶点及其关联的边从图中临时删除（标记），以确保与后续找到的增广路无公共顶点

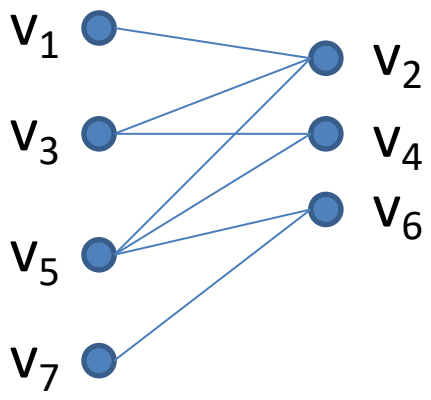


算法的终止条件：
找不到增广路 ⇒ 无增广路 ⇒ 找到最大匹配



面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

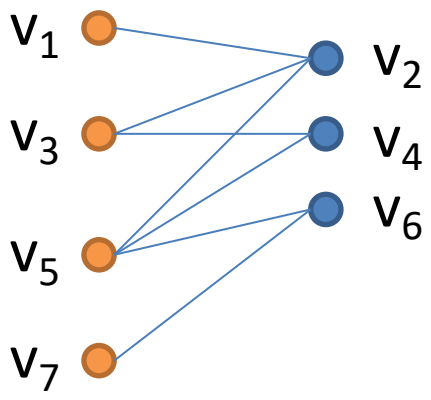


第一轮搜索开始

- 当前匹配：{}
- 未饱和的左侧顶点：{v_1, v_3, v_5, v_7}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

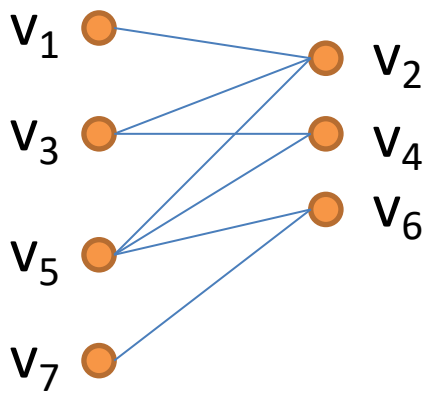


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_1, v_3, v_5, v_7}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

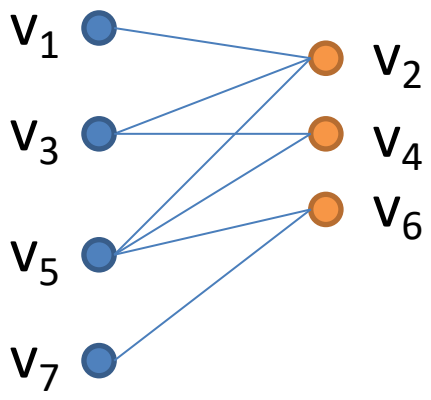


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_1, v_3, v_5, v_7}
- 沿不在当前匹配中的边到达第1层{v_2, v_4, v_6}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

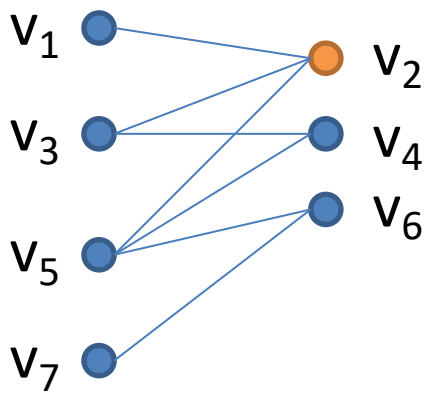


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_1, v_3, v_5, v_7}
- 沿不在当前匹配中的边到达第1层{v_2, v_4, v_6}
- 发现未饱和的右侧顶点{v_2, v_4, v_6}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

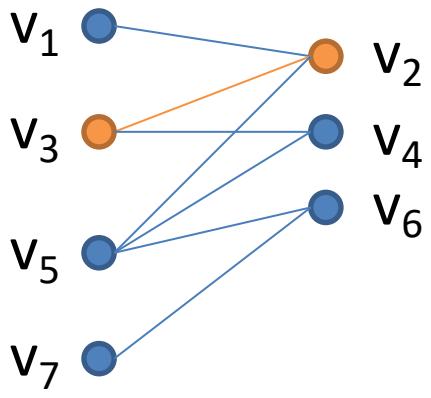
- 举例



从未饱和的右侧顶点v_2（位于第1层）开始反向降层的深度优先搜索

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

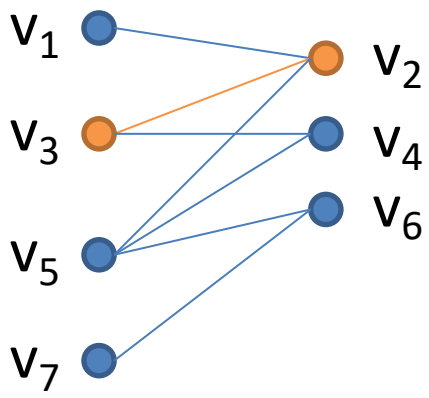
- 举例



- 1: v_2
- 0: v_3

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

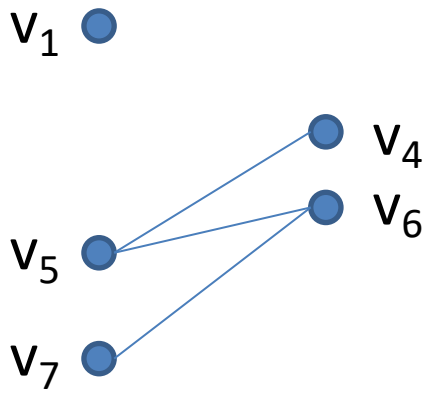


找到增广路v_2v_3 ⇒ 替换进当前匹配中

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

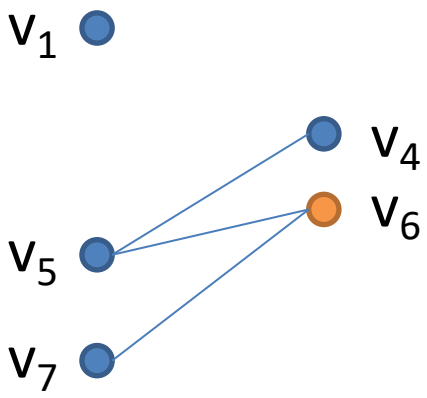
- 举例

临时删除v_2、v_3及其关联的边



面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

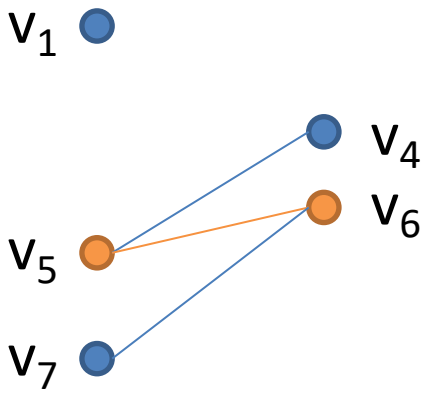
- 举例



从未饱和的右侧顶点v_6（位于第1层）开始反向降层的深度优先搜索

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

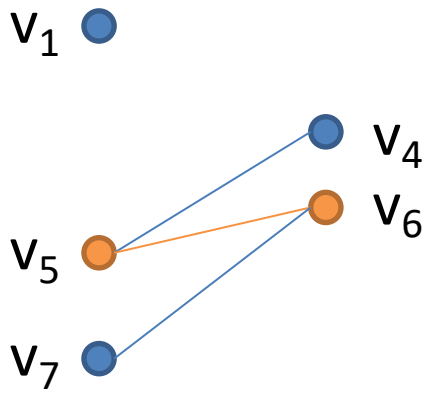


- 1: v_6
- 0: v_5

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

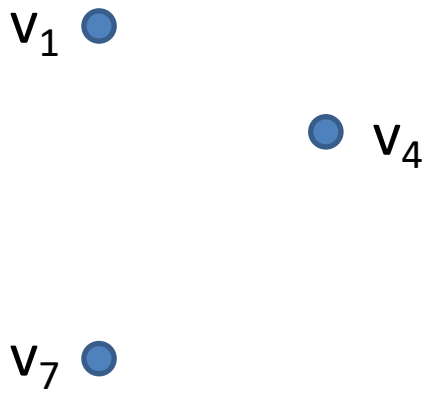
找到增广路v_6v_5 ⇒ 替换进当前匹配中



面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

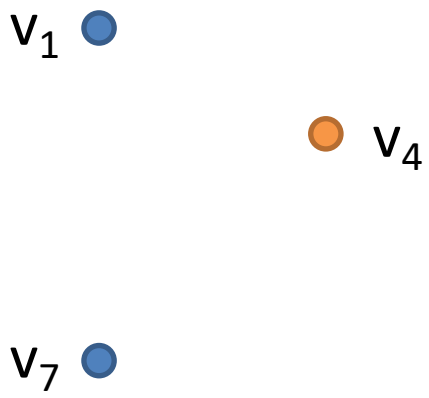
- 举例

临时删除v_6、v_5及其关联的边



面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

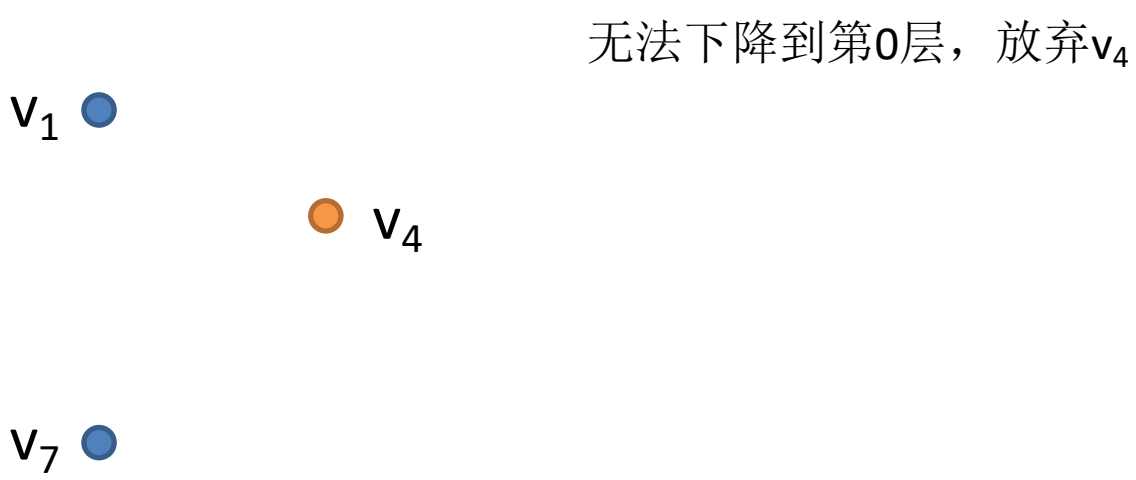
- 举例



从未饱和的右侧顶点v_4（位于第1层）开始反向降层的深度优先搜索

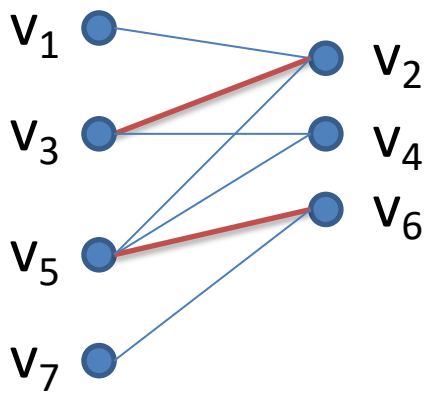
面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例



面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

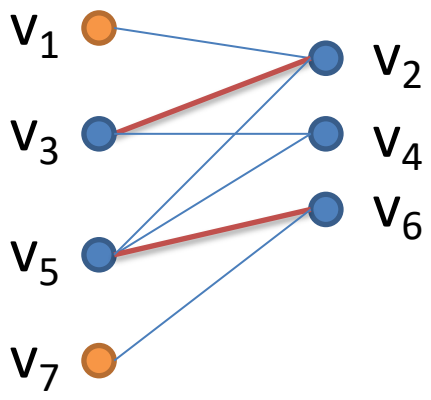


第二轮搜索开始

- 当前匹配：$\{(v_3, v_2), (v_5, v_6)\}$
- 未饱和的左侧顶点：$\{v_1, v_7\}$

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

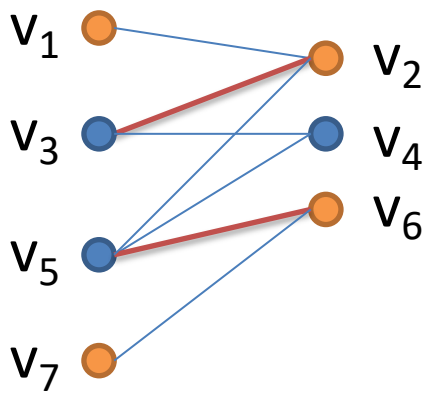


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_1, v_7}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

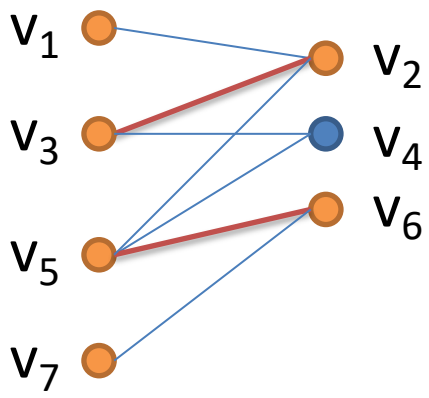


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_1, v_7}
- 沿不在当前匹配中的边到达第1层{v_2, v_6}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

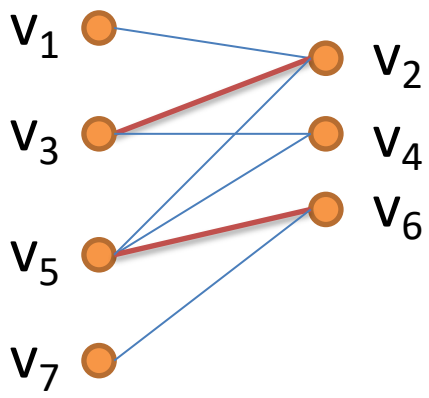


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_1, v_7}
- 沿不在当前匹配中的边到达第1层{v_2, v_6}
- 沿当前匹配中的边到达第2层{v_3, v_5}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

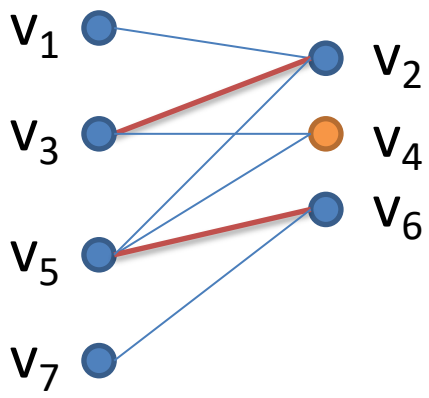


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_1, v_7}
- 沿不在当前匹配中的边到达第1层{v_2, v_6}
- 沿当前匹配中的边到达第2层{v_3, v_5}
- 沿不在当前匹配中的边到达第3层{v_4}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

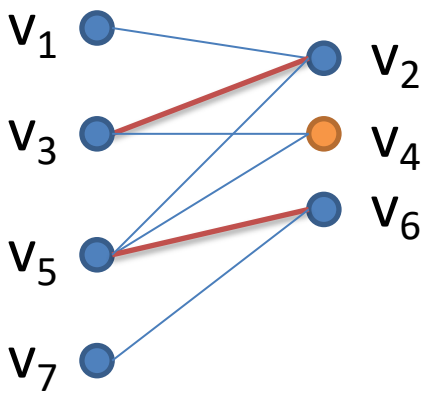


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_1, v_7}
- 沿不在当前匹配中的边到达第1层{v_2, v_6}
- 沿当前匹配中的边到达第2层{v_3, v_5}
- 沿不在当前匹配中的边到达第3层{v_4}
- 发现未饱和的右侧顶点{v_4}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

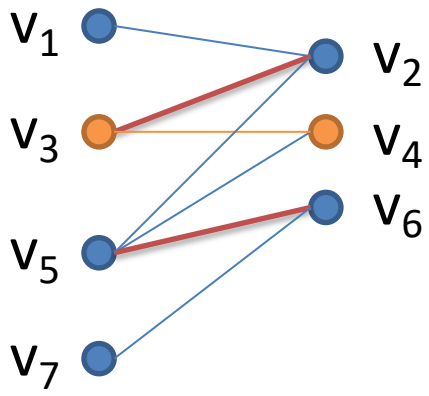
- 举例



从未饱和的右侧顶点v_4（位于第3层）开始反向降层的深度优先搜索

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

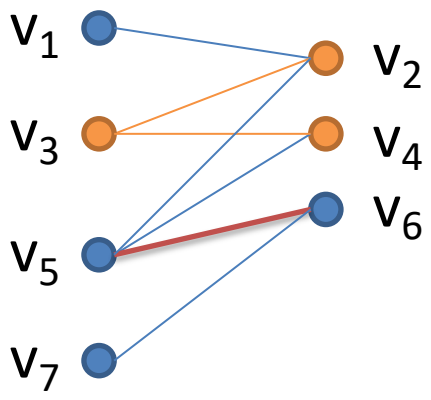
- 举例



- 3: v_4
- 2: v_3

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

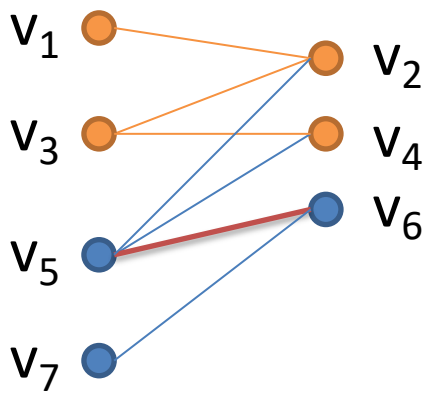
- 举例



- 3: v_4
- 2: v_3
- 1: v_2

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

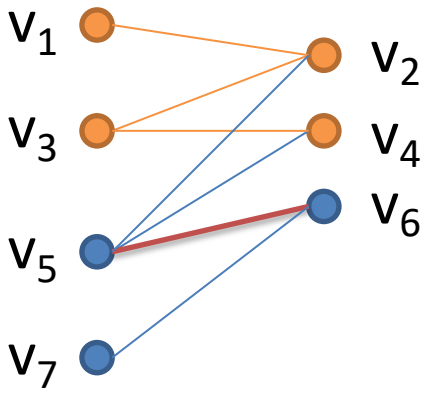
- 举例



- 3: v_4
- 2: v_3
- 1: v_2
- 0: v_1

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

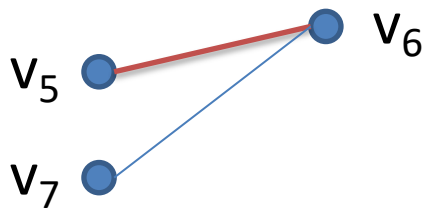


找到增广路$v_4v_3v_2v_1$ ⇒ 替换进当前匹配中

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

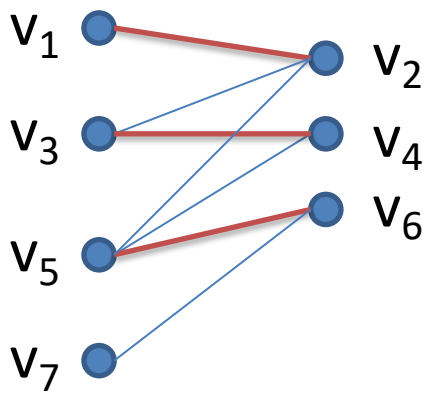
- 举例

临时删除v_4、v_3、v_2、v_1及其关联的边



面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

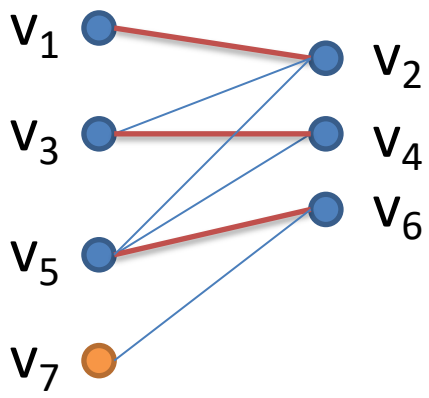


第三轮搜索开始

- 当前匹配：$\{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6)\}$
- 未饱和的左侧顶点：$\{v_7\}$

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

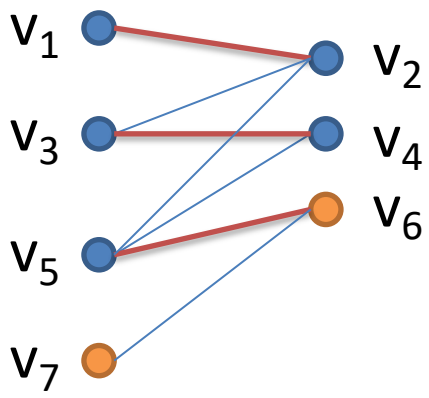


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_7}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

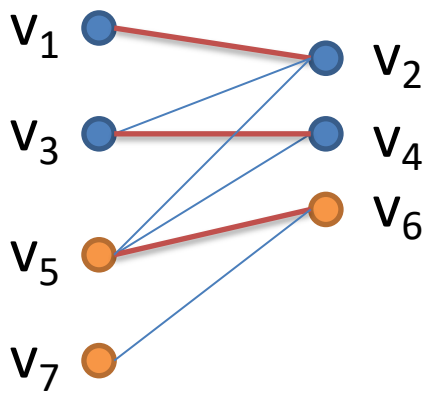


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_7}
- 沿不在当前匹配中的边到达第1层{v_6}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

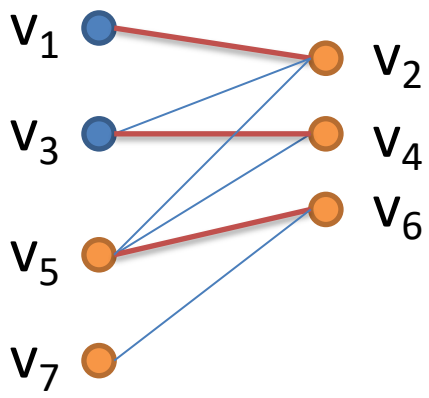


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_7}
- 沿不在当前匹配中的边到达第1层{v_6}
- 沿当前匹配中的边到达第2层{v_5}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

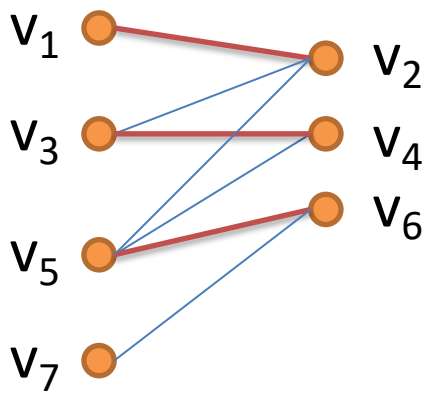


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_7}
- 沿不在当前匹配中的边到达第1层{v_6}
- 沿当前匹配中的边到达第2层{v_5}
- 沿不在当前匹配中的边到达第3层{v_2、v_4}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 举例

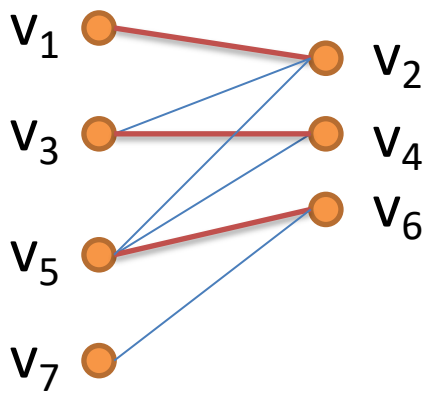


利用广度优先搜索分层

- 第0层{v_7}
- 沿不在当前匹配中的边到达第1层{v_6}
- 沿当前匹配中的边到达第2层{v_5}
- 沿不在当前匹配中的边到达第3层{v_2、v_4}
- 沿当前匹配中的边到达第4层{v_1、v_3}

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

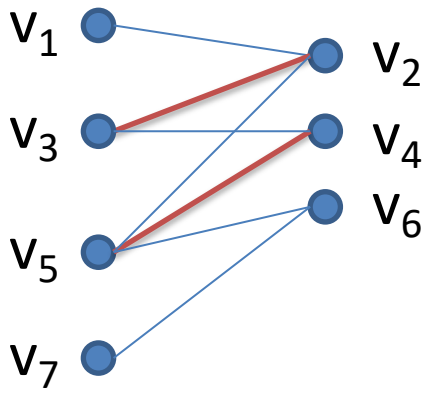
- 举例



已搜完所有顶点，未发现未饱和的右侧顶点
⇒ 无增广路 ⇒ 找到最大匹配

面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 算法的正确性
  - 算法一定会终止
  - 算法一旦终止，找到的一定是最大匹配



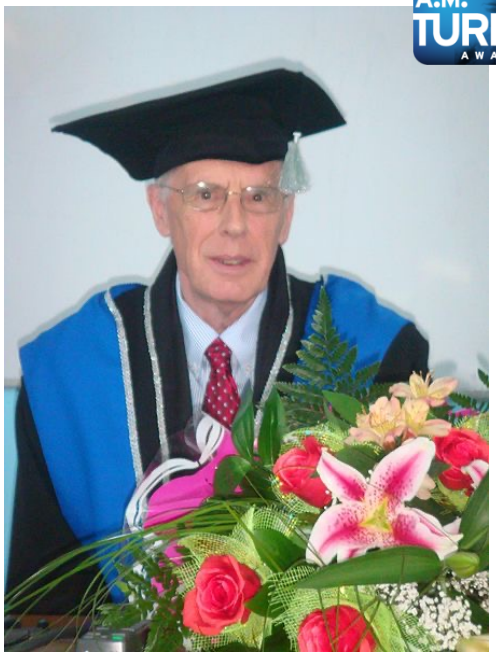
面向二部图的Hopcroft-Karp算法 (续)

- 算法的运行时间*
  - 引理1：如果每次都选取一条最短的增广路替换进当前匹配中，那么这些增广路的长度是非严格单调增的。
  - 引理2：上述过程中，相同长度的增广路无公共顶点。

    ⇒ 算法每轮找到的最短增广路都比上一轮找到的长
  - 引理3：上述过程中，增广路最多只有 $2\left\lfloor\sqrt{\frac{v}{2}}\right\rfloor+2$ 种不同的长度

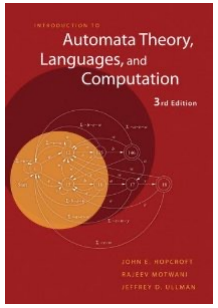
    ⇒ 算法最多搜索 $o(\sqrt{v})$ 轮
  - 结论
    - 搜索的最大轮数：$o(\sqrt{v})$
    - 每轮搜索的最大步骤数：O(v+ε)

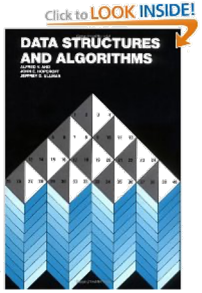
这两个引理合起来，可以得出什么结论？



John Edward Hopcroft, 美国, 1939--

Richard Manning Karp, 美国, 1935--

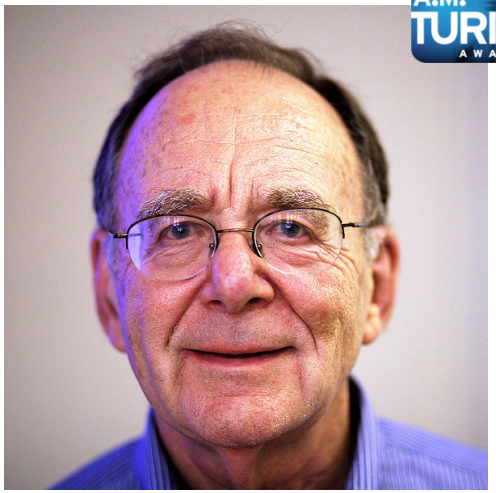




Karp's 21 NP-complete problems

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/6a/Hopcrofg.jpg/150px-Hopcrofg.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3e/Karp_mg_7725-b.cr2.jpg/220px-Karp_mg_7725-b.cr2.jpg

John Edward Hopcroft, 美国, 1939--

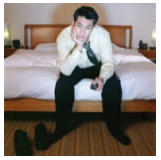


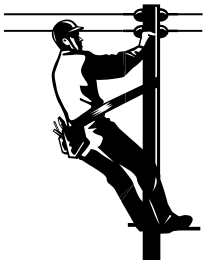
Richard Manning Karp, 美国, 1935--

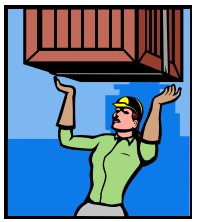
他们至今仍工作在教学和科研的第一线

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/6a/Hopcrofg.jpg/150px-Hopcrofg.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3e/Karp_mg_7725-b.cr2.jpg/220px-Karp_mg_7725-b.cr2.jpg

二部图的最大权匹配（分配/指派问题）

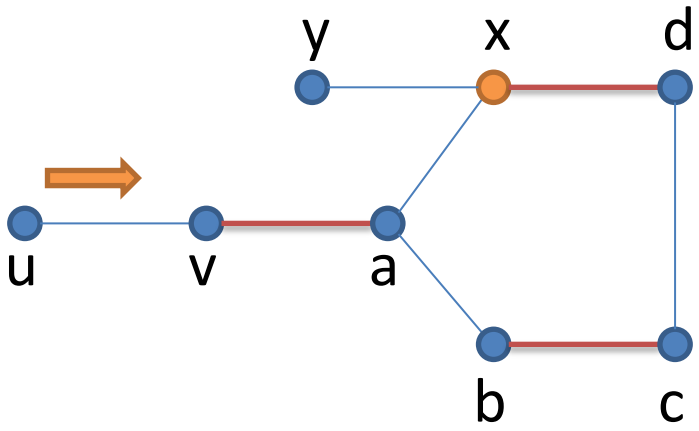






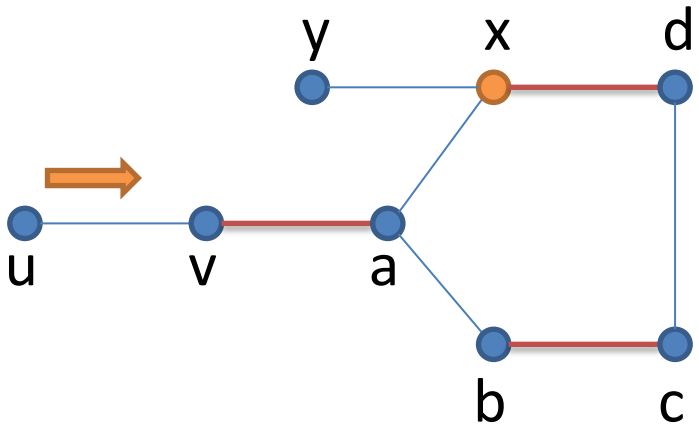
面向一般图的Edmonds算法*

- 目标：使用增广路算法，并解决由奇圈带来的问题
- 关键点：走到a时，你是怎么知道应该往b走而不是往x？
  - 在a时，并不知道。但如果先跳到y，从y回退到x，就知道了。



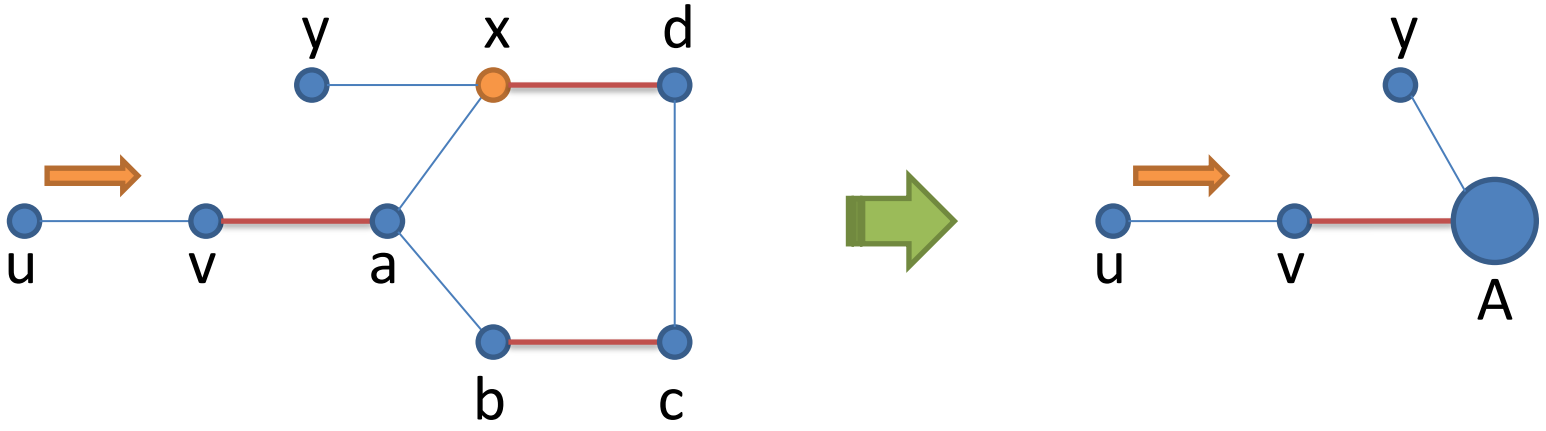
面向一般图的Edmonds算法 (续)

- 基本思路（在增广路算法的基础上）
  - 在每轮搜索中，如果经过长为奇数的交错路到达的一个顶点在本轮搜索中已经经过长为偶数的交错路到达过，那么就发现了一个奇圈，这两条路的并称作flower，这个奇圈称作blossom
  - 两条交错路的最长公共子路称作stem，它的终点称作base



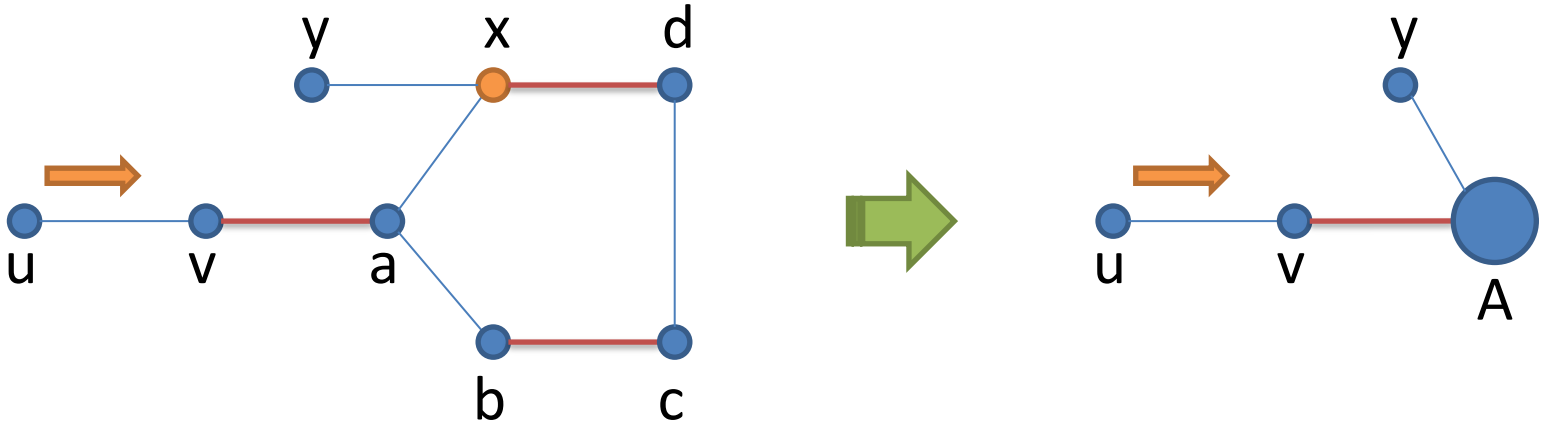
面向一般图的Edmonds算法 (续)

- 基本思路（在增广路算法的基础上）
  - stem的最后一条边在当前匹配中（为什么？）
  - blossom中的顶点关联的边中，除blossom中的边和stem的最后一条边以外，其它都不在当前匹配中（为什么？）
  - 将blossom收缩为一个顶点：顶点合并，内部边删除、外部边保留（外部边保持原先的在/不在匹配中）
  - 如果新图中有增广路，那么原图中一定有增广路（为什么？）



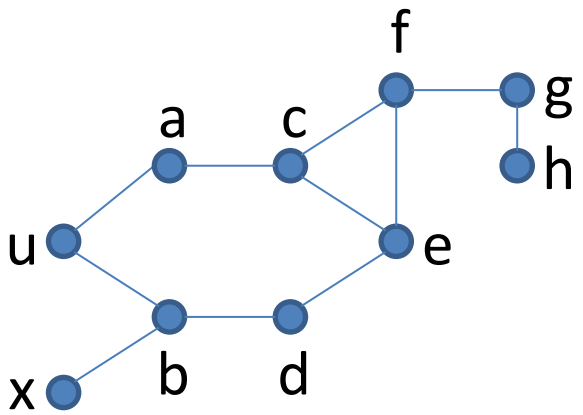
面向一般图的Edmonds算法 (续)

- 关键步骤（在增广路算法的基础上）
  - 在搜索的过程中，一旦发现奇圈，就将其收缩为一个顶点，再继续搜索
  - 如果新图中的增广路经过收缩后的顶点，那么利用奇圈中两条交错路之一（恰有一条符合要求）将其还原到原图中的增广路



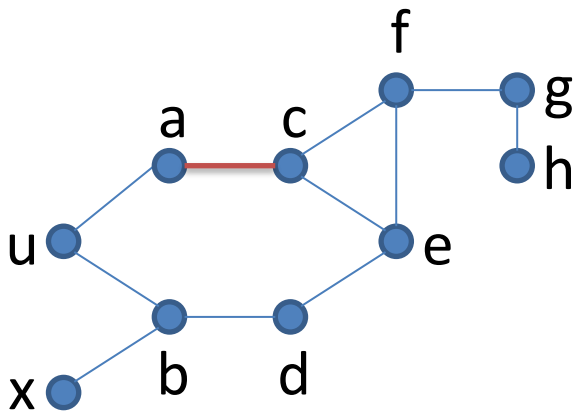
面向一般图的Edmonds算法 (续)

- 举例



面向一般图的Edmonds算法 (续)

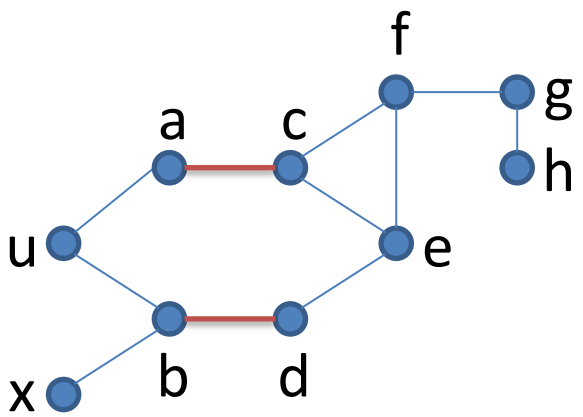
- 举例



从未饱和的a开始搜索，找到增广路ac

面向一般图的Edmonds算法 (续)

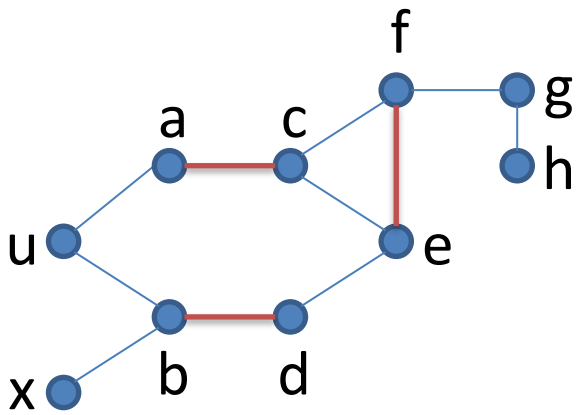
- 举例



从未饱和的b开始搜索，找到增广路bd

面向一般图的Edmonds算法 (续)

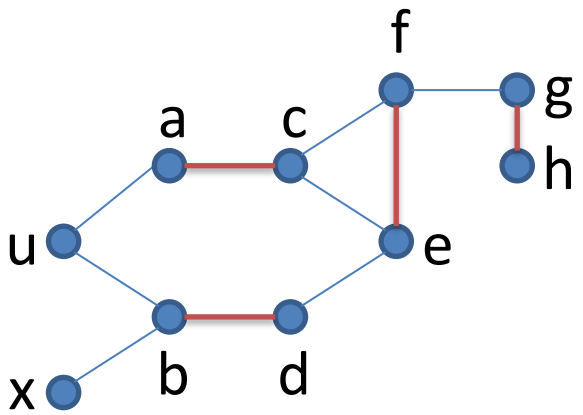
- 举例



从未饱和的e开始搜索，找到增广路ef

面向一般图的Edmonds算法 (续)

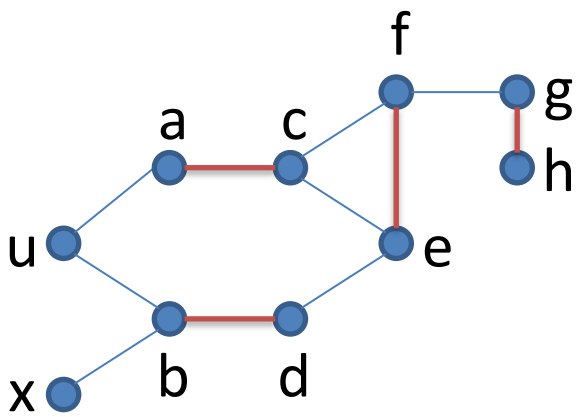
- 举例



从未饱和的g开始搜索，找到增广路gh

面向一般图的Edmonds算法 (续)

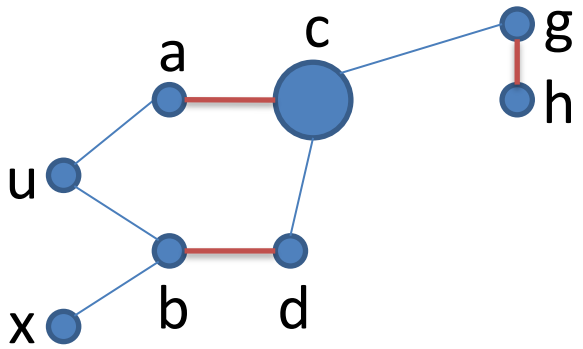
- 举例



从未饱和的u开始搜索，沿交错路uacfec，此时，长为5的交错路到达了之前长为2的交错路到达过的顶点c，发现flower，其中：blossom为cfe，stem为uac

面向一般图的Edmonds算法 (续)

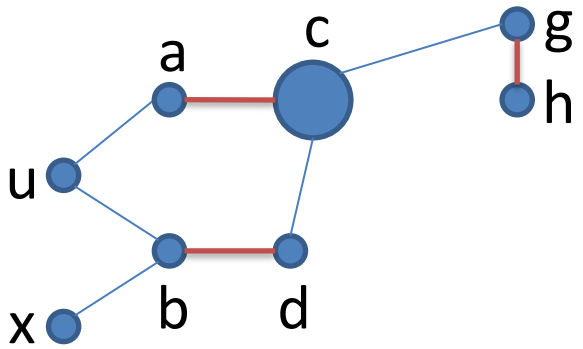
- 举例



收缩cfe为C，继续搜索

面向一般图的Edmonds算法 (续)

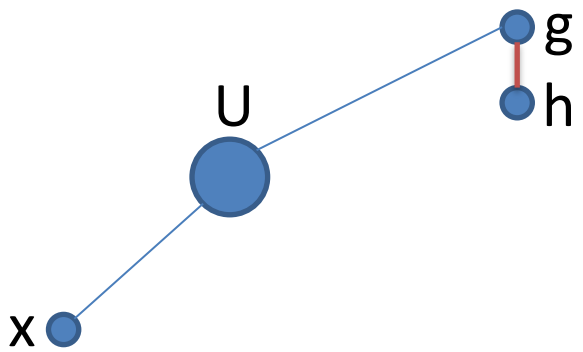
- 举例



沿交错路uaCdbu，此时，长为5的交错路到达了之前长为0的交错路到达过的顶点u，发现flower，其中：blossom为uaCdb，stem为空

面向一般图的Edmonds算法 (续)

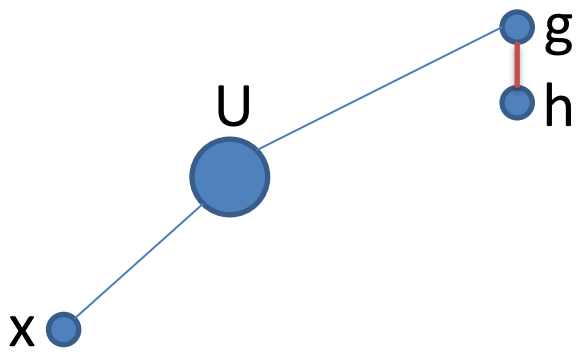
- 举例



收缩uaCdb为U，继续搜索

面向一般图的Edmonds算法 (续)

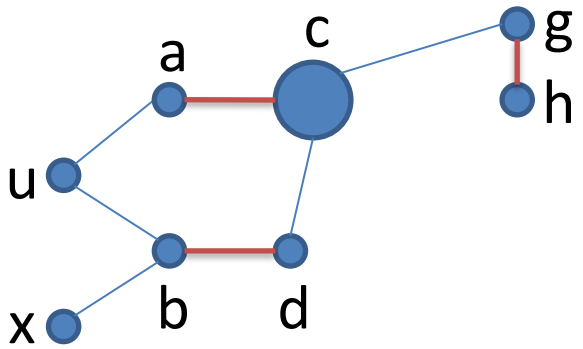
- 举例



找到增广路Ux，涉及收缩顶点U

面向一般图的Edmonds算法 (续)

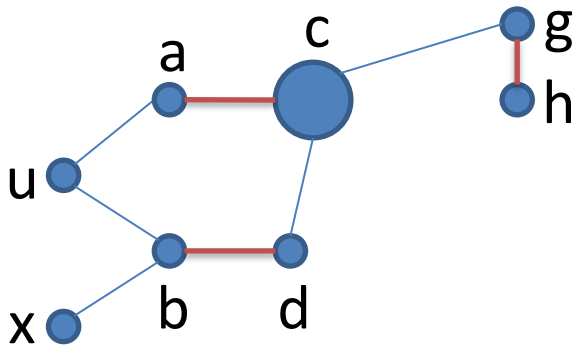
- 举例



将U还原，从关联到x的不在当前匹配中的边bx起，延交错路uaCdbx退回到base u

面向一般图的Edmonds算法 (续)

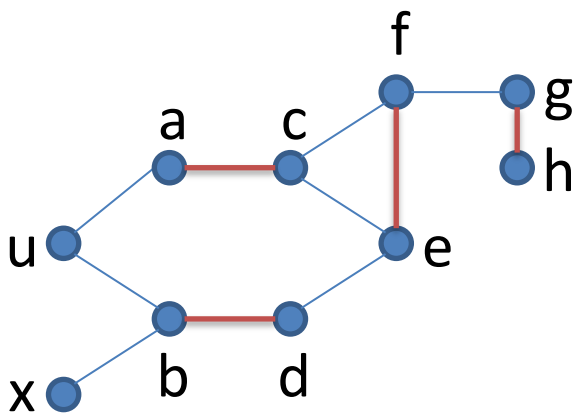
- 举例



找到增广路uaCdbx，涉及收缩顶点C

面向一般图的Edmonds算法 (续)

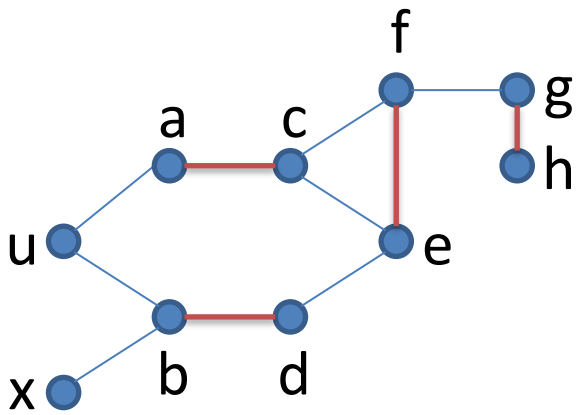
- 举例



将C还原，从关联到d的不在当前匹配中的边ed起，延交错路cfe退回到base c

面向一般图的Edmonds算法 (续)

- 举例



找到增广路uacfedbx，不涉及收缩顶点，替换进当前匹配中，本轮搜索结束

面向一般图的Edmonds算法 (续)

- 算法的运行时间
  - 朴素的实现：$O(v^4)$
  - 用合适的数据结构表示blossom和处理收缩：$O(v^3)$

- 一般图最大匹配的其它算法：$O\left(\sqrt{v}\varepsilon\right)$
  - 与面向二部图的Hopcroft-Karp算法相当

In this paper we present an $O(\sqrt{|V|}\cdot|E|)$ algorithm for finding a maximum matching in general graphs. This algorithm works in 'phases'. In each phase a maximal set of disjoint minimum length augmenting paths is found, and the existing matching is increased along these paths.

Our contribution consists in devising a special way of handling blossoms, which enables an $O(|E|)$ implementation of a phase. In each phase, the algorithm grows Breadth First Search trees at all unmatched vertices. When it detects the presence of a blossom, it does not 'shrink' the blossom immediately. Instead, it delays the shrinking in such a way that the first augmenting path found is of minimum length. Furthermore, it achieves the effect of shrinking a blossom by a special labeling procedure which enables it to find an augmenting path through a blossom quickly.

Jack R. Edmonds, 美国, 1934--

http://www.iasi.cnr.it/jack/edmonds_big.jpg

作业：编程实现增广路算法

- 在OJ上完成，助教将给每位同学单独发送账号和密码
  - 助教：丁文韬
- 提交截止时间：4月30日23:00