Факультатив «Структурная теория матриц»

4 июня 2025 г.

Содержание

1 Первая лекция

Вопрос курса: Каким образом можно описать структуру конечномерных алгебр, используя матрицы, и какими свойствами будут обладать данные описания?

Определение 1. Пусть $\mathcal{A}$ - векторное пространство над полем $\mathbb{F}$ снабжённое операцией

$$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \text{ (умножение)}$$

тогда $\mathcal{A}$ является алгеброй, если $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$ и $\forall a, b \in \mathbb{F}$ верно:

- $x(y + z) = xy + xz$
- $(x + y)z = xz + yz$
- $(ax) \cdot (by) = (ab)(x \cdot y)$

Замечание 1. В этом курсе рассматриваются ассоциативные алгебры, если не оговорено иное.

Пример 1.

1. Многочлены $\mathbb{F}[x]$; $\dim \mathbb{F}[x] = \infty$
2. Алгебра кватернионов:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}; i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

3. Групповые алгебры. Рассмотрим группу G и поле $\mathbb{F}$, тогда:

$$\mathbb{F}[G] = \left\{ \sum_{i=1}^{|G|} \lambda_i g_i \mid \lambda_i \in \mathbb{F}, g_i \in G \right\}; \dim \mathbb{F}[G] = |G|$$

4. Матричные алгебры: Пусть $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ и $\forall a, b \in \mathcal{A};\ \forall \lambda \in \mathbb{F}$ замкнуто по операциям:
   - $a + b \in \mathcal{A}$
   - $\lambda a \in \mathcal{A}$
   - $a \cdot b \in \mathcal{A}$

Матричное представление конечномерных алгебр

Утверждение 1. Любая конечномерная алгебра изоморфна некоторой конечной матричной алгебре.

Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра, $\{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в $\mathcal{A}$ Умножение элементов $\mathcal{A}$ слева на e_i является линейным отображением $\forall a, b \in \mathcal{A};\ \forall \lambda \in \mathbb{F}$:

- $e_i(a+b) = e_i a + e_i b$
- $e_i(\lambda a) = \lambda(e_i a)$

e_i можно поставить в соответствие матрицу A_{e_i} в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$. При этом:

- $A_{a+b} = A_a + A_b$
- $A_{ab} = A_a \cdot A_b$
- $A_{\lambda a} = \lambda A_a$

Пример 2. $\mathbb{H}$ с базисом $\{1, i, j, k\}$

$$A_1 = E;\ A_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Матричные алгебры

Пример 3.

1. (Блочно-)диагональные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} a_{ii} \in \mathbb{F},\ \dim \mathcal{A} = n$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & A_{nn} \end{array}\right) A_{ii} \in M_{n_i}(\mathbb{F}),\ \dim \mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} n_i^2$$

2. (Блочно-)верхнетреугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ если } j > i \text{ то } a_{ij} = 0, \text{ иначе } a_{ij} \in \mathbb{F},\ \dim \mathcal{A} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \dots & * \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{array}\right) A_{ii} \in M_n(\mathbb{F}),\ \dim \mathcal{A} = \frac{n^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} n_i^2}{2}$$

3. Алгебра порожденная некоторым $S = \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq M_n(\mathbb{F})$.

$$\mathcal{L}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{t \leqslant k} \lambda_i a_i \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{F},\ a_i \in S \right\}$$

Упражнение 1. Является ли алгеброй:

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in M_n(\mathbb{F}) \,\middle|\, \sum a_{ij} = 0,\ n \geqslant 2 \right\}?$$

Решение. Нет, не является. Рассмотрим оба возможных случая:

- $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2:$

$$\mathcal{A} \ni a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ но } a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{A}$$

- $\operatorname{char} \mathbb{F} = 2:$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ bc = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } b, c \in \mathcal{A},\ bc \notin \mathcal{A}$$

□

Упражнение 2. Является ли алгеброй множество всех матриц, с одним фиксированным собственным вектором $v \neq 0$?

Решение. Да, является. Рассмотрим A, B такие что: $Av = \lambda v$ и $Bv = \mu v$:

$$(A + B)v = (\lambda + \mu)v;\ ABv = \lambda\mu v;\ (\tau A)v = \tau\lambda v$$

□

Упражнение 3. Найти размерность алгебры из **Упр. 2**.

Решение. Переведем матрицы в алгебре из **Упр. 2** в базис $\{v, e_1, \dots, e_n\}$, тогда:

$$\mathcal{A}_v = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{F} \right\} \Rightarrow \dim \mathcal{A}_v = n^2 - n + 1$$

□

Упражнение 4. Найти k-мерную подалгебру в алгебре $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

- $k = 7$
- $k = 12$ и в матрицах нет полностью нулевых строк/столбцов.

Решение.

- $k = 7$
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R} \right\}$$

- $k = 12$ и в мтрицах нет полностью нулевых строк/столбцов.
$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$\square$

2 Вторая лекция

Упражнение 5. Доказать, что множество циркулянтов:

$$C_n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \right\}$$

является алгеброй. Найти $\dim C_n(\mathbb{F})$

Решение. Найдем $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ такую что: $C_n(\mathbb{F}) = \mathcal{L}(\{A\})$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};\ \dots;\ A^n = E$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : A^k \in \{A, \dots, A^n\}, \text{ так как } A^n = E \Rightarrow \mathcal{L}(\{A\}) = \{A_1, \dots, A_n\} = C_n(\mathbb{F})$$

$$A, \dots, A^n \text{ - линейно независимы.} \Rightarrow \dim C_n(\mathbb{F}) = n$$

□

Инвариантные подпространства

Определение 2. Подпространство $V \subseteq \mathbb{F}^n$ называется инвариантным относительно множества матриц $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ ($\mathcal{A}$ – инвариантным) если $\forall v \in V$ и $\forall A \in \mathcal{A} : Av \in V$.

Пример 4.

- Подпространства $\{0\}$ и $\mathbb{F}^n$ $\mathcal{A}$ – инвариантны для любого $\mathcal{A}$.
- $v \in \mathbb{F}^n : \langle v \rangle$ $\mathcal{A}$ – инвариантно $\Leftrightarrow$ v - общий собственный вектор для матриц из $\mathcal{A}$

Упражнение 6. Пусть V - подпространство $\mathbb{F}^n$, $\dim V = k$:

$$\mathcal{A}_v = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) | V \mathcal{A} \text{ – инваринтно}\}$$

Доказать, что $\mathcal{A}_v$ - алгебра. $\dim \mathcal{A}_v$?

Решение. $\{e_1, \dots, e_k\}$ - базис в V, дополним до базиса в $\mathbb{F}^n : \{e_1, \dots, e_k, \dots, e_n\}$. Тогда:

$$\mathcal{A}_v = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \right\} \Rightarrow \dim \mathcal{A}_v = n^2 - k(n-k)$$

где $\mathcal{A}_v$ - блочно-верхнетреугольная алгебра. □

Упражнение 7. Найти нетривиальное общее инвариантное подпространство для матриц $C_n(\mathbb{F})$.

Решение.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор } \forall A \in C_n(\mathbb{F}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \langle v \rangle$ — нетривиальное $C_n(\mathbb{F})$ - инвариантное подпространство □

Неприводимые множества матриц

Замечание 2. В этой лекции далее будем считать, что алгебра содержит $1(E)$.

Определение 3. Подмножество $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ называется неприводимым, если не существует нетривиальных $\mathcal{A}$ - инвариантных подпространств в $\mathbb{F}^n$.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{A}$ — неприводимая подалгебра $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Тогда $\forall v \neq 0 \in \mathbb{F}^n$:

$$\mathcal{A}v = \{Av | A \in \mathcal{A}\} = \mathbb{F}^n.$$

Доказательство. $\mathcal{A}v$ — подпространство в $\mathbb{F}^n$. Рассмотрим $u \in \mathcal{A}v$. Для u верно:

$$\exists B \in \mathcal{A} : u = Bv \Rightarrow \forall A \in \mathcal{A} : Au = \underbrace{AB}_{AB \in \mathcal{A}} \cdot v \in \mathcal{A}v$$

тогда $\mathcal{A}v$ - инвариантно, при этом:

$$\mathcal{A}v \neq \{0\}, \text{ так как } E \in \mathcal{A} \Rightarrow \text{ так как } \mathcal{A} \text{ - неприводима, то } \mathcal{A}v = \mathbb{F}^n.$$

□

Лемма 2. Пусть $\mathcal{A}$ — неприводимая подалгебра $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, тогда $\forall v \neq 0;\ v \in \mathbb{F}^n$:

$$v^T \mathcal{A} = \{v^T A | A \in \mathcal{A}\} = (\mathbb{F}^n)^T.$$

Доказательство.

$$V = v^T \mathcal{A} \subset (\mathbb{F}^n)^T$$

$$\operatorname{Ann} V = \{u \in V | Vu = 0\}$$

так как $V \neq (\mathbb{F}^n)^T$, то $\operatorname{Ann} V$ — нетривиальное подпространство $\mathbb{F}^n$

$$\forall u \in \operatorname{Ann} V \ \forall A \in \mathcal{A} : V \cdot Au = v^T \underbrace{\mathcal{A} \cdot A}_{\mathcal{A}A = \mathcal{A}} u = 0 \Rightarrow Au \in \operatorname{Ann} V$$

получаем, что: $\operatorname{Ann} V$ нетривиальное $\mathcal{A}$ - инвариантное подпространство $\mathbb{F}^n$, но $\mathcal{A}$ — неприводимая алгебра $\Rightarrow \perp$. □

Лемма 3. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнуто. $V \subseteq \mathbb{F}^n A$ - инвариантно. Тогда в V содержится собственный вектор матрицы A.

Доказательство. Пусть $\dim V = k > 0$ и $e_1, \ldots, e_k$ - базис V. Дополним $e_1, \ldots, e_k$ до базиса всего $\mathbb{F}^n : e_1, \ldots, e_k, \ldots, e_n$. Тогда:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{0_{k,k}} & B_{k,n-k} \\ \hline 0_{n-k,k} & C_{n-k,n-k} \end{array}\right), \text{ и } V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \right\}$$

$\mathbb{F}$ - алгебраически замкнуто $\Rightarrow \exists v_0 \in \mathbb{F}^k : A_o v_o = \lambda v_o$

$$v_o = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \Rightarrow \exists v \in \mathbb{F}^n : v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Av = \lambda v$$

□

Теорема 1. (Бёрнсайда) Пусть $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $\mathcal{A}$ — неприводимая подалгебра $\mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \Rightarrow \mathcal{A} = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$

Доказательство.
1) Сначала покажем, что $\exists T \in \mathcal{A} : \operatorname{rk} T = 1$
Пусть $T \neq 0$ — имеет минимальный ранг. Предположим, что $\operatorname{rk} T > 1 \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{F}^n$: Tu и Tv — линейно независимы. Из **Леммы 1**:

$$\exists A \in \mathcal{A} : A \cdot Tv = u \tag{1}$$

$$T[\mathbb{F}^n] \text{ - образ оператора } T - TA \text{ - инвариантен} \tag{2}$$

Из **Леммы 3** и (2) $\Rightarrow$ что $T[\mathbb{F}^n]$ содержит собственный вектор TA с собственным значением λ, тогда:

$$\exists w \in T[\mathbb{F}^n] : TAw = \lambda w$$
$$(TA - \lambda E)w = 0 \tag{3}$$
$$(TA - \lambda E)T = T(AT - \lambda E)$$

следовательно образ $(TA - \lambda E)T$ лежит в $T[\mathbb{F}^n]$ но не равен ему в силу (3) $\Rightarrow$

$$\operatorname{rk}((TA - \lambda E)T) < \operatorname{rk} T$$

С другой стороны, по (1) верно что:

$$(TA - \lambda E)Tv = TATv - \lambda Tv = Tu - \lambda Tv \neq 0 \Rightarrow \perp \Rightarrow \operatorname{rk} T = 1$$

2) Без ограничения общности в T первый столбец ненулевой $\Rightarrow \exists C \in \mathcal{A}$:

$$\text{первый столбец } CT \text{ равен } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ но } \operatorname{rk} T = 1 \Rightarrow CT = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Из **Леммы 2**:

$$\exists D \in \mathcal{A} : CTD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = E_{11}$$

Аналогично, для любых $i, j = \overline{1, n} : E_{ij} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ $\square$

3 Третья лекция

Следствия из теоремы Бёрнсайда

Следствие 1. Пусть $S = \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $E \in \mathcal{L}(S)$, $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнуто. Тогда $\mathcal{L}(S) = \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \Leftrightarrow S$ - неприводимо.

Доказательство.

$$S \text{ - приводимо} \Leftrightarrow \exists \text{ базис, в котором } \forall A \in S: \; A = \left(\begin{array}{c|c} A_0 & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ базис, в котором } \forall A \in \mathcal{L}(S) : A = \left(\begin{array}{c|c} A_0 & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \Rightarrow \mathcal{L}(S) \neq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$$

□

Следствие 2. Пусть $\mathcal{A}$ — подалгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $E \in \mathcal{A}$, $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнуто, $\mathcal{A} \neq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Тогда $\dim \mathcal{A} \leqslant n^2 - n + 1$

Доказательство. $\mathcal{A} \neq \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \Rightarrow \exists \mathcal{A}$ - инвариантное подмонжество размерности $k \Rightarrow$

$$\forall A \in \mathcal{A} : A = \left(\begin{array}{c|c} A_{0_{k,k}} & B_{k,n-k} \\ \hline 0_{n-k,k} & C_{n-k,n-k} \end{array}\right) \Rightarrow \forall k \in [1, n-1] :$$

$$\dim \mathcal{A} \leqslant n^2 - k(n-k) \leqslant \max_{k \in [1,n-1]} \big(n^2 - k(n-k)\big) \leqslant n^2 - n + 1$$

□

Замечание 3. Пусть все матрицы в алегбре $\mathcal{A}$ имеют вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{array}\right)$$

Тогда:

$$\forall i : \mathcal{A}_i = \{A|_{=i} \mid A \in \mathcal{A}\} \text{ - подалгебра в } \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F}).$$

Теорема 2. (о блочном строении) Пусть $\mathcal{A}$ — подалегбра $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $E \in \mathcal{A}$, $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнуто. Тогда $\exists$ базис в котором $A \in \mathcal{A}$ имеет вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{array}\right)$$

При этом:

$$\forall i : \mathcal{A}_i = \{A|_{=i} \mid A \in \mathcal{A}\} = \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F}).$$

Доказательство. Рассмотрим все цепочки вложенных инвариантных подпространств:

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_k = \mathbb{F}^n$$

Выберем среди них цепочку максимальной длины. Построим базис в $\mathbb{F}^n : \{e_1, \dots, e_n\}$. Рассмотрим базис в пространстве $V_1 : \{e_1, \dots, e_{i_1}\}$, дополним его до базиса в $V_2 : \{e_1, \dots, e_{i_1}, e_{i_1+1}, \dots, e_{i_2}\}$. Далее продолжим эту процедуру, пока не получим требуемый базис в $\mathbb{F}^n$. В построенном базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$:

$$\forall A \in \mathcal{A} : A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{array}\right)$$

Пусть $\exists m : \mathcal{A}_m = \mathrm{M}_{n_m}(\mathbb{F}) \Rightarrow$ по **Теореме Бёрнсайда** и **Замечанию 3** $\exists$ базис $\mathbb{F}^n$, в котором $\forall A \in \mathcal{A}_m$ имеет вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{0_{i_m,i_m}} & B_{i_m,n-i_m} \\ \hline 0_{n-i_m,i_m} & D_{n-i_m,n-i_m} \end{array}\right)$$

Пусть C - матрица перехода к этому базису, тогда рассмотрим следущий базис в $\mathbb{F}^n$:

$$(g_1, \dots, g_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot H = (e_1, \dots, e_n) \left(\begin{array}{c|c|c} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & C & 0 \\ \hline 0 & 0 & E \end{array}\right)$$

Тогда, матрица $A \in \mathcal{A}$ под действием H перейдет в базис $\{g_1, \dots, g_n\}$:

$$H^{-1}AH = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & & & \vdots \\ \hline \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & C^{-1}A_{mm}C & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & A_{kk} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_{11} & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \hline 0 & A_{22} & \ddots & & & \vdots \\ \hline \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & \begin{array}{c|c} A_0 & B \\ \hline 0 & D \end{array} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & & & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & A_{kk} \end{array}\right)$$

$$V'_m = \{e_1, \dots, e_{i_{m-1}}, g_{i_{m-1}+1}, \dots, g_{i_m}, \dots, e_n\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \text{ цепочка } \{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{m-1} \subset V_m \subset V'_m \subset V_{m+1} \subset \dots \subset V_k = \mathbb{F}^n$$

но эта цепочка длиннее, так как $V_m \neq V'_m \Rightarrow \perp$ $\square$

Упражнение 8. Пусть в терминах **Теоремы о блочном строении** подалгебра $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_6(\mathbb{F})$ имеет вид:

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|c} A_{1_{3,3}} & 0 \\ \hline 0 & A_{2_{3,3}} \end{array}\right).$$

Следует ли из этого, что $\mathcal{A} = \mathrm{M}_3(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{M}_3(\mathbb{F})$?

Решение. Нет, так как **Теорема о блочном строении** ничего не говорит о линейной независимости блоков, и вообще говоря, это не правда. □

Упражнение 9. Пусть в терминах **Теоремы о блочном строении** алгебра

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & A_2 \end{array}\right) \text{ и } \exists A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{A} : A_1 \neq E$$

Доказать, что $\mathcal{A} = \mathrm{M}_2(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{F})$.

Доказательство. По **Теореме о блочном строении**: $\mathcal{A}_1 = \mathrm{M}_2(\mathbb{F}) = \mathcal{A}_2 \Rightarrow$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & C_1 \end{array}\right); \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & C_1 \end{array}\right); \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & C_1 \end{array}\right); \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & C_1 \end{array}\right); \right.$$

$$\left. \left(\begin{array}{c|c} C_5 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right); \left(\begin{array}{c|c} C_5 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right); \left(\begin{array}{c|c} C_5 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right); \left(\begin{array}{c|c} C_5 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right) \right\} \subseteq \mathcal{A}$$

Если показать, что $E_1 = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & C_1 \end{array}\right) \in \mathcal{A}$, то базис в $\mathrm{M}_2(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ выглядит как $\{E_1B_1, \ldots, E_4B_4, B_5, \ldots, B_8\}$

1. $\operatorname{rk} A_1 = 2$:

$$\mathcal{A}_1 = \mathrm{M}_2(\mathbb{F}) \Rightarrow X = \left(\begin{array}{c|c} A_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \in \mathcal{A} \Rightarrow XA = E_1 \in \mathcal{A}_1$$

2. $\operatorname{rk} A_1 = 1$: аналогично доказательству **Теоремы Бёрнсайда**, покажем что:

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \text{ и } \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \in \mathcal{A}$$

□

4 Четвертая лекция

Триангулизуемые множества матриц

Определение 4. $\mathrm{T}_n(\mathbb{F})$ - множество верхнетреугольных матриц порядка n

Определение 5. Множество матриц $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ триангулизуемо, если

$$\exists C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) : \forall A \in \mathcal{A} : C^{-1}AC \in \mathrm{T}_n(\mathbb{F})$$

Замечание 4. Свойства инвариантные базису:

- $\operatorname{rk} A, \operatorname{tr} A, \det A$
- $\chi_A(t), \mu_A(t)$
- Спектр матрицы
- Коммутативность, нильпотентность

Критерий триануглизуемости

Лемма 4. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, тогда:

$$[A, B] = [A + \lambda E, B + \mu E]$$

Лемма 5. Пусть $A \in \mathrm{T}_n(\mathbb{F})$. Тогда A — нильпотентна $\Leftrightarrow \forall i \in [1, n] : a_{ii} = 0$

Теорема 3. Пусть $\mathbb{F}$ — алегбраически замкнуто. Алгебра $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ триангулизуема, тогда и только тогда, когда:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : [A, B] \text{ — нильпотентная}$$

Доказательство.
($\Rightarrow$) Выберем базис так, что: $\forall A, B \in \mathcal{A}$ на диагонали матрицы $[A, B]$ стоят $a_{ii}b_{ii} - b_{ii}a_{ii} = 0$, но $[A, B] \in \mathrm{T}_n(\mathbb{F}) \Rightarrow$, по **Лемме 5** $[A, B]$ — нильпотентный
($\Leftarrow$) Рассмотрим алгебру $\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathcal{A} \cup \{E\})$. По **Теореме о блочном строении**: существует базис в котором $\mathcal{B}$ имеет блочно-верхнетреугольный вид:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathcal{B}_{kk} \end{pmatrix}, \ \forall i : \mathcal{B}|_i = \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F})$$

Пусть $\exists i : n_i \geqslant 2$. Тогда $\exists A, B \in [A, B]\,|_i$ не являющийся нильпотентным $\Rightarrow [A, B]$ не нильпотентен.

$$\forall A, B \in \mathcal{B} : \exists C, D \in \mathcal{A} \text{ и } \lambda, \mu \in \mathbb{F} :$$
$$A = C + \lambda E, \ B = D + \mu E \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ По **Лемме 4**: $[C, D] = [A, B]$ не нильпотентный $\Rightarrow \perp \Rightarrow \forall i : n_i = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{B}$ — триангулизуема $\Rightarrow \mathcal{A}$ — триангулизуема. ☐

Коммутативные и нильпотентные алгебры

Следствие 3. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто, $S \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), \forall A, B \in S : AB = BA$. Тогда S — неприводимая.

Доказательство. $\mathcal{L}(S)$ - коммутативная алгебра $\Rightarrow \forall A, B \in \mathcal{L}(S) : [A, B] = 0 \Rightarrow$ по **Теореме 3** $\mathcal{L}(S)$ - триангулизуема. □

Следствие 4. Пусть $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнуто. Тогда $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ нильпотентная алгебра(те, $\forall A \in \mathcal{A} : \exists n : A^n = 0$), тогда $\mathcal{A}$ — триангулизуема.

Доказательство. $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow [A, B]$ нильпотентен $\Rightarrow$ по **Теореме 3**: $\mathcal{A}$ — триангулизуема. □

Следствие 5. $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Тогда $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ нильпотентная алгебра $\Leftrightarrow \exists$ базис в котром $\forall A \in \mathcal{A} : A$ строго верхнетреугольная.

Определение 6. Матрицы A, B одновременно триангулизуемы, если $\{A, B\}$ триангулизуемо.

Теорема 4. (Маккоя, изначальный вариант) A, B одновременно триангулизуемы $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall C \in \mathcal{L}(\{A, B, E\}) : C[A, B] \text{ — нильпотентен.}$$

Доказательство.
($\Rightarrow$) Аналогично, доказательству **Теоремы 3**.
($\Leftarrow$) Рассмотрим $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\{A, B, E\})$. По **Теореме о блочном строении**, $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathcal{A}_{kk} \end{pmatrix}, \ \forall i : \mathcal{A}_i = \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F})$$

Пусть, $\exists i : n_i \geqslant 2 : AB|_i \neq BA|_i$ (иначе $\mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F}) = \mathcal{A}_i = \mathcal{L}(\{A, B, E\})|_i$ — коммутативная алгебра), тогда

$$\exists x \in \mathbb{F}^{n_i} : [A, B]\,|_i \cdot x \neq 0$$

$$\mathcal{L}(\{A, B, E\})\,|_i = \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{F}) \Rightarrow \exists C \in \mathcal{L}(\{A, B, E\}) :$$

$$C\,|_i \cdot [A, B]\,|_i \cdot x = x \Rightarrow \forall n : (C \cdot [A, B])^n \cdot x = x \neq 0$$

Следовательно, $C \cdot [A, B]$ не нильпотентен $\Rightarrow \perp \Rightarrow \mathcal{A}$ — триангулизуема $\Rightarrow A, B$ — одновременно триангулизуемы. □

5 Пятая лекция

Теорема Лаффи

Лемма 6. Пусть $\mathbb{F}$ - алгебраически замкнутое поле, $\text{rk}[A, B] = 1$. Тогда $\{A, B\}$ - приводимо.

Доказательство. Пусть λ - собственное значение B, тогда $\text{rk}(B-\lambda E) \in [1, n-1]$(если $\text{rk}(B - \lambda E) = 0$, то $[A, B] = 0 \Rightarrow \text{Ker}(B - \lambda E)$ и $\text{Im}(B - \lambda E)$ — нетривиальные B - инвариантные подпространства $\mathbb{F}^n$)

$$\forall v \in \text{Ker}(B - \lambda E) : (B - \lambda E)Bv = B(B - \lambda E)v = B \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Bv \in \text{Ker}(B - \lambda E)$$
$$\forall v \in \text{Im}(B - \lambda E) : \exists u \in \mathbb{F}^n : v = (B - \lambda E)u \Rightarrow Bv = B(B - \lambda E)u = (B - \lambda E)Bu \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Bv \in \text{Im}(B - \lambda E)$$

Пусть $\text{Ker}(B - \lambda E)$ не A - инвариантно $\Rightarrow \exists x \in \text{Ker}(B - \lambda E) : (B - \lambda E)Ax \neq 0$ По условию: $\text{rk}[A, B] = 1 \Rightarrow \text{Im}[A, B] = \langle y \rangle$, где $y \in (\mathbb{F}^n \setminus \{0\})$

1. $$\alpha y = [A, B]x = [A, B - \lambda E]x = A\underbrace{(B - \lambda E)}_{=0}x - \underbrace{(B - \lambda E)Ax}_{\geqslant 0} \neq 0$$

   Получаем что $\alpha \neq 0$ и $y \in \text{Im}(B - \lambda E)$

2. $$\forall u \in \mathbb{F}^n : [A, B]u = [A, B - \lambda E]u = \beta y \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow A(B - \lambda E)u = \underbrace{(B - \lambda E)Au}_{\in \text{Im}(B-\lambda E)} + \beta y \overset{\text{по 1.}}{\Rightarrow} A(B - \lambda E)u \in \text{Im}(B - \lambda E)$$

3. $$\forall v \in \text{Im}(B - \lambda E) : \exists u \in \mathbb{F}^n : v = (B - \lambda)u \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow Av = A(B - \lambda E)u \overset{\text{по 2.}}{\in} \text{Im}(B - \lambda E) \Rightarrow \text{Im}(B - \lambda E) \text{ — } A \text{ - инвариантно.}$$

□

Замечание 5. $\mathcal{L}(\{A, B\})$ - приводима $\Leftrightarrow \mathcal{L}(\{A, B, E\})$ - приводима.

Теорема 5. (Лаффи) Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $A, B \in M_n(\mathbb{F}), rk[A, B] = 1 \Rightarrow \{A, B\}$ - триангулизуемы.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\{A, B, E\})$ по **Теореме о блочном строении**:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & \mathcal{A}_k \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{A}_i = \text{M}_{n_i}(\mathbb{F})$$

Пусть $\exists i : n_i \geqslant 2$. Тогда $\mathcal{L}(\{A\mid_i, B\mid_i, E\mid_i\}) = M_{n_i}(\mathbb{F})$ По условию $\text{rk}[A, B] = 1 \Rightarrow \text{rk}[A\mid_i, B\mid_i] \leqslant 1 \overset{\text{по } \textbf{Лемме 6}}{\Rightarrow} \{A\mid_i, B\mid_i\}$ - приводимо $\Rightarrow \mathcal{L}(\{A\mid_i, B\mid_i, E\mid_i\}) \neq \text{M}_{n_i}(\mathbb{F}) \Rightarrow \perp \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq T_n(\mathbb{F}), A, B, \in \mathcal{A}$ □

Числовые характеристики алгебр

Индекс нильпотентности

Определение 7. Пусть $\mathcal{A}$ — нильпотентная алгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, тогда будем называть:

$$i(\mathcal{A}) = \min\{k \in \mathbb{N} | \forall A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{A} : A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_k = 0\}$$

Лемма 7. Пусть $\mathcal{A}$ - нильпотентная алгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $i(\mathcal{A}) = k$, $k \in [2, n]$, тогда $\exists$ базис в котором $\mathcal{A}$ — блочно-ниль-треугольная, с k нулевыми блоками на диагонали.

Доказательство. Рассмотрим цепочку $\mathbb{F}^n \supseteq \mathcal{A}\mathbb{F}^n \supseteq \mathcal{A}^2\mathbb{F}^n \supseteq \ldots$:

$$k = i(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}^k\mathbb{F}^n = \{0\} \text{ и } \mathcal{A}^{k-1}\mathbb{F}^n \neq \{0\}$$

$\forall j \in \mathbb{N}$: если $\mathcal{A}^j\mathbb{F}^n = \mathcal{A}^{j-1}\mathbb{F}^n$, то:

$$\forall t \geqslant j : \mathcal{A}^t\mathbb{F}^n = \mathcal{A}^{j-1}\mathbb{F}^n$$

Следовательно, цепочка, рассмотренная в начале доказательства строго убывает до $\mathcal{A}^k\mathbb{F}^n$, тогда:

$$\{0\} = \mathcal{A}^k\mathbb{F}^n \subseteq \underset{\langle e_1,\ldots,e_{i_1}\rangle}{\mathcal{A}^{k-1}\mathbb{F}^n} \subseteq \cdots \subseteq \underset{\langle e_1,\ldots,e_{i_{k-1}}\rangle}{\mathcal{A}\mathbb{F}^n} \subseteq \underset{\langle e_1,\ldots,e_n\rangle}{\mathbb{F}^n}$$

Возьмем, построенный по цепочки подпространств базис $\langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ и представим $A \in \mathcal{A}$:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} O_{n_1} & A_{12} & A_{13} & \ldots & A_{1k} \\ \hline & O_{n_2} & A_{23} & & \vdots \\ \hline & & O_{n_3} & \ddots & \vdots \\ \hline & & & \ddots & A_{k-1,k} \\ \hline & & & & O_{n_k} \end{array}\right),\ O_{n_j} \in \mathrm{M}_{i_j - i_{j-1}}(\mathbb{F})$$

$\square$

Теорема 6. Пусть $\mathcal{A}$ — нильпотентная алгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$: $i(\mathcal{A}) = 2 \Rightarrow \mathcal{A}$ — коммутативная и $\dim \mathcal{A} \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$

Доказательство. $\forall A, B : AB = 0 = BA \Rightarrow \mathcal{A}$ — коммутативная.

По **Лемме 6**: $\exists$ базис в котором $\forall A \in \mathcal{A}$ имеет вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} O_k & A' \\ \hline 0 & O_{n-k} \end{array}\right) \Rightarrow \dim \mathcal{A} \leqslant \max_{k\in[1,n-1]} k(n-k) = \left[\frac{n}{2}\right]\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) = \left[\frac{n^2}{4}\right]$$

$\square$

Упражнение 10. Пусть $\mathcal{A}$ - нильпотентная подалгебра $\mathrm{M}_7(\mathbb{F}), i(\mathcal{A}) = 3$. Найти максимально возможную размерность алгебры $\mathcal{A}$?

Решение. По **Лемме 6** $\exists$ базис, в котором $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{pmatrix} O_{n_1} & A_{12} & A_{13} \\ \vdots & O_{n_2} & A_{23} \\ 0 & \dots & O_{n_3} \end{pmatrix}$$

Запишем все ограничения на размерность алгебры, которые мы знаем в виде системы:

$$\begin{cases} 2\dim\mathcal{A} + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leqslant 49 \\ n_1 + n_2 + n_3 = 7 \\ \forall i : n_i \in [1,3] \end{cases}$$

Переформулируя условия, получаем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \in \{27, 21, 19\} & , \exists i : n_i = 1 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 17 & , \text{иначе} \end{cases}$$

$\dim\mathcal{A} \leqslant \frac{49-17}{2} = 16$
Эта оценка достигается, например для следующих матриц:

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} O_3 & A_{12} & A_{13} \\ \hline \vdots & O_2 & A_{23} \\ \hline 0 & \dots & O_2 \end{array} \right) \right\}$$

$\square$

Гипотеза 1. (Густафсона) Пусть $\mathcal{A}$ — нильпотентная, коммутативная подалгебра алгебры $\mathrm{M}_n(F)$, $k = i(\mathcal{A})$, тогда:

$$\dim\mathcal{A} \leqslant \left[\frac{(n-k+2)^2}{4}\right] + k - 2$$

6 Шестая лекция

Коммутативные алгебры

Теорема 7. (Шура) Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная алгебра подалгебра $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

$$\text{Тогда } \dim\mathcal{A} \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$$

Лемма 8. Для любого n оценка данная в теореме Шура достигается.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, где:

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \lambda E_{\left[\frac{n}{2}\right]} & * \\ \hline 0 & \lambda E_{n-\left[\frac{n}{2}\right]} \end{array} \right) \middle| \, \lambda \in \mathbb{F} \right\}$$

$$\dim\mathcal{A} = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) + 1 = \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$$

$\forall A, B \in \mathcal{A} : [A, B] = [A-\lambda E, B-\mu E] = (A-\lambda E)(B-\mu E)-(B-\mu E)(A-\lambda E) = 0-0 = 0$

Замкнутость множества $\mathcal{A}$ относительно умножения наследуется, так как это блочно-треугольная алгебра, по своему строению. □

Упражнение 11. Найти в $\mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ две различные коммутативные подалгебры, с точностью до замены базиса, максимальной размерности.

Решение. Согласно теореме Шура, максимальная размерность будет равна:

$$\left[\frac{2^2}{4}\right] + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{F} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{F} \right\}$$

$\mathcal{A}$ — не содержит нетривиальных нильпотентов, в отличии $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ □

Числовые характеристики алгебр

Максимальная степень минимального многочлена

$\chi_A(t) = \det(A - tE)$ - характеристический многочлен A. $\mu_A(t)$ - минималнный многочлен A(минимальный многочлен, такой что при подставновки A он обнуляется).

Упражнение 12. Известно, что если A, B - подобны($\exists C : A = C^{-1}BC$), то: $\chi_A(t) = \chi_B(t)$ и $\mu_A(t) = \mu_B(t)$. Показать, что обратное не верно.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi_A(t) = \chi_B(t) = t^4;\ \mu_A(t) = \mu_B(t) = t^2$$

Но $A \nsim B$, так как $\operatorname{rk} A \neq \operatorname{rk} B$. □

Теорема 8. (Гамильтона-Кэли) Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$: $\chi_A(A) = 0$.

Следствие 6. $\mu_A(T) \mid \chi_A(t)$

Определение 8. Пусть $S \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, тогда:

$$m(S) = \max_{A \in S}\{\deg(\mu_A(t))\}$$

Следствие 7. Пусть $S \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, тогда:

$$m(S) \leqslant n$$

Следствие 8. Пусть $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, тогда:

$$\dim \mathcal{L}(S) \leqslant n$$

$$\dim \mathcal{L}(S) = \dim(\mu_S(t)) \leqslant n$$

Длина множества матриц

Определение 9. $W \in S^i$ сократимо, если $W \in \mathcal{L}_{i-1}(S)$

Утверждение 2. Если $\forall W \in S^i$ сократимо $\Rightarrow \forall k > i : \forall V \in S^k$ сократимо.

Утверждение 3. $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}_i(S) \Leftrightarrow \forall W \in S^{i+1}$ сократимо.

Доказательство.

$$\mathcal{L}_0(S) \subseteq \mathcal{L}_1(S) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{L}_i(S) \subseteq \mathcal{L}_{i+1}(S) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{L}(S)$$

$\forall W \in S^{i+1}$ — сократимо, равносильно тому что:

$$\mathcal{L}_{i+1}(S) = \mathcal{L}_i(S) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall k > i : \mathcal{L}_k(S) = \mathcal{L}_i(S) \Leftrightarrow \mathcal{L}_i(S) = \mathcal{L}(S)$$

□

Определение 10. Длина множества $S \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$:

$$l(S) = \min\{i | \mathcal{L}_i(S) = \mathcal{L}(S)\}$$

Утверждение 4. $k \leqslant l(S) \Leftrightarrow \exists$ несократимая $W \in S^k$

Пример 5. Если $S = \{A\} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, то:

$$l(S) = \deg(\mu_A(t)) - 1 \leqslant n - 1$$

Пример 6. Если $S \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$:

$$l(S) \leqslant n^2 - 1$$

Гипотеза 2. (Паза) Если $S \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, то:

$$l(S) \leqslant 2n - 2$$

7 Седьмая лекция

Лемма 9. Оценка данная в гипотезе Паза, достигается, те:

$$\exists S \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) : l(S) = 2n-2$$

Доказательство. Рассмотрим $S = \{A, B\} = \{E_{n,1}, J(0)\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Сначала покажем, что $\mathcal{L}(S) = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$

$$A^i B = E_{n-i,1} \text{ при } i \in [0, n-1]$$

$$A^j = E_{1,j+1} + E_{2,2+j} + \dots + E_{n-j,n} \text{ при } j \in [1, n-1]$$

$$\forall k, m \in [1, n] : E_{k,m} = E_{k,1} \cdot E_{1,m} = E_{k,1}(E_{1,m} + E_{2,m+1} + \dots + E_{n-m+1,n}) =$$
$$= A^{n-k} B A^{m-1} \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \mathcal{L}(S) = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$$

2. Теперь, что: $l(S) \leqslant 2n-2$
Из первого пункта следует, что $\mathcal{A}$ порождается словами вида $A^{n-k}BA^{m-1}$. Их длина вычисляется как:

$$n - k + 1 + m - 1 = n + m - k \leqslant 2n - 1$$

Однако, равенство достигается только при $k = 1$ и $n = m$. Это верно для единственного слова в этой алгебре:

$$A^{n-1} B A^{n-1} = E_{1n} = A^{n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}(S) \Rightarrow \mathcal{L}_{2n-2}(S) = \mathcal{L}(S)$$

3. Наконец, покажем оценку с другой стороны: $l(S) \geqslant 2n-2$
В матрице BA^kB $(k \geqslant 0)$ первые $n-1$ строк нулевые, а так же последние $n-1$ столбцов нулевые, из-за строения матрицы $B \Rightarrow BA^kB = \lambda B \Rightarrow$ если в слове есть, хотя бы 2 буквы B, то оно сократимо.
Для $D = \{A^iBA^j, A^k | i, j, k \in [0, n-1]\}$ и $\mathcal{L}(S) = \langle D \rangle$:

$$\mathcal{L}_{2n-3}(S) = \langle D \setminus \{A^{n-1}BA^{n-1}, A^{n-2}BA^{n-1}, A^{n-1}BA^{n-2}\} \rangle$$

Так как мы исключили матричные единицы из линейной оболочки D на позициях $(1, n-1)$ и $(2, n)$, то в этих ячейках матриц должны стоять одинаковые числа(либо 2 нуля — матричная единица, либо 2 единицы — наддиагональ сверху) тогда:

$$\mathcal{L}_{2n-3}(S) \neq \mathcal{L}(S) = \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \Rightarrow l(S) > 2n-3$$

$\square$

Утверждение 5. Подслова несократимого слова, несократимы.

Утверждение 6. Пусть $W, U \in S^k, W$ — несократимо, $W \vdash U$, тогда U так же несократимо.

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{L}_{k-1}(S)$, тогда:

$$W = \alpha \cdot \underset{\in \mathcal{L}_{k-1}(S)}{U} + \beta \cdot \underset{\in \mathcal{L}_{k-1}(S)}{V} \Rightarrow W \in \mathcal{L}_{k-1}(S)$$

$\square$

Теорема 9. Пусть $S \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), E \in \mathcal{L}(S), d = \dim \mathcal{L}(S), m = m(S), l = l(S)$, тогда:

$$l(S) \leqslant \max \left\{ m - 1, \frac{d}{2} \right\}$$

Доказательство. Рассмотрим в отдельности 2 случая:

1. $\forall k \in [1, l-1] : \dim \mathcal{L}_k(S) - \dim \mathcal{L}_{k-1}(S) \geqslant 2$

$$d = \dim \mathcal{L}(S) = \sum_{i=0}^{l-1} [\dim \mathcal{L}_{l-i}(S) - \dim \mathcal{L}_{l-i-1}(S)] + \dim \mathcal{L}_0(S) +$$

$$+ (\dim \mathcal{L}_l(S) - \dim \mathcal{L}_{l-1}(S))$$

Каждое из слагаемых в этой сумме, по предположению равно хотя бы двум, кроме двух последних. Предполагаем что $\mathcal{L}_0$ содержит единицу, и его размерность в таком случе равна 1. Еще одно слагаемое не меньше 1, так в противном случае равенство вложеных пространств достигалось бы на $l-1$ шаге, что противоречит тому, что длина равна l. Тогда:

$$d \geqslant 1 + 2(l-1) + 1 = 2l$$

2. Теперь рассмотрим оставшийся вариант:

$$\exists k \in [1, l-1] : \dim \mathcal{L}_k(S) - \dim \mathcal{L}_{k-1}(S) = 1 \tag{4}$$

Пусть мы имеем несократимое слово длины l:

$$W_1 = A_1 \dots A_l, \text{ где } A_i \in S$$

Тогда

$$U_1 = A_1 \dots A_k \text{ и } U_1' = A_2 \dots A_{k+1} \text{ — несократимые слова длины } k$$

В силу (4) $U_1' \vdash U_1$. Подставим в W_1 вместо U_1' линейную комбинацию выражающую его через U_1 и слова меньшей длины. Тогда $W_1 \vdash W_2$, где:

$$W_2 = A_1 A_1 \dots A_k A_{k+2} \dots A_l$$

$$W_1 = A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1} \dots A_l = A_1(\alpha U_1 + \underset{\in \mathcal{L}_{k-1}(S)}{V}) A_{k+2} \dots A_l = \underbrace{\alpha A_1 U_1 A_{k+2} \dots A_l}_{W_2} +$$

$$+ \underbrace{A_1 V A_{k+2} \dots A_l}_{\in \mathcal{L}_{l-1}(S)}$$

Получаем что, W_2 — несократимое слово длины l, по **Утверждению 6**.
$U_2 = A_1 A_1 A_2 \dots A_{k-1}, U_2' = A_1 A_2 \dots A_k$ — несократимые слова длины k. Тогда в силу (4):

$$U_2' \vdash U_2 \Rightarrow W_2 \vdash W_3, \text{ где } W_3 = A_1 A_1 A_1 \dots A_{k-1} \dots A_l$$

$\vdots$

На k-ом шаге получим что:

$$W_k = A_1^k A_2 A_{k+2} \dots A_l \text{ — несократимое слово длины } l$$

Тогда A_1^k — несократимое слово длины k, по (4), $\forall v \in S^k : v \vdash A_1^k \Rightarrow W_k \vdash A_1^l \Rightarrow A_1^l$ — несократимо $\Rightarrow l \leqslant m - 1$

$\square$

Следствие 9. Гипотеза Паза верна при $n \leqslant 3$, а так же при условии что: $E \in \mathcal{L}(S)$

Доказательство.

- $n = 3: \ \dim \mathcal{L}(S) \leqslant 9, m(S) \leqslant 3$, тогда $l(S) \leqslant \max\left\{2, \frac{9}{2}\right\} = 4 = 2 \cdot 6 - 2$
- $n = 2: \ \dim \mathcal{L}(S) \leqslant 4, m(S) \leqslant 2$, тогда $l(S) \leqslant \max\left\{1, \frac{4}{2}\right\} = 2 = 2 \cdot 2 - 2$
- $n = 1: \ \dim \mathcal{L}(S) \leqslant 1, m(S) \leqslant 1$, тогда $l(S) \leqslant \max\left\{0, \frac{1}{2}\right\} = 0 = 2 \cdot 1 - 2$

$\square$

Следствие 10. Пусть $S \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F}), E \in \mathcal{L}(S), d = \dim \mathcal{L}(S), l = l(S)$ но

$$m = m'(S) = \min\{k \mid \forall A \in S : A^k \in \mathcal{L}_{k-1}(S)\}$$

Тогда:

$$l(S) \leqslant \max\left\{m - 1, \frac{d}{2}\right\}$$

8 Восьмая лекция

Длина алгебры

Пусть $\mathcal{A}$ - конечнопорождённая, ассоциативная алгебра с единицей. $S \subseteq \mathcal{A},\ S^0 = \{E\},\ \mathcal{L}_i(S) = \langle S^{\leqslant i}\rangle,\ \mathcal{L}(S) = \bigcup\limits^{\infty} \mathcal{L}_i(S)$

S — система порождающих для алгебры $\mathcal{A}$, если $\mathcal{L}(S) = \mathcal{A}$

Напомним, что $l(S) = \min\{k \mid \mathcal{L}_k(S) = \mathcal{L}(S)\}$

Определение 11. Длиной алгебры $\mathcal{A}$ будем называть $l(\mathcal{A})$:

$$l(\mathcal{A}) = \max\{l(S) \mid \mathcal{L}(S) = \mathcal{A}\}$$

Замечание 6. Пусть S — система порождающих алгебры $\mathcal{A}$, S' — базис $\mathcal{L}_1(S)$, содержащий E. Тогда верно:

$$\forall i : \mathcal{L}_i(S) = \mathcal{L}_i(S')$$

Согласно этому замечанию, всегда можно считать, что множество $S \cup \{E\}$ — линейно независимо и $\dim \mathcal{L}_1(S) = |S| + 1$.

Так же надо отметить, что функции длины алгебры и длины множества выглядят одинаково, хотя определены по разному.

Длина и однопорождённость

Лемма 10.

$$l(\mathcal{A}) \leqslant \dim \mathcal{A} - 1$$

$$l(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A} - 1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ — однопорождённая}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную систему порождающих S. Тогда:

$$\langle E\rangle = \mathcal{L}_0(S) \subseteq \mathcal{L}_1(S) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{L}(S) = \mathcal{A}$$

Тогда в ней, $\dim \mathcal{L}_0(S) = 1,\ \dim \mathcal{L}_1(S) \geqslant 2,\ \dim \mathcal{L}_2(S) \geqslant 3,\ \dots$

$$\dim \mathcal{L}_{\dim \mathcal{A}-1}(S) \geqslant \dim \mathcal{A} \overset{\mathcal{L}(S)=\mathcal{A}}{\Rightarrow} l(S) \leqslant \dim \mathcal{A} - 1$$

Теперь докажем, что данная оценка достигается, и достигается только в случае если $\mathcal{A}$ порождается одной матрицей.

($\Rightarrow$) Предположим противное: пусть $\forall$ системы порождающих $S : |S| \geqslant 2$, тогда:

$$\dim \mathcal{L}_1(S) \geqslant 3 \Rightarrow \dim \mathcal{L}_{\dim \mathcal{A}-2}(S) \geqslant \dim \mathcal{A} \Rightarrow l(S) \leqslant \dim \mathcal{A}-2 \Rightarrow l(\mathcal{A}) \neq \dim \mathcal{A}-1 \Rightarrow \perp$$

($\Leftarrow$) $\mathcal{A}$ порождается одной матрицей. Рассмотрим такую систему порождающих $S = \{A\}$. Но в таком случае $\forall i : \exists!$ слово длины i, это слово A^i. Тогда:

$$\dim \mathcal{L}_i(S) \leqslant i + 1 \Rightarrow \dim \mathcal{L}_{\dim \mathcal{A}-2}(S) \leqslant \dim \mathcal{A} - 1 \Rightarrow l(S) \geqslant \dim \mathcal{A} - 1$$

В силу произвольности системы порождающих S, можно утвреждать тоже самое и для $l(\mathcal{A})$.

$$\begin{cases} l(\mathcal{A}) \geqslant \dim \mathcal{A} - 1 \\ l(\mathcal{A}) \leqslant \dim \mathcal{A} - 1, \quad \text{доказано выше для любых алгебр} \end{cases} \Rightarrow l(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A} - 1$$

□

Следствие 11. Пусть $\mathcal{A}$ — некоммутативная алгебра. Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant \dim \mathcal{A} - 2$.

Пример 7. Пусть:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & d & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \middle|_{\substack{a,b, \\ c,d}} \in \mathbb{F} \right\}$$

Тогда $l(\mathcal{A}) = 3$.

Решение. Рассмотрим матрицу A и ее степени. Покажем что любая матрица из $\mathcal{A}$ выражается через ее степени.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall B \in \mathcal{A} : B = a(E - A^3) + bA^3 + c(A - A^3) + d(A^2 - A^3)$$

Получаем, что $\mathcal{A}$ порождается $A \Rightarrow l(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A} - 1 = 3$. □

Немонотонность длины

Пример 8. Рассмотрим следующий пример:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & e & 0 \\ 0 & a & d & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \middle|_{\substack{a,b, \\ c,d,e}} \in \mathbb{F} \right\}$$

Утверждается, что $l(\mathcal{B}) = 2$.

Решение. Рассмотрим систему порождающих: $S = \{E_{12}, E_{23}, E_{44}\}$
S порождает $\mathcal{B}$, так как

$$\forall B \in \mathcal{B} : B = a(E - E_{44}) + bE_{44} + cE_{12} + dE_{23} + eE_{12}E_{23}$$

Однако, $\dim \mathcal{L}_1 = 4 \Rightarrow l(S) \geqslant 2 \Rightarrow l(\mathcal{B}) \geqslant 2$. Покажем, что $l(\mathcal{B}) \leqslant 2$. Рассмотрим произвольную систему порождающих S, такую что $|S| \geqslant 2$:

- $|S| \geqslant 3 \Rightarrow \dim \mathcal{L}_1(S) \geqslant 4 \Rightarrow \dim \mathcal{L}_2(S) \geqslant 5 = \dim \mathcal{B} \Rightarrow l(S) \leqslant 2$
- $|S| = 2 : S = \{A, B\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & q & s & 0 \\ 0 & \lambda & r & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu & y & t & 0 \\ 0 & \mu & z & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \right\}$$

Тогда покажем, что $m'(S) = \min\left\{k \mid \forall A \in S : A^k \in \mathcal{L}_{k-1}(S)\right\} \leqslant 3$

$$l \leqslant \max\left\{m' - 1, \frac{d}{2}\right\} \text{ - воспользуемся } \textbf{Следствием 10}$$

$$(A - \lambda E)^2 = qrE_{13} + (x - \lambda)^2 E_{44}$$

$$(A - \lambda E)^3 = (x - \lambda)^3 E_{44}$$

$$[A - \lambda E, B - \mu E] = (qz - yr)E_{13}$$

$$(A - \lambda E)^3 = \underbrace{(x - \lambda)(A - \lambda E)^2}_{\in \mathcal{L}_2(S)} - \underbrace{\frac{(x - \lambda)}{qz - yr}[A - \lambda E, B - \mu E]}_{\in \mathcal{L}_2(S)} \Rightarrow A^3 \in \mathcal{L}_2(S)$$

Это рассуждение опирается на то, что дробь $\frac{x-\lambda}{qz-yr}$ существует. Покажем что это так:

$$qz - yr \neq 0, \text{ так как иначе } [A, B] = [A - \lambda E, B - \mu E] = 0 \text{ и } \mathcal{B} \text{ коммутативна}$$

Аналогично $B^3 \in \mathcal{L}_2(S)$, тогда:

$$l(S) \leqslant \max\left\{2, \frac{5}{2}\right\} = 2 \Rightarrow l(\mathcal{L}) \leqslant 2$$

Получили что $l(\mathcal{B}) = 2$. □

Однако, по построению алгебр из последних двух примеров следует: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, но при этом $l(\mathcal{A}) = 3 > l(\mathcal{B}) = 2$, что показывает что длина алгебры немонотонная функция.

Длина прямой суммы алгебр

Теорема 10. Пусть все матрицы алгебры $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ имеют вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right),$$

где $A_{11} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{F})$ и $A_{22} \in \mathrm{M}_{n-k}(\mathbb{F})$.
Тогда: $l(\mathcal{A}) \leqslant l(\mathcal{A}\,|_1) + l((\mathcal{A}\,|_2) + 1$.

Доказательство. Пусть S — произвольная система порождающих.
$W = A_1 \dots A_t$ — произвольное слово длины $t = l(\mathcal{A}\,|_1) + l((\mathcal{A}\,|_2) + 2$

$$W_1 = A_1 \dots A_{l(\mathcal{A}|_1)+1}$$

$$W_2 = A_{l(\mathcal{A}|_1)+2} \dots A_t$$
$$W = W_1 W_2$$

$\forall i = \overline{1,2}$: по определению: $W_i\,|_i \in \mathcal{A}\,|_i$ — сократимо в $\mathcal{A}\,|_i$, те:

$$\exists U_i \in \mathcal{L}_{l(\mathcal{A}|_i)(S)} : W_i\,|_i = U_i\,|_i \Rightarrow (W_i - U_i)\,|_i = 0$$

в $W_1 - U_1$ первые k столбцов нулевые
d $W_2 - U_2$ последние $n-k$ строк нулевые
Таким образом получаем:

$$(W_1 - U_1)(W_2 - U_2) = 0 \Rightarrow W = W_1 W_2 = \underbrace{W_1 U_2}_{\in \mathcal{L}_{t-1}(S)} + \underbrace{W_2 U_1}_{\in \mathcal{L}_{t-1}(S)} - \underbrace{U_1 U_2}_{\in \mathcal{L}_{t-2}(S)}$$

Получаем, что W — сократимо $\Rightarrow l(S) \leqslant t - 1 = l(\mathcal{A}\,|_1) + l((\mathcal{A}\,|_2) + 1$. $\square$

9 Используемые обозначения и соглашения

- В курсе в основном рассматриваются ассоциативные алгебры
- $[A, B]$ - коммутатор матриц A, B. $[A, B] = AB - BA$
- $B\mid_x$ - ограничение на блочную матрицу или на блочную алгебру. Имеется ввиду блок из матрицы(алгебры) с индексом x
- Пусть $S = \{A_1, \dots, A_k\} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$

$$S^i = \{A_{j_1} \cdot \dots \cdot A_{j_k} | A_{j_k} \in S\}$$

$$S^{\leqslant i} = \bigcup_{j=0}^{i} S^j$$

- Если $E \in \mathcal{L}(S)$, то $S^0 = \{E\}$ - множество скалярных матриц, иначе $S^0 = \varnothing$
- $\mathcal{L}_i(S) = \langle S^{\leqslant i} \rangle$
- $\mathcal{L}(S) = \bigcup\limits_{j=0} \mathcal{L}_j(S)$
- Пусть $W, U \in S^k$ - слова из k букв. Тогда будем обозначать $W \vdash U$, если W линейно выражается через U и слова меньшей длины