平面图的概念

程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

本节课的主要内容

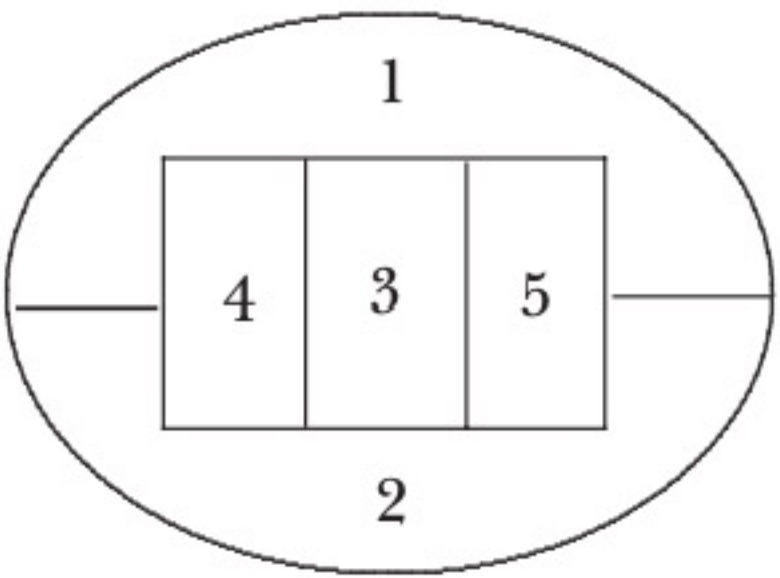
7.1 平面图的概念

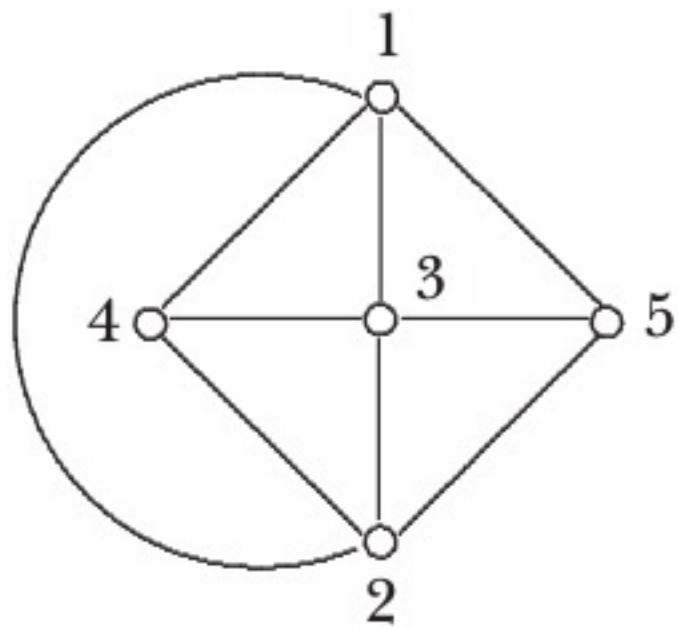
7.2 Euler公式及其应用

7.4 平面图的对偶图

- 注意：这节课的讨论不再限于简单图了

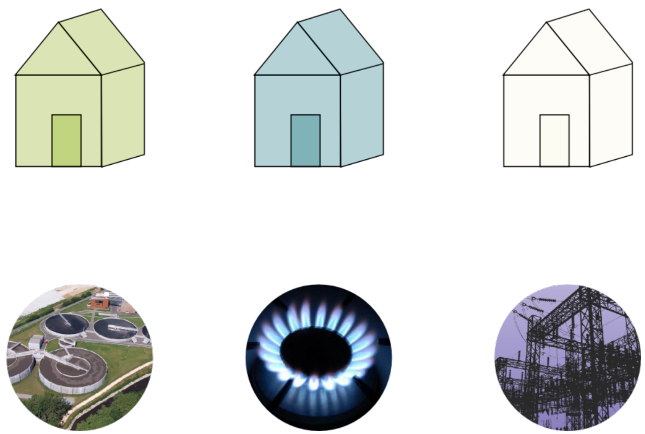
五王子问题

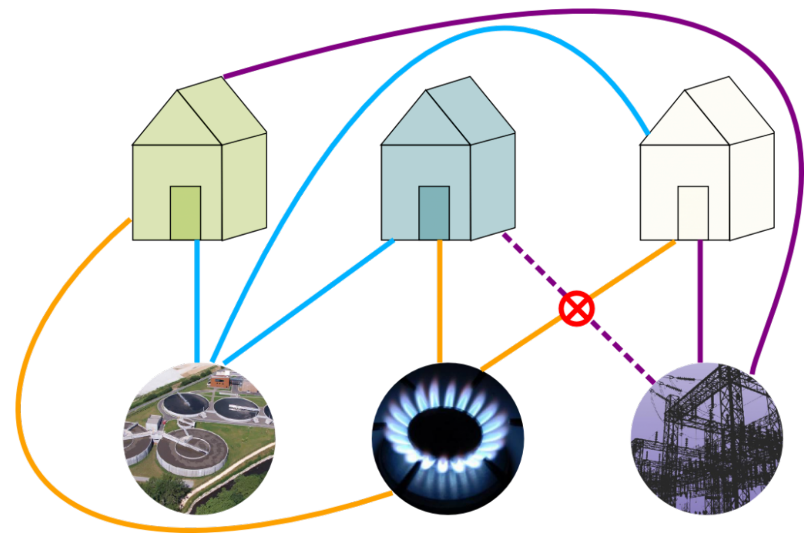




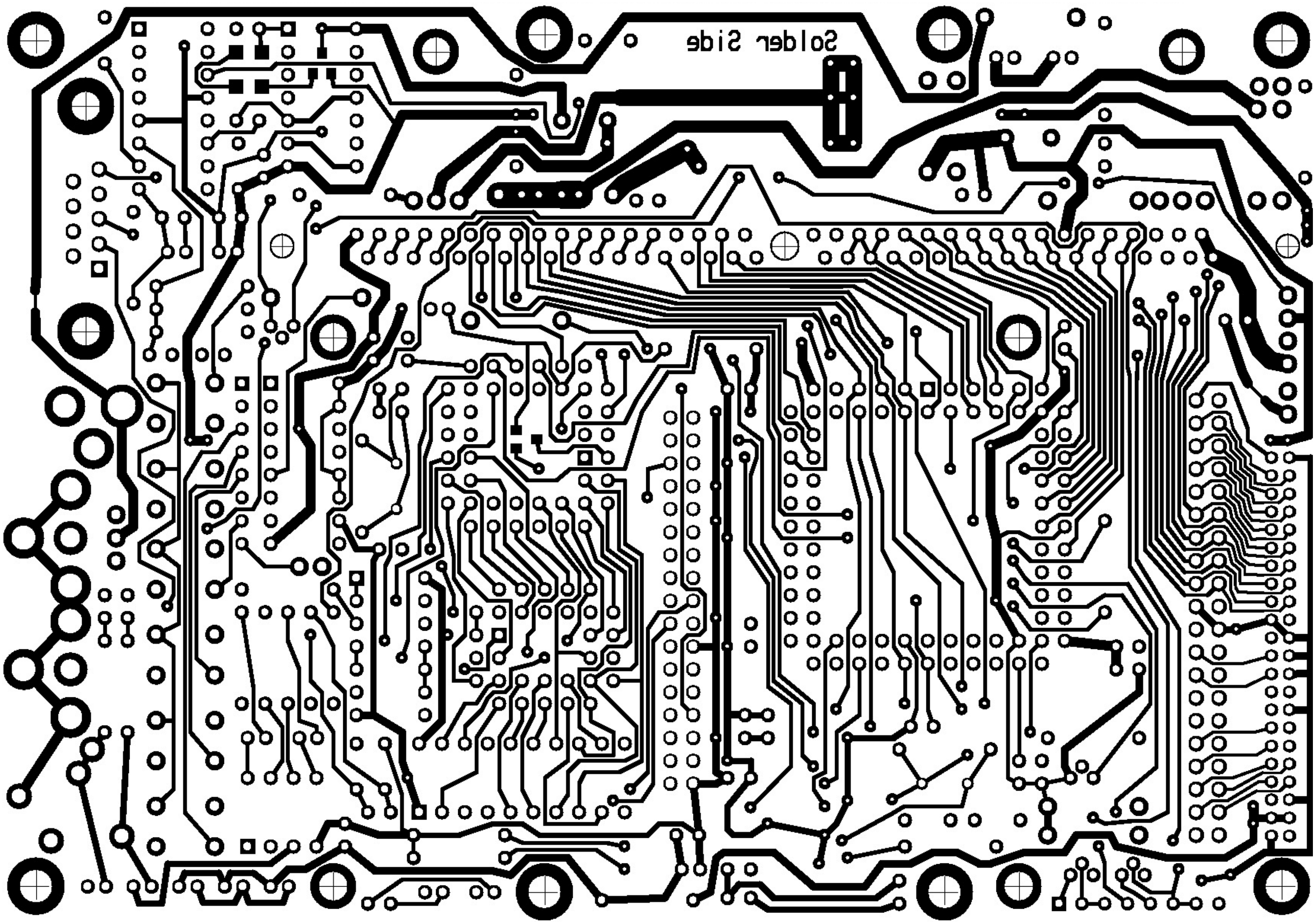
http://assets.press.princeton.edu/chapters/s10314.pdf

公共设施问题





http://www.science4all.org/article/eulers-formula-and-the-utilities-problem/

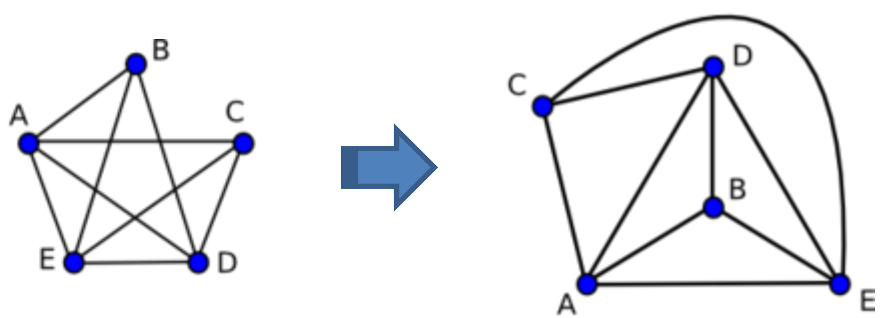


http://www.pjrc.com/mp3/mp3_pcb_reva_solder.gif

可平面图

- 可平面图 (planar graph)
  - 能画在平面上且任意两边不交叉
  - 交叉 (crossing)：包含端点以外的其它公共点

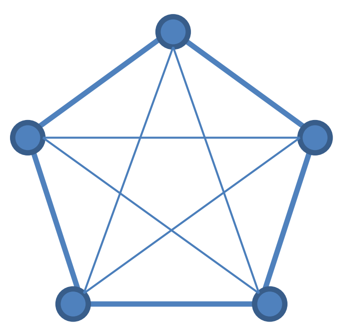
    (指的是平面上的point，不是图的vertex)
  - 这个画法叫做一种平面嵌入 (planar embedding)
  - 画出来的结果是一个平面图 (plane graph)
- 这些完全图都是可平面图吗？
  - K_1, K_2, K_3, K_4
  - $K_{1,n}$, $K_{2,n}$

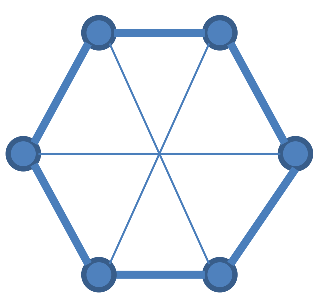


http://media.tumblr.com/tumblr_m0om4wbHGm1qir7tc.png

不可平面图

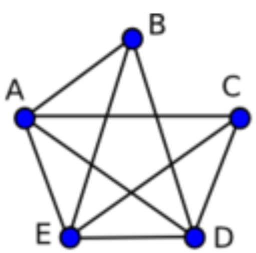
- 不可平面图 (nonplanar graph)
- 例如
  - K_5, $K_{3,3}$
  - 你能观察出原因吗？
    - 考虑圈以外的弦怎么画

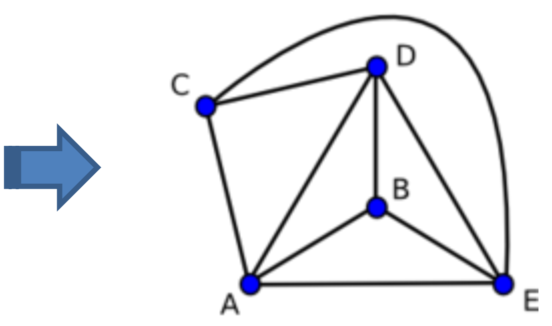




可平面图的性质

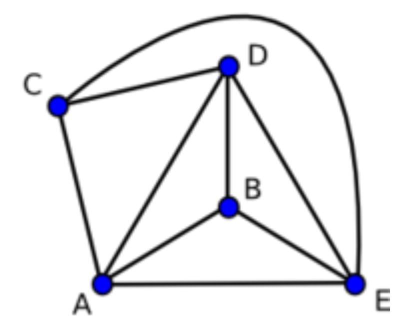
- 可平面图的子图一定是可平面图吗？
  - K_6, $K_{4,4}$是可平面图吗？
- 环边和重边对图的可平面性有没有影响？





面和边界

- 面 (face)
  - 平面图的边将平面划分出的极大区域
  - 面数：φ(G)
- 无限面 (unbounded face)
  - 面积无限的面，又称外部面 (outer face)
  - 平面图有几个无限面？
  - 每个非外部面都能按照另一种平面嵌入成为外部面，你能想到吗？
- 边界 (boundary)
  - 包围一个面的所有边
- 面的度数 (degree)
  - 边界上的边数，又称长度 (length)
  - 只在一个面的边界上的边计两次（是什么样的边？）
    - 当且仅当是割边，为什么？
  - 所有面的度数和 = 边数的两倍



面和边界* (续)

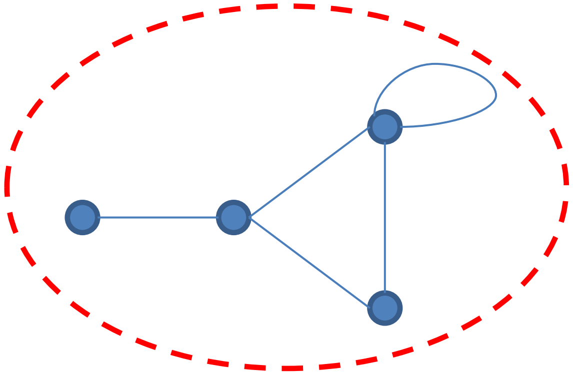
- 平面图G是二部图的充要条件是每个面的度数都是偶数。

证明：

⇒ 你能自己证明吗？

面的度数是奇数就有奇圈。

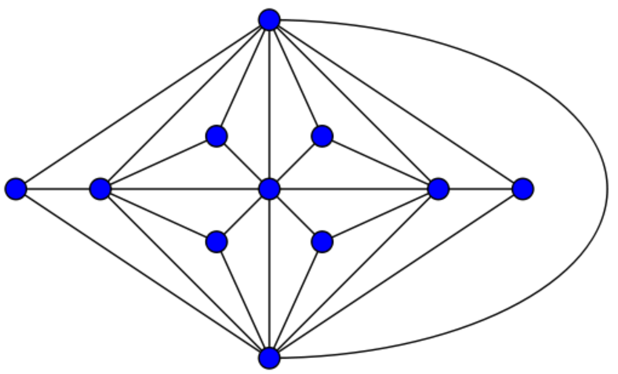
⇐



1. G中任取一个圈C先画在平面上。
2. G的面或者在C内，或者在C外。
3. C内所有面的度数和是偶数。（接下来，你能自己证明吗？）
4. 其中，C内的每条边贡献2度。
5. 剩余偶数度来自C，且C的每条边贡献1度，即C是偶圈。

极大可平面图

- 极大可平面图 (maximal planar graph)
  - 简单可平面图
  - 增加任意一条连接不相邻顶点的边都不再是可平面图
- 性质
  - 一定是连通图吗？
  - 可以有割边或割点吗？ (当v≥3时)
  - 每个面的度数有什么特征？



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/96/Goldner-Harary_graph.svg/500px-Goldner-Harary_graph.svg.png

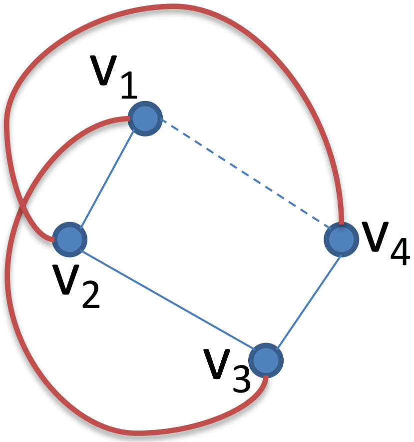
极大可平面图 (续)

- 定理7.1.7 对于至少含3个顶点的极大平面图，其每个面的度数必定都是3。

证明：你能自己证明吗？

反证法：假设存在一个面的度数>3，你能推出矛盾吗？

1. v_1和v_3必须相邻，否则添加(v_1, v_3)后仍是可平面图，与极大性矛盾。
2. 且(v_1, v_3)必须在面的外面。
3. 同理，存在(v_2, v_4)且在面的外面。
4. (v_1, v_3)与(v_2, v_4)必然交叉，矛盾。



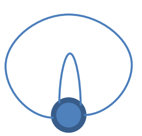
Euler公式

- 定理7.2.1 对于连通的平面图，$v-\varepsilon+\varphi=2$。

证明：

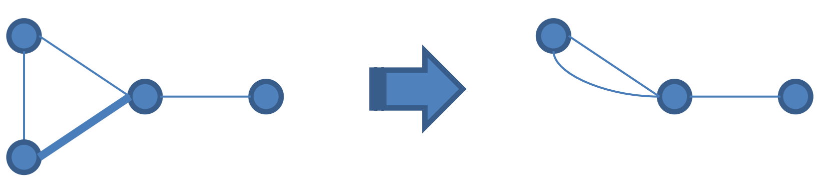
对v用数学归纳法。

1. $v=1$时：所有边都是环边 ⇒
    1. $\varepsilon=0$时 ⇒ $\varphi=1$ ⇒ 成立
       $\varepsilon>0$时怎么证明？
    2. 每条新增的边都将一个面分成两个 ⇒ 成立



2. 假设$v=k$时成立，则$v=k+1$时：如何利用归纳假设？
    – 连通图 ⇒ 存在一条不是环边的边 ⇒ “收缩”这条边 ⇒
        - $v'=v-1$ 为什么收缩后仍然是连通的平面图？
        - $\varepsilon'=\varepsilon-1$
        - $\varphi'=\varphi$

    ⇒ 成立



Euler公式的推广

- 定理7.2.2 对于具有w个连通分支的平面图，$\nu-\varepsilon+\varphi=w+1$。

证明：

1. Euler公式 ⇒ 对每个连通分支，有$\nu_i-\varepsilon_i+\varphi_i=2$
2. 每个连通分支的外部面相同 ⇒
   $2w=\sum(\nu_i-\varepsilon_i+\varphi_i)=\sum\nu_i-\sum\varepsilon_i+\sum\varphi_i=\nu-\varepsilon+\varphi+(w-1) \Rightarrow \nu-\varepsilon+\varphi=w+1$

Euler公式的应用

- 定理7.2.3 设G是连通的平面图，且每个面的度数至少为l(l≥3)，则$\varepsilon \leq \frac{l}{l-2}(\nu-2)$。

证明：

2ε=∑d(F)≥lφ=l(2+ε-ν) ⇒ $\varepsilon \leq \frac{l}{l-2}(\nu-2)$

Euler公式的应用 (续)

- 推论7.2.1 K_5和$K_{3,3}$都是不可平面图。

$$\boxed{\varepsilon \le \frac{l}{l-2}(\nu-2)}$$

证明：

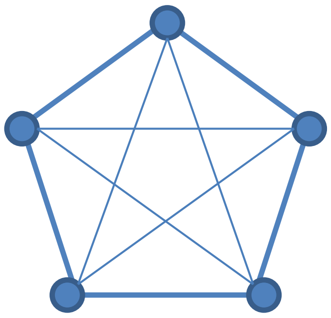
如果K_5是可平面图，l是多少？

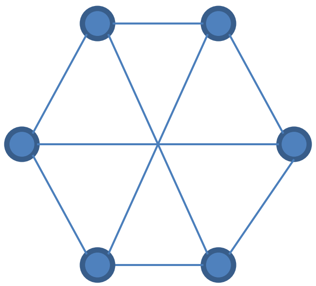
每个面的度数至少为3 $\Rightarrow 10=\varepsilon \le \frac{l}{l-2}(\nu-2)=\frac{3}{3-2}(5-2)=9$ $\Rightarrow$ 矛盾

如果$K_{3,3}$是可平面图，l是多少？

最短圈的长度为4 $\Rightarrow$ 每个面的度数至少为4 $\Rightarrow 9=\varepsilon \le \frac{4}{4-2}(6-2)=8$

$\Rightarrow$ 矛盾





Euler公式的应用 (续)

- 定理7.2.4 设G是具有w(w≥1)个连通分支的平面图，各面的度数至少为l(l≥3)，则 $\varepsilon \le \frac{l}{l-2}(v-w-1)$。

证明：

2ε=∑d(F)≥lφ=l(1+w+ε-v) ⇒ $\varepsilon \le \frac{l}{l-2}(v-w-1)$

Euler公式的应用 (续)

- 定理7.2.5 设G是$v \geq 3$的简单平面图，则$\varepsilon \leq 3v-6$。

证明：

1. 如果G是连通图：$2\varepsilon=\sum d(F) \geq 3\varphi=3(2+\varepsilon-v) \Rightarrow \varepsilon \leq 3v-6$
2. 如果G不是连通图，怎么办？
   - 添加边成为连通图 $\Rightarrow$ 更加成立

Euler公式的应用 (续)

- 定理7.2.8 设G是$v \geq 3$的简单平面图，则$\delta \leq 5$。

证明：

1. $v \leq 6$时：显然成立。
2. $v \geq 7$时：如果$\delta \geq 6 \Rightarrow 2\varepsilon = \sum d(v) \geq 6v \Rightarrow \varepsilon \geq 3v \Rightarrow$ 与$\varepsilon \leq 3v-6$矛盾

Euler公式的应用 (续)

- 定理7.2.6 设G是$\nu \geq 3$的极大简单平面图，则$\varepsilon=3\nu-6$，$\varphi=2\nu-4$。

证明：

极大（简单）平面图 $\Rightarrow$

- 是连通图
- 每个面的度数都是3

$\Rightarrow 2\varepsilon=\sum d(F)=3\varphi=3(2+\varepsilon-\nu) \Rightarrow \varepsilon=3\nu-6 \Rightarrow \varphi=2\nu-4$

Euler公式的应用 (续)

- 定理7.2.7 设G是$v \geq 3$的连通简单图，则G是极大平面图当且仅当G的每个面的度数均为3。

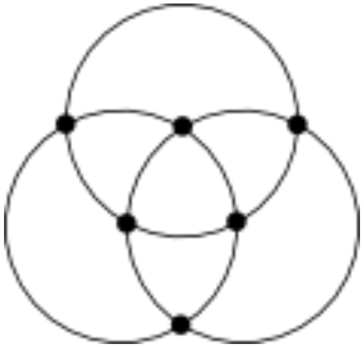
证明：

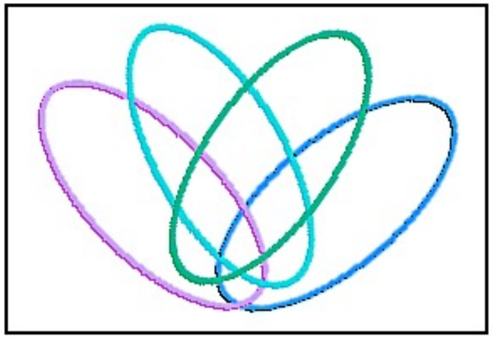
- ⇒：定理7.1.7
- ⇐：
  1. $2\varepsilon=\sum d(F)=3\varphi=3(2+\varepsilon-v) \Rightarrow \varepsilon=3v-6$
  2. 反证：如果G不是极大平面图，则可新增一条边得到平面图G’：
     - $\varepsilon'=\varepsilon+1$
     - $v'=v$
  3. $\varepsilon'=\varepsilon+1=3v-5=3v'-5>3v'-6$，与定理7.2.5矛盾

Euler公式的应用 (续)

- 有没有可能用正圆画出4个集合的Venn图？
  - $v=12$ 每对正圆恰有2个交点，且所有交点不重合（否则至少3圆共点，导致必有某种组合无法出现）
  - $\varepsilon=4v/2=24$ 每个顶点的度数为4
  - $\varphi=2^4=16$ Venn图的定义
  - 连通性显然

  $\Rightarrow$ 不满足连通图的Euler公式
- 4个集合画不出，5个集合能画出吗？
  - 如果能画出：包含4个集合的Venn子图，矛盾

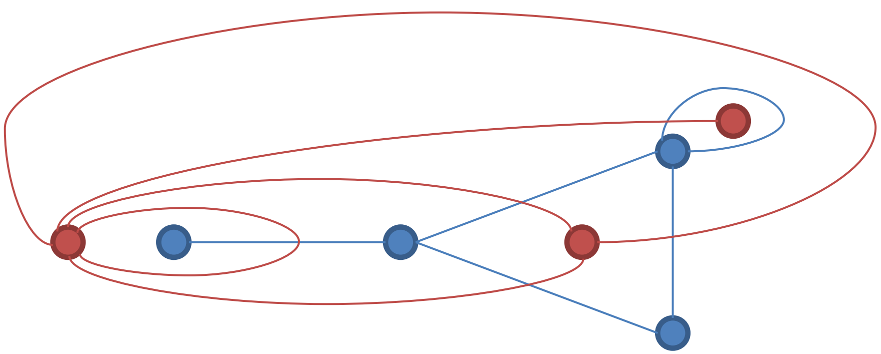




http://math.stackexchange.com/questions/1475/why-can-a-venn-diagram-for-4-sets-not-be-constructed-using-circles

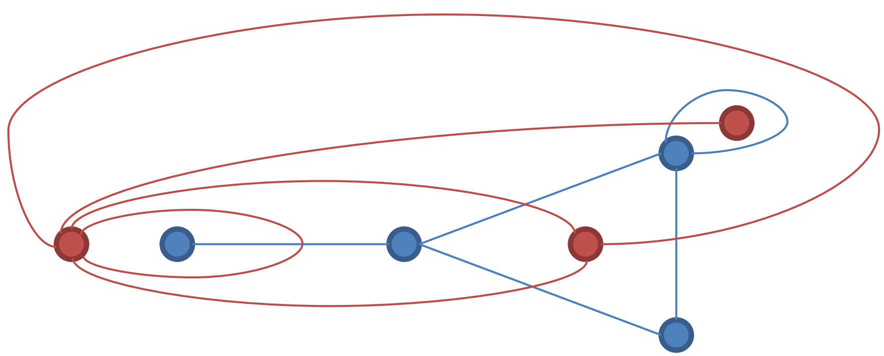
对偶图

- 对偶图 (dual graph)
  - 面→点
  - 公共边界上的边→连接两点的边
  - 割边→环
  - 记作G*



对偶图的性质

- G的割边对应G*的环边，G的环边对应G*的割边。（为什么？）
- G*是连通图。（为什么？）
- G*是平面图。（怎么画能保证？）

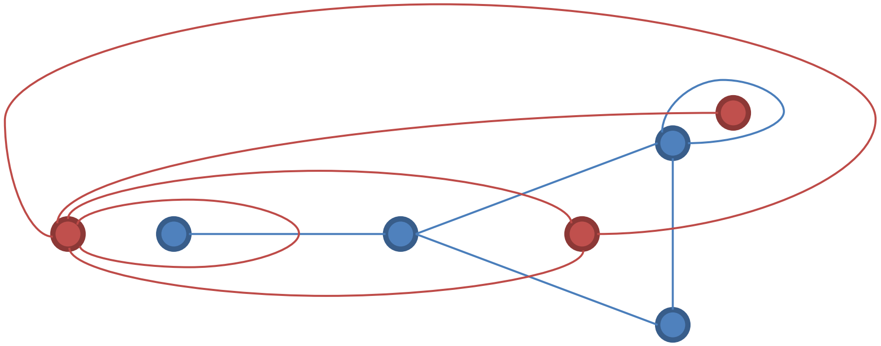


对偶图的性质 (续)

- 定理7.4.1 设G*是连通平面图G的对偶图，则：
  1. $v^* = \varphi$
  2. $\varepsilon^* = \varepsilon$
  3. $\varphi^* = v$
  4. 设G*的顶点v_i^*位于G的面F_i中，则$d_{G^*}(v_i^*) = d(F_i)$。

证明：

- 1和2显然成立。
- 3为什么成立？
  – G和G*都连通 ⇒ $v-\varepsilon+\varphi=2$且$v^*-\varepsilon^*+\varphi^*=2$ ⇒ $\varphi^*=v$ ⇒ 3成立
- F_i边界上的非割边对等式两侧各贡献1，割边各贡献2 ⇒ 4成立



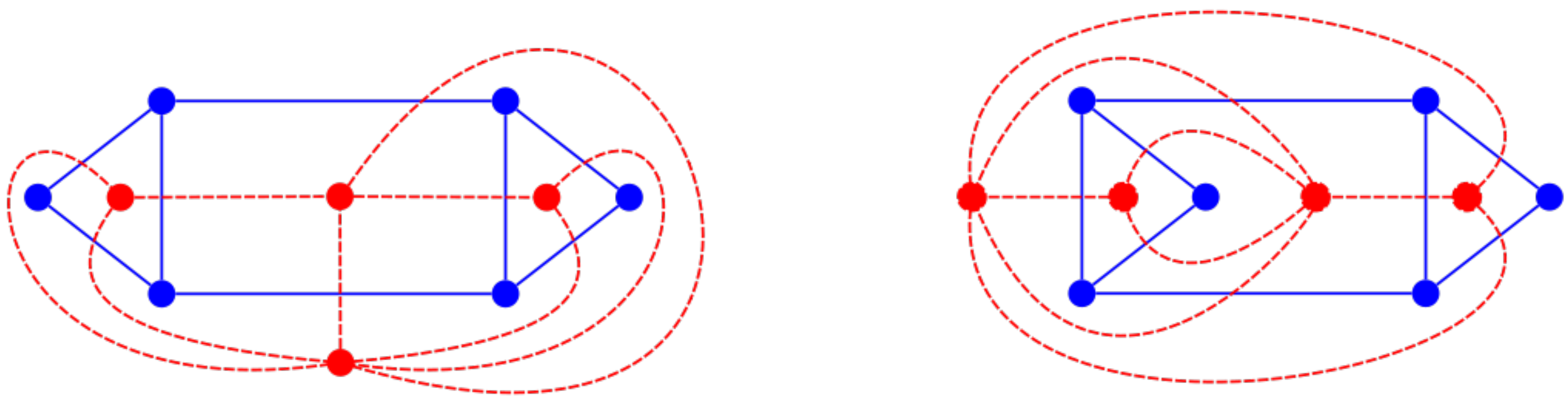
对偶图的性质 (续)

- 定理7.4.2 设G*是具有w个连通分支的平面图G的对偶图，则：
    1. $v^* = \varphi$
    2. $\varepsilon^* = \varepsilon$
    3. $\varphi^* = v - w + 1$
    4. 设G*的顶点v_i^*位于G的面F_i中，则$d_{G^*}(v_i^*) = d(F_i)$。

证明：留作作业。

对偶图的性质 (续)

- 同构图的对偶图一定同构吗？
- 对偶图的对偶图一定是原图吗？
  - 如果G是连通图，则(G*)*与G同构。*



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7b/Noniso_dual_graphs.svg/500px-Noniso_dual_graphs.svg.png

作业

- 7.4 //平面图的概念
- 7.15(a)(b) //极大可平面图
- 7.23 //Euler公式
- 7.26 //对偶图
- 7.29 //对偶图