Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ

Курс: Методы оптимизации и принятия решений

Тема: Многокритериальная оптимизация

Выполнил студент группы 13541/3 ________________ Д.В. Круминьш
(подпись)

Преподаватель ________________ А.Г. Сиднев
(подпись)

Санкт-Петербург
2018 г.

Оглавление

Глава 1

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

1.1 Постановка задачи

1.1.1 Индивидуальное задание

Задача 2

Фабрика производит два вида изделий, А и Б. Продажа изделий осуществляется на внутреннем рынке и также экспортируется в другие страны. Стоимость изделия А на внутреннем рынке $30, а на внешнем - $45, стоимость изделия Б на внутреннем рынке $20, а на внешнем - $21.

Для изготовления изделий используются два вида станков. Для изготовления 1 единицы изделия А необходима работа первого станка в течении 1 часа и второго – в течение 2 часов, а для изготовления 1 единицы изделия Б необходима работы первого станка в течение 5 часов и второго в течение 7 часов. Ресурс времени непрерывной работы 1 станка 18 часов, а 2 – 20 часов.

Изучение рынка сбыта показало, что спрос на изделие А никогда не превышает 5000 изделий в сутки, а на изделие Б - 9000.

Какое количество изделий каждого вида надо производить в данных условиях для внутреннего и для внешнего рынков, чтобы доход от реализации продукции на внутреннем рынке был максимальным? Какое количество изделий каждого вида надо производить, чтобы минимизировать время использования станков при условии использования не менее 80% ресурса непрерывной работы каждого станка? Какое количество изделий каждого вида надо производить в данных условиях, чтобы доход от реализации продукции на экспорт был максимальным?

1.1.2 Пункты расчетного задания

1. Осуществить переход от многокритериальной задачи к однокритериальной с использованием следующих подходов:
    - Выделение главного критерия;
    - Свертка критериев (аддитивная и мультипликативная);
    - Максимин или минимакс (он же метод максиминной свертки);
    - Метод последовательных уступок;
    - fgoalattain;
    - Ведение метрики в пространстве критериев.
2. Решить задачу стохастического программирования для одной из однокритериальных задач, превратив детерминированное ограничение в вероятностное по схеме

$$P(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq 0) \geq a_i \tag{1.1}$$

Менять a_i в следующем диапазоне $0,1 \leq a_i \leq 0,9$

Считать случайной величиной b_i или элементы $a_{ij}i$-й строки матрицы Aa_{ij} (по выбору).

1.2 Математическая модель задачи многокритериальной оптимизации

- x_{11} – количество изделий А на внутреннем рынке;
- x_{12} – количество изделий А на внешнем рынке;
- x_{21} – количество изделий Б на внутреннем рынке;
- x_{22} – количество изделий Б на внешнем рынке.

Первый критерий. Максимизация дохода на внутреннем рынке

$$f_1(x_{11}, x_{21}) = 30 * x_{11} + 20 * x_{21} \rightarrow max \tag{1.2}$$

Второй критерий. Минимизация использования станков

$$f_2(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) =$$
$$(x_{11} + x_{12}) + 2 * (x_{11} + x_{12}) + 5 * (x_{21} + x_{22}) + 7 * (x_{21} + x_{22}) = \quad (1.3)$$
$$3 * (x_{11} + x_{12}) + 12 * (x_{21} + x_{22}) \rightarrow min$$

Третий критерий. Максимизация дохода на внешнем рынке

$$f_3(x_{12}, x_{22}) = 45 * x_{12} + 21 * x_{22} \rightarrow max \quad (1.4)$$

Примечание: решений, с ограничением на использование не менее 80% ресурса непрерывной работы станков, найти не удалось. Поэтому данное ограничение было снижено до 70%.
Также часы были переведены в минуты.

Ограничения:
Для станков первого типа

$$1 * (x_{11} + x_{12}) + 5 * (x_{21} + x_{22}) \leq 18 * 60 \quad (1.5)$$

$$1 * (x_{11} + x_{12}) + 5 * (x_{21} + x_{22}) \geq (18 * 60) * 0.7 \quad (1.6)$$

Для станков второго типа

$$2 * (x_{11} + x_{12}) + 7 * (x_{21} + x_{22}) \leq 20 * 60 \quad (1.7)$$

$$2 * (x_{11} + x_{12}) + 7 * (x_{21} + x_{22}) \geq (20 * 60) * 0.7 \quad (1.8)$$

Ограничения по количеству изделий

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 5000 \\ x_{21} + x_{22} \leq 9000 \end{cases} \quad (1.9)$$

С учетом требований пакета MATLAB к постановке задач оптимизации, необходимо представить целевые функции как поиск минимумов, а ограничения записать в виде $g(x) \leq 0$. Изменим ограничения 1.6 и 1.8, а также введем новые функции, где $z_1 = -f_1, z_3 = -f_3$. В итоге получим:

$$z_1(x_{11}, x_{21}) = -(30 * x_{11} + 20 * x_{21}) \rightarrow min \quad (1.10)$$

$$z_3(x_{12}, x_{22}) = -(45 * x_{12} + 21 * x_{22}) \rightarrow min \quad (1.11)$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 1*(x_{11}+x_{12})+5*(x_{21}+x_{22})\leq 18*60\\ -1*(x_{11}+x_{12})-5*(x_{21}+x_{22})\leq -(18*60)*0.7\\ 2*(x_{11}+x_{12})+7*(x_{21}+x_{22})\leq 20*60\\ -2*(x_{11}+x_{12})-7*(x_{21}+x_{22})\leq -(20*60)*0.7\\ x_{11}+x_{12}\leq 5000\\ x_{21}+x_{22}\leq 9000 \end{cases} \tag{1.12}$$

1.2.1 Поиск оптимумов частных критериев

Найдем оптимумы каждой из целевых функций независимо от других. Для этого необходимо решить три задачи однокритериальной оптимизации: для z_1, f_2, z_3 при тех же ограничениях на $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ что имеют место для задачи многокритериальной оптимизации.

Для решение данной задачи, был использован MATLAB.

```
clc; clearvars
% Параметры
Tmin1 = (18*60)*0.7;  %Минимально допустимое время работы 1 станка
Tmin2 = (20*60)*0.7;  %Минимально допустимое время работы 2 станка
Tmax1 = (18*60);  %Максимально допустимое время работы 1 станка
Tmax2 = (20*60);  %Максимально допустимое время работы 2 станка

% Целевые функции
f1 = @(X) 30*X(1) + 20*X(3); % -> max
f2 = @(X) 3*(X(1)+X(2))+12*(X(3)+X(4)); % -> min
f3 = @(X) 45*X(2) + 21*X(4); % -> max

z1 = @(N) -f1(N); % -> min
z3 = @(N) -f3(N); % -> min

% Функциональные ограничения в( данном случае только линейные)
A = [1,1,5,5;
     -1,-1,-5,-5;
     2,2,7,7;
     -2,-2,-7,-7;
     1,1,0,0;
     0,0,1,1];
b = [Tmax1; -Tmin1; Tmax2; -Tmin2;  5000; 9000];
```

```
Aeq = [];
beq = [];
% Параметрические ограничения
lb = [0; 0; 0; 0];
ub = [5000; 5000; 9000; 9000];
```

Листинг 1.1: Скрипт с общими параметрами

```
%% Поиск оптимумов частных критериев
startingPoint = lb;
[x, z1_opt] = fmincon(z1, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
[x, f2_opt] = fmincon(f2, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
[x, z3_opt] = fmincon(z3, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
```

Листинг 1.2: Поиск оптимумов частных критериев

```
x =
  236.0000
    0.0000
  104.0000
    0.0000
z1_opt =
  -9.1600e+03

x =
    0.0000
    0.0000
   75.6000
   75.6000
f2_opt =
   1.8144e+03

x =
  0.0000
  236.0000
  0.0000
  104.0000

z3_opt =
  -1.2804e+04
```

Листинг 1.3: Результаты выполнения листинга 1.2

Таким образом, были получены следующие оптимальные значения:

$$z_1^{min} = -9160, f_2^{min} = 1814.4, z_3^{min} = -12804 \tag{1.13}$$

Откуда следует:

1. $f_1^{max} = 9160\$$ - максимальный доход на внутреннем рынке;
   - x_{11} - 236;
   - x_{21} - 104.
2. $f_2^{min} = 1814.4$ часов - общее время использования первого и второго станка;
   - x_{21} - 75.6;
   - x_{22} - 75.6;
   - Примечание: значение в 151.2(75.6+75.6) изделий Б, упирается в нижнюю границу(756 часов(70%)) первого станка.
3. $f_3^{max} = 12804\$$ - максимальный доход на внешнем рынке.
   - x_{12} - 236;
   - x_{22} - 104.

Также были посчитаны значения прочих критериев при оптимуме каждого критерия.

x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	f_1	f_2	f_3
Оптимум f_1						
236	0	104	0	9160	1956	0
Оптимум f_2						
0	0	75.6	75.6	1512	1814.4	1587.6
Оптимум f_3						
0	236	0	104	0	1956	12804

Таблица 1.1: Оптимумы критериев и значения функций

Как видно из таблицы, оптимум первого или третьего критерия означает 0 велечину другого критерия.

1.3 Переход от многокритериальной задачи к однокритериальной

1.3.1 Выделение главного критерия

Один из критериев - главный - имеет существенно более высокий приоритет, чем все остальные, но по остальным критериям вариант тоже не должен быть слишком плох. Пусть главный критерий - первый, следовательно, для оставшихся целевых функций необходимо указать нижние границы. Предположим, что общее время изготовления продукции (f_2) должно быть не более 1950 часов, а доход на внешнем рынке должен быть больше 1000$. Таким образом, к задаче добавляются еще 2 ограничения:

$$3 * (x_{11} + x_{12}) + 12 * (x_{21} + x_{22}) \leq 1950 \tag{1.14}$$

$$45 * x_{12} + 21 * x_{22} \geq 1000 \tag{1.15}$$

В соответствии с изменениями скрипт был дополнен ограничениями.

```
clc; clearvars
% Параметры
Tmin1 = (18*60)*0.7;  %Минимально допустимое время работы 1 станка
Tmin2 = (20*60)*0.7;  %Минимально допустимое время работы 2 станка
Tmax1 = (18*60);  %Максимально допустимое время работы 1 станка
Tmax2 = (20*60);  %Максимально допустимое время работы 2 станка
coeff = 0.7;

% Целевые функции
f1 = @(X) 30*X(1) + 20*X(3); % -> max
f2 = @(X) 3*(X(1)+X(2))+12*(X(3)+X(4)); % -> min
f3 = @(X) 45*X(2) + 21*X(4); % -> max

z1 = @(N) -f1(N); % -> min
z3 = @(N) -f3(N); % -> min

% Функциональные ограничения в( данном случае только линейные)
A = [1,1,5,5;
    -1,-1,-5,-5;
    2,2,7,7;
    -2,-2,-7,-7;
    1,1,0,0;
    0,0,1,1
    3,3,12,12;
    0,-45,0,-21];
```

```
b = [Tmax1; -Tmin1; Tmax2; -Tmin2;   5000; 9000; 1950; -1000];

Aeq = [];
beq = [];
% Параметрические ограничения
lb = [0; 0; 0; 0];
ub = [5000; 5000; 9000; 9000];

%% Поиск оптимумов частных критериев
startingPoint = lb;
[x, z1_opt] = fmincon(z1, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
[x, f2_opt] = fmincon(f2, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
[x, z3_opt] = fmincon(z3, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)


[x, f_val] = fmincon(z1, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
```

Листинг 1.4: Скрипт с выделением главного критерия

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
x =

  203.7778
   22.2222
  106.0000
    0.0000


f_val =

  -8.2333e+03
```

Листинг 1.5: Результаты выполнения листинга 1.4

Таким образом было получено значение в 8233.3$, что составляет 89% от оптимума. Время использования станков - 1950 часов(упор в ограничение), доход на внешнем рынке - 1000$(упор в ограничение).

- f_1 - 8233.3$ (89.9% от оптимума);
- f_2 - 1950 часов (на 7.4% больше оптимума);
- f_3 - 1000$ (7.8% от оптимума);
- 9 233.3$ - общий доход.

Столь низкий процент от оптимума у f_3 объясняется тем, что большая часть изделий продавалась на внутренний рынок, а не на внешний.

1.3.2 Свертка критериев

Аддитивная свертка критериев

Для использования метода аддитивной свертки необходимо выполнить нормировку критериев, с тем чтобы сделать их значения соизмеримыми, а единицы измерения – безразмерными. Выполним нормировку следующим образом:

$$\overline{z_1} = \frac{z_1}{|z_1^{min}|} = -\frac{30 * x_{11} + 20 * x_{21}}{9160} = -\frac{3 * x_{11} + 2 * x_{21}}{916} \quad (1.16)$$

$$\overline{f_2} = \frac{f_2}{|f_2^{min}|} = \frac{3 * (x_{11} + x_{12}) + 12 * (x_{21} + x_{22})}{1814.4} = \frac{x_{11} + x_{12} + 4 * (x_{21} + x_{22})}{604.8} \quad (1.17)$$

$$\overline{z_3} = \frac{z_3}{|z_3^{min}|} = \frac{-45 * x_{12} + 21 * x_{22}}{12804} = \frac{-15 * x_{12} + 7 * x_{22}}{4266.8} \quad (1.18)$$

Формула аддитивной свертки имеет вид:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i(x), 0 < \lambda_i < 1, \sum_i \lambda_i = 1, \quad (1.19)$$

где $f_i(x)$ - критерии оптимальности, r – их общее число, а λ_i - параметры важности. Примем $\lambda_1 = 0.4, \lambda_2 = 0.2, \lambda_3 = 0.4$. Для этого добавим к листингу 1.2 следующий код:

```
% Аддитивная свертка
z1_norm = @(N) z1(N)/abs(z1_opt);
f2_norm = @(N) f2(N)/abs(f2_opt);
z3_norm = @(N) z3(N)/abs(z3_opt);
f = @(N) 0.4*z1_norm(N) +0.2*f2_norm(N) + 0.4*z3_norm(N);
A = [1,1,5,5;
     -1,-1,-5,-5;
     2,2,7,7;
     -2,-2,-7,-7;
     1,1,0,0;
     0,0,1,1
     3,3,12,12;
     0,-45,0,-21];
b = [Tmax1; -Tmin1; Tmax2; -Tmin2;  5000; 9000; 1950; -1000];
```

```
[N, f_opt] = fmincon(f, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
```

Листинг 1.6: Аддитивная свертка

```
N =
     0.0009
   225.9990
   105.9997
     0.0004

f_opt =
    −0.1953

>> f1(N)
ans =
    2.1200e+03

>> f2(N)
ans =
    1.9500e+03

>> f3(N)
ans =
    1.0170e+04
```

Листинг 1.7: Результаты выполнения листинга 1.6

Метод аддитивной свертки позволил получить решение:

- f_1 - 2120$ (23.1% от оптимума);
- f_2 - 1950 часов (на 7.4% больше оптимума);
- f_3 - 10170$ (79.4% от оптимума);
- 12 290$ - общий доход.

Мультипликативная свертка критериев

Формула мультипликативной свертки имеет вид:

$$F(x) = \prod_{i=1}^{r} f_i(x)^{\lambda_i} \tag{1.20}$$

где $f_i(x)$ - критерии оптимальности, r - их общее число, а λ_i - показатели важности. Примем $\lambda_1 = 0.4, \lambda_2 = 0.2, \lambda_3 = 0.4$. Данные значения были выбраны из соображения того что доход более важен чем минимизация времени станков. А также что доход на внутреннем и внешнем рынке одинаково важны. Нормировка уже была произведена в аддитивной свертки, в итоге получим следующую задачу однокритериальной оптимизации:

$$f = \overline{z_1}^{0.4} * \overline{f_2}^{0.2} * \overline{z_3}^{0.4} \tag{1.21}$$

Для этого добавим к листингу 1.2 следующий код:

```
% Мультипликативная свертка
startingPoint = lb;
z1_norm = @(N) z1(N)/abs(z1_opt);
f2_norm = @(N) f2(N)/abs(f2_opt);
z3_norm = @(N) z3(N)/abs(z3_opt);
f = @(N) (-(f1(N)/9160)^0.4)*((f2(N)/1814.4)^0.2)*((f3(N)/12804)^0.4)
A = [1,1,5,5;
     -1,-1,-5,-5;
     2,2,7,7;
     -2,-2,-7,-7;
     1,1,0,0;
     0,0,1,1
     3,3,12,12;
     0,-45,0,-21];
b = [Tmax1; -Tmin1; Tmax2; -Tmin2;  5000; 9000; 1950; -1000];

[N, f_opt] = fmincon(f, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
```

Листинг 1.8: Мультипликативная свертка

```
N =
   77.6665
  148.3330
  105.9988
    0.0014

f_opt =
   -0.5858

>> f1(N)
ans =
   4.4500e+03

>> f2(N)
ans =
   1.9500e+03

>> f3(N)
ans =
```

```
    6.6750e+03
```
Листинг 1.9: Результаты выполнения листинга 1.8

Метод мультипликативной свертки позволил получить решение:

- f_1 - 4450$ (48.6% от оптимума);
- f_2 - 1950 часов (на 7.4% больше оптимума);
- f_3 - 6675$ (52.1% от оптимума);
- 11 125$ - общий доход.

Мультипликативная свертка позволила получить более компромиссное решение для f_1 и f_3, однако больший общий доход позволила получить аддитивная свертка.

1.3.3 Минимакс (максимин)

Максиминную свертку представим в следующем виде: $C_i(a) = \min w_i C_i(a)$

Решение a^* является наилучшим, если для всех a выполняется условие $C(a^*) \geq C(a)$, или $a^* = \arg\max C(a) = \arg\max\min w_i C_i(a)$.

Для реализации максиминной свертки необходимо в fminimax передавать функции обратные целевым (функция funminmax). Так как оцениваемые показатели разновелики, необходимо нормировать критерии. Что было произведено ранее.

Решение задачи представлено как скрипт в среде Matlab, для этого листинг 1.1 был дополнен:

```
%Минимакс — максимин
startingPoint = lb;
[x, f] = fminimax (@funminmax , startingPoint , A , b, Aeq, beq, lb , ub )

function f = funminmax (X)
f(1) = —(30*X(1) — 20*X(3))/9160;
f(2) = —(3*(X(1)+X(2))+12*(X(3)+X(4)))/1814.4;
f(3) = —(45*X(2) — 21*X(4))/12804;
end
```
Листинг 1.10: Минимакс (максимин)

```
x =

   123.4525
   112.5475
```

```
    46.9046
    57.0954

f  =
    −0.3019     −1.0780     −0.3019

>>  f1(x)
ans  =
    4.6417e+03

>>  f2(x)
ans  =
            1956

>>  f3(x)
ans  =
    6.2636e+03
```

Листинг 1.11: Результаты выполнения листинга 1.10

Метод минимакс (максимин) позволил получить решение:

- f_1 - 4641.7$ (50.6% от оптимума);
- f_2 - 1956 часов (на 7.8% больше оптимума);
- f_3 - 6263.6$ (48.9% от оптимума);
- 10905.3$ - общий доход.

Процентное соотношение первого и второго критерия относительно оптимума примерно равное, второй критерий по сути игнорируется.

1.3.4 Метод последовательных уступок

Для решения данной задачи была выбрана уступка = 10%. Предположим, что критерии пронумерованы в следующем порядке важности:

$$z_1 > f_2 > z_3$$

Для первого критерия уже решена задача поиска оптимального значения в п 1.2.1. То есть:

$$9160 * 0.9 = 8244$$

То ограничения критерия выглядит следующим образом:

$$-30 * x_{11} - 20 * x_{21} \leq -8244$$

Запишем ограничения в скрипт

```
...
% Функциональные ограничения
A = [1 ,1 ,5 ,5;
     -1,-1,-5,-5;
     2 ,2 ,7 ,7;
     -2,-2,-7,-7;
     1 ,1 ,0 ,0;
     0 ,0 ,1 ,1;
     -30,0,-20,0];
b = [Tmax1; -Tmin1; Tmax2; -Tmin2;  5000; 9000; -8244];

...

[x, z3_opt] = fmincon(z3, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
```

Листинг 1.12: Последовательные уступки

```
x =
  205.4667
   30.5333
  104.0000
    0.0000

z3_opt =
  -1.3740e+03

>> f1(x)
ans =
   8.2440e+03
```

Листинг 1.13: Результат выполнения

Как и ожидалось при минимизации функции z_3 учитывалось и ограничения для z_1, что существенное уменьшило результат для z_3.

В соответствии с полученным значением введем ограничение для второго критерия.

$$1374 * 0.9 = 1236.6$$

Ограничения критерия выглядит следующим образом:

$$-45 * x_{12} - 21 * x_{22} \leq -1236.6$$

Запишем ограничения в скрипт

```
...
% Функциональные ограничения
A = [1 ,1 ,5 ,5;
     -1,-1,-5,-5;
     2 ,2 ,7 ,7;
     -2,-2,-7,-7;
     1 ,1 ,0 ,0;
     0 ,0 ,1 ,1;
     -30,0,-20,0;
     0,-45,0,-21];
b = [Tmax1; -Tmin1; Tmax2; -Tmin2;  5000; 9000; -8244; -1236.6];

...

[x, z3_opt] = fmincon(z3, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
```

Листинг 1.14: Последовательные уступки

```
x =
  204.9969
   27.4800
  104.7046
    0.0000

f2_opt =
   1.9539e+03

>> f1(x)
ans =
   8.2440e+03

>> f3(x)
ans =
   1.2366e+03
```

Листинг 1.15: Результат выполнения

Итоговые результаты:

- f_1 - 8244$ (90% от оптимума);
- f_2 - 1953.9 часов (на 7.6% больше оптимума);
- f_3 - 1236.6$ (9.6% от оптимума);
- 9 480.6$ - общий доход.

По результатам видно, что за счет последовательности, при оптимизации каждого следующего критерия учитываются и уступка предыдущих критериев.

1.3.5 Метод достижения цели (fgoalattain)

Fgoalattain решает задачу достижения цели, которая является одной из формулировок задач для векторной оптимизации. x = fgoalattain(fun, x_0, goal, weight, ...):

- fun – целевая функция,
- x_0 – начальные значения,
- goal – целевые значения,
- weight – веса.

Пусть goal = $(z_1^{min}, f_2^{min}, z_3^{min})$, w = $(|z_1^{min}|, |f_2^{min}|, |z_3^{min}|)$. Тогда скрипт для решения задачи будет выглядеть следующим образом:

```
...
%% fgoalattain
f = @(N) [z1(N), f2(N), z3(N)];
goal = [z1_opt, f2_opt, z3_opt];
w = abs(goal);
A = [1,1,5,5;
     -1,-1,-5,-5;
     2,2,7,7;
     -2,-2,-7,-7;
     1,1,0,0;
     0,0,1,1];
b = [Tmax1; -Tmin1; Tmax2; -Tmin2;  5000; 9000];
lb = [0; 0; 0; 0];
ub = [5000; 5000; 9000; 9000];
startingPoint = lb;

[N, f_opt, af] = fgoalattain(f, startingPoint, goal, w, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
```

Листинг 1.16: Метод достижения цели

```
N =
  115.2789
  120.7211
   56.8321
   47.1679
```

```
f_opt =
    1.0e+03 *
    -4.5950     1.9560     -6.4230

af =
     0.4984
```
Листинг 1.17: Результат выполнения

Значение переменной af, говорит о том, что полученное решение на 49.8% хуже цели.

Итоговые результаты:

- f_1 - 4595$ (50.2% от оптимума);
- f_2 - 1956 часов (на 7.8% больше оптимума);
- f_3 - 6423$ (50.2% от оптимума);
- 11 018$ - общий доход.

Оба критерия f_1 и f_3 составляют одинаковую долю от своих оптимальных значений, в то время как второй критерий был проигнорирован, отдавая больший приоритет двум другим критериям.

1.3.6 Введение метрики в пространстве критериев

Для перехода к однокритериальной задаче оптимизации методом введения метрики в пространстве целевых функций необходимо определить координаты «идеальной» точки $a = (f_1^*, f_2^*, ..., f_r^*)$, где $f_i = minf_i(x)$. Эти значения уже были получены в п. 1.2.1, и поэтому:

$$a = (-9160, 1814.4, -12804)$$

Введем в пространстве критериев метрику в виде евклидова расстояния:

$$p(y, a) = [\sum_{i=1}^{r}(a_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{1.22}$$

Тогда за целевую функцию (обобщенный критерий), с учётом необходимости нормировки, можно взять выражение:

$$f = \sum_{i=1}^{r}(\frac{a_i - f_i}{f_i^*})^2 = \sum_{i=1}^{r}(1 - \frac{f_i}{f_i^*})^2 \tag{1.23}$$

Таким образом, получаем следующую задачу оптимизации:

$$f = (1 - \frac{z_1}{z_1^{min}})^2 + (1 - \frac{f_2}{f_2^{min}})^2 + (1 - \frac{z_3}{z_3^{min}})^2 \qquad (1.24)$$

```
...
% Параметрические ограничения
lb = [0; 0; 0; 0];
ub = [5000; 5000; 9000; 9000];

%% Поиск оптимумов частных критериев
startingPoint = lb;
[x, z1_opt] = fmincon(z1, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
[x, f2_opt] = fmincon(f2, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
[x, z3_opt] = fmincon(z3, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)

%% Введение метрики в пространстве критериев
f = @(N) (1-z1(N)/z1_opt)^2+(1-f2(N)/f2_opt)^2+(1-z3(N)/z3_opt)^2;
[N, f_opt] = fmincon(f, startingPoint, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
```

Листинг 1.18: Метод достижения цели

```
N =
   83.7126
  152.2874
  103.9999
    0.0001

f_opt =
    0.4709

>> f1(N)
ans =
   4.5914e+03

>> f2(N)
ans =
   1.9560e+03

>> f3(N)
ans =
   6.8529e+03
```

Листинг 1.19: Результат выполнения

Итоговые результаты:

- f_1 - 4591.4$ (50.1% от оптимума);

- f_2 - 1956 часов (на 7.8% больше оптимума);
- f_3 - 6852.9$ (53.5% от оптимума);
- 11 444.3$ - общий доход.

1.4 Оценка Парето-оптимальности полученных решений

Для того чтобы уменьшить количество альтернатив, среди которых лицо, принимающее решение (ЛПР), должно сделать выбор, можно выделить множество Парето среди всех полученных решений. Для этого была составлена таблица и построен график.

Столбец **SUM** означает общий доход с внешнего и внутреннего рынка, то есть $f_1 + f_3$.

Метод перехода к однокритериальной задаче	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	f_1	f_2	f_3	**SUM**
А. Выделение главного критерия	203.8	22.2	106	0	8233.3	1950	1000	9233.3
Б1. Аддитивная свертка	0	226	106	0	2120	1950	10170	12290
Б2. Мультипликативная свертка	77.7	148.3	106	0	4450	1950	6675	11125
В. Минимакс	123.45	112.55	46.9	57.1	4641.7	1956	6263.6	10905.3
Г. Метод последовательных уступок	205	27.5	105	0	8244	1953.9	1236.6	9480.6
Д. Метод достижения цели (fgoalattain)	115.3	120.7	56.8	47.2	4595	1956	6423	11018
Е. Введение метрики в пространстве критериев	83.7	152.3	104	0	4591.4	1956	6852.9	11444.3

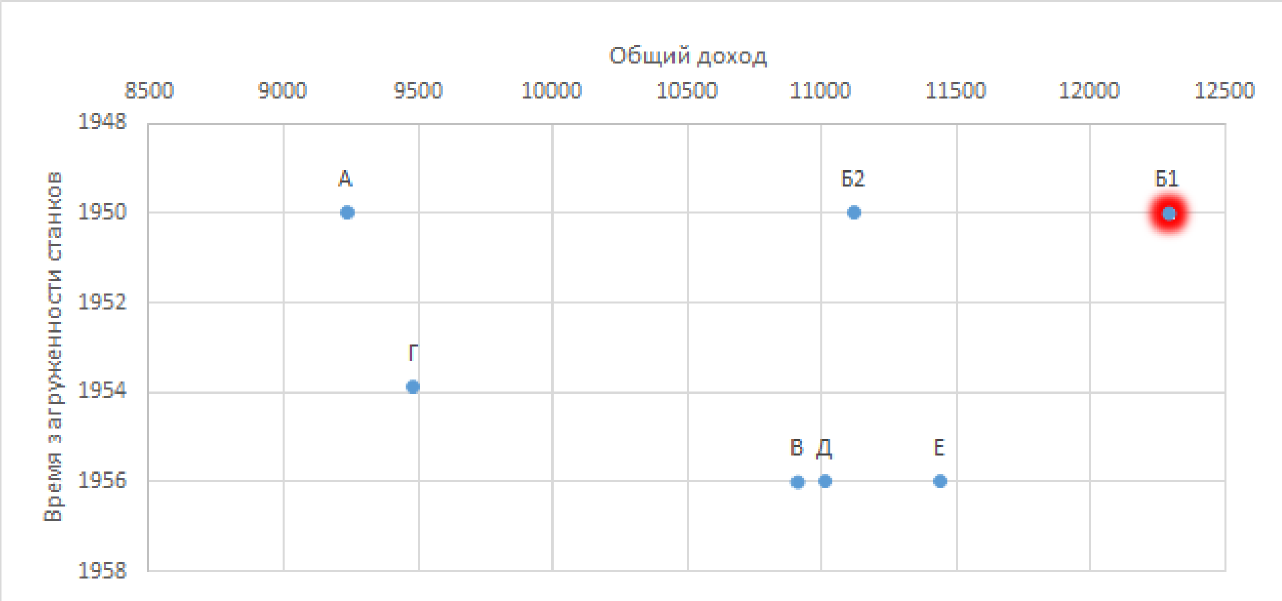

Рис. 1.1: Оценки от полученных решений на плоскости критериев: красным выделено множество Парето

Парето-оптимальными являются только решение Б1. С точки зрения ЛПР оно также является лучшим, так как позволяет достичь максимального дохода.

1.5 Решение задачи стохастического программирования

Рассмотрим задачу стохастического программирования на основе задачи однокритериальной оптимизации, которая была получена из исходной методом введения метрики в пространстве критериев (п. 1.3.6).

Преобразуем третье ограничение системы:

$$2x_{11} + 2x_{12} + 7 * x_{21} + 7 * x_{22} \leq 1200$$

в вероятностное, тогда:

$$P(\alpha_{11}x_{11} + \alpha_{12}x_{12} + \alpha_{21}x_{21} + \alpha_{22}x_{22} \leq 1200) \geq \alpha$$

где все a_{ij} нормально распределены и имеют следующие математические ожидания и дисперсии:

$$M(\alpha_{11}) = 2, M(\alpha_{12}) = 2, M(\alpha_{21}) = 7, M(\alpha_{22}) = 7$$
$$D(\alpha_{11}) = 1, D(\alpha_{12}) = 1, D(\alpha_{21}) = 3.5, D(\alpha_{22}) = 3.5$$

Где СКО равно половине математического ожидания. По таблице функции распределения стандартного нормального закона находим $K_a(0.1 \le \alpha \le 0.9)$

$$K_{0.1} = -1.2816, K_{0.2} = -0.8416, K_{0.3} = -0.5244, K_{0.4} = -0.2533, K_{0.5} = 0$$
$$K_{0.6} = 0.2533, K_{0.7} = 0.5244, K_{0.8} = 0.8416, K_{0.9} = 1.2816$$

Таким образом, вероятностное ограничение становится эквивалентно детерминированному неравенству:

$$2x_{11} + 2x_{12} + 7 * x_{21} + 7 * x_{22} + K_\alpha * \sqrt{x_{11}^2 + x_{12}^2 + 3.5 * x_{21}^2 + 3.5 * x_{22}^2} \le 1200 \qquad (1.25)$$

Решение задачи представлено как скрипт в программе Matlab

```
clc; clearvars
% Параметры
Tmin1 = (18*60)*0.7;  %Минимально допустимое время работы 1 станка
Tmin2 = (20*60)*0.7;  %Минимально допустимое время работы 2 станка
Tmax1 = (18*60);  %Максимально допустимое время работы 1 станка
Tmax2 = (20*60);  %Максимально допустимое время работы 2 станка

% Целевые функции
f1 = @(X) 30*X(1) + 20*X(3); % -> max
f2 = @(X) 3*(X(1)+X(2))+12*(X(3)+X(4)); % -> min
f3 = @(X) 45*X(2) + 21*X(4); % -> max
z1 = @(N) -f1(N); % -> min
z3 = @(N) -f3(N); % -> min

% Обобщенный критерий
z1_opt = -9160;
f2_opt = 1814.4;
z3_opt = -12804;

f = @(N) (1-z1(N)/z1_opt)^2+(1-f2(N)/f2_opt)^2+(1-z3(N)/z3_opt)^2;
% Функциональные ограничения
A = [
    1,1,5,5;
    -1,-1,-5,-5;
    -2,-2,-7,-7;
    1,1,0,0;
    0,0,1,1];
b = [Tmax1;-Tmin1;  -Tmin2;  5000; 9000];
Aeq = [];
beq = [];
% Параметрические ограничения
lb = [0; 0; 0; 0];
ub = [5000; 5000; 9000; 9000];
```

```
% Опции оптимизатора
options = optimoptions('fmincon','Display','none');
startingPoint = [0, 0, 0, 0];
% Параметры для задачи стохастического программирования
alpha = 0.1:0.1:0.9;
Ka = icdf('Normal', alpha, 0, 1); % Квантили распределения N(0,1)
global K
global m1; global m2; global m3; global m4
global d1; global d2; global d3; global d4
m1=2;m2=2;m3=7;m4=7;
d1=1;d2=1;d3=3.5;d4=3.5;
% Решение детерминированной задачи:
[Ndet, ~] = fmincon(f, startingPoint,[2,2,7,7; A], [Tmax2; b], Aeq, beq, lb, ub
    ↪ , [], options);
% Решение стохастической задачи:
N = zeros(4,numel(alpha));
for i = 1:numel(alpha)
 K = Ka(i);
 [N(:,i), ~] = fmincon(f, startingPoint, ...
 A, b, Aeq, beq, lb, ub, @nonlin, options);
end
%% Вывод результатов
F1 = cellfun(f1, num2cell(N,1));
F2 = cellfun(f2, num2cell(N,1));
F3 = cellfun(f3, num2cell(N,1));
fprintf('alpha = %.1f, X_11 = %6.4f, X_12 = %6.4f, x_21 = %6.4f, x_22 = %6.3f,
    ↪ f1 = %.2f, f2 = %.0f, f3 = %.2f\n', ...
 [alpha; N(1,:); N(2,:); N(3,:); N(4,:); F1; F2; F3])
fprintf('Для детерминированных ограничений:\n')
fprintf('X_11 = %3.4f, X_12 = %3.4f, x_21 = %6.4f, x_22 = %6.3f, f1 = %.2f, f2
    ↪ = %.0f, f3 = %.2f\n', ...
 Ndet(1), Ndet(2), Ndet(3), Ndet(4), f1(Ndet), f2(Ndet), f3(Ndet))
%% Функция, задающая нелинейные ограничения
function [c, ceq] = nonlin(N)
global K;
global m1; global m2; global m3; global m4
global d1; global d2; global d3; global d4
  c = m1*N(1)+m2*N(2) + m3*N(3)+m4*N(4) + K*sqrt(d1*N(1)^2 + d2*N(2)^2 + d3*N
    ↪ (3)^2 + d4*N(4)^2) - 1200;
 ceq = [];
end
```

Листинг 1.20: Решение задачи стохастического программирования

```
alpha = 0.1, X_11 = 271.4401, X_12 = 278.9110, x_21 = 41.1291, x_22 =  0.001,
    ↪ f1 = 8965.78, f2 = 2145, f3 = 12551.01
```

```
alpha = 0.2, X_11 = 271.4492, X_12 = 278.9046, x_21 = 41.1151, x_22 =  0.014,
    ↪ f1 = 8965.78, f2 = 2145, f3 = 12551.01
alpha = 0.3, X_11 = 271.4494, X_12 = 278.9048, x_21 = 41.1172, x_22 =  0.012,
    ↪ f1 = 8965.83, f2 = 2145, f3 = 12550.97
alpha = 0.4, X_11 = 155.5649, X_12 = 205.9867, x_21 = 78.8894, x_22 =  0.000,
    ↪ f1 = 6244.73, f2 = 2031, f3 = 9269.41
alpha = 0.5, X_11 = 83.7126, X_12 = 152.2874, x_21 = 103.9999, x_22 =  0.000,
    ↪ f1 = 4591.37, f2 = 1956, f3 = 6852.93
alpha = 0.6, X_11 = 63.7924, X_12 = 88.9527, x_21 = 74.5707, x_22 = 46.080, f1
    ↪ = 3405.19, f2 = 1906, f3 = 4970.56
alpha = 0.7, X_11 = 27.7783, X_12 = 43.1165, x_21 = 73.8482, x_22 = 63.173, f1
    ↪ = 2310.31, f2 = 1857, f3 = 3266.87
alpha = 0.8, X_11 = 0.0000, X_12 = 0.0000, x_21 = 74.3433, x_22 = 74.343, f1 =
    ↪ 1486.87, f2 = 1784, f3 = 1561.21
alpha = 0.9, X_11 = 0.0000, X_12 = 0.0000, x_21 = 70.9449, x_22 = 70.990, f1 =
    ↪ 1418.90, f2 = 1703, f3 = 1490.78Для
 детерминированных ограничений:
X_11 = 83.7126, X_12 = 152.2874, x_21 = 103.9999, x_22 =  0.000, f1 = 4591.37,
    ↪ f2 = 1956, f3 = 6852.93
```

Листинг 1.21: Результат выполнения

α	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	f_1	f_2	f_3
0.1	271.4401	278.9110	41.1291	0.001	8965.78	2145	12551.01
0.2	271.4492	278.9046	41.1151	0.014	8965.78	2145	12551.01
0.3	271.4494	278.9048	41.1172	0.012	8965.83	2145	12550.97
0.4	155.5649	205.9867	78.8894	0.000	6244.73	2031	9269.41
0.5	83.7126	152.2874	103.9999	0.000	4591.37	1956	6852.93
0.6	63.7924	88.9527	74.5707	46.080	3405.19	1906	4970.56
0.7	27.7783	43.1165	73.8482	63.173	2310.31	1857	3266.87
0.8	0.0000	0.0000	74.3433	74.343	1486.87	1784	1561.21
0.9	0.0000	0.0000	70.9449	70.990	1418.90	1703	1490.78
Решение задачи при детерминированных ограничениях							
-	83.7126	152.2874	103.9999	0.000	4591.37	1956	6852.93

Задача чувствительна к выбранному ограничению, т.к. для различных K получились разные результаты.

Увеличение доверительной вероятности α приводит к ухудшению оценок получаемых решений по первому и второму критерию. При $\alpha = 0.5, K_\alpha = 0$в случае чего получается решение, совпадающее с решением задачи с детерминированными ограничениями.

При $\alpha < 0.5$ квантиль приобретает отрицательное значение. За счет чего ограничения **ослабевают**(их выполнение становится менее важным), и например решение при $\alpha = 0.1$ практические совпадает с оптимум для первого и второго критерия одновременно, чего не удалось добиться в каких-либо методах оптимизации.

А при $\alpha > 0.5$ ограничения становяться более **жесткими**, что уменьшает общий доход.