

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ И ПРОГРАММНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Отчёт по лабораторной работе №3

Курс: «Методы оптимизации и принятия решений»

Тема: «Марковские модели принятия решений»

Выполнил студент:

Волкова Мария Дмитриевна

Группа: 13541/3

Проверил:

Сиднев Александр Георгиевич

Санкт-Петербург
2019 г.

Содержание

1	Лабораторная работ №3	2
1.1	Индивидуальное задание	2
1.2	Ход работы	2
1.2.1	Решения и стратегии	2
1.2.2	Модель динамического программирования с конечным числом этапов	2
1.2.3	Решение задачи с бесконечным числом этапов методом полного перебора	5
1.3	Вывод	7

Лабораторная работ №3

1.1 Индивидуальное задание

Фирма может рекламировать свою продукцию с помощью радио (допустимое решение X1), телевидения (допустимое решение X2) и газет (допустимое решение X3). Недельные затраты на рекламу с помощью этих средств равны 200, 900 и 300 денежных единиц соответственно. Фирма может оценить недельный объём сбыта как удовлетворительный (состояние S1), хороший (состояние S2) и отличный (состояние S3). Матрицы переходных вероятностей для каждого из трёх средств массовой информации имеют вид

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

а соответствующие им недельные доходы (в денежных единицах) заданы матрицами

$$R_1 = \begin{pmatrix} 400 & 520 & 600 \\ 300 & 400 & 700 \\ 200 & 250 & 500 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1000 & 1300 & 1600 \\ 800 & 1000 & 1700 \\ 600 & 700 & 1100 \end{pmatrix} \quad R_3 = \begin{pmatrix} 400 & 530 & 710 \\ 350 & 450 & 800 \\ 250 & 400 & 650 \end{pmatrix}$$

в которых не учтены затраты на рекламу, при этом необходимо учитывать коэффициент дисконтирования (если он задан). Найти оптимальную стратегию рекламы для последующих N недель и при бесконечном горизонте планирования.

1.2 Ход работы

1.2.1 Решения и стратегии

Состояния:

- 1 – удовлетворительно;
- 2 – хорошо;
- 3 – отлично;

Для данных состояний имеется три решения:

- X_1 – рекламировать на радио;
- X_2 – рекламировать в газете;
- X_3 – рекламировать на телевиденье;

1.2.2 Модель динамического программирования с конечным числом этапов

В нашем случае число этапов – 3 (недели), число состояний для каждого $m = 3$ (удовлетворительный, хороший, отличный).

Вычислим значения:

$$v_i^k = \sum_{j=1}^m p_{ij}^k * r_{ij}^k$$

$$v_1^1 = 0,4 * 400 + 0,5 * 520 + 0,1 * 600 = 480$$

$$v_2^1 = 0,1 * 300 + 0,7 * 400 + 0,2 * 700 = 450$$

$$v_3^1 = 0,1 * 200 + 0,7 * 250 + 0,2 * 500 = 295$$

$$v_1^2 = 0,7 * 1000 + 0,2 * 1300 + 0,1 * 1600 = 1120$$

$$v_2^2 = 0.3 * 800 + 0.6 * 1000 + 0.1 * 1700 = 1010$$

$$v_3^2 = 0.1 * 600 + 0.7 * 700 + 0.2 * 1100 = 770$$

$$v_1^3 = 0.2 * 400 + 0.5 * 530 + 0.3 * 710 = 558$$

$$v_2^3 = 0 * 350 + 0.7 * 450 + 0.3 * 800 = 555$$

$$v_3^3 = 0 * 250 + 0.2 * 400 + 0.8 * 650 = 600$$

Запишем это в таблицу:

i	v_i^1	v_i^1	v_i^1
1	480	1120	558
2	450	1010	555
3	295	770	600

С учетом затрат на каждую стратегию (200, 900, 300):

	v_i^k			оптимальное решение	
i	v_i^1	v_i^1	v_i^1	$f_3(i)$	k
1	280	220	258	280	1
2	250	110	255	255	3
3	95	-130	300	300	3

Этап 3					
	v_i^k			оптимальное решение	
i	k = 1	k = 2	k = 3	$f_3(i)$	k
1	280	220	258	280	1
2	250	110	255	255	3
3	95	-130	300	300	3
Этап 2					
	$v_i^k + p_{i1}^k * f_3(1) + p_{i2}^k * f_3(2) + p_{i3}^k * f_3(3)$			оптимальное решение	
i	k = 1	k = 2	k = 3	$f_3(i)$	k
1	349.5	-403	231.5	349.5	1
2	316.5	-523	223.5	316.5	1
3	161.5	-763.5	291	291	3
Этап 1					
	$v_i^k + p_{i1}^k * f_2(1) + p_{i2}^k * f_2(2) + p_{i3}^k * f_2(3)$			оптимальное решение	
i	k = 1	k = 2	k = 3	$f_3(i)$	k
1	476.65	-965.95	246.95	476.65	1
2	431.2	-1099.15	232.35	431.2	1
3	276.2	-1348.8	287.1	287.1	3

Оптимальное решение показывает, что в 1-ый и 2-ой месяцы фирме следует рекламировать свою продукцию по радио в случае удовлетворительного и хорошего объема продаж и рекламировать в газетах, при условии, что уровень недельного объема продаж будет отличным.

В 3-ем месяце фирме следует рекламировать свою продукцию по радио при удовлетворительном недельном объеме продаж, в остальных случаях (хорошем и отличном) в газетах.

Суммарный ожидаемый доход за 3 месяца составит 476.65 при удовлетворительном уровне продаж в 1-ый месяц, 431.2 при хорошем уровне и 287.1 - при удовлетворительном уровне продаж в 1-ый месяц.

Все расчеты проводились в Matlab:

Листинг 1.1: скрипт

```

1 % матрицы переходных вероятностей
2 p111 = 0.4; p112 = 0.5; p113 = 0.1;
3 p121 = 0.1; p122 = 0.7; p123 = 0.2;
4 p131 = 0.1; p132 = 0.7; p133 = 0.2;
5
6 p211 = 0.7; p212 = 0.2; p213 = 0.1;
7 p221 = 0.3; p222 = 0.6; p223 = 0.1;
8 p231 = 0.1; p232 = 0.7; p233 = 0.2;
9
10 p311 = 0.2; p312 = 0.5; p313 = 0.3;
```

```

11 p321 = 0; p322 = 0.7; p323 = 0.3;
12 p331 = 0; p332 = 0.2; p333 = 0.8;
13
14 % недельные доходы
15 r111 = 400; r112 = 520; r113 = 600;
16 r121 = 300; r122 = 400; r123 = 700;
17 r131 = 200; r132 = 250; r133 = 500;
18
19 r211 = 1000; r212 = 1300; r213 = 1600;
20 r221 = 800; r222 = 1000; r223 = 1700;
21 r231 = 600; r232 = 700; r233 = 1100;
22
23 r311 = 400; r312 = 530; r313 = 710;
24 r321 = 350; r322 = 450; r323 = 800;
25 r331 = 250; r332 = 400; r333 = 650;
26
27 % недельные затраты
28 o1 = 200;
29 o2 = 900;
30 o3 = 300;
31
32
33 % 3 этап
34 % радио
35 pnew111 = p111*r111 + p112*r112 + p113*r113 - o1;
36 pnew112 = p121*r121 + p122*r122 + p123*r123 - o1;
37 pnew113 = p131*r131 + p132*r132 + p133*r133 - o1;
38 % телевиденье
39 pnew121 = p211*r211 + p212*r212 + p213*r213 - o2;
40 pnew122 = p221*r221 + p222*r222 + p223*r223 - o2;
41 pnew123 = p231*r231 + p232*r232 + p233*r233 - o2;
42 % газета
43 pnew131 = p311*r311 + p312*r312 + p313*r313 - o3;
44 pnew132 = p321*r321 + p322*r322 + p323*r323 - o3;
45 pnew133 = p331*r331 + p332*r332 + p333*r333 - o3;
46
47
48 % 2 этап
49 % радио
50 pnew211 = pnew111 + p111*pnew111 + p112*pnew132 + p113*pnew133 - o1;
51 pnew212 = pnew112 + p121*pnew111 + p122*pnew132 + p123*pnew133 - o1;
52 pnew213 = pnew113 + p131*pnew111 + p132*pnew132 + p133*pnew133 - o1;
53 % телевиденье
54 pnew221 = pnew121 + p211*pnew111 + p212*pnew132 + p213*pnew133 - o2;
55 pnew222 = pnew122 + p221*pnew111 + p222*pnew132 + p223*pnew133 - o2;
56 pnew223 = pnew123 + p231*pnew111 + p232*pnew132 + p233*pnew133 - o2;
57 % газета
58 pnew231 = pnew131 + p311*pnew111 + p312*pnew132 + p313*pnew133 - o3;
59 pnew232 = pnew132 + p321*pnew111 + p322*pnew132 + p323*pnew133 - o3;
60 pnew233 = pnew133 + p331*pnew111 + p332*pnew132 + p333*pnew133 - o3;
61
62
63 % 1 этап
64 % радио
65 pnew311 = pnew211 + p111*pnew211 + p112*pnew212 + p113*pnew233 - o1
66 pnew312 = pnew212 + p121*pnew211 + p122*pnew212 + p123*pnew233 - o1
67 pnew313 = pnew213 + p131*pnew211 + p132*pnew212 + p133*pnew233 - o1
68 % телевиденье
69 pnew321 = pnew221 + p211*pnew211 + p212*pnew212 + p213*pnew233 - o2
70 pnew322 = pnew222 + p221*pnew211 + p222*pnew212 + p223*pnew233 - o2
71 pnew323 = pnew223 + p231*pnew211 + p232*pnew212 + p233*pnew233 - o2

```

```

72 % газета
73 pnew331 = pnew231 + p311*pnew211 + p312*pnew212 + p313*pnew233 - o3
74 pnew332 = pnew232 + p321*pnew211 + p322*pnew212 + p323*pnew233 - o3
75 pnew333 = pnew233 + p331*pnew211 + p332*pnew212 + p333*pnew233 - o3

```

1.2.3 Решение задачи с бесконечным числом этапов методом полного перебора

В данной задаче принятия решений имеется $3^3 = 27$ стационарных стратегий поведения, представленных в следующей таблице.

1					
P			R		
0,4	0,5	0,1	400	520	600
0,1	0,7	0,2	300	400	700
0,1	0,7	0,2	200	250	500
2					
P			R		
0,4	0,5	0,1	400	520	600
0,1	0,7	0,2	300	400	700
0,1	0,7	0,2	600	700	1100
3					
P			R		
0,4	0,5	0,1	400	520	600
0,1	0,7	0,2	300	400	700
0	0,2	0,8	250	400	650
4					
P			R		
0,4	0,5	0,1	400	520	600
0,3	0,6	0,1	800	1000	1700
0,1	0,7	0,2	200	250	500
5					
P			R		
0,4	0,5	0,1	400	520	600
0,3	0,6	0,1	800	1000	1700
0,1	0,7	0,2	600	700	1100
6					
P			R		
0,4	0,5	0,1	400	520	600
0,3	0,6	0,1	800	1000	1700
0	0,2	0,8	250	400	650
7					
P			R		
0,4	0,5	0,1	400	520	600
0	0,7	0,3	350	450	800
0,1	0,7	0,2	200	250	500
8					
P			R		
0,4	0,5	0,1	400	520	600
0	0,7	0,3	350	450	800
0,1	0,7	0,2	600	700	1100
9					
P			R		
0,4	0,5	0,1	400	520	600
0	0,7	0,3	350	450	800
0	0,2	0,8	250	400	650
10					
P			R		
0,7	0,2	0,1	1000	1300	1600
0,3	0,6	0,1	800	1000	1700
0,1	0,7	0,2	600	700	1100
11					
P			R		
0,7	0,2	0,1	1000	1300	1600
0,3	0,6	0,1	800	1000	1700
0,1	0,7	0,2	200	250	500
12					
P			R		
0,7	0,2	0,1	1000	1300	1600
0,3	0,6	0,1	800	1000	1700
0	0,2	0,8	250	400	650
13					
P			R		
0,7	0,2	0,1	1000	1300	1600
0,1	0,7	0,2	300	400	700
0,1	0,7	0,2	200	250	500
14					
P			R		
0,7	0,2	0,1	1000	1300	1600
0,1	0,7	0,2	300	400	700
0,1	0,7	0,2	600	700	1100
15					
P			R		
0,7	0,2	0,1	1000	1300	1600
0,1	0,7	0,2	300	400	700
0	0,2	0,8	250	400	650
16					
P			R		
0,7	0,2	0,1	1000	1300	1600
0	0,7	0,3	350	450	800
0,1	0,7	0,2	200	250	500
17					
P			R		
0,7	0,2	0,1	1000	1300	1600
0	0,7	0,3	350	450	800
0,1	0,7	0,2	600	700	1100
18					
P			R		
0,7	0,2	0,1	1000	1300	1600
0	0,7	0,3	350	450	800
0	0,2	0,8	250	400	650
19					
P			R		
0,2	0,5	0,3	400	530	710
0	0,7	0,3	350	450	800
0	0,2	0,8	250	400	650
20					
P			R		
0,2	0,5	0,3	400	530	710
0	0,7	0,3	350	450	800
0,1	0,7	0,2	200	250	500
21					
P			R		
0,2	0,5	0,3	400	530	710
0	0,7	0,3	350	450	800
0,1	0,7	0,2	600	700	1100
22					
P			R		
0,2	0,5	0,3	400	530	710
0,1	0,7	0,2	300	400	700
0,1	0,7	0,2	200	250	500
23					
P			R		
0,2	0,5	0,3	400	530	710
0,1	0,7	0,2	300	400	700
0,1	0,7	0,2	600	700	1100
24					
P			R		
0,2	0,5	0,3	400	530	710
0,1	0,7	0,2	300	400	700
0	0,2	0,8	250	400	650
25					
P			R		
0,2	0,5	0,3	400	530	710
0,3	0,6	0,1	800	1000	1700
0,1	0,7	0,2	200	250	500
26					
P			R		
0,2	0,5	0,3	400	530	710
0,3	0,6	0,1	800	1000	1700
0,1	0,7	0,2	600	700	1100
27					
P			R		
0,2	0,5	0,3	400	530	710
0,3	0,6	0,1	800	1000	1700
0	0,2	0,8	250	400	650

Результаты вычислений v_i^s приведены в таблице.

s	i=1	i=2	i=3
1	480	450	295
2	480	450	770
3	480	450	600
4	480	1010	295
5	480	1010	770
6	480	1010	600
7	480	555	295
8	480	555	770
9	480	555	600
10	1120	1010	770
11	1120	1010	295
12	1120	1010	600
13	1120	450	295
14	1120	450	770
15	1120	450	600
16	1120	555	295
17	1120	555	770
18	1120	555	600
19	558	555	600
20	558	555	295
21	558	555	770
22	558	450	295
23	558	450	770
24	558	450	600
25	558	1010	295
26	558	1010	770
27	558	1010	600

Стационарные вероятности находятся из уравнени:

$$\pi^s * P = \pi^s$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_m = 1$$

(Отметим, что одно из первых трех уравнений избыточно.) Решение системы будет:

$$0.4 * \pi_1 + 0.1 * \pi_2 + 0.1 * \pi_3 = \pi_1$$

$$0.5 * \pi_1 + 0.7 * \pi_2 + 0.7 * \pi_3 = \pi_1$$

$$0.1 * \pi_1 + 0.7 * \pi_2 + 0.2 * \pi_3 = \pi_1$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

(Отметим, что одно из первых трех уравнений избыточно.) Решение системы будет:

$$\pi_1^1 = 0.14$$

$$\pi_2^1 = 0.67$$

$$\pi_3^1 = 0.18$$

$$E^1 = 421.8$$

Результаты вычисления для всех стационарных стратегий приведены в следующей таблице.

s	π_1	π_2	π_3	E_s
1	0.14	0.67	0.18	421.8
2	0.14	0.67	0.18	507.3
3	0.07	0.4	0.48	501.6
4	0.31	0.58	0.1	764.1
5	0.31	0.58	0.1	811.6
6	0.3	0.4	0.3	728
7	0.04	0.69	0.26	461.57
8	0.04	0.69	0.26	585.07
9	0	0.4	0.6	582
10	0.46	0.42	0.1	1016.4
11	0.46	0.42	0.1	968.9
12	0.3	0.3	0.4	920
13	0.25	0.575	0.175	590.375
14	0.25	0.575	0.175	673.5
15	0.13	0.4	0.46	601.6
16	0.08	0.66	0.26	532.6
17	0.08	0.66	0.26	651.6
18	0	0.4	0.6	582
19	0	0.4	0.6	582
20	0.03	0.69	0.27	479.34
21	50.03	0.69	0.27	607.59
22	0.1	0.67	0.21	387.75
23	0.1	0.67	0.21	487.5
24	0.05	0.43	0.51	527.4
25	0.24	0.59	0.16	777.02
26	0.24	0.59	0.16	841.82
27	0.15	0.41	0.41	743.8

Вывод: Из таблицы видно, что стратегия 10 (релкамлировать товар на телевиденье при любом объеме недельного сбыта) дает наибольший ожидаемый месячный доход. Следовательно, это и есть оптимальная долгосрочная стратегия (без учета затрат на рекламу).

1.3 Вывод

Рассмотренная модель марковских процессов принятия решений позволяет решать задачи принятия решений в условиях риска при заданном одном критерии, либо нескольких, приведенных к одному. Система допущений, используемых в модели и приводящих реальную ситуацию к описанию с помощью марковских процессов, ограничивает применение метода классом задач принятия решений, в которых можно принять допущение о дискретном времени, зависимости текущего состояния системы только от предшествующего и скачкообразном изменении состояния системы. Несмотря на эти ограничения, модель позволяет решать задачи принятия решений, сводящихся к классической задаче управления запасами.

Основным методом решения марковских задач принятия решений в данной работе является метод линейного программирования. Модель линейного программирования позволяет найти решения задачи за конечное число шагов, при этом не используя сложных и приближенных математических методов. Это облегчает поиск решения.

Решением задачи является вектор решений — стратегия — обеспечивающий оптимальное значение выбранного критерия. В качестве принципа оптимальности выбрана максимизация ожидаемых доходов на заданном числе этапов.