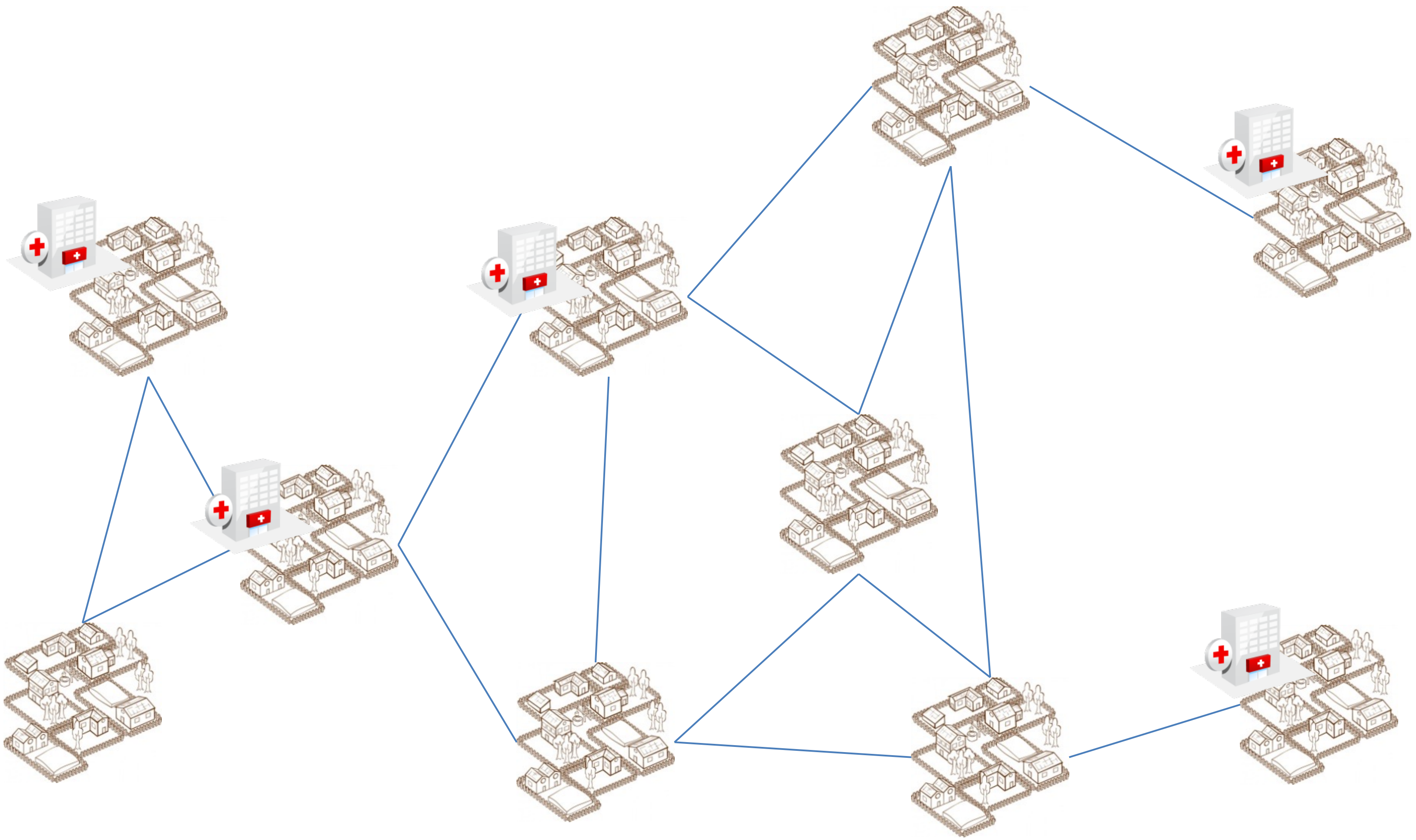
支配集、点独立集和点覆盖集

程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

本节课的主要内容

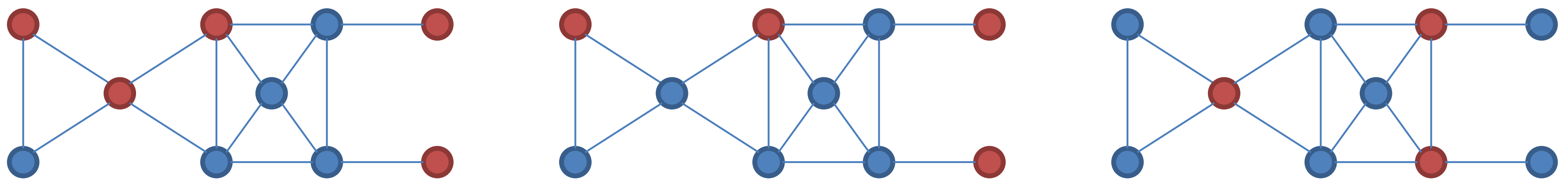
5.1 支配集、点独立集、点覆盖集

支配集（控制集）



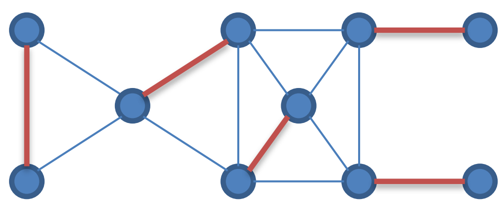
支配集（控制集）

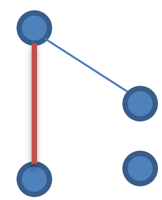
- 支配集 (dominating set)
  - D是G的支配集：∀v∈(V(G)\D), ∃u∈D, (u, v)∈E(G)
- 极小支配集 (minimal dominating set)
  - 顶点数极少（任何一个真子集都不再是支配集）
- 最小支配集 (minimum dominating set)
  - 顶点数最少
- 支配数 (domination number)
  - γ(G)：最小支配集的势



支配集与匹配

- 支配集与完美匹配之间有什么关系？
  - 从完美匹配中的每条边任取一个端点构成一个支配集。
  - 从最大匹配中的每条边任取一个端点构成一个支配集吗？



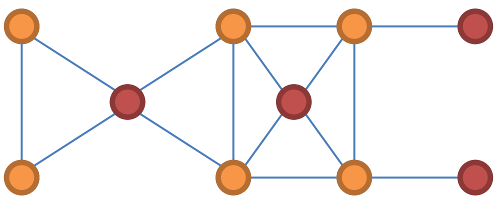


支配集与其补集

- 定理5.1.1 无孤立顶点的图G中，存在支配集D和V(G)\D。

证明：只讨论连通图。你能想到构造方法吗？

1. ∀u∈V(G)。
2. D={v: d(v, u)是偶数}，V(G)\D={v: d(v, u)是奇数}。

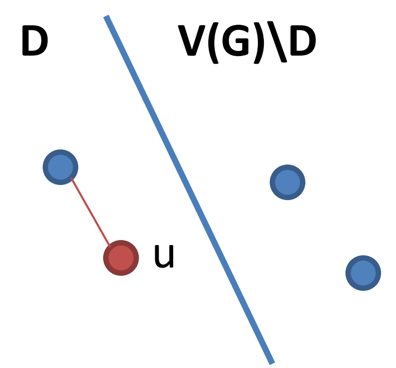


支配集与其补集 (续)

- 定理5.1.2 无孤立顶点的图G中，极小支配集D的补集V(G)\D是支配集。

证明：你能自己证明吗？

1. 反证法：V(G)\D不是支配集 ⇒ ∃u∈D与V(G)\D中的顶点均不相邻
2. 如何推出矛盾？
   - G中无孤立顶点 ⇒ u与D中的顶点相邻 ⇒ D\{u}仍是支配集 ⇒ D不是极小支配集

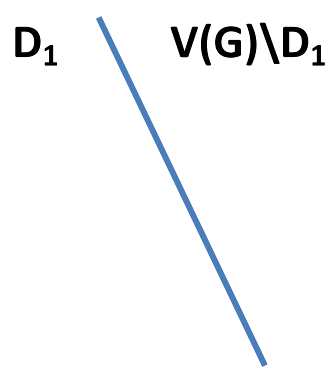


支配集与其补集 (续)

- 推论5.1.1 无孤立顶点的图G中，对任意一个极小支配集D_1，必存在另一个极小支配集D_2，使得$D_1 \cap D_2 = \emptyset$。

证明：你能自己证明吗？

定理5.1.2 ⇒ $V(G) \setminus D_1$是支配集且$D_1 \cap (V(G) \setminus D_1) = \emptyset$ ⇒ 在$V(G) \setminus D_1$的子集中取极小可得D_2



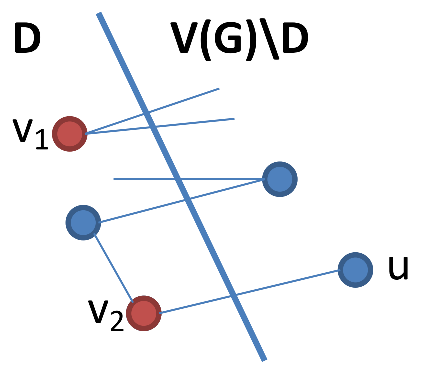
极小支配集的充要条件

- 定理5.1.3 图G的支配集D是一个极小支配集当且仅当D中每个顶点v满足下列条件之一：

(1) $N(v)\cap D=\emptyset$；

(2) 存在$u\in V(G)\setminus D$使得$N(u)\cap D=\{v\}$。

证明：$\Leftarrow$



极小支配集的充要条件 (续)

- 定理5.1.3 图G的支配集D是一个极小支配集当且仅当D中每个顶点v满足下列条件之一：

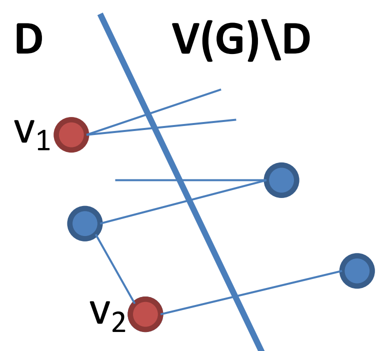
(1) $N(v)\cap D=\emptyset$；

(2) 存在$u\in V(G)\setminus D$使得$N(u)\cap D=\{v\}$。

证明：$\Rightarrow$

D是极小支配集 $\Rightarrow$ $D\setminus\{v\}$不是支配集 $\Rightarrow$ $\exists u\in\{v\}\cup(V(G)\setminus D)$与$D\setminus\{v\}$中的顶点均不相邻 $\Rightarrow$

- $u=v \Rightarrow N(v)\cap D=\emptyset \Rightarrow (1)$
- $u\neq v \Rightarrow u\in V(G)\setminus D$且$N(u)\cap(D\setminus\{v\})=\emptyset$，而D是支配集 $\Rightarrow (u, v)\in E(G) \Rightarrow N(u)\cap D=\{v\} \Rightarrow (2)$



支配数的估计

- 定理5.1.5 无孤立顶点的图G满足$\gamma(G) \le \nu/2$。

证明：你能自己证明吗？

极小支配集D的补集也是支配集 $\Rightarrow$

$\gamma(G) \le \min\{|D|, |V(G) \setminus D|\} \le \nu/2$

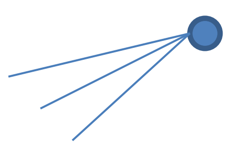
支配数的估计 (续)

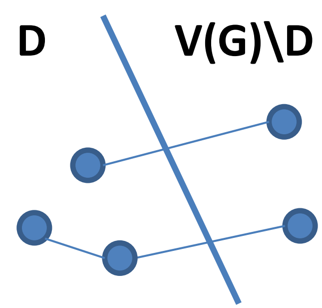
- 定理5.1.7 $\left\lceil \frac{\nu}{1+\Delta(G)} \right\rceil \le \gamma(G) \le \nu - \Delta(G)$

证明：

1. 右侧，你能自己证明吗？
   - 显然
2. 左侧：G有最小支配集D $\Rightarrow V(G)\setminus D \subseteq \bigcup_{v\in D} N(v) \Rightarrow$ |V(G)\D|≤|D|Δ(G)

   $\Rightarrow$ ν-γ(G)≤γ(G)Δ(G) $\Rightarrow \left\lceil \frac{\nu}{1+\Delta(G)} \right\rceil \le \gamma(G)$



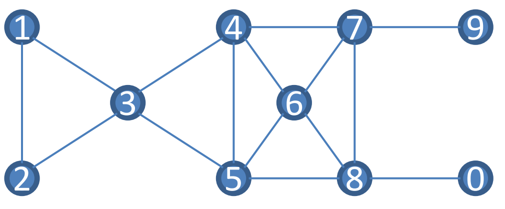


求最小支配集的算法

- 与集合覆盖问题可以相互转化：NP-hard

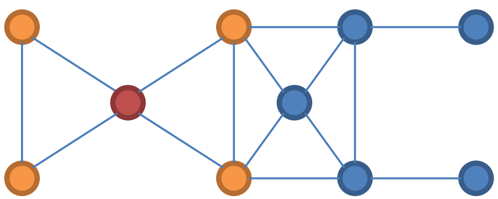
求最小支配集的算法

- 与集合覆盖问题可以相互转化：NP-hard
- 贪心算法
  - 每一轮迭代总是选取能支配最多剩余顶点的那个顶点
  - 近似比：1+logv



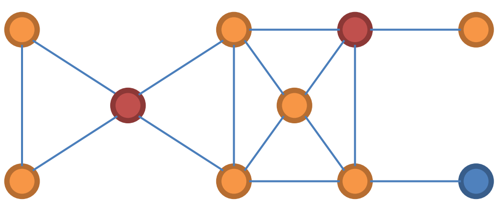
求最小支配集的算法

- 与集合覆盖问题可以相互转化：NP-hard
- 贪心算法
  - 每一轮迭代总是选取能支配最多剩余顶点的那个顶点
  - 近似比：1+logv



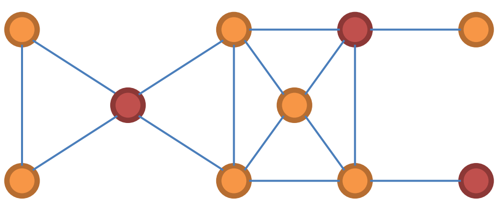
求最小支配集的算法

- 与集合覆盖问题可以相互转化：NP-hard
- 贪心算法
  - 每一轮迭代总是选取能支配最多剩余顶点的那个顶点
  - 近似比：1+logv



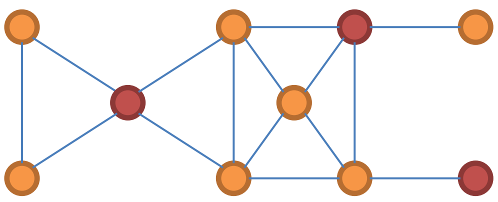
求最小支配集的算法

- 与集合覆盖问题可以相互转化：NP-hard
- 贪心算法
  - 每一轮迭代总是选取能支配最多剩余顶点的那个顶点
  - 近似比：1+logv



求最小支配集的算法

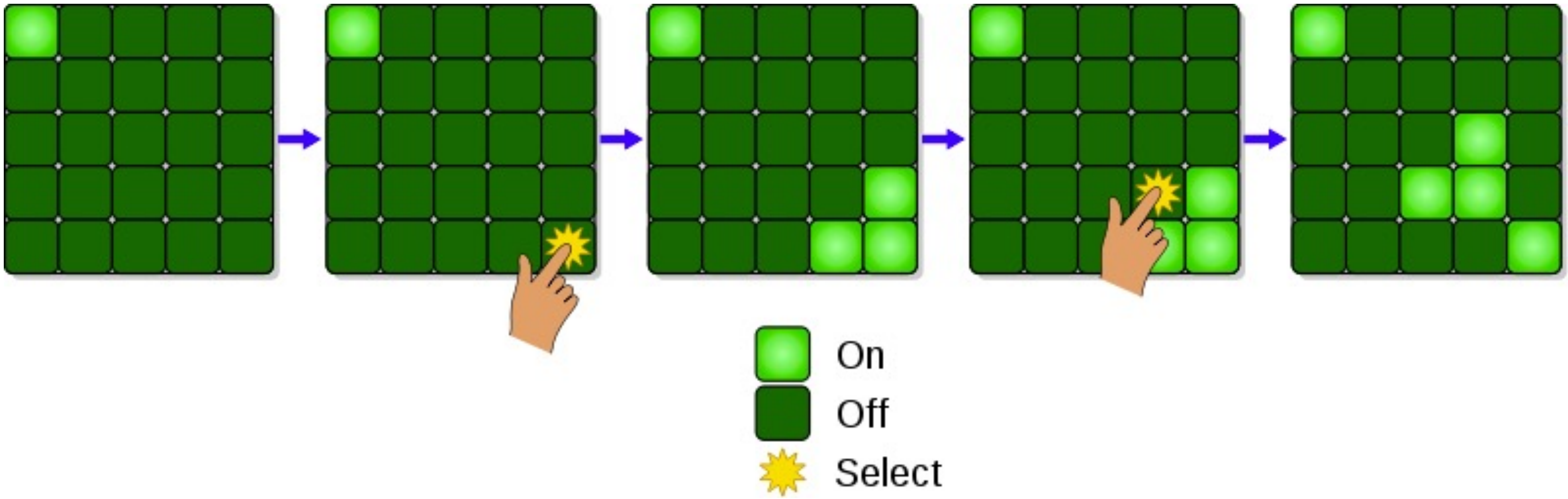
- 与集合覆盖问题可以相互转化：NP-hard
- 贪心算法
  - 每一轮迭代总是选取能支配最多剩余顶点的那个顶点
  - 近似比：1+logv



- 不存在近似比好于对数的多项式时间算法（除非P=NP）
  - 贪心算法已经足够好了

支配集的应用

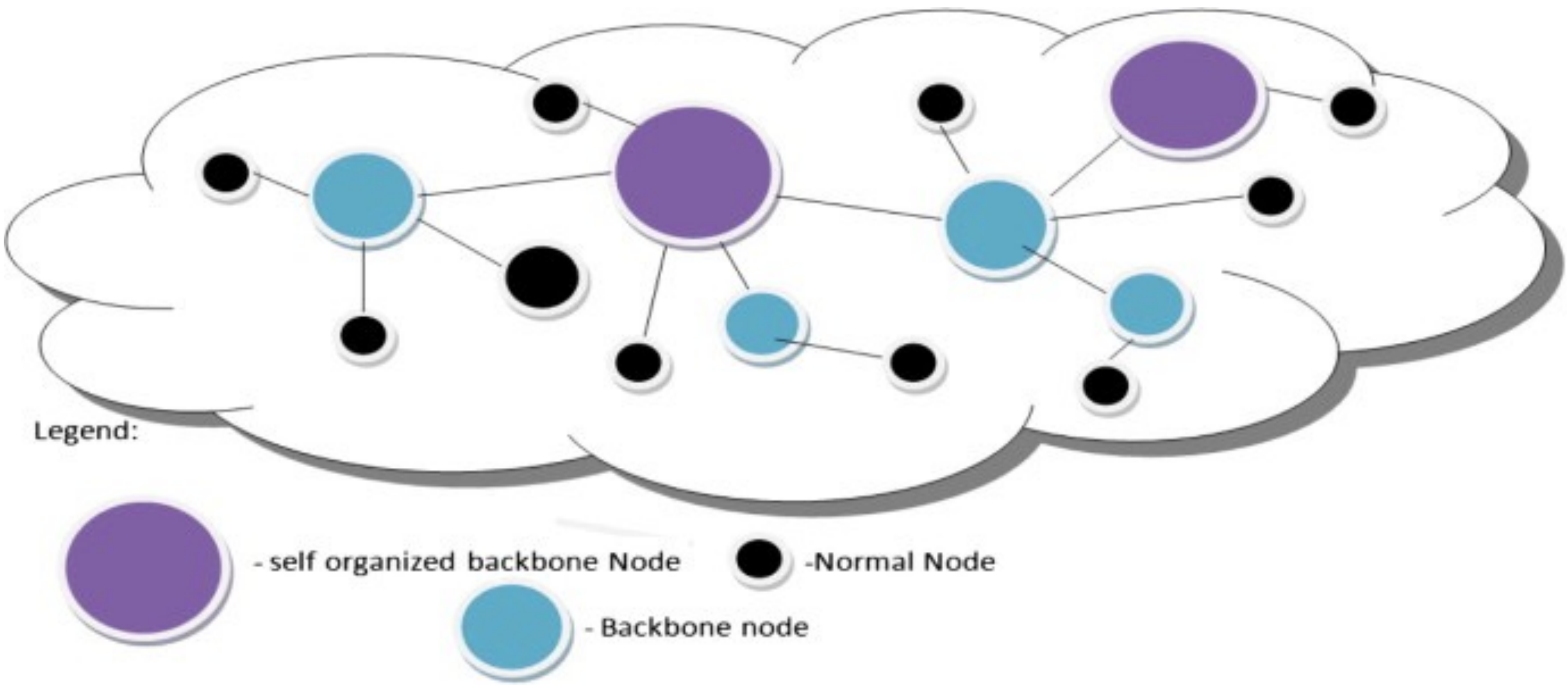
- 奇次支配集：Lights Out



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a9/LightsOutIllustration.svg/800px-LightsOutIllustration.svg.png

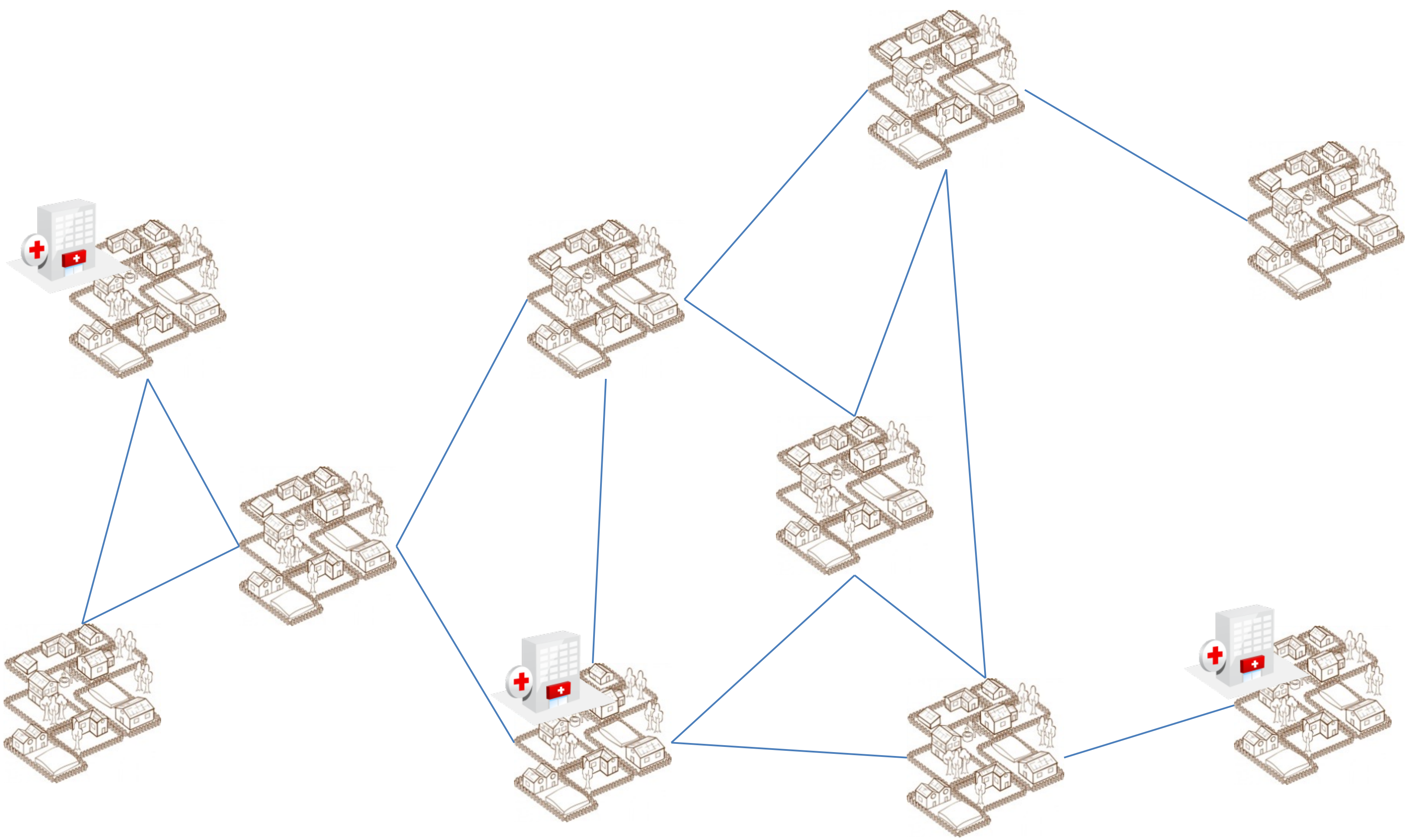
支配集的应用 (续)

- 最小连通支配集：自组网络中的虚拟骨干网



https://ars.els-cdn.com/content/image/1-s2.0-S0045790611000334-gr1.jpg

点独立集



点独立集

- 点独立集 (vertex independent set)
  - I是G的点独立集：∀u, v∈I, (u, v)∉E(G)
- 极大点独立集 (maximal vertex independent set)
  - 顶点数极多（不是任何一个点独立集的真子集）
- 最大点独立集 (maximum vertex independent set)
  - 顶点数最多
- 独立数 (independence number)
  - α(G)：最大点独立集的势

点独立集与支配集

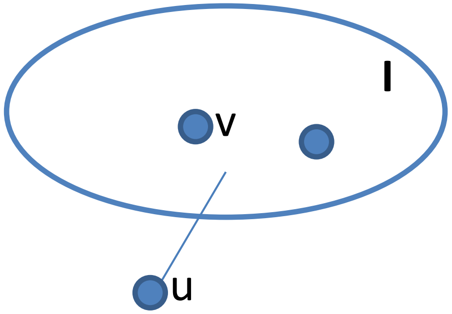
- 定理5.1.8 极大点独立集必是极小支配集。

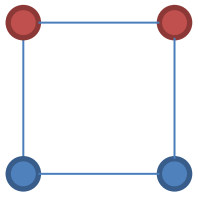
证明：（给你一点时间，自己思考）

1. 为什么是支配集？
   – I是极大点独立集 ⇒ ∀u∈V(G)\I与I中顶点相邻 ⇒ I是支配集
2. 为什么极小？
   – I是点独立集 ⇒ ∀v∈I与I\{v}中顶点不相邻 ⇒ I\{v}不是支配集

⇒ I是极小支配集

反之成立吗？





点独立集与支配集 (续)

- 定理5.1.9 若I是点独立集，则它是极大点独立集当且仅当它是支配集。

证明：

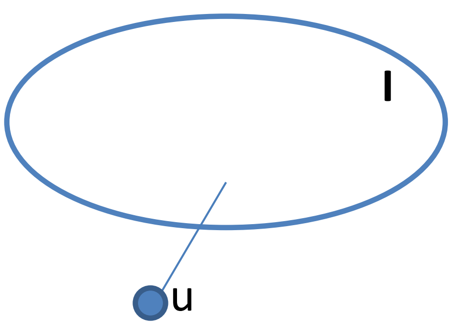
- $\Rightarrow$

定理5.1.8

- $\Leftarrow$ 你能自己证明吗？

I是支配集 $\Rightarrow$ $\forall u \in V(G)\backslash I$与I中顶点相邻 $\Rightarrow$ $I \cup \{u\}$不是点独立集

$\Rightarrow$ I是极大点独立集



点独立集与支配集 (续)

- 定理5.1.10 $\alpha(G) \geq \gamma(G)$

证明：你能自己证明吗？

（利用刚才的定理：若I是点独立集，则它是极大点独立集当且仅当它是支配集。）

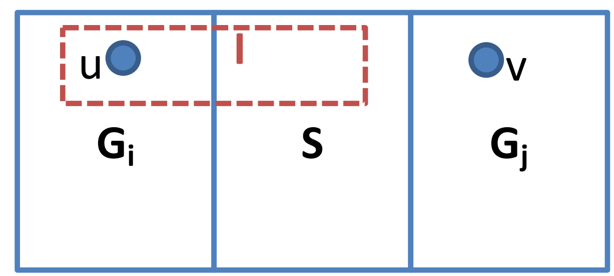
I是最大点独立集 ⇒ I是极大点独立集 ⇒ I是支配集 ⇒ $\gamma(G) \leq |I| = \alpha(G)$

点独立集与连通度

- 定理5.1.11 设$\nu(G)\geq 2$。若图G中任二不相邻顶点x与y均有$d(x)+d(y)\geq \nu(G)$，则$\alpha(G)\leq \kappa(G)$。

证明：

$d(x)+d(y)\geq \nu \Rightarrow$ G是连通图（为什么？）



- 如果G是完全图，你能自己证明吗？
  - $\alpha=1\leq \nu-1=\kappa$。
- 如果G不是完全图：

1. 反证法：$\alpha\geq\kappa+1$。
2. 取最大点独立集I $\Rightarrow |I|=\alpha\geq\kappa+1$
3. 不是完全图 $\Rightarrow$ 取最小点割集S $\Rightarrow |S|=\kappa$
4. S是点割集 $\Rightarrow$ G\S的连通分支为$G_1, G_2, \ldots, G_w$ $(w\geq 2)$
5. I是独立集 $\Rightarrow \forall x, y\in I$, $|N(x)\cup N(y)|\leq |V(G)\setminus I|=\nu-\alpha \Rightarrow |N(x)\cap N(y)|=|N(x)|+|N(y)|-|N(x)\cup N(y)|=d(x)+d(y)-|N(x)\cup N(y)|\geq \nu-(\nu-\alpha)=\alpha\geq\kappa+1=|S|+1 \Rightarrow$ x和y在G\S中有公共邻点 $\Rightarrow$ 如果$x, y\notin S$，那么x和y在G\S的同一个连通分支G_i中 $\Rightarrow I\setminus S\subseteq G_i \Rightarrow I\subseteq G_i\cup S$，而 $|I|=\alpha\geq\kappa+1=|S|+1 \Rightarrow \exists u\in I\cap G_i$
6. 取$v\in G_j\neq G_i \Rightarrow |N(u)\cup N(v)|\leq \nu-|I\cap G_i|-|\{v\}|=\nu-|I\setminus(I\cap S)|-1=\nu-(\alpha-|I\cap S|)-1$ (*)
7. $N(u)\cap N(v)\subseteq S\setminus I \Rightarrow |N(u)\cap N(v)|\leq\kappa-|I\cap S|$ (**)
8. (*)和(**) $\Rightarrow d(u)+d(v)=|N(u)\cup N(v)|+|N(u)\cap N(v)|\leq \nu-(\alpha-|I\cap S|)-1+\kappa-|I\cap S|=\nu-\alpha+\kappa-1\leq \nu-(\kappa+1)+\kappa-1=\nu-2 \Rightarrow$ 与题设$d(u)+d(v)\geq\nu$矛盾

点独立集与连通度 (续)

- 推论5.1.2 设G是ν ($\nu \geq 2$)阶简单图。若$\delta(G) \geq \nu/2$，则$\alpha(G) \leq \kappa(G)$。

证明：

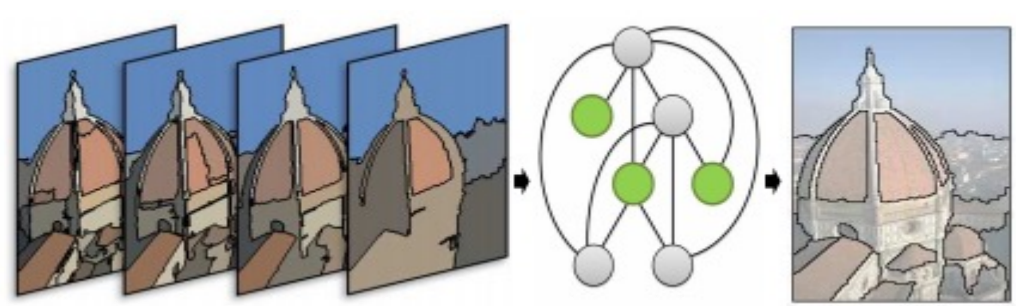
$\delta(G) \geq \nu/2 \Rightarrow$ 任二不相邻顶点x与y均有$d(x)+d(y) \geq \nu(G) \Rightarrow \alpha(G) \leq \kappa(G)$

求最大独立集的算法

- 最大独立集=补图中的最大团：NP-hard
- 不存在近似比显著好于线性的多项式时间算法（除非P=NP）

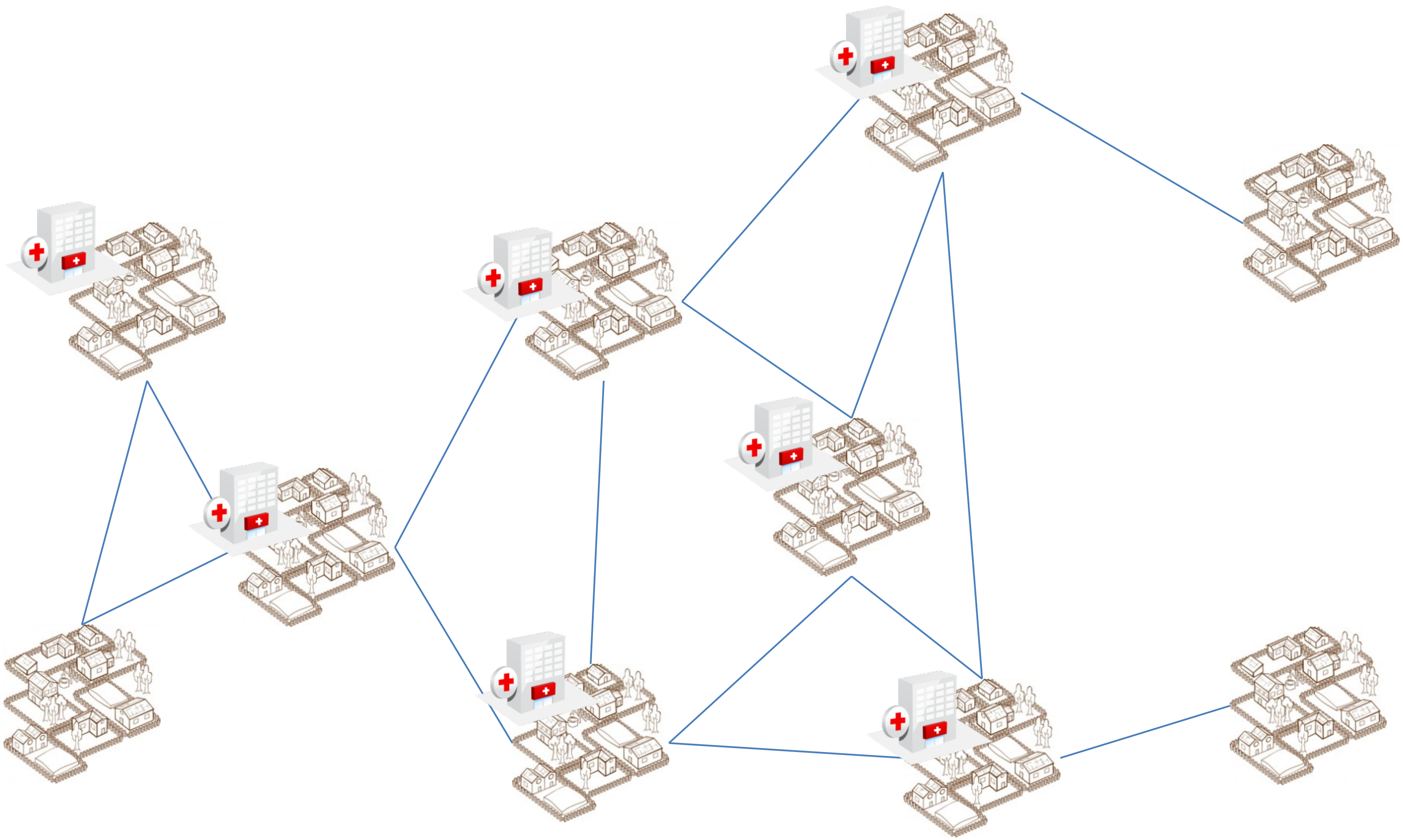
独立集的应用

- 最大带权独立集：图像分割
  - 顶点：所有可能的块
  - 边：重叠的块
  - 权：块的显著程度



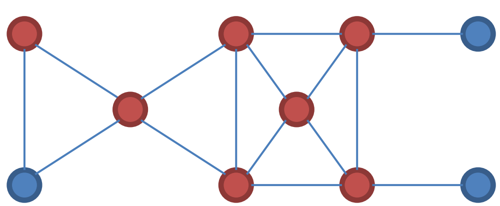
Segmentation as Maximum-Weight Independent Set

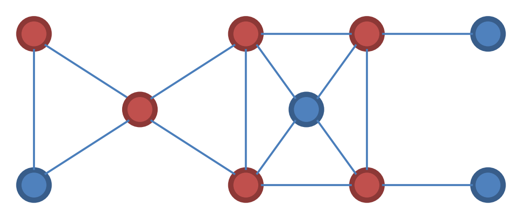
点覆盖集



点覆盖集

- 点覆盖集 (vertex cover)
  - F是G的点覆盖集：∀(u, v)∈E(G), {u, v}∩F≠∅
- 极小点覆盖集 (minimal vertex cover)
  - 顶点数极少（任何一个真子集都不再是点覆盖集）
- 最小点覆盖集 (minimum vertex cover)
  - 顶点数最少
- 点覆盖数 (vertex cover number)
  - β(G)：最小点覆盖集的势

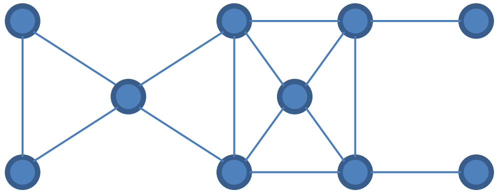




点覆盖集与支配集

- 点覆盖集与所有边关联
- 支配集与所有剩余点相邻

- 连通图中，点覆盖集一定是支配集吗？
- 反之成立吗？



点覆盖集与独立集

- 定理5.1.13 F是点覆盖集当且仅当V(G)\F是点独立集。

证明：你能自己证明吗？

F是点覆盖集 $\Leftrightarrow$ G的每条边都有至少一个端点在F中 $\Leftrightarrow$ 没有两端点都在V(G)\F中的边 $\Leftrightarrow$ V(G)\F是点独立集

点覆盖集与独立集 (续)

- 推论5.1.3 F是极小点覆盖集当且仅当V(G)\F是极大点独立集。

证明：你能自己证明吗？

1. 定理5.1.13 ⇒ F是点覆盖集当且仅当V(G)\F是点独立集
2. F是极小点覆盖集 ⇔ F中去除任意一些点就会将至少一条边的两个端点都去除 ⇔ V(G)\F中加入任意一些点就会将至少一条边的两个端点都加入 ⇔ V(G)\F是极大点独立集

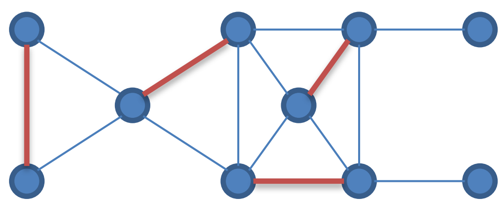
点覆盖集与独立集 (续)

- 推论5.1.4 $\alpha(G)+\beta(G)=\nu(G)$。

证明：留作作业。

求最小点覆盖集的算法

- 点覆盖集和极大匹配之间有什么关系？
  - 极大匹配饱和的所有顶点构成一个点覆盖集
  - 这个点覆盖集，与最小点覆盖集相比，最多能多出几个点？
    - 极大匹配中的边互不相邻 ⇒ 任何一个点覆盖集至少包含其中每条边的一个端点 ⇒ 上述点覆盖集的势≤2β，即近似比为2
  - 怎么找极大匹配？



- 不存在近似比好于1.3606的多项式时间算法（除非P=NP）
- 目前还没有找到近似比显著小于2的多项式时间算法
  - 基于极大匹配的算法还不错

作业

- 5.6 //支配集
- 5.11 //点独立集
- 5.15 //点覆盖集