

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт компьютерных наук и технологий

**Кафедра компьютерных систем и программных технологий**

**РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ**

**Курс:** Методы оптимизации и принятия решений

**Тема:** Оптимизация ССМО

Выполнил студент группы 13541/3

\_\_\_\_\_  
(подпись) Д.В. Круминьш

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(подпись) А.Г. Сиднев

Санкт-Петербург  
2018 г.

# Оглавление

<b>3</b>	<b>Поиск оптимальных параметров сети систем массового обслуживания</b>	<b>3</b>
3.1	Постановка задачи . . . . .	3
3.2	Решение . . . . .	3
3.3	Вывод . . . . .	11

## Глава 3

# Поиск оптимальных параметров сети систем массового обслуживания

### 3.1 Постановка задачи

**Вариант:** задача 4, вариант 144.

№ вар	$Q = \{q_{ij}\}_{i=\overline{0,n}}_{j=\overline{0,n}}$					$ca_0$	$\lambda_0$	$L_r$	$\mu$	$\{cs_j\}$
144	0	0.2	0.3	0.2	0.3	0.16	8	-	10	0.04   0.04   0.04   0.04
	0.1	0	0.2	0.6	0.1					
	0.6	0.2	0	0.1	0.1					
	0	0.5	0.1	0	0.4					
	0.5	0.3	0.1	0.1	0					

Найти:

$$\min L(\mu) = \sum_{j=1}^n L_j$$

При условии:

$$\sum_{j=1}^n \mu_j = \mu$$

### 3.2 Решение

Вычислим мощность  $\mu > \mu_j^1$ ,  $cs$  и  $ca$  для каждой станции.

Скорость прихода задач в узел  $j$ :  $\lambda_j = \lambda_{0j} + \sum_{i=0}^n q_{ij}\lambda_i, j = 0, \dots, n$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 = 8$$

$$\lambda_1 = 0.2\lambda_0 + 0\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + 0.5\lambda_3 + 0.3\lambda_4$$

$$\lambda_2 = 0.3\lambda_0 + 0.2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0.1\lambda_3 + 0.1\lambda_4$$

$$\lambda_3 = 0.2\lambda_0 + 0.6\lambda_1 + 0.1\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0.1\lambda_4$$

$$\lambda_4 = 0.3\lambda_0 + 0.1\lambda_1 + 0.1\lambda_2 + 0.4\lambda_3 + 0\lambda_4$$

```
A = [1 0 0 0 0;  
      0.2 -1 0.2 0.5 0.3;  
      0.3 0.2 -1 0.1 0.1;  
      0.2 0.6 0.1 -1 0.1;  
      0.3 0.1 0.1 0.4 -1];  
b=[8; 0; 0; 0; 0];  
lambdaj=A\b
```

Листинг 3.1: Код Matlab

```
lambdaj =  
      8.0000  
      9.1128  
      5.7833  
      8.3697  
      7.2375
```

Листинг 3.2: Результат

Проверим полученный результат:

```
>> [ 0 0.1 0.6 0 0.5] * lambdaj  
  
ans =  
      8.0000
```

Листинг 3.3: Проверка

Как и ожидалось, была получена  $\lambda_0$ .

Вычислим  $ca_j$ . Для этого, сперва найдем все  $\lambda_{ij}$ , где  $\lambda_{ij} = \lambda_i * q_{ij}$ .

```

N=5;
Q = [0 0.2 0.3 0.2 0.3;
      0.1 0 0.2 0.6 0.1;
      0.6 0.2 0 0.1 0.1;
      0 0.5 0.1 0 0.4;
      0.5 0.3 0.1 0.1 0];
lambdaij=[];
for i = 1:N
    for j = 1:N
        lambdaij(i,j) = lambda_j(i)*Q(i, j);
    end
end
lambdaij

```

Листинг 3.4: Код Matlab

```

lambdaij =

      0      1.6000      2.4000      1.6000      2.4000
  0.9113      0      1.8226      5.4677      0.9113
  3.4700      1.1567      0      0.5783      0.5783
      0      4.1849      0.8370      0      3.3479
  3.6188      2.1713      0.7238      0.7238      0

```

Листинг 3.5: Результат

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 & 2.4 & 1.6 & 2.4 \\ 0.91 & 0 & 1.82 & 5.47 & 0.91 \\ 3.47 & 1.16 & 0 & 0.58 & 0.58 \\ 0 & 4.18 & 0.84 & 0 & 3.35 \\ 3.62 & 2.17 & 0.72 & 0.72 & 0 \end{pmatrix}$$

Решим уравнения по формулам:

$$ca_j = \frac{\lambda_{0j}}{\lambda_j} ca_{0j} + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_j} ca_{ij} = \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_j} ca_{ij}$$

$$cd_{ij} = q_{ij} cd_{ij} + 1 - q_{ij}$$

```

caA = 0;
caB = [0 0 0 0 0];
for j = 1:N
    for i = 1:N
        caA(j,i) = lambdaij(i,j)/lambdaj(j)*Q(i, j);
        caB(j)=caB(j)+lambdaij(i,j)/lambdaj(j)*(1-Q(i,j));
    end
end
caA = caA-eye(5);
caA(1,:) = [1 0 0 0 0];
caA;
caA^-1;
caB = -caB';
caB(1)=0.49;
caj = (caA^-1)*caB

```

Листинг 3.6: Код Matlab

```

caj =
    0.1600
    0.9486
    0.8902
    0.9461
    0.9049

```

Листинг 3.7: Результат

Вычислим  $L_j$  и  $P_j$

$$p_j = \frac{\lambda_j}{\mu_j m_j}$$

$$L_j(\lambda_j, ca_j, \mu_j, cs_j) = \frac{(\frac{\lambda_j}{\mu_j})^2 (ca_j + cs_j) * g(\lambda_j, ca_j, \mu_j, cs_j)}{2(1 - \frac{\lambda_j}{\mu_j})} + \frac{\lambda_j}{\mu_j}$$

$$PI_j(\mu_j) = -V_j \frac{\partial L_j(\mu_j)}{\partial(\mu_j)}$$

Где:

$$\lambda_j = 9.1128, ca_0 = 0.16, cs_1 = 0.04$$

Для этого был написан скрипт matlab.

```

for i = 2:N
    [Lj(i-1), Pj(i-1)] = params(lambdaj(i), caj(i), m(i-1), cs(i-1));
end
Lj
Pj
L = sum(Lj)

function [ fLj, fPj ] = params( fl, fca, fm, fcs )
Lj = '(1/m)^2*(ca+csj)*exp(-2*(1-1/m)*(1-ca)^2/(3*(1/m)*(ca+csj))
    ↪ )/(2*(1-1/m))';
syms m;
syms l;
syms ca;
syms csj;
fLj = subs(Lj,l, fl);
fLj = subs(fLj,m, fm);
fLj = subs(fLj,ca, fca);
fLj = subs(fLj,csj, fcs);
fLj = vpa(fLj);

Pj = '-((1)/(1-m)^2)';
fPj = subs(Pj,l, fl);
fPj = subs(fPj,m, fm);
fPj = -1*vpa(fPj);
end

```

Листинг 3.8: Код Matlab

```

Lj =
[ 4.6255839976370720273840674915939,
    ↪ 0.36659806895060537891974885952995,
    ↪ 2.1179331569743248761799734854413,
    ↪ 0.89370855816402942385738205100272]

Pj =
[ 11.576845733984487216317150244183,
    ↪ 0.32525589689516798523377343071108,

```

$\hookrightarrow 3.1492188330322032096928472738867,$   
 $\hookrightarrow 0.94838805064508015837789082867662]$

L =

8.0038237817260317063411718875679

Листинг 3.9: Результат

Воспользуемся следующей формулой:

$$PI_j(\mu_j, (\lambda_j + \varepsilon_j)) = \max\{PI_j(\mu_j), j \in J_0\}$$

Чем выше нагрузка узла  $J$ , тем больше  $PI_j = -\frac{\partial L(\mu_j)}{\partial \mu_j}$

Для узла **M/M/1** имеем  $PI_j = -\frac{\partial L(\mu_j)}{\partial \mu_j} = \frac{\lambda_j}{(\lambda_j - \mu_j)^2}$ . Благодаря расчётам по этой формуле, можно понять в каких узла нужно увеличивать или уменьшать интенсивность входного потока.

Далее, применим следующий алгоритм:

Найти:

$$j_2 = \arg \max_{(j)} PI_j(\mu_j) ;$$

$$j_1 = \arg \min_{(j)} PI_j(\mu_j) ;$$

если:

$j_1 \in J_1$ , выполнить  $J_0 \leftarrow J_0 - \{j_1\}$ ;

$j_2 \in J_2$ , выполнить  $J_0 \leftarrow J_0 - \{j_2\}$ ;

$j_1 \notin J_1$  и  $j_2 \notin J_2$ , найти  $\Delta_1 = \min\{\Delta, \mu_{j_1} - \lambda_{j_1} - \varepsilon_{j_1}\}$  и

выполнить  $\mu_{j_2} \leftarrow \mu_{j_2} + \Delta_1$ ,  $J_1 \leftarrow J_1 \cup \{j_2\}$  и  $J_2 \leftarrow J_2 \cup \{j_1\}$ ,

идти к шагу 4.

Если  $J_0$  есть пустое множество или  $PI_{j_1} = PI_{j_2}$ ,

Как значение  $\Delta$  возьмем 0.5.

По приведенному выше алгоритму определяем множества  $J_0, J_1, J_2$ . Результаты приведены в таблице 3.2.



№	$J_0$	$J_1$	$J_2$	Действия
1	1,2,3,4	-	-	$J_1 \leftarrow 1$ $J_2 \leftarrow 2$
2	1,2,3,4	1	2	$J_1 \leftarrow 1$ $J_2 \leftarrow 2$
3	1,2,3,4	1	2	$J_1 \leftarrow 3$ $J_2 \leftarrow 2$
4	1,2,3,4	1,3	2	$J_1 \leftarrow 1$ $J_2 \leftarrow 2$
5	1,2,3,4	1,3	2	$J_1 \leftarrow 3$ $J_2 \leftarrow 4$
6	1,2,3,4	1,3	2,4	$J_1 \leftarrow 1$ $J_2 \leftarrow 2$
7	1,2,3,4	1,3	2,4	$J_0 \leftarrow J_0 - 1$ $J_0 \leftarrow J_0 - 2$ $J_1 \leftarrow 2$ $J_2 \leftarrow 1$
8	3,4	1,2,3	1,2,4	$J_1 \leftarrow 4$ $J_2 \leftarrow 3$
9	3,4	1,2,3,4	1,2,3,4	$J_0 \leftarrow J_0 - 3$ $J_0 \leftarrow J_0 - 4$ $J_1 \leftarrow 3$ $J_2 \leftarrow 4$
10	-	1,2,3,4	1,2,3,4	-

Таблица 3.2: Формирование множеств J

Результаты перераспределения мощностей представлено в таблице 3.3.

№	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	Действия
1	10	10	10	10	$\mu_2 - \Delta$ $\mu_1 + \Delta$
2	10.5	9.5	10	10	$\mu_2 - \Delta$ $\mu_1 + \Delta$

3	11	9	10	10	$\mu_2 - \Delta$ $\mu_3 + \Delta$
4	11	8.5	10.5	10	$\mu_2 - \Delta$ $\mu_1 + \Delta$
5	11.5	8	10.5	10	$\mu_4 - \Delta$ $\mu_3 + \Delta$
6	11.5	8	11	9.5	$\mu_2 - \Delta$ $\mu_1 + \Delta$
7	12	7.5	11	9.5	$\mu_1 - \Delta$ $\mu_2 + \Delta$
8	11.5	8	11	9.5	$\mu_3 - \Delta$ $\mu_4 + \Delta$
9	11.5	8	10.5	10	$\mu_4 - \Delta$ $\mu_3 + \Delta$
10	11.5	8	11	9.5	-

Таблица 3.3: Перераспределение мощностей

Пересчитаем значения  $PI_j, L_j$ . Результаты вычисления  $PI_j$  приведены в таблице 3.4 и 3.5.

№	$PI_1$	$PI_2$	$PI_3$	$PI_4$
1	11.5768	0.3252	3.1492	0.9483
2	4.7354	0.4186	3.1492	0.9483
3	2.5586	0.5589	3.1492	0.9483
4	2.5586	0.7835	1.8443	0.9483
5	1.5990	1.1769	1.8443	0.9483
6	1.5990	1.1769	1.2098	1.4138
7	1.0931	1.9623	1.2098	1.4138
8	1.5990	1.1769	1.2098	1.4138
9	1.5990	1.1769	1.8443	0.9483
10	1.5990	1.1769	1.2098	1.4138

Таблица 3.4: Пересчитанное  $PI_j$

№	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	L
1	4.6255	0.3665	2.1179	0.8937	8.0038
2	2.8172	0.4381	2.1179	0.8937	6.2669
3	1.9765	0.5347	2.1179	0.8937	5.5229
4	1.9765	0.6709	1.5434	0.8937	5.0845
5	1.4944	0.8743	1.5434	0.8937	4.8059
6	1.4944	0.8743	1.1930	1.1491	4.7109
7	1.1840	1.2051	1.1930	1.1491	4.7313
8	1.4944	0.8743	1.1930	1.1491	4.7109
9	1.4944	0.8743	1.5434	0.8937	4.8059
10	1.4944	0.8743	1.1930	1.1491	4.7109

Таблица 3.5: Пересчитанное  $L_j$  и  $L$

### 3.3 Вывод

В данной работе была произведена оптимизация ССМО, в частности перераспределение мощностей в системе, для уменьшения очереди.

Начальные значения:

$$\mu = (10, 10, 10, 10)$$

$$L = 8.0038$$

$$L_j = (4.6255, 0.3655, 2.1179, 0.8937)$$

После оптимизации:

$$\mu = (10.5, 8, 11, 9.5)$$

$$L = 4.7109$$

$$L_j = (1.4944, 0.8743, 1.1930, 1.1491)$$

Как и ожидалась, после оптимизации сети, загруженность системы понизилась.