- 本次课无quiz，但书面作业**随堂完成**

平面图的面染色和有向图

程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

本节课的主要内容

7.7 平面图的面染色和四色猜想

8.1 有向图的基本概念

8.2 有向路与有向圈

8.3 有向图的连通性及无向图的强连通定向

8.5 竞赛图

五色定理

- 定理6.2.4 除完全图和奇圈以外的连通简单图G满足$\chi \le \Delta$。
- 定理7.7.3 对于任何平面图G，$\chi(G) \le 5$。

五色定理 (续)

- 定理7.7.3 对于任何平面图G，$\chi(G) \le 5$。

证明：数学归纳法。

重边和环边不影响色数 ⇒ 只需讨论简单图

- $v \le 5$时，显然成立。
- 假设$v=n-1$时成立，则$v=n$时：努力的目标是什么？
  1. 定理7.2.8 设G是$v \ge 3$的简单平面图，则$\delta \le 5$ ⇒ G中存在顶点v满足$d(v) \le 5$
  2. 如果$d(v) \le 4$，你能完成G的正常5染色吗？

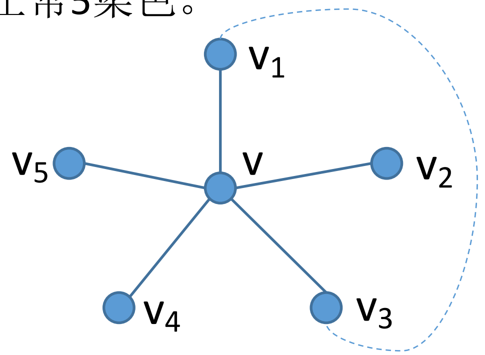
     归纳假设 ⇒ G-v是5色可染的 ⇒ v染上与所有邻点相异的颜色 ⇒ G是5色可染的 ⇒ 得证

五色定理 (续)

- 定理7.7.3 对于任何平面图G，$\chi(G)\leq 5$。

证明：

3. 如果d(v)=5：
    1. 将v的邻点按顺时针编号。
    2. 如果G-v的正常5染色中，这5个顶点存在撞色，你能完成G的正常5染色吗？
    3. 否则，这5个顶点颜色互不相同，设为色1至色5，然后你有思路吗？
    4. 考察染为色1和色3的所有顶点在G-v中的导出子图G_{13}。
    5. 如果其中v_1和v_3不在G_{13}的同一个连通分支中，你能完成G的正常5染色吗？
        - 在v_1所在的连通分支中，对换色1和色3（不影响其它4点）
    6. 否则，存在v_1到v_3的路，接下来你能自己完成证明吗？
    7. ⇒ v_2和v_4在G_{24}的不同连通分支中，G可正常5染色。
        - 在v_2所在的连通分支中，对换色2和色4（不影响其它4点）

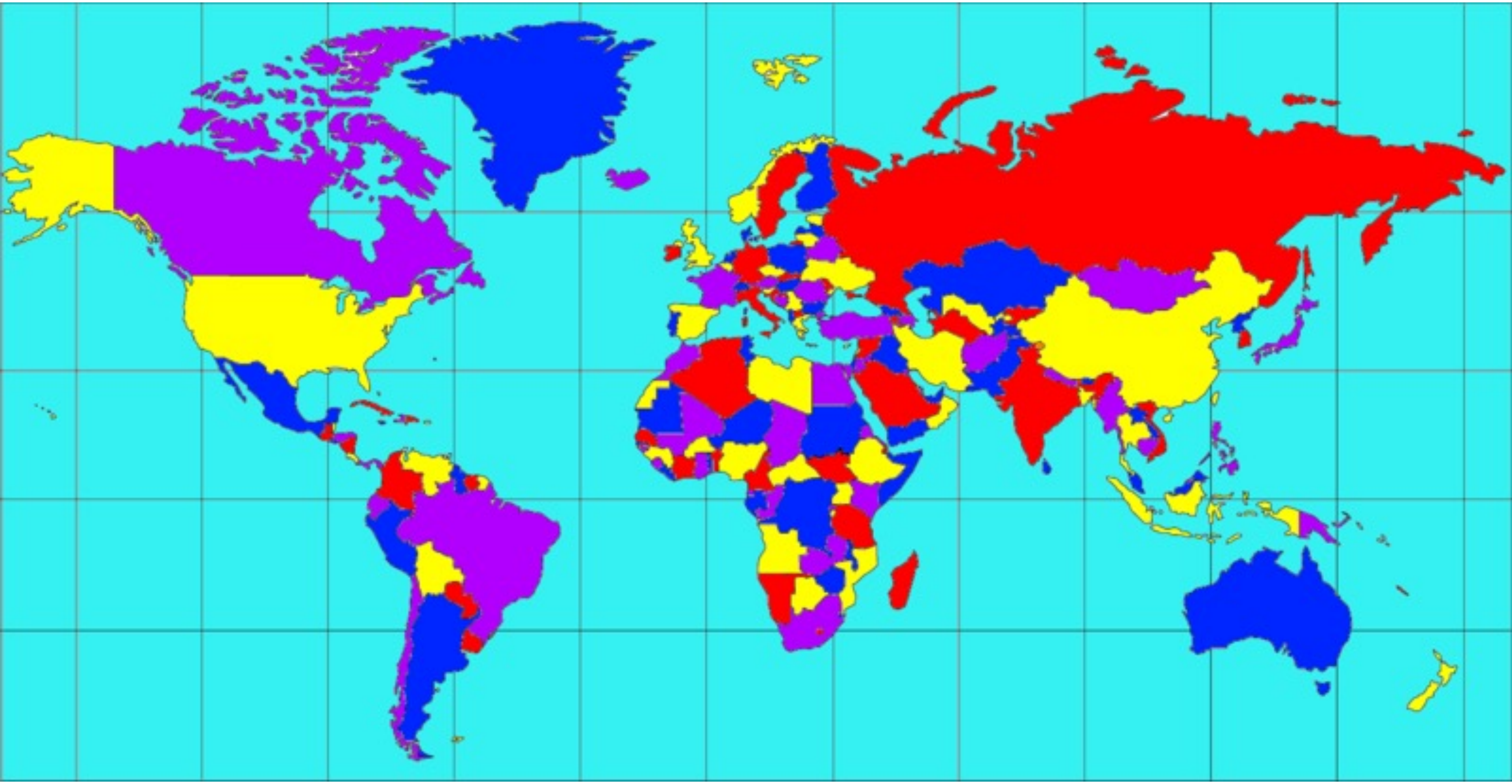


Percy John Heawood, 英国, 1861--1955

毕其一生研究四色定理，未遂，但推翻了前人的错误证明，并给出了五色定理

http://learn-math.info/history/photos/Heawood.jpeg

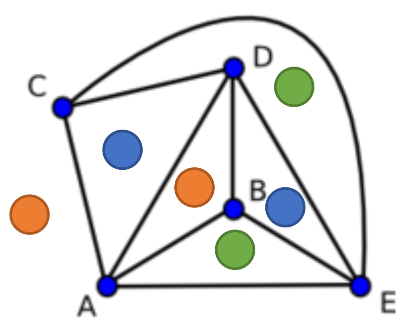
平面图的面染色



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b2/World_using_the_four_color_theorem.png/800px-World_using_the_four_color_theorem.png

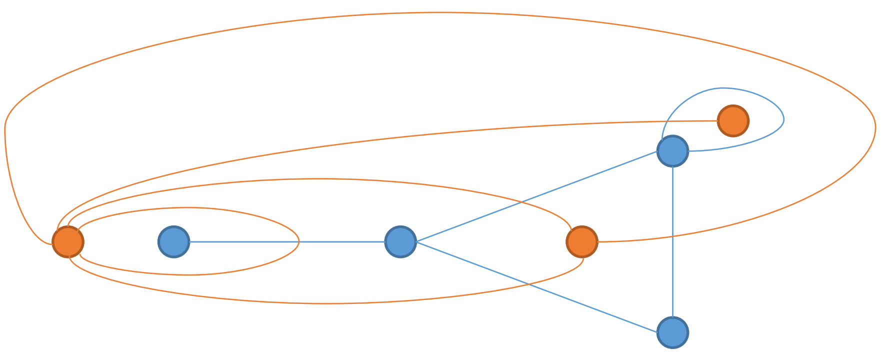
平面图的面染色 (续)

- 面k染色
- 面正常k染色
    - 边界有公共边的面不同色
- 面k色可染的
- 面色数



平面图的面染色 (续)

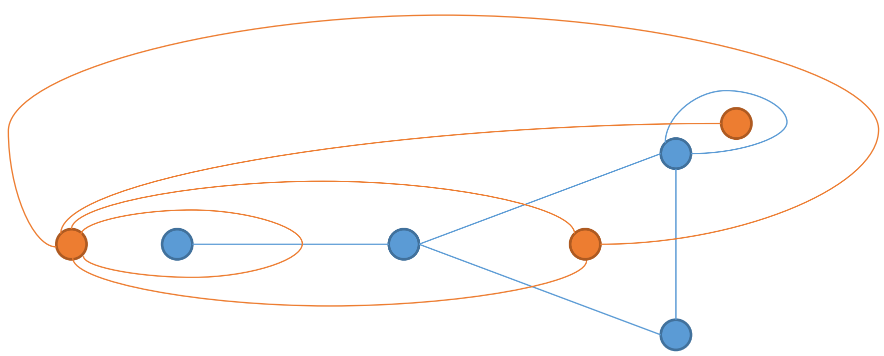
- 对偶图
  - 面→点
  - 公共边界上的边→连接两点的边
  - 割边→环



平面图的面染色 (续)

- 你能不能借助对偶图来证明：平面图一定是面5色可染的？
  - 定理7.7.1：平面图的面色数 = 对偶图的色数，为什么？
  - 所有对偶图都是平面图
  - 定理7.7.3：平面图的色数≤5

你能就此给出一个平面图的面染色算法吗？

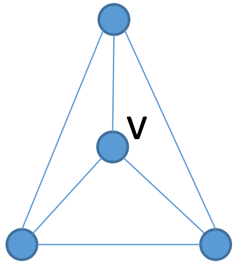


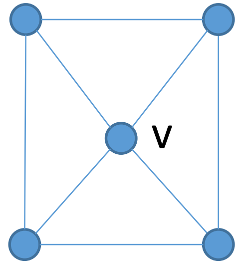
四色猜想

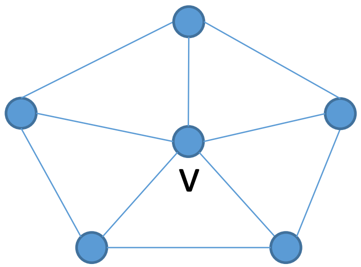
- 对于任何平面图G，$\chi(G) \leq 4$？

四色猜想 (续)

1. 三角剖分平面图 (triangulation)
   - 每个面的度数都为3的简单平面图
2. 构形 (configuration)
   - 每个内部面的度数都为3的简单平面图



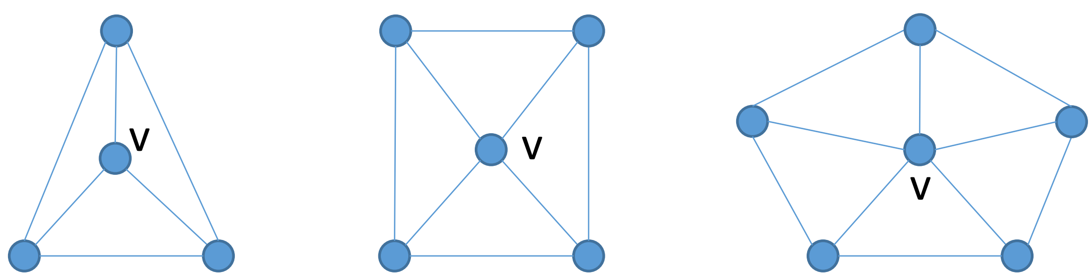




四色猜想 (续)

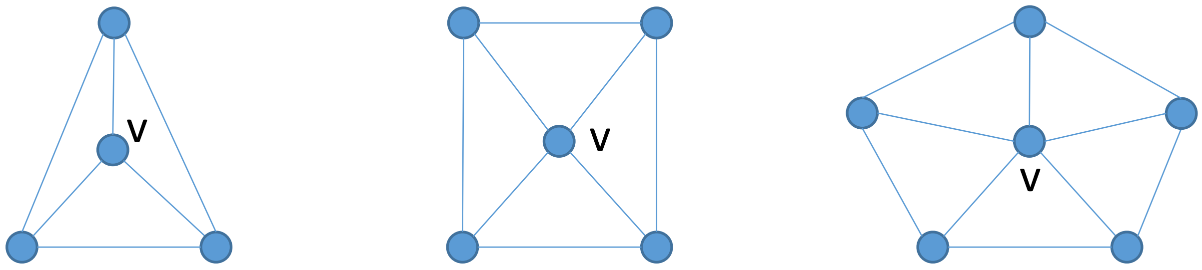
3. 极小反例 (minimal counterexample)
   - $\chi>4$的简单平面图中阶最小的一个
   - 不失一般性，设其为三角剖分平面图
     - 否则：加边使其成为三角剖分平面图，且加边之后显然还是一个极小反例
4. 不可免集 (unavoidable set)
   - 构形的集合，任何一个极小反例至少包含其中一个构形
   - 例如，以下是一个不可免集，为什么？
     - 定理7.2.8 设G是$v\geq3$的简单平面图，则$\delta\leq5$

$\Rightarrow$ 如果找到一个不可免集，其中每个构形都不可能出现在极小反例中（称作可约的，reducible），就出现了矛盾，因此极小反例不存在，四色猜想得证



四色猜想 (续)

5. 1879年，Alfred Kempe“证明”了以下不可免集中的每个构形都是可约的。
   - 第一个很容易证明，你能看出来吗？
     - G是极小反例 ⇒ G-v是4色可染的 ⇒ G-v的正常4染色中，v的邻点最多只占用3种颜色 ⇒ v可以染第四种颜色 ⇒ G是4色可染的 ⇒ G不是反例
   - 第二个也可以证明。
   - 但是1890年，Heawood发现第三个的证明存在漏洞。

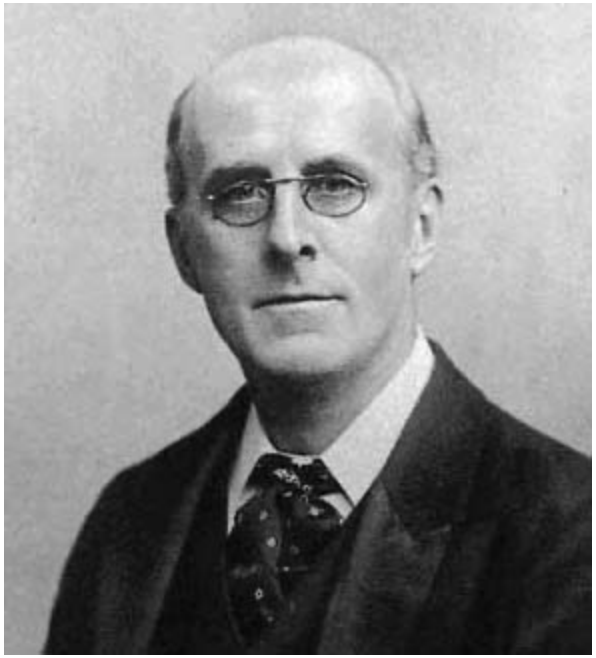


四色猜想 (续)

6. 人们试图寻找更多的可约构形，并组成不可免集。
7. 1970前后，Heinrich Heesch率先设计出算法让计算机来做这件事，眼看就要成功了。
   - 然而关键时刻，他的研究经费被砍掉了。
8. 1976-1977年，Kenneth Appel、Wolfgang Haken和John Koch，宣称经过计算机超过1000小时的计算，找到了一个由1936个可约构形组成的不可免集。
9. 之后，一些bug被陆续发现和修复。
10. 故事就此结束了吗？

四色猜想 (续)

11. 即使算法是正确的，如何保证计算机在运行（证明）的过程中没有出错呢？
    - 无法保证。
12. 但是，这个证明的工作量太大，以至于不可能人工验证，或者说，人工验证的过程中出错的概率更大。所以，我们选择相信计算机，正如我们选择相信人工证明一样。



Alfred Kempe, 英国, 1849--1922

尽管证错了，但他对于四色定理证明的推动仍然是巨大的

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ab/Alfred_Bray_Kempe.jpeg

Heinrich Heesch, 德国, 1906--1995

http://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Heesch#/media/File:Heesch,Heinrich_1930_Jena.jpg

Kenneth Appel, 美国, 1932--2013

Wolfgang Haken, 德国, 1928--

没有照片的John Koch是那个程序员

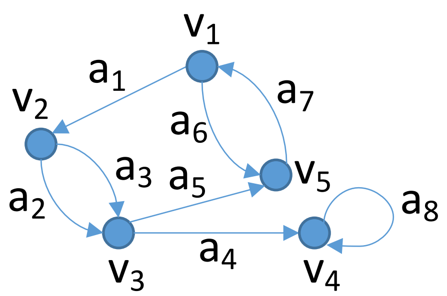
http://www.math.illinois.edu/People/ken-appel.jpg
http://www.las.illinois.edu/images/news/2009/haken.jpg

有序对

- 无序对 (unordered pair)
  - 含有2个或1个元素的集合
  - $(v_1, v_2) = \{v_1, v_2\}$，$(v_2, v_2)=\{v_2\}$
- 有序对 (ordered pair)
  - $<a_1,b_1>=<a_2,b_2>$当且仅当$a_1=a_2$且$b_1=b_2$
- 有序对的集合表示
  - 能不能将$<a,b>$定义为$\{a,b\}$？
  - Kuratowski的定义：$<a,b>=\{\{a\},\{a,b\}\}$

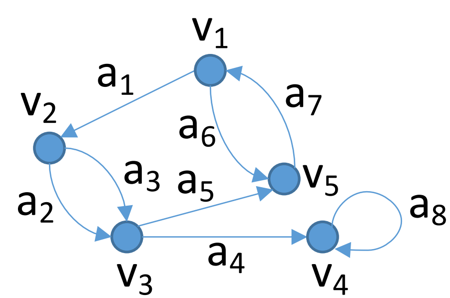
有向图、弧

- G=<V,A>
  - V：顶点集
  - A：弧集 (arc set)
    - 弧集是一个有向对的集合
    - 弧又称有向边 (directed edge)
- 一些术语
  - 弧的尾 (tail)
  - 弧的头 (head)
  - 环弧：头尾相同的弧
  - 并行弧：具有相同头和相同尾的弧
  - 简单有向图：无环弧、无并行弧 //我们一般只讨论简单有向图
  - 反向弧：简单有向图中，头尾相反的弧



度和邻点

- 出度 (outdegree)：$d^+(v)$
- 入度 (indegree)：$d^-(v)$
- 最小出度：δ^+
- 最小入度：δ^-
- 最大出度：Δ^+
- 最大入度：Δ^-

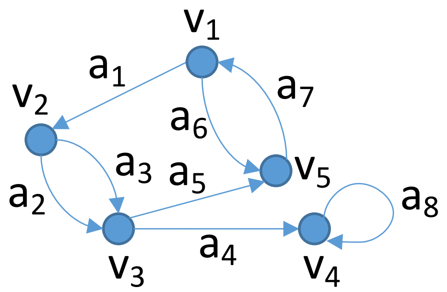


- 定理8.1.1 对于任何有向图G，都有 $\sum_{v\in V(G)} d^+(v) = \sum_{v\in V(G)} d^-(v) = \frac{\sum_{v\in V(G)} d(v)}{2} = \varepsilon$

- 出邻点和入邻点

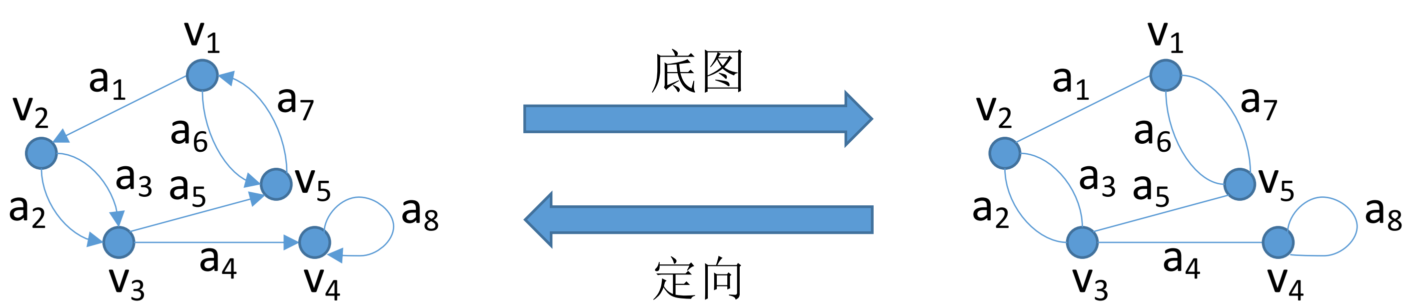
途径、迹、路、圈

- 有向途径
  - 顶点和弧交替出现的序列
  - 与弧的方向一致
- 有向迹
  - 弧不重复出现
- 有向路
  - 顶点不重复出现
- 有向圈
  - 起点和终点相同



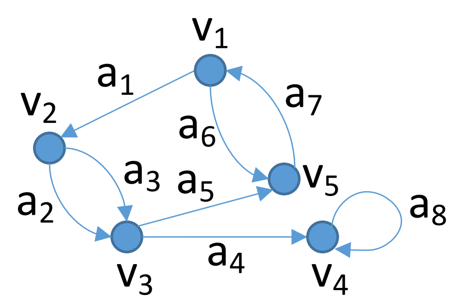
底图和定向

- 底图 (underlying graph)：有向图→无向图
- 定向 (orientation)：无向图→有向图
  - 不唯一
  - 竞赛图 (tournament)：完全图的定向

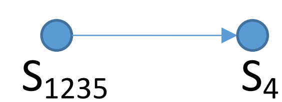


连通

- 弱连通的 (weakly connected)
  - 底图是连通的
- 强连通的 (strongly connected)
  - 任取顶点u和v，存在u到v的有向路
- 强连通分支 (strong component)
  - 极大强连通子图



- 强连通分支之间会不会有公共顶点？
- 强连通分支图
  - 这个图中会不会存在有向圈？



强连通的充要条件

- 定理8.3.2 G是强连通有向图的充要条件是G的所有顶点在一条有向闭途径上。

证明：

⇒：你能自己证明吗？

$V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_v \rightarrow V_1$

⇐：你能自己证明吗？

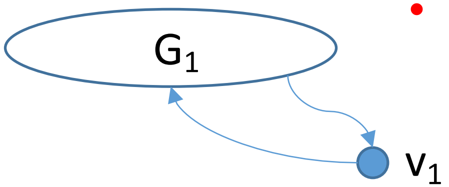
通过所有顶点的有向闭途径包含任两顶点之间的有向路。

强连通定向

- 定理8.3.3 无向图G可定向成强连通图的充分必要条件为：G连通且无割边。

证明：

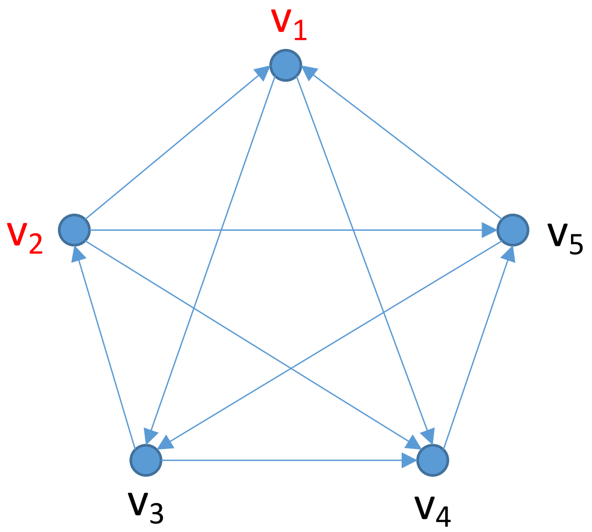
- v=1时， 显然成立。
- v>1时：
  - ⇒：反证法，你能自己证明吗？
  - ⇐：构造法
    1. G无割边 ⇒ G中有圈G_1 ⇒ G_1可定向为强连通的
    2. 如果G_1不是G的生成子图 ⇒ G_1外存在一点v_1
    3. 边形式的Menger定理的推论 (2.4.2)：k-边连通图 ⇔ 任二顶点被k条两两无公共边的路所连
       ⇒ v_1到G_1存在两条无公共边的路，与G_1并为G_2 ⇒ G_2可定向为强连通的
    4. 如果G_2仍不是G的生成子图，重复这个过程，由于顶点是有限的，必然终止于G的生成子图G_n，且G_n可定向为强连通的。
    5. 剩余边任意定向。



- **构造法同时也是一种算法 但还存在更加高效的算法**

竞赛图

- 王 (king)
  - 到其它任何顶点都有长不超过2的有向路
  - 具有唯一性吗？



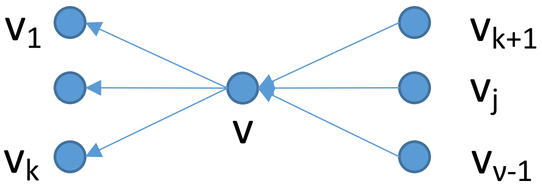
竞赛图 (续)

- 定理8.5.2 竞赛图中出度最大的顶点必为王。

证明：

设v是出度最大的顶点。

- 如果$d^+(v)=v-1$：显然成立。
- 如果$d^+(v)<v-1$，设v的出邻点为$v_1,\ldots,v_k$，入邻点为$v_{k+1},\ldots,v_{v-1}$：
  - 对于$v_{k+1},\ldots,v_{v-1}$中的每个v_j：$v_1,\ldots,v_k$中必有v_j的入邻点 ⇒ 从v到v_j有长为2的有向路 ⇒ 得证
    - $d^+(v_j)\le d^+(v)$ ⇒ $v_1,\ldots,v_k$不可能都是v_j的出邻点



竞赛图 (续)

- 定理8.5.3 竞赛图中一个顶点v是唯一的王当且仅当v的出度为v-1。

证明:

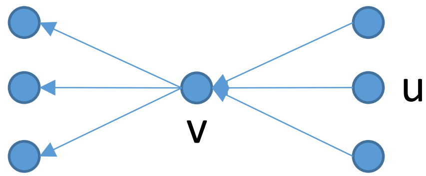
⇐：你能自己证明吗?

$d^+(v)= v-1$ ⇒ v是王且无入邻点 ⇒ v是唯一的王

⇒：反证法，除了v，你能找出另一个王吗?

1. 假设唯一的王v满足$d^+(v)<v-1$ ⇒ v的所有入邻点导出的子竞赛图有自己的王u
2. u到v有弧 ⇒ u到v的出邻点有长为2的有向路

⇒ u也是原图的王 ⇒ v不是唯一的王 ⇒ 矛盾



作业（随堂完成）

1. 证明或者否定：具有10个顶点的简单有向图中，顶点的出度不可能两两都互不相同。
2. 证明或者否定：存在一个具有n个顶点(n>0)的竞赛图且每个顶点的出度和入度都相等，当且仅当n是奇数。