

Факультатив «Структурная теория матриц»

28 мая 2025 г.

Содержание

1	Первая лекция	3
	Матричное представление конечномерных алгебр	3
	Матричные алгебры	4
2	Вторая лекция	7
	Инвариантные подпространства	7
	Неприводимые множества матриц	8
3	Третья лекция	11
	Следствия из теоремы Бёрнсайда	11
4	Четвертая лекция	14
	Триангулируемые множества матриц	14
	Критерий триангулируемости	14
	Коммутативные и нильпотентные алгебры	15
5	Пятая лекция	16
	Теорема Лаффи	16
	Числовые характеристики алгебр	17
	Индекс нильпотентности	17
6	Шестая лекция	19
	Коммутативные алгебры	19
	Числовые характеристики алгебр	19
	Максимальная степень минимального многочлена	19
	Длина алгебры	20
7	Седьмая лекция	22
8	Используемые обозначения и соглашения	25

1 Первая лекция

Вопрос курса: Каким образом можно описать структуру конечномерных алгебр, используя матрицы, и какими свойствами будут обладать данные описания?

Определение 1. Пусть \mathcal{A} - векторное пространство над полем \mathbb{F} снабжённое операцией

$$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \text{ (умножение)}$$

тогда \mathcal{A} является алгеброй, если $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$ и $\forall a, b \in \mathbb{F}$ верно:

- $x(y + z) = xy + xz$
- $(x + y)z = xz + yz$
- $(ax) \cdot (by) = (ab)(x \cdot y)$

Замечание 1. В этом курсе рассматриваются ассоциативные алгебры, если не оговорено иное.

Пример 1.

1. Многочлены $\mathbb{F}[x]$; $\dim \mathbb{F}[x] = \infty$

2. Алгебра кватернионов:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}; i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

3. Групповые алгебры. Рассмотрим группу G и поле \mathbb{F} , тогда:

$$\mathbb{F}[G] = \left\{ \sum_{i=1}^{|G|} \lambda_i g_i \mid \lambda_i \in \mathbb{F}, g_i \in G \right\}; \dim \mathbb{F}[G] = |G|$$

4. Матричные алгебры: Пусть $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ и $\forall a, b \in \mathcal{A}; \forall \lambda \in \mathbb{F}$ замкнуто по операциям:

- $a + b \in \mathcal{A}$
- $\lambda a \in \mathcal{A}$
- $a \cdot b \in \mathcal{A}$

Матричное представление конечномерных алгебр

Утверждение 1. Любая конечномерная алгебра изоморфна некоторой конечной матричной алгебре.

Пусть \mathcal{A} - алгебра, $\{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в \mathcal{A} . Умножение элементов \mathcal{A} слева на e_i является линейным отображением $\forall a, b \in \mathcal{A}; \forall \lambda \in \mathbb{F}$:

- $e_i(a + b) = e_i a + e_i b$
- $e_i(\lambda a) = \lambda(e_i a)$

e_i можно поставить в соответствие матрицу A_{e_i} в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$. При этом:

- $A_{a+b} = A_a + A_b$
- $A_{ab} = A_a \cdot A_b$
- $A_{\lambda a} = \lambda A_a$

Пример 2. \mathbb{H} с базисом $\{1, i, j, k\}$

$$A_1 = E; \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Матричные алгебры

Пример 3.

1. (Блочно-)диагональные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} a_{ii} \in \mathbb{F}, \quad \dim \mathcal{A} = n$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & A_{nn} \end{array} \right) A_{ii} \in M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad \dim \mathcal{A} = \sum_{i=1}^n n_i^2$$

2. (Блочно-)верхнетреугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ если } j > i \text{ то } a_{ij} = 0, \text{ иначе } a_{ij} \in \mathbb{F}, \quad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \dots & * \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{array} \right) A_{ii} \in M_{n_i}(\mathbb{F}), \quad \dim \mathcal{A} = \frac{n^2 + \sum_{i=1}^n n_i^2}{2}$$

3. Алгебра порожденная некоторым $S = \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq M_n(\mathbb{F})$.

$$\mathcal{L}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{t \leq k} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{F}, a_i \in S \right\}$$

Упражнение 1. Является ли алгеброй:

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in M_n(\mathbb{F}) \mid \sum a_{ij} = 0, n \geq 2 \right\}?$$

Решение. Нет, не является. Рассмотрим оба возможных случая:

- $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$:

$$\mathcal{A} \ni a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ но } a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{A}$$

- $\text{char } \mathbb{F} = 2$:

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, bc = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } b, c \in \mathcal{A}, bc \notin \mathcal{A}$$

□

Упражнение 2. Является ли алгеброй множество всех матриц, с одним фиксированным собственным вектором $v \neq 0$?

Решение. Да, является. Рассмотрим A, B такие что: $Av = \lambda v$ и $Bv = \mu v$:

$$(A + B)v = (\lambda + \mu)v; ABv = \lambda\mu v; (\tau A)v = \tau\lambda v$$

□

Упражнение 3. Найти размерность алгебры из **Упр. 2**.

Решение. Переведем матрицы в алгебре из **Упр. 2** в базис $\{v, e_1, \dots, e_n\}$, тогда:

$$\mathcal{A}_v = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{F} \right\} \Rightarrow \dim \mathcal{A}_v = n^2 - n + 1$$

□

Упражнение 4. Найти k -мерную подалгебру в алгебре $M_4(\mathbb{R})$.

- $k = 7$
- $k = 12$ и в матрицах нет полностью нулевых строк/столбцов.

Решение.

- $k = 7$

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \middle| a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R} \right\}$$

- $k = 12$ и в матрицах нет полностью нулевых строк/столбцов.

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \middle| a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

□

2 Вторая лекция

Упражнение 5. Доказать, что множество циркулянтов:

$$C_n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \right\}$$

является алгеброй. Найти $\dim C_n(\mathbb{F})$

Решение. Найдем $A \in M_n(\mathbb{F})$ такую что: $C_n(\mathbb{F}) = \mathcal{L}(\{A\})$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad \dots; \quad A^n = E$$

$\forall k \in \mathbb{N} : A^k \in \{A, \dots, A^n\}$, так как $A^n = E \Rightarrow \mathcal{L}(\{A\}) = \{A_1, \dots, A_n\} = C_n(\mathbb{F})$

A, \dots, A^n - линейно независимы. $\Rightarrow \dim C_n(\mathbb{F}) = n$

□

Инвариантные подпространства

Определение 2. Подпространство $V \subseteq \mathbb{F}^n$ называется инвариантным относительно множества матриц $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ (\mathcal{A} - инвариантным) если $\forall v \in V$ и $\forall A \in \mathcal{A} : Av \in V$.

Пример 4.

- Подпространства $\{0\}$ и \mathbb{F}^n \mathcal{A} - инвариантны для любого \mathcal{A} .
- $v \in \mathbb{F}^n : \langle v \rangle$ \mathcal{A} - инвариантно $\Leftrightarrow v$ - общий собственный вектор для матриц из \mathcal{A}

Упражнение 6. Пусть V - подпространство \mathbb{F}^n , $\dim V = k$:

$$\mathcal{A}_v = \{A \in M_n(\mathbb{F}) | V \mathcal{A} - \text{инвариантно}\}$$

Доказать, что \mathcal{A}_v - алгебра. $\dim \mathcal{A}_v$?

Решение. $\{e_1, \dots, e_k\}$ - базис в V , дополним до базиса в $\mathbb{F}^n : \{e_1, \dots, e_k, \dots, e_n\}$. Тогда:

$$\mathcal{A}_v = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) \in M_n(\mathbb{F}) \right\} \Rightarrow \dim \mathcal{A}_v = n^2 - k(n - k)$$

где \mathcal{A}_v - блочно-верхнетреугольная алгебра.

□

Упражнение 7. Найти нетривиальное общее инвариантное подпространство для матриц $C_n(\mathbb{F})$.

Решение.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор } \forall A \in C_n(\mathbb{F}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \langle v \rangle$ — нетривиальное $C_n(\mathbb{F})$ - инвариантное подпространство □

Неприводимые множества матриц

Замечание 2. В этой лекции далее будем считать, что алгебра содержит $1(E)$.

Определение 3. Подмножество $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ называется неприводимым, если не существует нетривиальных \mathcal{A} - инвариантных подпространств в \mathbb{F}^n .

Лемма 1. Пусть \mathcal{A} — неприводимая подалгебра $M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\forall v \neq 0 \in \mathbb{F}^n$:

$$\mathcal{A}v = \{Av | A \in \mathcal{A}\} = \mathbb{F}^n.$$

Доказательство. $\mathcal{A}v$ — подпространство в \mathbb{F}^n . Рассмотрим $u \in \mathcal{A}v$. Для u верно:

$$\exists B \in \mathcal{A} : u = Bv \Rightarrow \forall A \in \mathcal{A} : Au = \underbrace{AB}_{AB \in \mathcal{A}} \cdot v \in \mathcal{A}v$$

тогда $\mathcal{A}v$ - инвариантно, при этом:

$$\mathcal{A}v \neq \{0\}, \text{ так как } E \in \mathcal{A} \Rightarrow \text{ так как } \mathcal{A} \text{ - неприводима, то } \mathcal{A}v = \mathbb{F}^n.$$

□

Лемма 2. Пусть \mathcal{A} — неприводимая подалгебра $M_n(\mathbb{F})$, тогда $\forall v \neq 0; v \in \mathbb{F}^n$:

$$v^T \mathcal{A} = \{v^T A | A \in \mathcal{A}\} = (\mathbb{F}^n)^T.$$

Доказательство.

$$V = v^T \mathcal{A} \subset (\mathbb{F}^n)^T$$

$$\text{Ann } V = \{u \in V | Vu = 0\}$$

так как $V \neq (\mathbb{F}^n)^T$, то $\text{Ann } V$ — нетривиальное подпространство \mathbb{F}^n

$$\forall u \in \text{Ann } V \forall A \in \mathcal{A} : V \cdot Au = v^T \underbrace{\mathcal{A} \cdot A}_{AA \in \mathcal{A}} u = 0 \Rightarrow Au \in \text{Ann } V$$

получаем, что: $\text{Ann } V$ нетривиальное \mathcal{A} - инвариантное подпространство \mathbb{F}^n , но \mathcal{A} — неприводимая алгебра $\Rightarrow \perp$. □

Лемма 3. $A \in M_n(\mathbb{F})$, \mathbb{F} - алгебраически замкнуто. $V \subseteq \mathbb{F}^n$ - инвариантно. Тогда в V содержится собственный вектор матрицы A .

Доказательство. Пусть $\dim V = k > 0$ и e_1, \dots, e_k - базис V . Дополним e_1, \dots, e_k до базиса всего \mathbb{F}^n : $e_1, \dots, e_k, \dots, e_n$. Тогда:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{0_{k,k}} & B_{k,n-k} \\ \hline 0_{n-k,k} & C_{n-k,n-k} \end{array} \right), \text{ и } V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \right\}$$

\mathbb{F} - алгебраически замкнуто $\Rightarrow \exists v_0 \in \mathbb{F}^k : A_o v_o = \lambda v_o$

$$v_o = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \Rightarrow \exists v \in \mathbb{F}^n : v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Av = \lambda v$$

□

Теорема 1. (Бёрнсайда) Пусть \mathbb{F} алгебраически замкнуто, \mathcal{A} — неприводимая подалгебра $M_n(\mathbb{F}) \Rightarrow \mathcal{A} = M_n(\mathbb{F})$

Доказательство.

1) Сначала покажем, что $\exists T \in \mathcal{A} : \text{rk } T = 1$

Пусть $T \neq 0$ — имеет минимальный ранг. Предположим, что $\text{rk } T > 1 \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{F}^n : Tu$ и Tv — линейно независимы. Из **Леммы 1**:

$$\exists A \in \mathcal{A} : A \cdot Tv = u \quad (1)$$

$$T[\mathbb{F}^n] - \text{образ оператора } T - TA - \text{инвариантен} \quad (2)$$

Из **Леммы 3** и (2) \Rightarrow что $T[\mathbb{F}^n]$ содержит собственный вектор TA с собственным значением λ , тогда:

$$\begin{aligned} \exists w \in T[\mathbb{F}^n] : TA w &= \lambda w \\ (TA - \lambda E)w &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$(TA - \lambda E)T = T(AT - \lambda E)$$

следовательно образ $(TA - \lambda E)T$ лежит в $T[\mathbb{F}^n]$ но не равен ему в силу (3) \Rightarrow

$$\text{rk}((TA - \lambda E)T) < \text{rk } T$$

С другой стороны, по (1) верно что:

$$(TA - \lambda E)Tv = TATv - \lambda Tv = Tu - \lambda Tv \neq 0 \Rightarrow \perp \Rightarrow \text{rk } T = 1$$

2) Без ограничения общности в T первый столбец ненулевой $\Rightarrow \exists C \in \mathcal{A}$:

$$\text{первый столбец } CT \text{ равен } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ но } \text{rk } T = 1 \Rightarrow CT = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Из **Леммы 2**:

$$\exists D \in \mathcal{A} : CTD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = E_{11}$$

Аналогично, для любых $i, j = \overline{1, n} : E_{ij} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} = M_n(\mathbb{F})$

□

3 Третья лекция

Следствия из теоремы Бёрнсайда

Следствие 1. Пусть $S = \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq M_n(\mathbb{F})$, $E \in \mathcal{L}(S)$, \mathbb{F} - алгебраически замкнуто. Тогда $\mathcal{L}(S) = M_n(\mathbb{F}) \Leftrightarrow S$ - неприводимо.

Доказательство.

$$S \text{ - приводимо} \Leftrightarrow \exists \text{ базис, в котором } \forall A \in S : A = \left(\begin{array}{c|c} A_0 & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ базис, в котором } \forall A \in \mathcal{L}(S) : A = \left(\begin{array}{c|c} A_0 & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \Rightarrow \mathcal{L}(S) \neq M_n(\mathbb{F})$$

□

Следствие 2. Пусть \mathcal{A} — подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$, $E \in \mathcal{A}$, \mathbb{F} - алгебраически замкнуто, $\mathcal{A} \neq M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\dim \mathcal{A} \leq n^2 - n + 1$

Доказательство. $\mathcal{A} \neq M_n(\mathbb{F}) \Rightarrow \exists \mathcal{A}$ - инвариантное подмножество размерности $k \Rightarrow$

$$\forall A \in \mathcal{A} : A = \left(\begin{array}{c|c} A_{0_{k,k}} & B_{k,n-k} \\ \hline 0_{n-k,k} & C_{n-k,n-k} \end{array} \right) \Rightarrow \forall k \in [1, n-1] :$$

$$\dim \mathcal{A} \leq n^2 - k(n-k) \leq \max_{k \in [1, n-1]} (n^2 - k(n-k)) \leq n^2 - n + 1$$

□

Замечание 3. Пусть все матрицы в алгебре \mathcal{A} имеют вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{array} \right)$$

Тогда:

$$\forall i : \mathcal{A}_i = \{A|_{=i} \mid A \in \mathcal{A}\} \text{ - подалгебра в } M_{n_i}(\mathbb{F}).$$

Теорема 2. (о блочном строении) Пусть \mathcal{A} — подалгебра $M_n(\mathbb{F})$, $E \in \mathcal{A}$, \mathbb{F} - алгебраически замкнуто. Тогда \exists базис в котором $A \in \mathcal{A}$ имеет вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{array} \right)$$

При этом:

$$\forall i : \mathcal{A}_i = \{A|_{=i} \mid A \in \mathcal{A}\} = M_{n_i}(\mathbb{F}).$$

Доказательство. Рассмотрим все цепочки вложенных инвариантных подпространств:

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_k = \mathbb{F}^n$$

Выберем среди них цепочку максимальной длины. Построим базис в $\mathbb{F}^n : \{e_1, \dots, e_n\}$. Рассмотрим базис в пространстве $V_1 : \{e_1, \dots, e_{i_1}\}$, дополним его до базиса в $V_2 : \{e_1, \dots, e_{i_1}, e_{i_1+1}, \dots, e_{i_2}\}$. Далее продолжим эту процедуру, пока не получим требуемый базис в \mathbb{F}^n . В построенном базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$:

$$\forall A \in \mathcal{A} : A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{array} \right)$$

Пусть $\exists m : \mathcal{A}_m = M_{n_m}(\mathbb{F}) \Rightarrow$ по **Теореме Бёрнсайда** и **Замечанию 3** \exists базис \mathbb{F}^n , в котором $\forall A \in \mathcal{A}_m$ имеет вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{0_{i_m, i_m}} & B_{i_m, n-i_m} \\ \hline 0_{n-i_m, i_m} & D_{n-i_m, n-i_m} \end{array} \right)$$

Пусть C - матрица перехода к этому базису, тогда рассмотрим следующий базис в \mathbb{F}^n :

$$(g_1, \dots, g_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot H = (e_1, \dots, e_n) \left(\begin{array}{c|c|c} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & C & 0 \\ \hline 0 & 0 & E \end{array} \right)$$

Тогда, матрица $A \in \mathcal{A}$ под действием H перейдет в базис $\{g_1, \dots, g_n\}$:

$$\begin{aligned} H^{-1}AH &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & & & \vdots \\ \hline \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & C^{-1}A_{mm}C & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & A_{kk} \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & & & \vdots \\ \hline \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & \frac{A_0}{0} & \frac{B}{D} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & & & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & A_{kk} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$V'_m = \{e_1, \dots, e_{i_{m-1}}, g_{i_{m-1}+1}, \dots, g_{i_m}, \dots, e_n\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \text{ цепочка } \{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{m-1} \subset V_m \subset V'_m \subset V_{m+1} \subset \dots \subset V_k = \mathbb{F}^n$$

но эта цепочка длиннее, так как $V_m \neq V'_m \Rightarrow \perp$

□

Упражнение 8. Пусть в терминах **Теоремы о блочном строении** подалгебра $\mathcal{A} \subset M_6(\mathbb{F})$ имеет вид:

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|c} A_{1_{3,3}} & 0 \\ \hline 0 & A_{2_{3,3}} \end{array} \right).$$

Следует ли из этого, что $\mathcal{A} = M_3(\mathbb{F}) \oplus M_3(\mathbb{F})$?

Решение. Нет, так как **Теорема о блочном строении** ничего не говорит о линейной независимости блоков, и вообще говоря, это не правда. \square

Упражнение 9. Пусть в терминах **Теоремы о блочном строении** алгебра

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & A_2 \end{array} \right) \text{ и } \exists A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{A} : A_1 \neq E$$

Доказать, что $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{F}) \oplus M_2(\mathbb{F})$.

Доказательство. По **Теореме о блочном строении**: $\mathcal{A}_1 = M_2(\mathbb{F}) = \mathcal{A}_2 \Rightarrow$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \\ \hline & & C_1 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ \hline & & C_1 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \\ \hline & & C_1 \end{array} \right); \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline & & C_1 \end{array} \right); \right. \\ \left. \left(\begin{array}{c|cc} C_5 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{array} \right); \left(\begin{array}{c|cc} C_5 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 \end{array} \right); \left(\begin{array}{c|cc} C_5 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \end{array} \right); \left(\begin{array}{c|cc} C_5 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \end{array} \right) \right\} \subseteq \mathcal{A}$$

Если показать, что $E_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline & & C_1 \end{array} \right) \in \mathcal{A}$, то базис в $M_2(\mathbb{F}) \oplus M_2(\mathbb{F})$ выглядит как $\{E_1 B_1, \dots, E_4 B_4, B_5, \dots, B_8\}$

1. $\text{rk } A_1 = 2$:

$$\mathcal{A}_1 = M_2(\mathbb{F}) \Rightarrow X = \left(\begin{array}{c|c} A_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \in \mathcal{A} \Rightarrow XA = E_1 \in \mathcal{A}_1$$

2. $\text{rk } A_1 = 1$: аналогично доказательству **Теоремы Бёрнсайда**, покажем что:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ \hline & & 0 \end{array} \right) \text{ и } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline & & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \in \mathcal{A}$$

\square

4 Четвертая лекция

Триангулируемые множества матриц

Определение 4. $T_n(\mathbb{F})$ - множество верхнетреугольных матриц порядка n

Определение 5. Множество матриц $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ триангулируемо, если

$$\exists C \in GL_n(\mathbb{F}) : \forall A \in \mathcal{A} : C^{-1}AC \in T_n(\mathbb{F})$$

Замечание 4. Свойства инвариантные базису:

- $\text{rk } A, \text{tr } A, \det A$
- $\chi_A(t), \mu_A(t)$
- Спектр матрицы
- Коммутативность, нильпотентность

Критерий триангулируемости

Лемма 4. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F}), \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, тогда:

$$[A, B] = [A + \lambda E, B + \mu E]$$

Лемма 5. Пусть $A \in T_n(\mathbb{F})$. Тогда A — нильпотентна $\Leftrightarrow \forall i \in [1, n] : a_{ii} = 0$

Теорема 3. Пусть \mathbb{F} — алгебраически замкнуто. Алгебра $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ триангулируема, тогда и только тогда, когда:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : [A, B] \text{ — нильпотентная}$$

Доказательство.

(\Rightarrow) Выберем базис так, что: $\forall A, B \in \mathcal{A}$ на диагонали матрицы $[A, B]$ стоят $a_{ii}b_{ii} - b_{ii}a_{ii} = 0$, но $[A, B] \in T_n(\mathbb{F}) \Rightarrow$, по **Лемме 5** $[A, B]$ — нильпотентный

(\Leftarrow) Рассмотрим алгебру $\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathcal{A} \cup \{E\})$. По **Теореме о блочном строении**: существует базис в котором \mathcal{B} имеет блочно-верхнетреугольный вид:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathcal{B}_{kk} \end{pmatrix}, \quad \forall i : \mathcal{B}|_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$$

Пусть $\exists i : n_i \geq 2$. Тогда $\exists A, B \in [A, B]|_i$ не являющийся нильпотентным $\Rightarrow [A, B]$ не нильпотентен.

$$\forall A, B \in \mathcal{B} : \exists C, D \in \mathcal{A} \text{ и } \lambda, \mu \in \mathbb{F} :$$

$$A = C + \lambda E, \quad B = D + \mu E \Rightarrow$$

\Rightarrow По **Лемме 4**: $[C, D] = [A, B]$ не нильпотентный $\Rightarrow \perp \Rightarrow \forall i : n_i = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ — триангулируема $\Rightarrow \mathcal{A}$ — триангулируема. □

Коммутативные и нильпотентные алгебры

Следствие 3. Пусть \mathbb{F} — алгебраически замкнуто, $S \subseteq M_n(\mathbb{F}), \forall A, B \in S : AB = BA$. Тогда S — неприводимая.

Доказательство. $\mathcal{L}(S)$ — коммутативная алгебра $\Rightarrow \forall A, B \in \mathcal{L}(S) : [A, B] = 0 \Rightarrow$ по

Теореме 3 $\mathcal{L}(S)$ — триангулируема. \square

Следствие 4. Пусть \mathbb{F} — алгебраически замкнуто. Тогда $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ нильпотентная алгебра (те, $\forall A \in \mathcal{A} : \exists n : A^n = 0$), тогда \mathcal{A} — триангулируема.

Доказательство. $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow [A, B]$ нильпотентен \Rightarrow по **Теореме 3**: \mathcal{A} — триангулируема. \square

Следствие 5. \mathbb{F} — алгебраически замкнутое поле. Тогда $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ нильпотентная алгебра $\Leftrightarrow \exists$ базис в котром $\forall A \in \mathcal{A} : A$ строго верхнетреугольная.

Определение 6. Матрицы A, B одновременно триангулируемы, если $\{A, B\}$ триангулируемо.

Теорема 4. (Маккоя, изначальный вариант) A, B одновременно триангулируемы \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \forall C \in \mathcal{L}(\{A, B, E\}) : C[A, B] — нильпотентен.$$

Доказательство.

(\Rightarrow) Аналогично, доказательству **Теоремы 3**.

(\Leftarrow) Рассмотрим $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\{A, B, E\})$. По **Теореме о блочном строении**, \mathcal{A} имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathcal{A}_{kk} \end{pmatrix}, \quad \forall i : \mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$$

Пусть, $\exists i : n_i \geq 2 : AB|_i \neq BA|_i$ (иначе $M_{n_i}(\mathbb{F}) = \mathcal{A}_i = \mathcal{L}(\{A, B, E\})|_i$ — коммутативная алгебра), тогда

$$\exists x \in \mathbb{F}^{n_i} : [A, B]|_i \cdot x \neq 0$$

$$\mathcal{L}(\{A, B, E\})|_i = M_{n_i}(\mathbb{F}) \Rightarrow \exists C \in \mathcal{L}(\{A, B, E\}) :$$

$$C|_i \cdot [A, B]|_i \cdot x = x \Rightarrow \forall n : (C \cdot [A, B])^n \cdot x = x \neq 0$$

Следовательно, $C \cdot [A, B]$ не нильпотентен $\Rightarrow \perp \Rightarrow \mathcal{A}$ — триангулируема $\Rightarrow A, B$ — одновременно триангулируемы. \square

5 Пятая лекция

Теорема Лаффи

Лемма 6. Пусть \mathbb{F} - алгебраически замкнутое поле, $\text{rk}[A, B] = 1$. Тогда $\{A, B\}$ - приводимо.

Доказательство. Пусть λ - собственное значение B , тогда $\text{rk}(B - \lambda E) \in [1, n-1]$ (если $\text{rk}(B - \lambda E) = 0$, то $[A, B] = 0 \Rightarrow \text{Ker}(B - \lambda E)$ и $\text{Im}(B - \lambda E)$ — нетривиальные B -инвариантные подпространства \mathbb{F}^n)

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{Ker}(B - \lambda E) : (B - \lambda E)Bv &= B(B - \lambda E)v = B \cdot 0 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow Bv \in \text{Ker}(B - \lambda E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{Im}(B - \lambda E) : \exists u \in \mathbb{F}^n : v &= (B - \lambda E)u \Rightarrow Bv = B(B - \lambda E)u = (B - \lambda E)Bu \Rightarrow \\ &\Rightarrow Bv \in \text{Im}(B - \lambda E) \end{aligned}$$

Пусть $\text{Ker}(B - \lambda E)$ не A -инвариантно $\Rightarrow \exists x \in \text{Ker}(B - \lambda E) : (B - \lambda E)Ax \neq 0$ По условию: $\text{rk}[A, B] = 1 \Rightarrow \text{Im}[A, B] = \langle y \rangle$, где $y \in (\mathbb{F}^n \setminus \{0\})$

1.

$$\alpha y = [A, B]x = [A, B - \lambda E]x = A \underbrace{(B - \lambda E)x}_{=0} - \underbrace{(B - \lambda E)Ax}_{\geq 0} \neq 0$$

Получаем что $\alpha \neq 0$ и $y \in \text{Im}(B - \lambda E)$

2.

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{F}^n : [A, B]u &= [A, B - \lambda E]u = \beta y \Rightarrow \\ \Rightarrow A(B - \lambda E)u &= \underbrace{(B - \lambda E)Au}_{\in \text{Im}(B - \lambda E)} + \beta y \stackrel{\text{по 1.}}{\Rightarrow} A(B - \lambda E)u \in \text{Im}(B - \lambda E) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{Im}(B - \lambda E) : \exists u \in \mathbb{F}^n : v &= (B - \lambda E)u \Rightarrow \\ \Rightarrow Av &= A(B - \lambda E)u \stackrel{\text{по 2.}}{\in} \text{Im}(B - \lambda E) \Rightarrow \text{Im}(B - \lambda E) - A\text{-инвариантно.} \end{aligned}$$

□

Замечание 5. $\mathcal{L}(\{A, B\})$ - приводима $\Leftrightarrow \mathcal{L}(\{A, B, E\})$ - приводима.

Теорема 5. (Лаффи) Пусть \mathbb{F} — алгебраически замкнутое поле, $A, B \in M_n(\mathbb{F}), \text{rk}[A, B] = 1 \Rightarrow \{A, B\}$ - триангулируемы.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\{A, B, E\})$ по Теореме о блочном строении:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & \mathcal{A}_k \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$$

Пусть $\exists i : n_i \geq 2$. Тогда $\mathcal{L}(\{A|_i, B|_i, E|_i\}) = M_{n_i}(\mathbb{F})$ По условию $\text{rk}[A, B] = 1 \Rightarrow \text{rk}[A|_i, B|_i] \leq 1 \stackrel{\text{по Лемме 6}}{\Rightarrow} \{A|_i, B|_i\}$ - приводимо $\Rightarrow \mathcal{L}(\{A|_i, B|_i, E|_i\}) \neq M_{n_i}(\mathbb{F}) \Rightarrow \perp \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq T_n(\mathbb{F}), A, B \in \mathcal{A}$ □

Числовые характеристики алгебр

Индекс нильпотентности

Определение 7. Пусть \mathcal{A} — нильпотентная алгебра в $M_n(\mathbb{F})$, тогда будем называть:

$$i(\mathcal{A}) = \min \{k \in \mathbb{N} | \forall A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{A} : A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k = 0\}$$

Лемма 7. Пусть \mathcal{A} — нильпотентная алгебра в $M_n(\mathbb{F})$, $i(\mathcal{A}) = k$, $k \in [2, n]$, тогда \exists базис в котором \mathcal{A} — блочно-ниль-треугольная, с k нулевыми блоками на диагонали.

Доказательство. Рассмотрим цепочку $\mathbb{F}^n \supseteq \mathcal{A}\mathbb{F}^n \supseteq \mathcal{A}^2\mathbb{F}^n \supseteq \dots$:

$$k = i(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}^k\mathbb{F}^n = \{0\} \text{ и } \mathcal{A}^{k-1}\mathbb{F}^n \neq \{0\}$$

$\forall j \in \mathbb{N}$: если $\mathcal{A}^j\mathbb{F}^n = \mathcal{A}^{j-1}\mathbb{F}^n$, то:

$$\forall t \geq j : \mathcal{A}^t\mathbb{F}^n = \mathcal{A}^{j-1}\mathbb{F}^n$$

Следовательно, цепочка, рассмотренная в начале доказательства строго убывает до $\mathcal{A}^k\mathbb{F}^n$, тогда:

$$\{0\} = \mathcal{A}^k\mathbb{F}^n \subseteq \mathcal{A}^{k-1}\mathbb{F}^n \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}\mathbb{F}^n \subseteq \mathbb{F}^n$$

$$\langle e_1, \dots, e_{i_1} \rangle \quad \langle e_1, \dots, e_{i_{k-1}} \rangle \quad \langle e_1, \dots, e_n \rangle$$

Возьмем, построенный по цепочки подпространств базис $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ и представим $A \in \mathcal{A}$:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} O_{n_1} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1k} \\ \hline & O_{n_2} & A_{23} & & \vdots \\ \hline & & O_{n_3} & \ddots & \vdots \\ \hline & & & \ddots & A_{k-1,k} \\ \hline & & & & O_{n_k} \end{array} \right), \quad O_{n_j} \in M_{i_j - i_{j-1}}(\mathbb{F})$$

□

Теорема 6. Пусть \mathcal{A} — нильпотентная алгебра в $M_n(\mathbb{F})$: $i(\mathcal{A}) = 2 \Rightarrow \mathcal{A}$ — коммутативная и $\dim \mathcal{A} \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$

Доказательство. $\forall A, B : AB = 0 = BA \Rightarrow \mathcal{A}$ — коммутативная.

По **Лемме 6**: \exists базис в котором $\forall A \in \mathcal{A}$ имеет вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} O_k & A' \\ \hline 0 & O_{n-k} \end{array} \right) \Rightarrow \dim \mathcal{A} \leq \max_{k \in [1, n-1]} k(n-k) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

□

Упражнение 10. Пусть \mathcal{A} — нильпотентная подалгебра $M_7(\mathbb{F})$, $i(\mathcal{A}) = 3$. Найти максимально возможную размерность алгебры \mathcal{A} ?

Решение. По **Лемме 6** \exists базис, в котором $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{pmatrix} O_{n_1} & A_{12} & A_{13} \\ \vdots & O_{n_2} & A_{23} \\ 0 & \dots & O_{n_3} \end{pmatrix}$$

Запишем все ограничения на размерность алгебры, которые мы знаем в виде системы:

$$\begin{cases} 2 \dim \mathcal{A} + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq 49 \\ n_1 + n_2 + n_3 = 7 \\ \forall i : n_i \in [1, 3] \end{cases}$$

Переформулируя условия, получаем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \in \{27, 21, 19\} & , \exists i : n_i = 1 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 17 & , \text{ иначе} \end{cases}$$

$$\dim \mathcal{A} \leq \frac{49-17}{2} = 16$$

Эта оценка достигается, например для следующих матриц:

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} O_3 & A_{12} & A_{13} \\ \hline \vdots & O_2 & A_{23} \\ \hline 0 & \dots & O_2 \end{array} \right) \right\}$$

□

Гипотеза 1. (Густафсона) Пусть \mathcal{A} — нильпотентная, коммутативная подалгебра алгебры $M_n(F)$, $k = i(\mathcal{A})$, тогда:

$$\dim \mathcal{A} \leq \left\lceil \frac{(n - k + 2)^2}{4} \right\rceil + k - 2$$

6 Шестая лекция

Коммутативные алгебры

Теорема 7. (Шура) Пусть \mathcal{A} — коммутативная алгебра подалгебра $M_n(\mathbb{F})$.

$$\text{Тогда } \dim \mathcal{A} \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$$

Лемма 8. Для любого n оценка данная в теореме Шура достигается.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$, где:

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \lambda E_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} & * \\ \hline 0 & \lambda E_{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \end{array} \right) \middle| \lambda \in \mathbb{F} \right\}$$

$$\dim \mathcal{A} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) + 1 = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$$

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : [A, B] = [A - \lambda E, B - \mu E] = (A - \lambda E)(B - \mu E) - (B - \mu E)(A - \lambda E) = 0 - 0 = 0$$

Замкнутость множества \mathcal{A} относительно умножения наследуется, так как это блочно-треугольная алгебра, по своему строению. \square

Упражнение 11. Найти в $M_2(\mathbb{F})$ две различные коммутативные подалгебры, с точностью до замены базиса, максимальной размерности.

Решение. Согласно теореме Шура, максимальная размерность будет равна:

$$\left\lfloor \frac{2^2}{4} \right\rfloor + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & b \end{array} \right) \middle| a, b \in \mathbb{F} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a \end{array} \right) \middle| a, b \in \mathbb{F} \right\}$$

\mathcal{A} — не содержит нетривиальных нильпотентов, в отличии $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ \square

Числовые характеристики алгебр

Максимальная степень минимального многочлена

$\chi_A(t) = \det(A - tE)$ - характеристический многочлен A . $\mu_A(t)$ - минимальный многочлен A (минимальный многочлен, такой что при подстановки A он обнуляется).

Упражнение 12. Известно, что если A, B - подобны ($\exists C : A = C^{-1}BC$), то: $\chi_A(t) = \chi_B(t)$ и $\mu_A(t) = \mu_B(t)$. Показать, что обратное не верно.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi_A(t) = \chi_B(t) = t^4; \mu_A(t) = \mu_B(t) = t^2$$

Но $A \approx B$, так как $\text{rk } A \neq \text{rk } B$. □

Теорема 8. (Гамильтона-Кэли) Пусть \mathbb{F} — произвольное поле. Тогда $\forall A \in M_n(\mathbb{F}) : \chi_A(A) = 0$.

Следствие 6. $\mu_A(t) \mid \chi_A(t)$

Определение 8. Пусть $S \subseteq M_n(\mathbb{F})$, тогда:

$$m(S) = \max_{A \in S} \{\deg(\mu_A(t))\}$$

Следствие 7. Пусть $S \subseteq M_n(\mathbb{F})$, тогда:

$$m(S) \leq n$$

Следствие 8. Пусть $S \in M_n(\mathbb{F})$, тогда:

$$\dim \mathcal{L}(S) \leq n$$

$$\dim \mathcal{L}(S) = \dim(\mu_S(t)) \leq n$$

Длина алгебры

Определение 9. $W \in S^i$ сократимо, если $W \in \mathcal{L}_{i-1}(S)$

Утверждение 2. Если $\forall W \in S^i$ сократимо $\Rightarrow \forall k > i : \forall V \in S^k$ сократимо.

Утверждение 3. $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}_i(S) \Leftrightarrow \forall W \in S^{i+1}$ сократимо.

Доказательство.

$$\mathcal{L}_0(S) \subseteq \mathcal{L}_1(S) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{L}_i(S) \subseteq \mathcal{L}_{i+1}(S) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{L}(S)$$

$\forall W \in S^{i+1}$ — сократимо, равносильно тому что:

$$\mathcal{L}_{i+1}(S) = \mathcal{L}_i(S) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall k > i : \mathcal{L}_k(S) = \mathcal{L}_i(S) \Leftrightarrow \mathcal{L}_i(S) = \mathcal{L}(S)$$

□

Определение 10. Длина множества $S \subseteq M_n(\mathbb{F})$:

$$l(S) = \min\{i | \mathcal{L}_i(S) = \mathcal{L}(S)\}$$

Утверждение 4. $k \leq l(S) \Leftrightarrow \exists$ несократимая $W \in S^k$

Пример 5. Если $S = \{A\} \subseteq M_n(\mathbb{F})$, то:

$$l(S) = \deg(\mu_A(t)) - 1 \leq n - 1$$

Пример 6. Если $S \subseteq M_n(\mathbb{F})$:

$$l(S) \leq n^2 - 1$$

Гипотеза 2. (Паза) Если $S \subseteq M_n(\mathbb{F})$, то:

$$l(S) \leq 2n - 2$$

7 Седьмая лекция

Лемма 9. Оценка данная в гипотезе Паза, достигается, те:

$$\exists S \subseteq M_n(\mathbb{F}) : l(S) = 2n - 2$$

Доказательство. Рассмотрим $S = \{A, B\} = \{E_{n,1}, J(0)\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Сначала покажем, что $\mathcal{L}(S) = M_n(\mathbb{F})$

$$A^i B = E_{n-i,1} \text{ при } i \in [0, n-1]$$

$$A^j = E_{1,j+1} + E_{2,2+j} + \dots + E_{n-j,n} \text{ при } j \in [1, n-1]$$

$$\begin{aligned} \forall k, m \in [1, n] : E_{k,m} &= E_{k,1} \cdot E_{1,m} = E_{k,1}(E_{1,m} + E_{2,m+1} + \dots + E_{n-m+1,n}) = \\ &= A^{n-k} B A^{m-1} \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \mathcal{L}(S) = M_n(\mathbb{F}) \end{aligned}$$

2. Теперь, что: $l(S) \leq 2n - 2$

Из первого пункта следует, что \mathcal{A} порождается словами вида $A^{n-k} B A^{m-1}$. Их длина вычисляется как:

$$n - k + 1 + m - 1 = n + m - k \leq 2n - 1$$

Однако, равенство достигается только при $k = 1$ и $n = m$. Это верно для единственного слова в этой алгебре:

$$A^{n-1} B A^{n-1} = E_{1n} = A^{n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(S) \Rightarrow \mathcal{L}_{2n-2}(S) = \mathcal{L}(S)$$

3. Наконец, покажем оценку с другой стороны: $l(S) \geq 2n - 2$

В матрице $BA^k B$ ($k \geq 0$) первые $n - 1$ строк нулевые, а так же последние $n - 1$ столбцов нулевые, из-за строения матрицы $B \Rightarrow BA^k B = \lambda B \Rightarrow$ если в слове есть, хотя бы 2 буквы B , то оно сократимо.

Для $D = \{A^i B A^j, A^k | i, j, k \in [0, n-1]\}$ и $\mathcal{L}(S) = \langle D \rangle$:

$$\mathcal{L}_{2n-3}(S) = \langle D \setminus \{A^{n-1} B A^{n-1}, A^{n-2} B A^{n-1}, A^{n-1} B A^{n-2}\} \rangle$$

Так как мы исключили матричные единицы из линейной оболочки D на позициях $(1, n-1)$ и $(2, n)$, то в этих ячейках матриц должны стоять одинаковые числа (либо 2 нуля — матричная единица, либо 2 единицы — наддиагональ сверху) тогда:

$$\mathcal{L}_{2n-3}(S) \neq \mathcal{L}(S) = M_n(\mathbb{F}) \Rightarrow l(S) > 2n - 3$$

□

Утверждение 5. Подслова несократимого слова, несократимы.

Утверждение 6. Пусть $W, U \in S^k$, W — несократимо, $W \vdash U$, тогда U так же несократимо.

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{L}_{k-1}(S)$, тогда:

$$W = \alpha \cdot \underset{\in \mathcal{L}_{k-1}(S)}{U} + \beta \cdot \underset{\in \mathcal{L}_{k-1}(S)}{V} \Rightarrow W \in \mathcal{L}_{k-1}(S)$$

□

Теорема 9. Пусть $S \subset M_n(\mathbb{F})$, $E \in \mathcal{L}(S)$, $d = \dim \mathcal{L}(S)$, $m = m(S)$, $l = l(S)$, тогда:

$$l(S) \leq \max \left\{ m - 1, \frac{d}{2} \right\}$$

Доказательство. Рассмотрим в отдельности 2 случая:

$$1. \forall k \in [1, l-1] : \dim \mathcal{L}_k(S) - \dim \mathcal{L}_{k-1}(S) \geq 2$$

$$d = \dim \mathcal{L}(S) = \sum_{i=0}^{l-1} (\dim \mathcal{L}_{l-i}(S) - \dim \mathcal{L}_{l-i-1}(S)) + \dim \mathcal{L}_0(S)$$

Каждое из слагаемых в этой сумме, по предположению равно хотя бы двум, кроме первого, которое можно оценить снизу 1, так как иначе длина алгебры была бы равна $d - 1$, тогда:

$$d \geq 1 + 2(l-1) + 1 = 2l$$

2. Теперь рассмотрим оставшийся вариант:

$$\exists k \in [1, l-1] : \dim \mathcal{L}_k(S) - \dim \mathcal{L}_{k-1}(S) = 1 \quad (4)$$

Пусть мы имеем несократимое слово длины l :

$$W_1 = A_1 \dots A_l, \text{ где } A_i \in S$$

Тогда

$$U_1 = A_1 \dots A_k \text{ и } U'_1 = A_2 \dots A_{k+1} \text{ — несократимые слова длины } k$$

В силу (4) $U'_1 \vdash U_1$. Подставим в W_1 вместо U'_1 линейную комбинацию выражающую его через U_1 и слова меньшей длины. Тогда $W_1 \vdash W_2$, где:

$$W_2 = A_1 A_1 \dots A_k A_{k+2} \dots A_l$$

$$\begin{aligned}
W_1 = A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1} \dots A_l &= A_1 (\alpha U_1 + \underbrace{V}_{\in \mathcal{L}_{k-1}(S)}) A_{k+2} \dots A_l = \underbrace{\alpha A_1 U_1 A_{k+2} \dots A_l}_{W_2} + \\
&+ \underbrace{A_1 V A_{k+2} \dots A_l}_{\in \mathcal{L}_{l-1}(S)}
\end{aligned}$$

Получаем что, W_2 — несократимое слово длины l , по **Утверждению 6**.

$U_2 = A_1 A_1 A_2 \dots A_{k-1}$, $U'_2 = A_1 A_2 \dots A_k$ — несократимые слова длины k . Тогда в силу (4):

$$U'_2 \vdash U_2 \Rightarrow W_2 \vdash W_3, \text{ где } W_3 = A_1 A_1 A_1 \dots A_{k-1} \dots A_l$$

\vdots

На k -ом шаге получим что:

$$W_k = A_1^k A_2 A_{k+2} \dots A_l \text{ — несократимое слово длины } l$$

Тогда A_1^k — несократимое слово длины k , по (4), $\forall v \in S^k : v \vdash A_1^k \Rightarrow W_k \vdash A_1^l \Rightarrow A_1^l$ — несократимо $\Rightarrow l \leq m - 1$

□

Следствие 9. Гипотеза Паза верна при $n \leq 3$

Доказательство.

- $n = 3$: $\dim \mathcal{L}(S) \leq 9, m(S) \leq 3$, тогда $l(S) \leq \max \left\{ 2, \frac{9}{2} \right\} = 4 = 2 \cdot 6 - 2$
- $n = 2$: $\dim \mathcal{L}(S) \leq 4, m(S) \leq 2$, тогда $l(S) \leq \max \left\{ 1, \frac{4}{2} \right\} = 2 = 2 \cdot 2 - 2$
- $n = 1$: $\dim \mathcal{L}(S) \leq 1, m(S) \leq 1$, тогда $l(S) \leq \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} = 0 = 2 \cdot 1 - 2$

□

Следствие 10. Пусть $S \subset M_n(\mathbb{F})$, $E \in \mathcal{L}(S)$, $d = \dim \mathcal{L}(S)$, $l = l(S)$ но

$$m = m'(S) = \min \{ k | \forall A \in S : A^k \in \mathcal{L}_{k-1}(S) \}$$

Тогда:

$$l(S) \leq \max \left\{ m, \frac{d}{2} \right\}$$

8 Используемые обозначения и соглашения

- В курсе в основном рассматриваются ассоциативные алгебры
- $[A, B]$ - коммутатор матриц A, B . $[A, B] = AB - BA$
- $B|_x$ - ограничение на блочную матрицу или на блочную алгебру. Имеется ввиду блок из матрицы(алгебры) с индексом x
- Пусть $S = \{A_1, \dots, A_k\} \subseteq M_n(\mathbb{F})$

$$S^i = \{A_{j_1} \cdots A_{j_k} | A_{j_k} \in S\}$$

$$S^{\leq i} = \bigcup_{j=0}^i S^j$$

- Если $E \in \mathcal{L}(S)$, то $S^0 = \{E\}$ - множество скалярных матриц, иначе $S^0 = \emptyset$
- $\mathcal{L}_i(S) = \langle S^{\leq i} \rangle$
- $\mathcal{L}(S) = \bigcup_{j=0} \mathcal{L}_j(S)$