Факультатив «Структурная теория матриц»

11 мая 2025 г.

Содержание

1 Первая лекция

Вопрос курса: Каким образом можно описать структуру конечномерных алгебр, используя матрицы, и какими свойствами будут обладать данные описания?

Определение 1. Пусть $\mathcal{A}$ - векторное пространство над полем $\mathbb{F}$ снабжённое операцией

$$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \text{ (умножение)}$$

тогда $\mathcal{A}$ является алгеброй, если $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$ и $\forall a, b \in \mathbb{F}$ верно:

- $x(y+z) = xy + xz$
- $(x+y)z = xz + yz$
- $(ax) \cdot (by) = (ab)(x \cdot y)$

Замечание 1. В этом курсе рассматриваются ассоциативные алгебры, если не оговорено иное.

Пример 1.

1. Многочлены $\mathbb{F}[x]$; $\dim \mathbb{F}[x] = \infty$
2. Алгебра кватернионов:
$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}; i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$
3. Групповые алгебры. Рассмотрим группу G и поле $\mathbb{F}$, тогда:
$$\mathbb{F}[G] = \left\{ \sum_{i=1}^{|G|} \lambda_i g_i \mid \lambda_i \in \mathbb{F}, g_i \in G \right\}; \dim \mathbb{F}[G] = |G|$$
4. Матричные алгебры: Пусть $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ и $\forall a, b \in \mathcal{A};\ \forall \lambda \in \mathbb{F}$ замкнуто по операциям:
   - $a + b \in \mathcal{A}$
   - $\lambda a \in \mathcal{A}$
   - $a \cdot b \in \mathcal{A}$

Матричное представление конечномерных алгебр

Утверждение 1. Любая конечномерная алгебра изоморфна некоторой конечной матричной алгебре.

Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис в $\mathcal{A}$ Умножение элементов $\mathcal{A}$ слева на e_i является линейным отображением $\forall a, b \in \mathcal{A};\ \forall \lambda \in \mathbb{F}$:

- $e_i(a+b) = e_i a + e_i b$
- $e_i(\lambda a) = \lambda(e_i a)$

e_i можно поставить в соответствие матрицу A_{e_i} в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. При этом:

- $A_{a+b} = A_a + A_b$
- $A_{ab} = A_a \cdot A_b$
- $A_{\lambda a} = \lambda A_a$

Пример 2. $\mathbb{H}$ с базисом $\{1, i, j, k\}$

$$A_1 = E;\ A_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Матричные алгебры

Пример 3.

1. (Блочно-)диагональные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} a_{ii} \in \mathbb{F},\ \dim \mathcal{A} = n$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \ldots & A_{nn} \end{array}\right) A_{ii} \in M_{n_i}(\mathbb{F}),\ \dim \mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} n_i^2$$

2. (Блочно-)верхнетреугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ если } j > i \text{ то } a_{ij} = 0, \text{ иначе } a_{ij} \in \mathbb{F},\ \dim \mathcal{A} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \ldots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ldots & * \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \ldots & A_{nn} \end{array}\right) A_{ii} \in M_n(\mathbb{F}),\ \dim \mathcal{A} = \frac{n^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} n_i^2}{2}$$

3. Алгебра порожденная некоторым $S = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq M_n(\mathbb{F})$.

$$\mathcal{L}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{t \leqslant k} \lambda_i a_i \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{F},\ a_i \in S \right\}$$

Упражнение 1. Является ли алгеброй:

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in M_n(\mathbb{F}) \,\middle|\, \sum a_{ij} = 0,\ n \geqslant 2 \right\}?$$

Решение. Нет, не является. Рассмотрим оба возможных случая:

- $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2:$

$$\mathcal{A} \ni a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ но } a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{A}$$

- $\operatorname{char} \mathbb{F} = 2:$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ bc = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } b, c \in \mathcal{A},\ bc \notin \mathcal{A}$$

□

Упражнение 2. Является ли алгеброй множество всех матриц, с одним фиксированным собственным вектором $v \neq 0$?

Решение. Да, является. Рассмотрим A, B такие что: $Av = \lambda v$ и $Bv = \mu v$:

$$(A + B)v = (\lambda + \mu)v;\ ABv = \lambda\mu v;\ (\tau A)v = \tau\lambda v$$

□

Упражнение 3. Найти размерность алгебры из **Упр. 2**.

Решение. Переведем матрицы в алгебре из **Упр. 2** в базис $\{v, e_1, \ldots, e_n\}$, тогда:

$$\mathcal{A}_v = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{F} \right\} \Rightarrow \dim \mathcal{A}_v = n^2 - n + 1$$

□

Упражнение 4. Найти k-мерную подалгебру в алгебре $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

- $k = 7$
- $k = 12$ и в матрицах нет полностью нулевых строк/столбцов.

Решение.

- $k = 7$
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R} \right\}$$

- $k = 12$ и в мтрицах нет полностью нулевых строк/столбцов.
$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$\square$

2 Вторая лекция

Упражнение 5. Доказать, что множество циркулянтов:

$$C_n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \right\}$$

является алгеброй. Найти $\dim C_n(\mathbb{F})$

Решение. Найдем $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ такую что: $C_n(\mathbb{F}) = \mathcal{L}(\{A\})$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};\ \dots;\ A^n = E$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : A^k \in \{A, \dots, A^n\}, \text{ так как } A^n = E \Rightarrow \mathcal{L}(\{A\}) = \{A_1, \dots, A_n\} = C_n(\mathbb{F})$$
$$A, \dots, A^n \text{ - линейно независимы.} \Rightarrow \dim C_n(\mathbb{F}) = n$$

□

Инвариантные подпространства

Определение 2. Подпространство $V \subseteq \mathbb{F}^n$ называется инвариантным относительно множества матриц $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ ($\mathcal{A}$ – инвариантным) если $\forall v \in V$ и $\forall A \in \mathcal{A} : Av \in V$.

Пример 4.

- Подпространства $\{0\}$ и $\mathbb{F}^n$ $\mathcal{A}$ – инвариантны для любого $\mathcal{A}$.
- $v \in \mathbb{F}^n : \langle v \rangle$ $\mathcal{A}$ – инвариантно $\Leftrightarrow$ v - общий собственный вектор для матриц из $\mathcal{A}$

Упражнение 6. Пусть V - подпространство $\mathbb{F}^n$, $\dim V = k$:

$$\mathcal{A}_v = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) | V \mathcal{A} \text{ – инваринтно}\}$$

Доказать, что $\mathcal{A}_v$ - алгебра. $\dim \mathcal{A}_v$?

Решение. $\{e_1, \dots, e_k\}$ - базис в V, дополним до базиса в $\mathbb{F}^n : \{e_1, \dots, e_k, \dots, e_n\}$. Тогда:

$$\mathcal{A}_v = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \right\} \Rightarrow \dim \mathcal{A}_v = n^2 - k(n-k)$$

где $\mathcal{A}_v$ - блочно-верхнетреугольная алгебра. □

Упражнение 7. Найти нетривиальное общее инвариантное подпространство для матриц $C_n(\mathbb{F})$.

Решение.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор } \forall A \in C_n(\mathbb{F}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \langle v \rangle$ — нетривиальное $C_n(\mathbb{F})$ - инвариантное подпространство □

Неприводимые множества матриц

Замечание 2. В этой лекции далее будем считать, что алгебра содержит $1(E)$.

Определение 3. Подмножество $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ называется неприводимым, если не существует нетривиальных $\mathcal{A}$ - инвариантных подпространств в $\mathbb{F}^n$.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{A}$ — неприводимая подалгебра $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Тогда $\forall v \neq 0 \in \mathbb{F}^n$:

$$\mathcal{A}v = \{Av | A \in \mathcal{A}\} = \mathbb{F}^n.$$

Доказательство. $\mathcal{A}v$ — подпространство в $\mathbb{F}^n$. Рассмотрим $u \in \mathcal{A}v$. Для u верно:

$$\exists B \in \mathcal{A} : u = Bv \Rightarrow \forall A \in \mathcal{A} : Au = \underbrace{AB}_{AB \in \mathcal{A}} \cdot v \in \mathcal{A}v$$

тогда $\mathcal{A}v$ - инвариантно, при этом:

$$\mathcal{A}v \neq \{0\}, \text{ так как } E \in \mathcal{A} \Rightarrow \text{ так как } \mathcal{A} \text{ - неприводима, то } \mathcal{A}v = \mathbb{F}^n.$$

□

Лемма 2. Пусть $\mathcal{A}$ — неприводимая подалгебра $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, тогда $\forall v \neq 0;\ v \in \mathbb{F}^n$:

$$v^T\mathcal{A} = \{v^T A | A \in \mathcal{A}\} = (\mathbb{F}^n)^T.$$

Доказательство.

$$V = v^T\mathcal{A} \subset (\mathbb{F}^n)^T$$

$$\operatorname{Ann} V = \{u \in V | Vu = 0\}$$

так как $V \neq (\mathbb{F}^n)^T$, то $\operatorname{Ann} V$ — нетривиальное подпространство $\mathbb{F}^n$

$$\forall u \in \operatorname{Ann} V\ \forall A \in \mathcal{A} : V \cdot Au = v^T \underbrace{\mathcal{A} \cdot A}_{\mathcal{A}A = \mathcal{A}} u = 0 \Rightarrow Au \in \operatorname{Ann} V$$

получаем, что: $\operatorname{Ann} V$ нетривиальное $\mathcal{A}$ - инвариантное подпространство $\mathbb{F}^n$, но $\mathcal{A}$ — неприводимая алгебра $\Rightarrow \perp$. □

Лемма 3. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнуто. $V \subseteq \mathbb{F}^n A$ - инвариантно. Тогда в V содержится собственный вектор матрицы A.

Доказательство. Пусть $\dim V = k > 0$ и $e_1, \ldots, e_k$ - базис V. Дополним $e_1, \ldots, e_k$ до базиса всего $\mathbb{F}^n : e_1, \ldots, e_k, \ldots, e_n$. Тогда:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{0_{k,k}} & B_{k,n-k} \\ \hline 0_{n-k,k} & C_{n-k,n-k} \end{array}\right), \text{ и } V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \right\}$$

$\mathbb{F}$ - алгебраически замкнуто $\Rightarrow \exists v_0 \in \mathbb{F}^k : A_o v_o = \lambda v_o$

$$v_o = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \Rightarrow \exists v \in \mathbb{F}^n : v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Av = \lambda v$$

$\square$

Теорема 1. (Бёрнсайда) Пусть $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $\mathcal{A}$ — неприводимая подалгебра $\mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \Rightarrow \mathcal{A} = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$

Доказательство.
1) Сначала покажем, что $\exists T \in \mathcal{A} : \operatorname{rk} T = 1$
Пусть $T \neq 0$ — имеет минимальный ранг. Предположим, что $\operatorname{rk} T > 1 \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{F}^n$: Tu и Tv — линейно независимы. Из **Леммы 1**:

$$\exists A \in \mathcal{A} : A \cdot Tv = u \tag{1}$$

$$T[\mathbb{F}^n] \text{ - образ оператора } T - TA \text{ - инвариантен} \tag{2}$$

Из **Леммы 3** и (2) $\Rightarrow$ что $T[\mathbb{F}^n]$ содержит собственный вектор TA с собственным значением λ, тогда:

$$\exists w \in T[\mathbb{F}^n] : TAw = \lambda w$$
$$(TA - \lambda E)w = 0 \tag{3}$$
$$(TA - \lambda E)T = T(AT - \lambda E)$$

следовательно образ $(TA - \lambda E)T$ лежит в $T[\mathbb{F}^n]$ но не равен ему в силу (3) $\Rightarrow$

$$\operatorname{rk}((TA - \lambda E)T) < \operatorname{rk} T$$

С другой стороны, по (1) верно что:

$$(TA - \lambda E)Tv = TATv - \lambda Tv = Tu - \lambda Tv \neq 0 \Rightarrow \perp \Rightarrow \operatorname{rk} T = 1$$

2) Без ограничения общности в T первый столбец ненулевой $\Rightarrow \exists C \in \mathcal{A}$:

$$\text{первый столбец } CT \text{ равен } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ но } \operatorname{rk} T = 1 \Rightarrow CT = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Из **Леммы 2**:

$$\exists D \in \mathcal{A} : CTD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = E_{11}$$

Аналогично, для любых $i, j = \overline{1, n} : E_{ij} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ □

3 Третья лекция

Следствия из теоремы Бёрнсайда

Следствие 1. Пусть $S = \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $E \in \mathcal{L}(S)$, $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнуто. Тогда $\mathcal{L}(S) = \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \Leftrightarrow S$ - неприводимо.

Доказательство.

$$S \text{ - приводимо} \Leftrightarrow \exists \text{ базис, в котором } \forall A \in S: \ A = \left(\begin{array}{c|c} A_0 & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ базис, в котором } \forall A \in \mathcal{L}(S): A = \left(\begin{array}{c|c} A_0 & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \Rightarrow \mathcal{L}(S) \neq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$$

$\square$

Следствие 2. Пусть $\mathcal{A}$ — подалгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $E \in \mathcal{A}$, $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнуто, $\mathcal{A} \neq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Тогда $\dim \mathcal{A} \leqslant n^2 - n + 1$

Доказательство. $\mathcal{A} \neq \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \Rightarrow \exists \mathcal{A}$ - инвариантное подмонжество размерности $k \Rightarrow$

$$\forall A \in \mathcal{A} : A = \left(\begin{array}{c|c} A_{0_{k,k}} & B_{k,n-k} \\ \hline 0_{n-k,k} & C_{n-k,n-k} \end{array}\right) \Rightarrow \forall k \in [1, n-1] :$$

$$\dim \mathcal{A} \leqslant n^2 - k(n-k) \leqslant \max_{k \in [1,n-1]} \big(n^2 - k(n-k)\big) \leqslant n^2 - n + 1$$

$\square$

Замечание 3. Пусть все матрицы в алегбре $\mathcal{A}$ имеют вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{array}\right)$$

Тогда:

$$\forall i : \mathcal{A}_i = \{A|_{=i} \mid A \in \mathcal{A}\} \text{ - подалгебра в } \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F}).$$

Теорема 2. (о блочном строении) Пусть $\mathcal{A}$ — подалегбра $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $E \in \mathcal{A}$, $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнуто. Тогда $\exists$ базис в котором $A \in \mathcal{A}$ имеет вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{array}\right)$$

При этом:

$$\forall i : \mathcal{A}_i = \{A|_{=i} \mid A \in \mathcal{A}\} = \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F}).$$

Доказательство. Рассмотрим все цепочки вложенных инвариантных подпространств:

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_k = \mathbb{F}^n$$

Выберем среди них цепочку максимальной длины. Построим базис в $\mathbb{F}^n : \{e_1, \dots, e_n\}$. Рассмотрим базис в пространстве $V_1 : \{e_1, \dots, e_{i_1}\}$, дополним его до базиса в V_2 : $\{e_1, \dots, e_{i_1}, e_{i_1+1}, \dots, e_{i_2}\}$. Далее продолжим эту процедуру, пока не получим требуемый базис в $\mathbb{F}^n$. В построенном базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$:

$$\forall A \in \mathcal{A} : A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{array}\right)$$

Пусть $\exists m : \mathcal{A}_m = \mathrm{M}_{n_m}(\mathbb{F}) \Rightarrow$ по **Теореме Бёрнсайда** и **Замечанию 3** $\exists$ базис $\mathbb{F}^n$, в котором $\forall A \in \mathcal{A}_m$ имеет вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{0_{i_m,i_m}} & B_{i_m,n-i_m} \\ \hline 0_{n-i_m,i_m} & D_{n-i_m,n-i_m} \end{array}\right)$$

Пусть C - матрица перехода к этому базису, тогда рассмотрим следущий базис в $\mathbb{F}^n$:

$$(g_1, \dots, g_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot H = (e_1, \dots, e_n) \left(\begin{array}{c|c|c} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & C & 0 \\ \hline 0 & 0 & E \end{array}\right)$$

Тогда, матрица $A \in \mathcal{A}$ под действием H перейдет в базис $\{g_1, \dots, g_n\}$:

$$H^{-1}AH = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & & & \vdots \\ \hline \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & C^{-1}A_{mm}C & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & A_{kk} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & & & \vdots \\ \hline \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & \begin{array}{c|c} A_0 & B \\ \hline 0 & D \end{array} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & A_{kk} \end{array}\right)$$

$$V'_m = \{e_1, \dots, e_{i_{m-1}}, g_{i_{m-1}+1}, \dots, g_{i_m}, \dots, e_n\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \text{ цепочка } \{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{m-1} \subset V_m \subset V'_m \subset V_{m+1} \subset \dots \subset V_k = \mathbb{F}^n$$

но эта цепочка длиннее, так как $V_m \neq V'_m \Rightarrow \perp$ $\square$

Упражнение 8. Пусть в терминах **Теоремы о блочном строении** подалгебра $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_6(\mathbb{F})$ имеет вид:

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|c} A_{1_{3,3}} & 0 \\ \hline 0 & A_{2_{3,3}} \end{array}\right).$$

Следует ли из этого, что $\mathcal{A} = \mathrm{M}_3(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{M}_3(\mathbb{F})$?

Решение. Нет, так как **Теорема о блочном строении** ничего не говорит о линейной независимости блоков, и вообще говоря, это не правда. $\square$

Упражнение 9. Пусть в терминах **Теоремы о блочном строении** алгебра

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & A_2 \end{array}\right) \text{ и } \exists A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{A} : A_1 \neq E$$

Доказать, что $\mathcal{A} = \mathrm{M}_2(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{F})$.

Доказательство. По **Теореме о блочном строении**: $\mathcal{A}_1 = \mathrm{M}_2(\mathbb{F}) = \mathcal{A}_2 \Rightarrow$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & C_1 \end{array}\right); \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & C_1 \end{array}\right); \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & C_1 \end{array}\right); \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & C_1 \end{array}\right); \right.$$

$$\left. \left(\begin{array}{c|c} C_5 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right); \left(\begin{array}{c|c} C_5 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right); \left(\begin{array}{c|c} C_5 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right); \left(\begin{array}{c|c} C_5 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right) \right\} \subseteq \mathcal{A}$$

Если показать, что $E_1 = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & C_1 \end{array}\right) \in \mathcal{A}$, то базис в $\mathrm{M}_2(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ выглядит как $\{E_1 B_1, \dots, E_4 B_4, B_5, \dots, B_8\}$

1. $\operatorname{rk} A_1 = 2$:

$$\mathcal{A}_1 = \mathrm{M}_2(\mathbb{F}) \Rightarrow X = \left(\begin{array}{c|c} A_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \in \mathcal{A} \Rightarrow XA = E_1 \in \mathcal{A}_1$$

2. $\operatorname{rk} A_1 = 1$: аналогично доказательству **Теоремы Бёрнсайда**, покажем что:

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \text{ и } \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \in \mathcal{A}$$

$\square$

4 Четвертая лекция

Триангулизуемые множества матриц

Определение 4. $\mathrm{T}_n(\mathbb{F})$ - множество верхнетреугольных матриц порядка n

Определение 5. Множество матриц $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ триангулизуемо, если

$$\exists C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) : \forall A \in \mathcal{A} : C^{-1}AC \in \mathrm{T}_n(\mathbb{F})$$

Замечание 4. Свойства инвариантные базису:

- $\operatorname{rk} A, \operatorname{tr} A, \det A$
- $\chi_A(t), \mu_A(t)$
- Спектр матрицы
- Коммутативность, нильпотентность

Критерий триануглизуемости

Лемма 4. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, тогда:

$$[A, B] = [A + \lambda E, B + \mu E]$$

Лемма 5. Пусть $A \in \mathrm{T}_n(\mathbb{F})$. Тогда A — нильпотентна $\Leftrightarrow \forall i \in [1, n] : a_{ii} = 0$

Теорема 3. Пусть $\mathbb{F}$ — алегбраически замкнуто. Алгебра $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ триангулизуема, тогда и только тогда, когда:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : [A, B] \text{ — нильпотентная}$$

Доказательство.
($\Rightarrow$) Выберем базис так, что: $\forall A, B \in \mathcal{A}$ на диагонали матрицы $[A, B]$ стоят $a_{ii}b_{ii} - b_{ii}a_{ii} = 0$, но $[A, B] \in \mathrm{T}_n(\mathbb{F}) \Rightarrow$, по **Лемме 5** $[A, B]$ — нильпотентный
($\Leftarrow$) Рассмотрим алгебру $\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathcal{A} \cup \{E\})$. По **Теореме о блочном строении**: существует базис в котором $\mathcal{B}$ имеет блочно-верхнетреугольный вид:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathcal{B}_{kk} \end{pmatrix}, \ \forall i : \mathcal{B}|_i = \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F})$$

Пусть $\exists i : n_i \geqslant 2$. Тогда $\exists A, B \in [A, B]\,|_i$ не являющийся нильпотентным $\Rightarrow [A, B]$ не нильпотентен.

$$\forall A, B \in \mathcal{B} : \exists C, D \in \mathcal{A} \text{ и } \lambda, \mu \in \mathbb{F} :$$
$$A = C + \lambda E, \ B = D + \mu E \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ По **Лемме 4**: $[C, D] = [A, B]$ не нильпотентный $\Rightarrow \perp \Rightarrow \forall i : n_i = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{B}$ — триангулизуема $\Rightarrow \mathcal{A}$ — триангулизуема. □

Коммутативные и нильпотентные алгебры

Следствие 3. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто, $S \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), \forall A, B \in S : AB = BA$. Тогда S — неприводимая.

Доказательство. $\mathcal{L}(S)$ - коммутативная алгебра $\Rightarrow \forall A, B \in \mathcal{L}(S) : [A, B] = 0 \Rightarrow$ по **Теореме 3** $\mathcal{L}(S)$ - триангулизуема. $\square$

Следствие 4. Пусть $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнуто. Тогда $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ нильпотентная алгебра(те, $\forall A \in \mathcal{A} : \exists n : A^n = 0$), тогда $\mathcal{A}$ — триангулизуема.

Доказательство. $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow [A, B]$ нильпотентен $\Rightarrow$ по **Теореме 3**: $\mathcal{A}$ — триангулизуема. $\square$

Следствие 5. $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Тогда $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ нильпотентная алгебра $\Leftrightarrow \exists$ базис в котром $\forall A \in \mathcal{A} : A$ строго верхнетреугольная.

Определение 6. Матрицы A, B одновременно триангулизуемы, если $\{A, B\}$ триангулизуемо.

Теорема 4. (Маккоя, изначальный вариант) A, B одновременно триангулизуемы $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall C \in \mathcal{L}(\{A, B, E\}) : C[A, B] \text{ — нильпотентен.}$$

Доказательство.
($\Rightarrow$) Аналогично, доказательству **Теоремы 3**.
($\Leftarrow$) Рассмотрим $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\{A, B, E\})$. По **Теореме о блочном строении**, $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathcal{A}_{kk} \end{pmatrix}, \ \forall i : \mathcal{A}_i = \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F})$$

Пусть, $\exists i : n_i \geqslant 2 : AB|_i \neq BA|_i$ (иначе $\mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F}) = \mathcal{A}_i = \mathcal{L}(\{A, B, E\})|_i$ — коммутативная алгебра), тогда

$$\exists x \in \mathbb{F}^{n_i} : [A, B]\,|_i \cdot x \neq 0$$

$$\mathcal{L}(\{A, B, E\})\,|_i = \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F}) \Rightarrow \exists C \in \mathcal{L}(\{A, B, E\}) :$$

$$C\,|_i \cdot [A, B]\,|_i \cdot x = x \Rightarrow \forall n : (C \cdot [A, B])^n \cdot x = x \neq 0$$

Следовательно, $C \cdot [A, B]$ не нильпотентен $\Rightarrow \perp \Rightarrow \mathcal{A}$ — триангулизуема $\Rightarrow A, B$ — одновременно триангулизуемы. $\square$

5 Используемые обозначения и соглашения

- В курсе в основном рассматриваются ассоциативные алгебры
- $[A, B]$ - коммутатор матриц A, B. $[A, B] = AB - BA$
- $B\,|_x$ - ограничение на блочную матрицу или на блочную алгебру. Имеется ввиду блок из матрицы(алгебры) с индексом x