4 Решение задачи анализа потокового графа с использованием методики GERT и алгебры потоковых графов

4.1 Условие задачи

Дано:

1. Граф GERT-сети

2. каждой дуге-работе (ij) поставлены в соответствие следующие данные:

А) Закон распределения времени выполнения работы. Будем считать его нормальным

Б) параметры закона распределения (математическое ожидание M и дисперсия D)

В) вероятность p_{ij} выполнения работы, показанная на графе.

Найти:

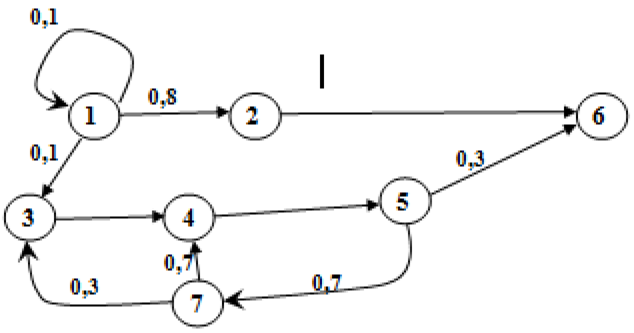
1. Вероятность выхода в завершающий узел графа (для всех вариантов узел 6)

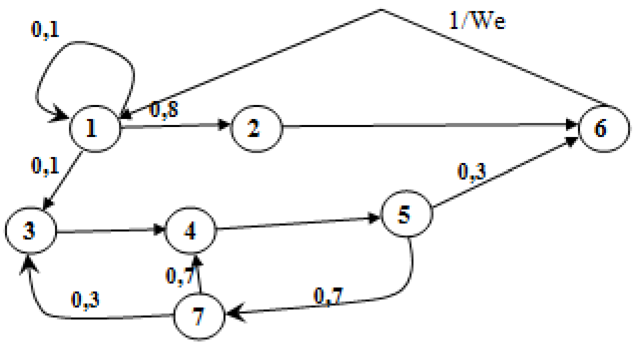
2. Математическое ожидание длительности процесса, начальные моменты всех порядков вплоть до 5-го.

3. Дисперсию времени выхода процесса в завершающий узел графа

4.2 Решение

4.2.1 Часть 1





Начало	Конец	Вероятность	Мат. ож.	Дисперсия	W-функция
1	1	0.1	30	16	0.1*exp(30*s+8*s^2)
1	2	0.8	26	36	0.8*exp(26*s+18*s^2)
1	3	0.1	25	25	0.1*exp(25*s+12.5*s^2)
2	6	1	30	25	1*exp(30*s+12.5*s^2)
3	4	1	13	25	1*exp(13*s+12.5*s^2)
4	5	1	17	9	1*exp(17*s+4.5*s^2)
5	6	0.3	28	36	0.3*exp(28*s+18*s^2)
5	7	0.7	14	36	0.7*exp(14*s+18*s^2)
7	3	0.3	32	35	0.3*exp(32*s+17.5*s^2)
7	4	0.7	22	25	0.7*exp(22*s+4.5*s^2)

Петли первого порядка:

W_{11}

$W_{12}W_{26}W_{61}$

$W_{13}W_{34}W_{45}W_{56}W_{61}$

$W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73}$

$W_{45}\ W_{57}W_{74}$

Петли второго порядка:

W_{11} и $W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73}$

W_{11} и $W_{45}\ W_{57}W_{74}$

$W_{12}W_{26}W_{61}$ и $W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73}$

$W_{12}W_{26}W_{61}$ и $W_{45}\ W_{57}W_{74}$

Уравнение Мэйсона:

$$H = 1 - W_{11} - W_{12}W_{26}W_{61} - W_{13}W_{34}W_{45}W_{56}W_{61} - W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73}$$
$$-W_{45}\ W_{57}W_{74} + W_{11} * W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73} + W_{11} * W_{45}\ W_{57}W_{74}$$
$$+W_{12}W_{26}W_{61}\ * W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73} + W_{12}W_{26}W_{61}\ * W_{45}\ W_{57}W_{74} = 0$$

$$H = 1 - W_{11} - W_{12}W_{26}(\frac{1}{W_E}) - W_{13}W_{34}W_{45}W_{56}(\frac{1}{W_E}) - W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73}$$
$$-W_{45}\ W_{57}W_{74} + W_{11} * W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73} + W_{11} * W_{45}\ W_{57}W_{74}$$
$$+W_{12}W_{26}(\frac{1}{W_E})\ * W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73} + W_{12}W_{26}(\frac{1}{W_E})\ * W_{45}\ W_{57}W_{74} = 0$$

$$1 - W_{11} - W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73} - W_{45}\ W_{57}W_{74} + W_{11} * W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73} + W_{11} * W_{45}\ W_{57}W_{74} = W_{12}W_{26}(\frac{1}{W_E}) + W_{13}W_{34}W_{45}W_{56}(\frac{1}{W_E}) - W_{12}W_{26}(\frac{1}{W_E})\ * W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73} - W_{12}W_{26}(\frac{1}{W_E})\ * W_{45}\ W_{57}W_{74}$$

Отсюда

$W_e(s)$=($W_{12}W_{26} + W_{13}W_{34}W_{45}W_{56} - W_{12}W_{26} * W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73}$-
$W_{12}W_{26}$* $W_{45}\ W_{57}W_{74}$)/($1 - W_{11} - W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73} - W_{45}\ W_{57}W_{74} + W_{11}$
$* W_{34}\ W_{45}\ W_{57}W_{73} + W_{11} * W_{45}\ W_{57}W_{74}$)

Математическое ожидание и дисперсию:

$$M_E(s) = 1 \text{ при } s = 0$$

Поскольку $W_E(s) = p_E M_E(s)$, то $p_E = W_E(0)$, откуда следует, что

$$M_E(s) = \frac{W_E(s)}{p_E} = \frac{W_E(s)}{W_E(0)}$$

Вычисляя первую и вторую производные по s функции $M_E(s)$, и, полагая s=0, находим математическое ожидание:

$$\mu_{1E} = \frac{\partial M_E(s)}{\partial s} | s = 0$$

и дисперсию:

$\sigma^2 = \mu_{2E} - [\mu_{1E}]^2$.

Вероятность выхода в завершающий узел графа:

$p_E = W_E(0)$.

Вычислим $W_E(0)$ с помощью MATLAB:

```
P11=0.1;M11=30;D11=16;
P12=0.8;M12=26;D12=36;
P13=0.1;M13=25;D13=25;
P26=1;M26=30;D26=25;
P34=1;M34=13;D34=25;
P45=1;M45=17;D45=9;
P56=0.3;M56=28;D56=36;
P57=0.7;M57=14;D57=36;
P73=0.3;M73=32;D73=35;
P74=0.7;M74=22;D74=25;

syms s
W11 = P11*exp(M11*s +D11/2*s^2);
W12 = P12*exp(M12*s +D12/2*s^2);
W13 = P13*exp(M13*s +D13/2*s^2);
W26 = P26*exp(M26*s +D26/2*s^2);
W34 = P34*exp(M34*s +D34/2*s^2);
W45 = P45*exp(M45*s +D45/2*s^2);
W56 = P56*exp(M56*s +D56/2*s^2);
W57 = P57*exp(M57*s +D57/2*s^2);
W73 = P73*exp(M73*s +D73/2*s^2);
W74 = P74*exp(M74*s +D74/2*s^2);

We=(W12*W26+W13*W34*W45*W56-W12*W26*W34*W45*W57*W73-W12*W26*W45*W57*W74)/
1- W11-W34*W45*W57*W73-W45*W57*W74+W11*W34*W45*W57*W73+W11*W45*W57*W74)
We = simplify(We)
%Wc = simplify(Wc)
%Wz = simplify(Wz)
We0 = subs(We, 's', 0)   % We(0)
%Wc0 = subs(Wc, 's', 0)
%Wz0 = subs(Wz, 's', 0)
%
% % Нахождение мат. ожидания и дисперсии
%
Me = We/We0;

% Нахождение производной 1-го порядка при s=0
m1 = diff(Me, 's');
m1 = subs(m1, 's', 0)    % Замена символа s на 0 в выражении m1

% Нахождение производной 2-го порядка при s=0
m2 = diff(Me, 's',2);
m2=subs(m2, 's', 0)      % Замена символа s на 0 в выражении m2

% Нахождение дисперсии времени выхода процесса в завершающий узел графа
D = m2 - (m1)^2
```

Были получены следующие результаты:

```
We0 = 1


m1 =


  78.1541



m2 =
```

1.32489e+04   D =6.1125e+03

4.2.2 Часть 2

В данном методе функция We будет вычисляться:

$$M_{1n1} = \frac{1}{\omega_{n1}} = \frac{\dfrac{\partial \det(\bar{A})}{\partial \omega_{n1}}}{\det(\bar{A}\,|_{\omega_{n1}=0})}$$

Где $\bar{A} = I_n - Q^{-T}, A = I - Q^T, q_{ij}(s) = \ p_{ij} m_{ij}(s)$

Вычислим с помощью MATLAB:

```
P11=0.1;M11=30;D11=16;
P12=0.8;M12=26;D12=36;
P13=0.1;M13=25;D13=25;
P26=1;M26=30;D26=25;
P34=1;M34=13;D34=25;
P45=1;M45=17;D45=9;
P56=0.3;M56=28;D56=36;
P57=0.7;M57=14;D57=36;
P73=0.3;M73=32;D73=35;
P74=0.7;M74=22;D74=25;

syms s
W11=P11*exp(M11*s+D11/2*s^2);
W12=P12*exp(M12*s+D12/2*s^2);
W13=P13*exp(M13*s+D13/2*s^2);
W26=P26*exp(M26*s+D26/2*s^2);
W34=P34*exp(M34*s+D34/2*s^2);
W45=P45*exp(M45*s+D45/2*s^2);
W56=P56*exp(M56*s+D56/2*s^2);
W57=P57*exp(M57*s+D57/2*s^2);
W73=P73*exp(M73*s+D73/2*s^2);
W74=P74*exp(M74*s+D74/2*s^2);
syms s
syms w61

Q= [ W11 W12 W13 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 W26 0;
0 0 0 W34 0 0 0;
0 0 0 0 W45 0 0;
0 0 0 0 0 W56 W57;
w61 0 0 0 0 0 0;
0 0 W73 W74 0 0 0]
det_A = det (eye (size(Q,1)) - transpose(Q))
det_dw= diff(det_A , w61)
det2_A=subs(det_A,w61,0)
We=det_dw / det2_A;
We = simplify(We)
We0 = subs(We, 's', 0)
We0 = - We0
% % нахождение производной 1-ого порядка при s=0
Me = We/We0;
m1 = diff(Me, 's');
m1 = subs(m1, 's', 0) %  Замена символа s в выражении m2
m2 = diff(Me, 's',2);
m2=subs(m2, 's', 0) %  Замена символа s в выражении m2
% Нахождение дисперсии времени выхода процесса в завершающий узел графа
D = m2 - (m1)^2
```

Были получены следующие результаты:

```
We0 = 1


m1 =


  78.1541



m2 =


  1.32489e+04
```

D =6.1125e+03

Полученные результаты совпали с результатами, полученными с помощью предыдущего метода.

4.3 Выводы:

В ходе работы были найдены все необходимые параметры:

- Вероятность выхода в завершающий узел графа $P_E = W_E(0) = 1$
- Математическое ожидание длительности процесса $M_E = 77.8630$
- Начальные моменты всех порядков вплоть до 5-го:

$$\mu_1 = 78.1541;$$
$$\mu_2 = 1.32489e + 04;$$
$$\mu_3 = 4.84801e + 06;$$
$$\mu_4 = 3.1795\,e{+}09$$
$$\mu_5 = 2.5852e + 12;$$

- Дисперсию времени выхода процесса в завершающий узел графа

D = 6.1125e+03

Заключение

В работе были рассмотрены различные математические модели для решения задачи оптимального решения.

При решении задачи стохастического программирования случайный характер изменения ограничения b_4 мало влияет на оптимальный план производства; это влияние проявляется только при малых $\alpha \approx 0{,}1\ldots0{,}5$; т.е. при значительном снижении ресурса времени работы фабрики.

Таким образом, при обычной практической ситуации – действии случайных факторов – решение задачи стохастического программирования позволяет оценить, насколько изменятся значения критериев оптимальности по сравнению с детерменированными. Это позволяет минимизировать риски.

При решении задачи анализа потокового графа было применено два подхода: с использование методики GERT и с использованием алгебры потоковых графов. По итогу, оба метода выдали верный результат(прохождение графа).