边独立集和边覆盖集

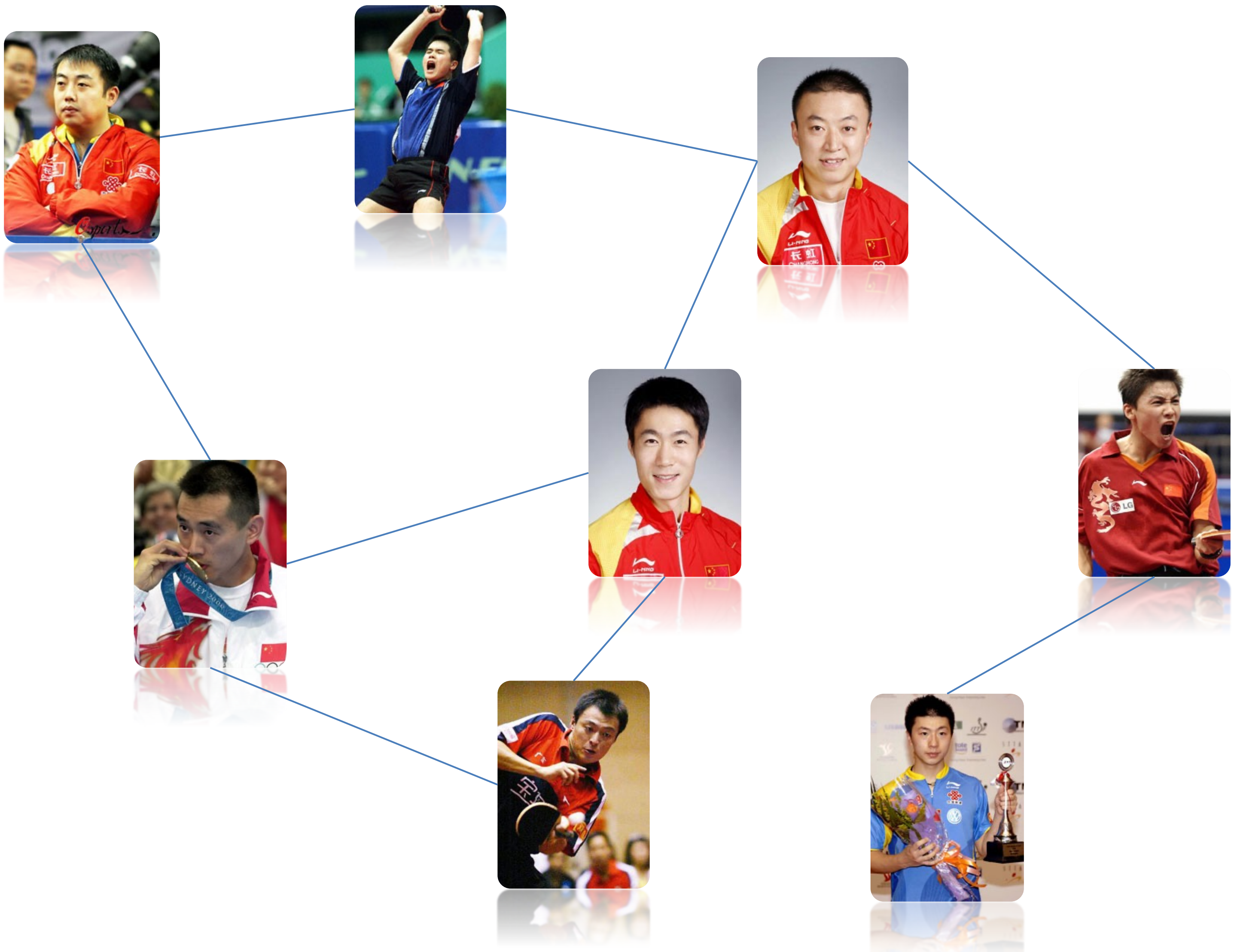
程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

复习

- 支配集
- 点独立集
- 点覆盖集

本节课的主要内容

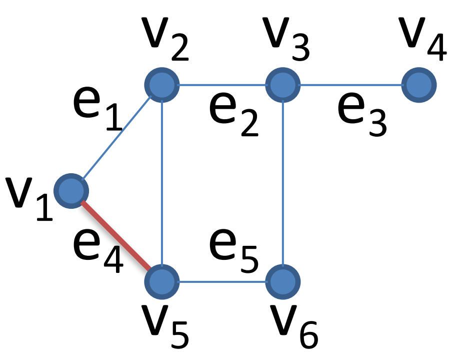
5.2 边独立集与边覆盖集

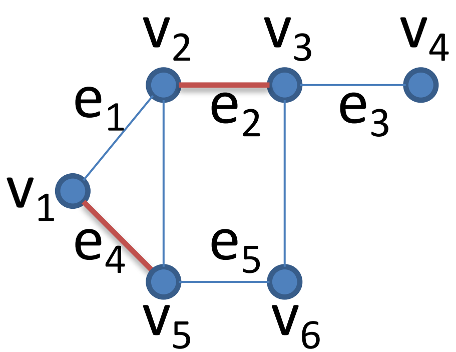


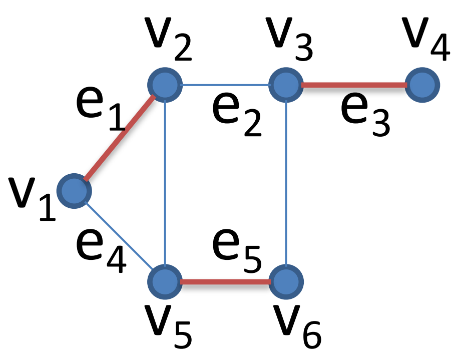
http://sports.sina.com.cn/star/sports/tt/

边独立集

- 边独立集 (edge independent set)
  – 匹配（两两不相邻的边）
- 极大边独立集 (maximal edge independent set)
  – 极大匹配（不是任何一个匹配的真子集）
- 最大边独立集 (maximum edge independent set)
  – 最大匹配（边数最多）
- 边独立数 (edge independence number)
  – α’(G)：最大匹配的势

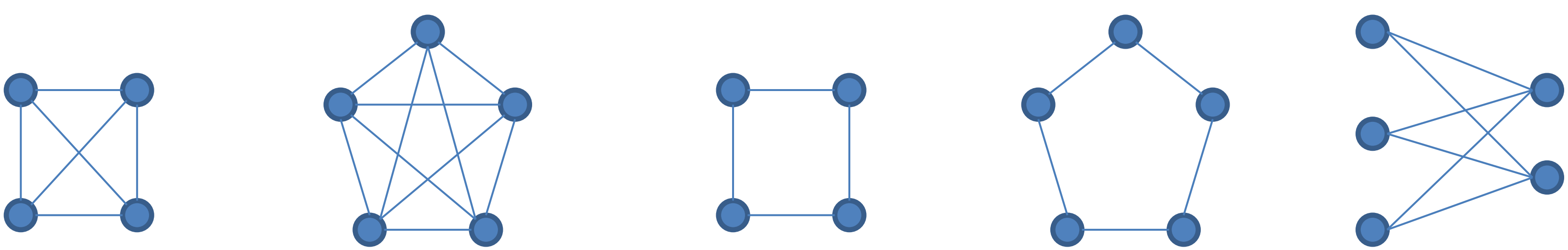






边独立集与点覆盖集

$\alpha'(K_{2n})$	n	2n-1	$\beta(K_{2n})$
$\alpha'(K_{2n+1})$	n	2n	$\beta(K_{2n+1})$
$\alpha'(C_{2n})$	n	n	$\beta(C_{2n})$
$\alpha'(C_{2n+1})$	n	n+1	$\beta(C_{2n+1})$
$\alpha'(K_{m,n})$	min{m, n}	min{m, n}	$\beta(K_{m,n})$



边独立集与点覆盖集 (续)

- 定理5.2.1 对任何无环边的图G，$\alpha'(G) \leq \beta(G)$。

证明：

设G有最小点覆盖集S、最大边独立集M：

（M中的边的端点和S中的点，有什么关系？）

- S是点覆盖集 ⇒ M中的每条边至少有一个端点在S中
- M是边独立集 ⇒ M中的每条边的端点互不相同

$\Rightarrow \alpha'(G)=|M|\leq|S|=\beta(G)$

边独立集与点覆盖集 (续)

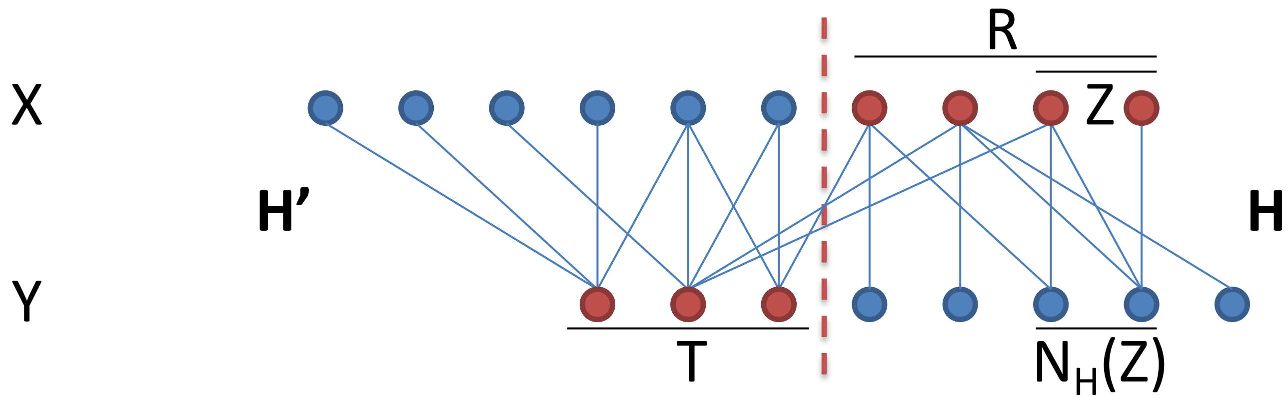
- (引理) 定理3.3.1 二部图X-Y有饱和X的匹配当且仅当$\forall S \subseteq X$，$|N(S)| \geq |S|$。

边独立集与点覆盖集 (续)

- 定理5.2.2 对于二部图G，$\alpha'(G)=\beta(G)$。

证明：

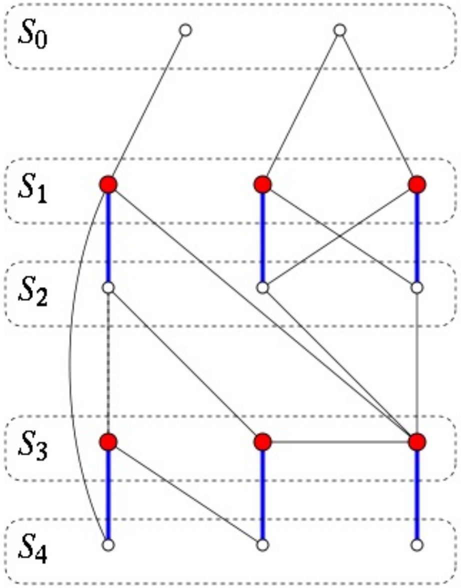
1. 定理5.2.1 $\Rightarrow \alpha'(G)=|M|\leq|S|=\beta(G)$
2. 只需证明$\beta(G)\leq\alpha'(G)$，即对于任意给定的最小点覆盖集S，能够构造出势为$|S|$的匹配。
3. 设$R=S\cap X$，$T=S\cap Y$，$H=G[R\cup(Y\setminus T)]$，$H'=G[T\cup(X\setminus R)]$。
4. $|R\cup T|=|S|$且H和H'不相交 $\Rightarrow$ 只需分别在H和H'中构造出能够饱和R和T的匹配，两者的并即势为$|S|$的匹配
5. 引理 $\Rightarrow$ H中有饱和R的匹配当且仅当$\forall Z\subseteq R$，$|N_H(Z)|\geq|Z|$ $\Rightarrow$ 只需证明$|N_H(Z)|\geq|Z|$
6. $N_H(Z)$覆盖了所有Z覆盖但未被T覆盖的边 $\Rightarrow$ $((T\cup R)\setminus Z)\cup N_H(Z)$是点覆盖集 $\Rightarrow$ $|((T\cup R)\setminus Z)\cup N_H(Z)|\geq|T\cup R|$ $\Rightarrow$ $|N_H(Z)|\geq|Z|$，得证（另一侧同理）



边独立集与点覆盖集 (续)

- 求最小点覆盖集的算法
  - 一般图：不存在近似比好于1.3606的多项式时间算法（除非P=NP）
  - 二部图：存在精确的多项式时间算法

- 定理5.2.2 对于二部图G，α’(G)=β(G)。
  1. 求最大匹配
  2. 未饱和顶点作为第0层
  3. 根据交错路上的距离对其它顶点分层
  4. 可以证明：
     - 每条边都有一个端点在奇层（为什么？）
       即奇层构成一个点覆盖集
       否则，如果存在连接偶层顶点的边：
       - 如果两点在同一条交错路上，构成奇圈
       - 如果两点不在同一条交错路上，构成增广路
     - 奇层顶点恰根据匹配中的一条边引出一个新的偶层顶点（为什么？）
       即构成的点覆盖集的大小为α’(G)，所以是最小点覆盖集
       否则：
       - 如果不关联到匹配中的边：构成增广路
       - 如果关联到未用于引出新偶层顶点的匹配中的边，则这样的边
         - 如果关联到前层顶点：前层顶点关联到匹配中的两条边
         - 如果关联到同层顶点：构成增广路



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/35/Koenigs-theorem-proof.svg/333px-Koenigs-theorem-proof.svg.png

边独立数的估计

- 定理5.2.3 设图G无孤立点，则 $\left\lceil \frac{\nu}{1+\Delta(G)} \right\rceil \le \alpha'(G) \le \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$。

证明：

- 右侧显然。
- 左侧：对ε(G)用数学归纳法证明。
  1. ε=1时，显然成立。
  2. 假设对任何不超过k条边的图都成立。

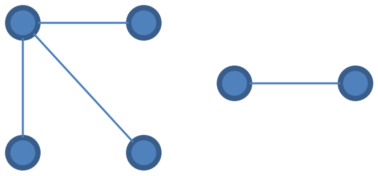
（这样对吗？）

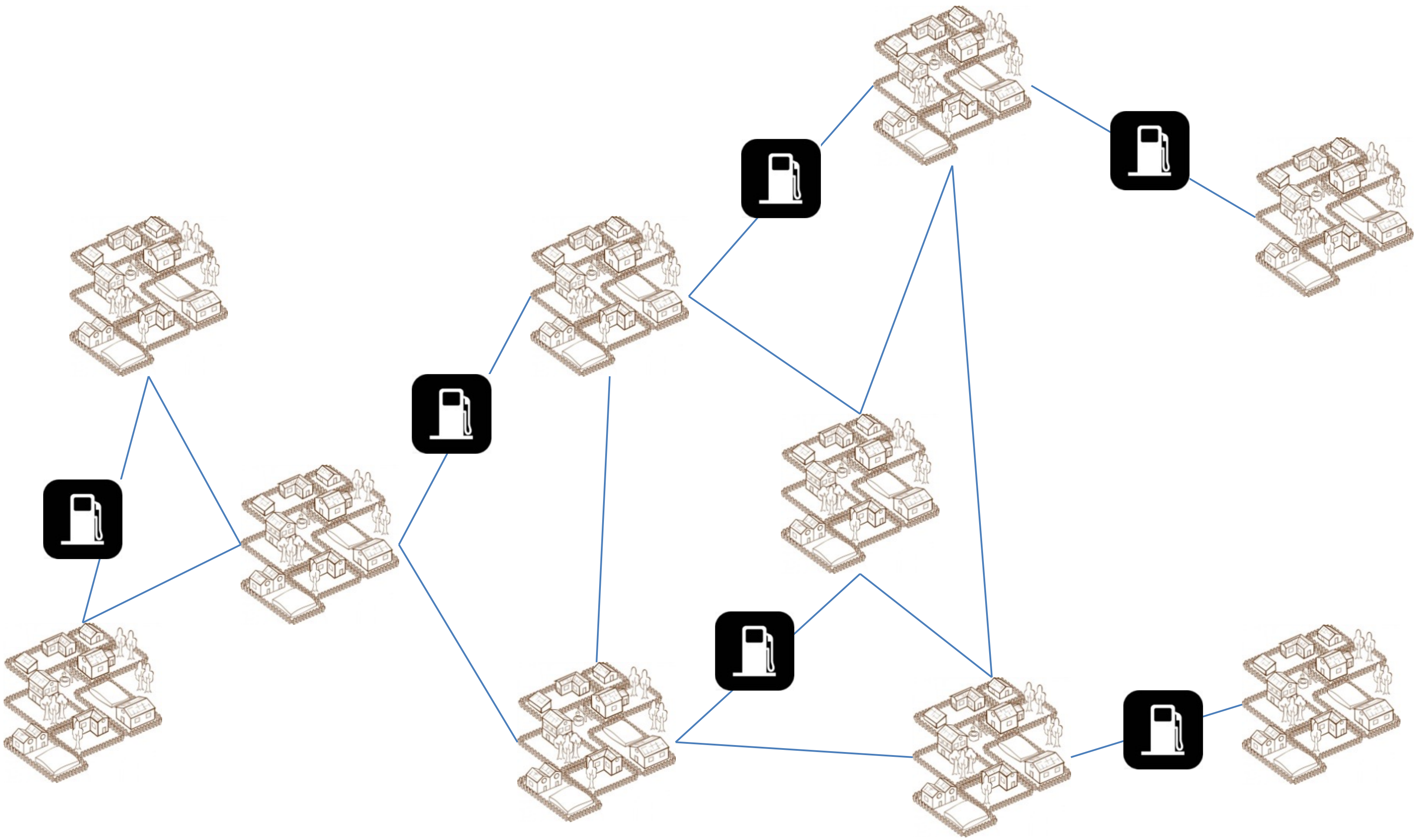
  3. 设G是有k+1条边的无孤立点的图：因为G-e（任取）的连通分支G_i的边数≤k，由归纳假设
     - 如果G有边e的两个端点的度都>1 ⇒ G-e的连通分支G_i不是孤立点且边数≤k，由归纳假设

$$\Rightarrow \alpha'(G_i) \ge \frac{\nu(G_i)}{1+\Delta(G_i)} \quad \Rightarrow \alpha'(G) \ge \alpha'(G-e) = \sum_i \alpha'(G_i) \ge \sum_i \frac{\nu(G_i)}{1+\Delta(G_i)} \ge \frac{\sum_i \nu(G_i)}{1+\Delta(G-e)} \ge \frac{\nu(G)}{1+\Delta(G)}$$

     - 如果G中每条边都有至少一个端点的度为1 ⇒ G的连通分支G_i是星

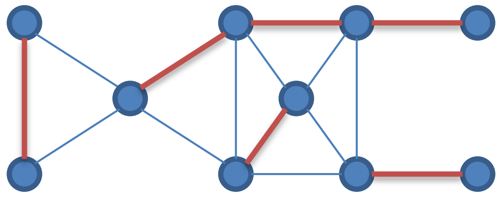
$$\Rightarrow \alpha'(G) = \sum_i \alpha'(G_i) = \sum_i 1 = \sum_i \frac{\nu(G_i)}{1+\Delta(G_i)} \ge \frac{\sum_i \nu(G_i)}{1+\Delta(G)} = \frac{\nu(G)}{1+\Delta(G)}$$

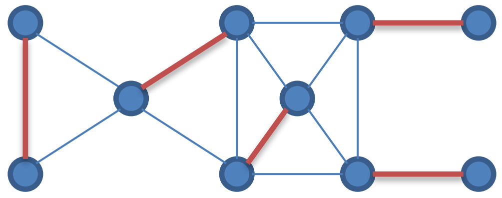




边覆盖集

- 边覆盖集 (edge cover)
  - L是G的边覆盖集：∀u∈V(G), ∃v∈V(G), (u, v)∈L
  - 隐含要求：G中无孤立顶点，即δ(G)>0
- 极小边覆盖集 (minimal edge cover)
  - 边数极少（任何一个真子集都不再是边覆盖集）
- 最小边覆盖集 (minimum edge cover)
  - 边数最少
- 边覆盖数 (edge cover number)
  - β’(G)：最小边覆盖集的势





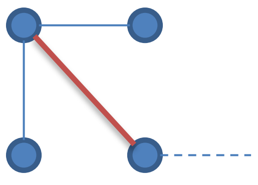
边覆盖集与边独立集

- 定理5.2.4 若$\delta(G)>0$，则$\alpha'(G)+\beta'(G)=\nu(G)$。

证明：这种问题的常见证明框架是什么？

1. 基于最大边独立集M，构造势为$\nu(G)-|M|=\nu(G)-\alpha'(G)$的边覆盖集 $\Rightarrow \beta'(G)\le\nu(G)-\alpha'(G)$
   – 对每个未被M饱和的顶点，向M中增加它关联的一条边 $\Rightarrow$ 构成势为$|M|+(\nu(G)-2|M|)=\nu(G)-|M|$的边覆盖集
2. 基于最小边覆盖集L，构造势为$\nu(G)-|L|=\nu(G)-\beta'(G)$的边独立集 $\Rightarrow \alpha'(G)\ge\nu(G)-\beta'(G)$
   – L是最小边覆盖集 $\Rightarrow$ G[L]的连通分支是星
   （不可能有一条边的两个端点的度都>1，否则去掉这条边可以得到更小的边覆盖集）
   $\Rightarrow$ G[L]有$\nu(G)-|L|$个连通分支
   $\Rightarrow$ 每个连通分支取一条边构成势为$\nu(G)-|L|$的边独立集

$\Rightarrow \alpha'(G)+\beta'(G)=\nu(G)$



边覆盖集与边独立集 (续)

- 推论5.2.1 设$\delta(G)>0$，则$\alpha'(G)\leq\beta'(G)$，等号成立当且仅当G有完美匹配。

证明：

1. 为什么$\alpha'(G)\leq\beta'(G)$？（提示：ν和α'之间的数量关系）
   – 最大边独立集有$\alpha'(G)$条边 $\Rightarrow$ $\nu(G)\geq 2\alpha'(G)$ $\Rightarrow$ 覆盖$\geq 2\alpha'(G)$个顶点至少需要$\geq\alpha'(G)$条边 $\Rightarrow$ $\beta'(G)\geq\alpha'(G)$
2. 定理5.2.4 $\Rightarrow$ $\alpha'(G)+\beta'(G)=\nu(G)$ $\Rightarrow$
   – $\alpha'(G)=\beta'(G)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha'(G)=\nu(G)/2$ $\Leftrightarrow$ G有完美匹配

边覆盖集与点独立集

- 定理5.2.5 $\alpha(G) \le \beta'(G)$。

证明：你能自己证明吗？

最大点独立集I中顶点互不相邻 $\Rightarrow$ 至少要用$|I|=\alpha(G)$条边才能覆盖I中所有顶点 $\Rightarrow$ $\beta'(G) \ge \alpha(G)$

边覆盖集与点独立集 (续)

- 定理5.2.6 设G是二部图且$\delta(G)>0$，则$\alpha(G)=\beta'(G)$。

证明：

- 定理5.2.4 $\Rightarrow \alpha'(G)+\beta'(G)=\nu(G)$
- 推论5.1.4 $\Rightarrow \alpha(G)+\beta(G)=\nu(G)$
- 定理5.2.2 $\Rightarrow \alpha'(G)=\beta(G)$

$\Rightarrow \alpha(G)=\beta'(G)$

边覆盖数的估计

- 定理5.2.9 设图G无孤立点，则 $\left\lceil \frac{\nu}{2} \right\rceil \le \beta'(G) \le \left\lfloor \nu \frac{\Delta(G)}{1+\Delta(G)} \right\rfloor$。

证明:

- 定理5.2.4 ⇒ α’(G)+β’(G)=ν(G) ⇒ β’(G)=ν(G)-α’(G)
- 定理5.2.3 ⇒ $\left\lceil \frac{\nu}{1+\Delta(G)} \right\rceil \le \alpha'(G) \le \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$

$$\Rightarrow \left\lceil \frac{\nu}{2} \right\rceil \le \beta'(G) \le \left\lfloor \nu \frac{\Delta(G)}{1+\Delta(G)} \right\rfloor$$

更一般的关系

- 定理5.2.7 设$\delta(G)>0$，则

① |边独立集M|≤|边覆盖集L|；等号成立时M为完美匹配、L为最小边覆盖集。
  - 推论5.2.1 ⇒ $\alpha'(G)\le\beta'(G)$ ⇒ $|M|\le\alpha'(G)\le\beta'(G)\le|L|$
  - $|M|=|L|$ ⇒ $|M|=\alpha'(G)=\beta'(G)=|L|$ ⇒
    - M是最大边独立集、L是最小边覆盖集
    - 由推论5.2.1：$\alpha'(G)=\beta'(G)$ ⇒ G有完美匹配 ⇒ M是完美匹配

② |边独立集M|≤|点覆盖集F|；等号成立时M为最大匹配、F为最小点覆盖集。
  - 定理5.2.1 ⇒ $\alpha'(G)\le\beta(G)$ ⇒ $|M|\le\alpha'(G)\le\beta(G)\le|F|$
  - $|M|=|F|$ ⇒ $|M|=\alpha'(G)=\beta(G)=|F|$ ⇒ M是最大边独立集、F是最小点覆盖集

③ |点独立集I|≤|边覆盖集L|；等号成立时I为最大点独立集、L为最小边覆盖集。
  - 定理5.2.5 ⇒ $\alpha(G)\le\beta'(G)$ ⇒ $|I|\le\alpha(G)\le\beta'(G)\le|L|$
  - $|I|=|L|$ ⇒ $|I|=\alpha(G)=\beta'(G)=|L|$ ⇒ I是最大点独立集、L是最小边覆盖集

“对偶问题”

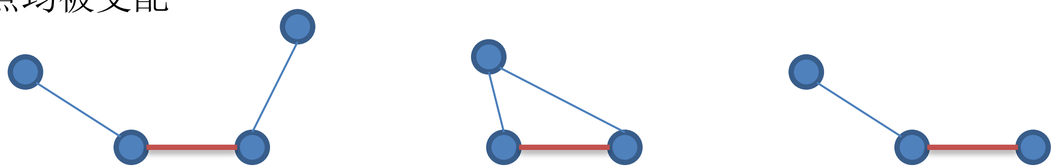
与支配数的关系

- 定理5.2.8 设图G无孤立顶点，则$\gamma(G) \le \min\{\alpha(G), \beta(G), \alpha'(G), \beta'(G)\}$。

证明：

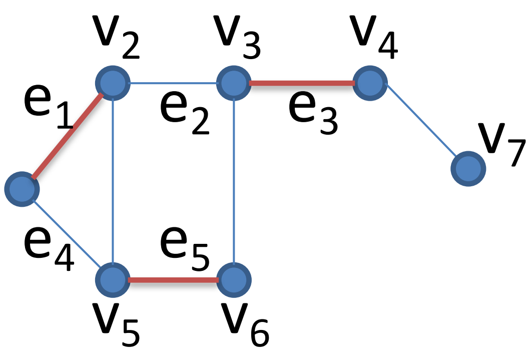
- 定理5.1.10 ⇒ $\gamma(G) \le \alpha(G)$
- $\gamma(G) \le \beta(G)$，你能自己证明吗？（取一个，找一个）
  - G无孤立顶点 ⇒ 最小点覆盖集是支配集 ⇒ $\gamma(G) \le \beta(G)$
- $\gamma(G) \le \beta'(G)$，你能自己证明吗？ （取一个，找一个）
  - 从最小边覆盖集的每条边取一个端点构成的集合（可能取重复顶点）是支配集 ⇒ $\gamma(G) \le \beta'(G)$
- 从最大边独立集的每条边取一个端点构成的集合是支配集 ⇒ $\gamma(G) \le \alpha'(G)$
  - 饱和顶点及其未饱和邻点均被支配，为什么？
    - 两个端点有不同的未饱和邻点：形成增广路，与最大边独立集矛盾，不可能
    - 两个端点有相同的未饱和邻点：任取一个端点
    - 一个端点有未饱和邻点、另一个端点没有：取前者
  - 而未饱和顶点均有邻点，且邻点必饱和，为什么？
    - G无孤立顶点 ⇒ 未饱和顶点均有邻点
    - 如果邻点未饱和 ⇒ 有更大的边独立集 ⇒ 与最大边独立集矛盾

⇒ 所有顶点均被支配



求最小边覆盖集的算法

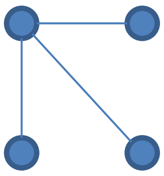
- $\beta'(G)=\nu(G)-\alpha'(G)=\alpha'(G)+(\nu(G)-2\alpha'(G))$
  你能据此设计一个算法吗？
  - 最大匹配 + 每个未饱和点任取一边



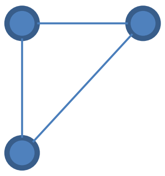
关系小结

- $\gamma(G) \le \min\{\alpha(G), \beta(G), \alpha'(G), \beta'(G)\}$

- $\alpha(G) \le \beta'(G)$
  - 二部图：$\alpha(G)=\beta'(G)$
- $\alpha'(G) \le \beta(G)$
  - 二部图：$\alpha'(G)=\beta(G)$
- $\alpha'(G) \le \beta'(G)$
- $\alpha(G)$?$\beta(G)$



$\alpha(G)>\beta(G)$



$\alpha(G)<\beta(G)$

- $\alpha(G)+\beta(G)=\nu(G)$
- $\alpha'(G)+\beta'(G)=\nu(G)$

算法小结

	一般图	二部图
最小支配集	近似算法（贪心）	
最大点独立集	最小点覆盖集的补集	
最小点覆盖集	近似算法（基于极大匹配）	基于最大匹配
最大边独立集	Edmonds	Hopcroft-Karp
最小边覆盖集	基于最大匹配	

可见：匹配的重要性

作业

- 5.16 //边独立集
- 5.18 //边独立集与边覆盖集
- 5.20 //边覆盖集