Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №1

Курс: «Методы оптимизации и принятия решений»

Тема: «Многокритериальная оптимизация»

Выполнил студент:

Ерниязов Тимур Ертлеуевич
Группа: 13541/2

Проверил:

Сиднев Александр Георгиевич

Санкт-Петербург
2019 г.

Содержание

Лабораторная работа №1

1.1 Цель работы

Научиться решать задачи по многокритериальной оптимизации.

1.2 Программа работы

1. Осуществить переход от многокритериальной задачи к однокритериальной с использованием следующих подходов:
   - Выделение главного критерия
   - Свертка критериев (аддитивная и мультипликативная)
   - Максимин или минимакс (он же метод максиминной свертки)
   - Метод последовательных уступок
   - fgoalattain
   - Ведение метрики в пространстве критериев
2. Решить задачу стохастического программирования для одной из однокритериальных задач, превратив детерминированное ограничение в вероятностное по схеме

   $$P(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} - b_{ij} \leq 0) \geq a_i$$

   Менять a_i в следующем диапазоне $0.1 \leq a_i \leq 0.9$.

   Считать случайной величиной b_i или элементы $a_{ij}i$-й строки матрицы A (по выбору).

   Разрешается изменить формулировку исходной задачи, придумать собственную задачу, найти другую аналогичную задачу, которая могла бы быть сформулирована как многокритериальная.

1.3 Индивидуальное задание

Задача 7

Студент 5 курса Олег 28го декабря возвращается из предновогодней поездки к родственникам в братское государство Украина с важным заданием от студентов своего потока: закупить провизии для совместного празднования всем потоком Нового Года.

В ходе жарких споров и голосований был составлен список провианта, который должен купить Олег. Так как Олег, подобно большинству студентов, ленив и делает все в последний момент, он закупается в день уезда в продуктовом магазине неподалеку от бабушкиной квартиры. Естественно, в магазине ему удалось найти не все продукты из списка.

Вот провиант, который можно купить:

Студенческий совет выработал следующие правила покупки провианта:

- Эффект, прибавленный к вкусу, должен быть максимизирован.
- Последствия следует минимизировать.
- Необходимо купить не более 3 литров водки и не более 5 литров коньяка (т.к. Олег учится на ФЭМе и у него очень мало парней в группе).

Провиант	Эффект	Последствия	Вкус	Масса	Цена
Шампанское	0.5	0.9	0.3	0.3	50
Водка	2	8	0	1	30
Свежавыжитый сок	0	0	5	1	30
Коктейли	0	0	4	1	50
Коньяк	5	2	1	1	70
Салаты	0	0	5	0.5	20

Помимо этого, девушки в совете выдвинули следующее условие:

- Необходимо купить как минимум 3 литра свежевыжатого сока и 2 литра вкусных безалкогольных коктейлей (да-да, это же девушки).

Естественно, необходимо потратить как можно меньше денег (гривен).

Следующая проблема заключается в том, что Олег везет весь провиант через границу. 25 литров Олег готов распихать по соседям, но если придется везти большее количество провианта, Олегу придется дать взятку украинским пограничникам в размере 100 гривен за каждый лишний литр. Если Олег возьмет с собой больше 100 литров, его арестуют как контрабандиста.

1.3.1 Математическая модель задачи многокритериальной оптимизации

Введем обозначения:

- x_1 - количество шампанского
- x_2 - количество водки
- x_3 - количество сока
- x_4 - количество коктейлей
- x_5 - количество коньяка
- x_6 - количество салатов

Критерии:

1. Эффект плюс вкус должен быть максимизирован

$$f_1 = 0.8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_{5+}5x_6 -> max$$

2. Последствия минимизированы

$$f_2 = 0.9x_1 + 8x_2 + 2x_5 -> min$$

3. Необходимо потратить как можно меньше денег

Вес провианта меньше 25

$$f_3 = 50x_1 + 30x_2 + 30x_2 + 50x_4 + 70x_5 + 20x_6 -> min$$

Вес провианта меньше или равен 25

$$f_3 = 50x_1 + 30x_2 + 30x_2 + 50x_4 + 70x_5 + 20x_6 + 100(0.3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 0.5x_6 - 25)$$

Ограничения:

(a1) по общему весу провианта

$$0.3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 0.5x_6 < 100$$

2. по весу каждого провианта

$$0 \le x_1 \le 100$$
$$0 \le x_2 \le 3$$
$$3 \le x_3 \le 100$$
$$2 \le x_4 \le 100$$
$$0 \le x_5 \le 5$$
$$0 \le x_6 \le 100$$

Запишем все в систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + X_5 + x_6 < 100 \\ 0 \le x_1 \le 100 \\ 0 \le x_2 \le 3 \\ 3 \le x_3 \le 100 \\ 2 \le x_4 \le 100 \\ 0 \le x_5 \le 5 \\ 0 \le x_6 \le 100 \end{cases}$$

1.3.2 Поиск оптимумов частных критериев

Найдем оптимумы каждой из целевых функций независимо от других. Для этого необходимо решить три задачи однокритериальной оптимизации.

Для решение данной задачи, был использован MATLAB.

```
function tim_1
clc; clearvars

f1 = @(X) 0.8*X(1)+2*X(2)+5*X(3)+4*X(4)+6*X(5)+5*X(6); %->max
f2 = @(X) 0.9*X(1)+8*X(2)+2*X(5); %->min
function [f3] = f3(X)
if (0.3*X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+0.5*X(6)) <= 25
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6); %->min
else
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6) +100*(0.3*X(1)+0.5*X(6)+X(2)+X(3)
    ↪ +X(4)+X(5)-25); %->min
end
end

z1 = @(N) -f1(N);

A = [0.3,1,1,1,1,0.5];
b = 100;

lb = [0;   0; 3;   2;   0; 0];
ub = [100; 3; 100; 100; 5; 100];

[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb,ub)
[x_2, f2_opt] = fmincon(f2, lb, A, b, [], [], lb,ub);
[x_3, f3_opt] = fmincon(@f3, lb, A, b, [], [], lb,ub);

fprintf('Эффект + вкус максимизирован\n');
fprintf('x1 = %.4f (шампанское)\nx2 = %.4f (водка)\nx3 = %.4f (сок)\nx4 = %.4f (коктей
    ↪ ль)\nx5 = %.4f (коньяк)\nx6 = %.4f (салат)\n' , x_1 );
fprintf('f1 = %.4f\n\n', -z1_opt);
fprintf('Последствия минимизированы\n');
fprintf('x1 = %.4f (шампанское)\nx2 = %.4f (водка)\nx3 = %.4f (сок)\nx4 = %.4f (коктей
    ↪ ль)\nx5 = %.4f (коньяк)\nx6 = %.4f (салат)\n' , x_2 );
fprintf('f1 = %.4f\n\n', f2_opt);
fprintf('Расход минимизирован\n');
fprintf('x1 = %.4f (шампанское)\nx2 = %.4f (водка)\nx3 = %.4f (сок)\nx4 = %.4f (коктей
    ↪ ль)\nx5 = %.4f (коньяк)\nx6 = %.4f (салат)\n' , x_3 );
```

```
fprintf('f1 = %.4f\n', f3_opt);
end
```

Получили следующие значения:

```
Эффект + вкус максимизирован
x1 = 0.0000 (шампанское)
x2 = 0.0000 (водка)
x3 = 43.0000 (сок)
x4 = 2.0000 (коктейль)
x5 = 5.0000 (коньяк)
x6 = 100.0000 (салат)
f1 = 753.0000

Последствия минимизированы
x1 = 0.0000 (шампанское)
x2 = 0.0000 (водка)
x3 = 4.1414 (сок)
x4 = 3.1414 (коктейль)
x5 = 0.0000 (коньяк)
x6 = 1.1414 (салат)
f1 = 0.0000

Расход минимизирован
x1 = 0.0000 (шампанское)
x2 = 0.0000 (водка)
x3 = 3.0000 (сок)
x4 = 2.0000 (коктейль)
x5 = 0.0000 (коньяк)
x6 = 0.0000 (салат)
f1 = 190.0001
```

Как видно, три отдельных критерия работают плохо, так как задача минимизировать расход приводит к тому, что можно ничего не покупать (кроме минимума для девочек).

1.4 Переход от многокритериальной задачи к однокритериальной

1.4.1 Выделение главного критерия

Один из критериев - главный - имеет существенно более высокий приоритет, чем все остальные, но по остальным критериям вариант тоже не должен быть слишком плох. Пусть главный критерий - первый, следовательно, для оставшихся целевых функций необходимо указать нижние границы. Для того, чтобы функция включала в себя провиант с последствиями, сделаем ограничения в последствиях чуть больше 30. Установим бюдет равный 5000 гривн.

В соответствии с изменениями скрипт был дополнен ограничениями.

```
function tim_1
clc; clearvars

f1 = @(X) 0.8*X(1)+2*X(2)+5*X(3)+4*X(4)+6*X(5)+5*X(6); %->max
z1 = @(N) -f1(N);
sum = 0;


A = [0.3,1,1,1,1,0.5;
    -0.9,-8,0,0,-2,0];
b = [100; -50];

lb = [0;   0; 3;   2;   0; 0];
ub = [100; 3; 100; 100; 5; 100];

function [ctmp,ceqtmp] = f3(X)
    ceqtmp = [];
if (0.3*X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+0.5*X(6)) <= 25
ctmp = -5000+(50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6)); %->min
else
```

```
ctmp = -5000+(50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6) +100*(0.3*X(1)+0.5*X(6)+
    ↪ X(2)+X(3)+X(4)+X(5)-25)); %->min
end
sum= ctmp+5000;
end

[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb,ub, @f3);

fprintf('Эффект + вкус максимизирован\n');
fprintf('x1 = %.4f (шампанское)\nx2 = %.4f (водка)\nx3 = %.4f (сок)\nx4 = %.4f (коктей
    ↪ ль)\nx5 = %.4f (коньяк)\nx6 = %.4f (салат)\n' , x_1 );
fprintf('f1 = %.4f\n\n', -z1_opt);
fprintf('Стоимость = %.4f\n\n', sum );
fprintf('Вес = %.4f\n\n', 0.3*x_1(1)+1*x_1(2)+1*x_1(3)+1*x_1(4)+1*x_1(5)+0.5*x_1(6));
end
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
Эффект + вкус максимизирован
x1 = 17.7778 (шампанское)
x2 = 3.0000 (водка)
x3 = 3.0000 (сок)
x4 = 2.0000 (коктейль)
x5 = 5.0000 (коньяк)
x6 = 59.2540 (салат)
f1 = 369.4921

Стоимость = 5000.0000
Вес = 47.9603
```

Все ограничения учтены.

1.4.2 Свертка критериев

Аддитивная свертка критериев

Для использования метода аддитивной свертки необходимо выполнить нормировку критериев, с тем чтобы сделать их значения соизмеримыми, а единицы измерения – безразмерными. Выполним нормировку следующим образом:

$$\overline{z_1} = \frac{z_1}{|z_1^{min}|} \tag{1.1}$$

$$\overline{z_2} = \frac{f_2}{|f_2^{min}|} \tag{1.2}$$

$$\overline{f_3} = \frac{z_3}{|z_3^{min}|} \tag{1.3}$$

Формула аддитивной свертки имеет вид:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i(x), 0 < \lambda_i < 1, \sum_i \lambda_i = 1, \tag{1.4}$$

где $f_i(x)$ - критерии оптимальности, r – их общее число, а λ_i - параметры важности.

```
function tim_1
clc; clearvars

f1 = @(X) 0.8*X(1)+2*X(2)+5*X(3)+4*X(4)+6*X(5)+5*X(6); %->max
f2 = @(X) 0.9*X(1)+8*X(2)+2*X(5); %->min
function [f3] = f3(X)
if (0.3*X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+0.5*X(6)) <= 25
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6); %->min
else
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6) +100*(0.3*X(1)+0.5*X(6)+X(2)+X(3)
    ↪ +X(4)+X(5)-25); %->min
end
```

```
end

z1 = @(N) -f1(N);

A = [0.3,1,1,1,1,0.5];
b = 100;

lb = [0;   0; 3;   2;   0; 0];
ub = [100; 3; 100; 100; 5; 100];

[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb,ub);
[x_2, f2_opt] = fmincon(f2, lb, A, b, [], [], lb,ub);
[x_3, f3_opt] = fmincon(@f3, lb, A, b, [], [], lb,ub);

z1_norm = @(N) z1(N)/abs(z1_opt);
f2_norm = @(N) f2(N)/abs(f2_opt);
z3_norm = @(N) f3(N)/abs(f3_opt);

f = @(N) 0.7*z1_norm(N) +0.1*f2_norm(N) + 0.2*z3_norm(N);

[N, opt] = fmincon(f, lb, A, b, [], [], lb,ub)
-z1(N)
f2(N)
f3(N)
end
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
N =

    0.0207
    0.0000
    4.0657
    3.0418
    0.0170
    1.0798


opt =

   1.7604e+04


ans =

   38.0133


ans =

    0.0528


ans =

  297.8818
```

Результат:

- 38 - показатель эффекта + вкуса
- 0,0528 - показатель последствий
- 297.88 гривны - стоимость покупки

Метод не плох, но опять минимизация стоимости покупки хоть и с коэффициентом 0.2 очень сильно влияет на оптимизацию и в результате получаеться, что лучше вообще ничего не покупать.

Мультипликативная свертка критериев

Формула мультипликативной свертки имеет вид:

$$F(x) = \prod_{i=1}^{r} f_i(x)^{\lambda_i} \tag{1.5}$$

где $f_i(x)$ - критерии оптимальности, r - их общее число, а λ_i - показатели важности. Нормировка уже была произведена в аддитивной свертки, в итоге получим следующую задачу однокритериальной оптимизации.

```
clc; clearvars

f1 = @(X) 0.8*X(1)+2*X(2)+5*X(3)+4*X(4)+6*X(5)+5*X(6); %->max
f2 = @(X) 0.9*X(1)+8*X(2)+2*X(5); %->min


z1 = @(N) -f1(N);

A = [0.3,1,1,1,1,0.5];
b = 100;

lb = [0;   0; 3;   2;   0; 0];
ub = [100; 3; 100; 100; 5; 100];

[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb,ub);
[x_2, f2_opt] = fmincon(f2, lb, A, b, [], [], lb,ub);
[x_3, f3_opt] = fmincon(@f3, lb, A, b, [], [], lb,ub);

z1_norm = @(N) z1(N)/abs(z1_opt);
f2_norm = @(N) f2(N)/abs(f2_opt);
z3_norm = @(N) f3(N)/abs(f3_opt);

f = @(N) 0.8*z1_norm(N) +0.1*f2_norm(N) + 0.1*z3_norm(N);

[N, opt] = fmincon(f, lb, A, b, [], [], lb,ub)
-z1(N)
f2(N)
f3(N)

fprintf('Вес = %.4f\n\n', 0.3*N(1)+1*N(2)+1*N(3)+1*N(4)+1*N(5)+0.5*N(6));

function [ff] = f3(X)
if (0.3*X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+0.5*X(6)) <= 25
ff = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6); %->min
else
ff = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6) +100*(0.3*X(1)+0.5*X(6)+X(2)+X(3)
    ↪ +X(4)+X(5)-25); %->min
end
end
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
N =

     0.020719
    2.475e-05
         4.08
       3.0674
     0.016987
       1.0794


opt =

        17603
```

```

ans =

       38.185


ans =

     0.052818


ans =

       299.58

Bec = 7.7103
```

Результат:

- 38.185 - показатель эффекта + вкуса
- 0.052818 - последствия
- 299.58 гривн - стоимость

Свертка привела к неплохим результатам.

1.4.3 Минимакс (максимин)

Максиминную свертку представим в следующем виде: $C_i(a) = \min w_i C_i(a)$

Решение a^* является наилучшим, если для всех a выполняется условие $C(a^*) \geq C(a)$, или $a^* = \arg\max C(a) = \arg\max \min w_i C_i(a)$.

Для реализации максиминной свертки необходимо в fminimax передавать функции обратные целевым (функция funminmax). Так как оцениваемые показатели разновелики, необходимо нормировать критерии. Что было произведено ранее.

```
function tim_1
clc; clearvars
format long g;
f1 = @(X) 0.8*X(1)+2*X(2)+5*X(3)+4*X(4)+6*X(5)+5*X(6); %->max
f2 = @(X) 0.9*X(1)+8*X(2)+2*X(5); %->min
function [f3] = f3(X)
if (0.3*X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+0.5*X(6)) <= 25
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6); %->min
else
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6) +100*(0.3*X(1)+0.5*X(6)+X(2)+X(3)
    ↪ +X(4)+X(5)-25); %->min
end
end

z1 = @(N) -f1(N);
A = [0.3,1,1,1,1,0.5];
b = 100;

lb = [0;   0; 3;   2;   0; 0];
ub = [100; 3; 100; 100; 5; 100];

[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb,ub);
[x_2, f2_opt] = fmincon(f2, lb, A, b, [], [], lb,ub);
[x_3, f3_opt] = fmincon(@f3, lb, A, b, [], [], lb,ub);

[x, f] = fminimax (@funminmax, lb, A, b, [], [], lb,ub)

function f = funminmax (X)
f(1) = -(0.8*X(1)+2*X(2)+5*X(3)+4*X(4)+6*X(5)+5*X(6))/z1_opt;
f(2) = -(0.9*X(1)+8*X(2)+2*X(5))/f2_opt;
```

```
f(3) = -(50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6) +100*(0.3*X(1)+0.5*X(6)+X(2)+
    ↪ X(3)+X(4)+X(5)-25))/f3_opt;

end
f1(x)
f2(x)
f3(x)
end
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
x =

      0.42106
      0.68421
       3.6841
       2.7896
      0.89474
      0.36843


f =

     0.051122   -2.5469e+07       6.8531


ans =

       38.495


ans =

       7.6421


ans =

       361.58
```

Результат:

- 38.495 - показатель Э+В
- 7.6421 - показатель последствий
- 361.58 гривн - стоимость

1.4.4 Метод последовательных уступок

Для решения данной задачи была выбрана уступка = 10%. Предположим, что критерии пронумерованы в следующем порядке важности:

$$f_1 > f_3 > f_2$$

Для первого критерия уже решена задача поиска оптимального значения в п 1.2.1. То есть:

$$753 * 0.9 = 677.7$$

```
function tim_1
clc; clearvars
format short g;
f1 = @(X) 0.8*X(1)+2*X(2)+5*X(3)+4*X(4)+6*X(5)+5*X(6); %->max
function [f3] = f3(X)
if (0.3*X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+0.5*X(6)) <= 25
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6); %->min
else
```

```
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6) +100*(0.3*X(1)+0.5*X(6)+X(2)+X(3)
    ↪ +X(4)+X(5)-25); %->min
end
end

z1 = @(N) -f1(N);
A = [0.3,1,1,1,1,0.5;
     -0.8,-2,-5,-4,-6,-5];
b = [100;-677.7];

lb = [0;   0; 3;   2;   0; 0];
ub = [100; 3; 100; 100; 5; 100];

[x_3, f3_opt] = fmincon(@f3, lb, A, b, [], [], lb,ub)
f1(x_3)
end
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
x_3 =

   1.9893e-06
   4.9126e-07
        33.94
            2
   4.7891e-07
          100


f3_opt =

       9212.2


ans =

        677.7
```

В соответствии с полученным значением введем ограничение для второго критерия.

$$9212.2 * 0.9 = 8290.98$$

Ограничения критерия выглядит следующим образом:

```
function tim_1
clc; clearvars
format short g;
f1 = @(X) 0.8*X(1)+2*X(2)+5*X(3)+4*X(4)+6*X(5)+5*X(6); %->max
f2 = @(X) 0.9*X(1)+8*X(2)+2*X(5); %->min
function [f3] = f3(X)
if (0.3*X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+0.5*X(6)) <= 25
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6); %->min
else
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6) +100*(0.3*X(1)+0.5*X(6)+X(2)+X(3)
    ↪ +X(4)+X(5)-25); %->min
end
end

A = [0.3,1,1,1,1,0.5;
     -0.8,-2,-5,-4,-6,-5;
     -0.9,-8,0,0,-2,0];
b = [100;-677.7;-8290.98];

lb = [0;   0; 3;   2;   0; 0];
ub = [100; 3; 100; 100; 5; 100];

[x_3, f3_opt] = fmincon(@f3, lb, A, b, [], [], lb,ub)
```

```
f1(x_3)
f2(x_3)
end
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
x_2 =

          100
            3
       17.936
       16.302
            5
       25.791


f2_opt =

          124


ans =

       399.84


ans =

        13322
```

Результат:

- 399.84 - показетль Э+В
- 124 - показатель последствий
- 13322 гривны - стоимость

1.4.5 Метод достижения цели (fgoalattain)

Fgoalattain решает задачу достижения цели, которая является одной из формулировок задач для векторной оптимизации. x = fgoalattain(fun, x_0, goal, weight, ...):

- fun – целевая функция,
- x_0 – начальные значения,
- goal – целевые значения,
- weight – веса.

Пусть goal = $(z_1^{min}, f_2^{min}, z_3^{min})$, w = $(|z_1^{min}|, |f_2^{min}|, |z_3^{min}|)$. Тогда скрипт для решения задачи будет выглядеть следующим образом:

```
function tim_fgoalattain
clc; clearvars

f1 = @(X) 0.8*X(1)+2*X(2)+5*X(3)+4*X(4)+6*X(5)+5*X(6); %->max
f2 = @(X) 0.9*X(1)+8*X(2)+2*X(5); %->min
function [f3] = f3(X)
if (0.3*X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+0.5*X(6)) <= 25
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6); %->min
else
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6) +100*(0.3*X(1)+0.5*X(6)+X(2)+X(3)
    ↪ +X(4)+X(5)-25); %->min
end
end
```

```
z1 = @(N) -f1(N);

% Ôóíêöèîíàëüíûå îãðàíè÷åíèÿ
A = [0.3,1,1,1,1,0.5];
b = 100;

% Ïàðàìåòðè÷åñêèå îãðàíè÷åíèÿ
lb = [0;   0; 3;   2;   0; 0];
ub = [100; 3; 100; 100; 5; 100];


% Ïîèñê îïòèìóìà ÷àñòíûõ êðèòåðèåâ
[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb,ub)
[x_2, f2_opt] = fmincon(f2, lb, A, b, [], [], lb,ub);
[x_3, f3_opt] = fmincon(@f3, lb, A, b, [], [], lb,ub);

f = @(N) [z1(N), f2(N), f3(N)];
goal = [z1_opt, f2_opt, f3_opt];
w = abs(goal);
[N, f_opt, af] = fgoalattain(f, lb, goal, w, A, b, [], [], lb,ub)
end
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
N =

   2.0803e-09
  -8.1257e-21
       4.9887
       3.5609
  -4.5613e-20
       1.9944


f_opt =

      -49.159   1.8723e-09        367.6


af =

      0.93472
```

Результат:

- 49 - показатель Э+В
- 0.0000000019 - показатель последствий
- 367 гривны - стоимость

Результаты fgoalattain на 93 процента хуже цели.

1.4.6 Введение метрики в пространстве критериев

Для перехода к однокритериальной задаче оптимизации методом введения метрики в пространстве целевых функций необходимо определить координаты «идеальной» точки $a = (f_1^*, f_2^*, ..., f_r^*)$, где $f_i = minf_i(x)$. Эти значения уже были получены в п. 1.2.1, и поэтому:

Введем в пространстве критериев метрику в виде евклидова расстояния:

$$p(y,a) = [\sum_{i=1}^{r}(a_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{1.6}$$

Тогда за целевую функцию (обобщенный критерий), с учётом необходимости нормировки, можно взять выражение:

$$f = \sum_{i=1}^{r}(\frac{a_i - f_i}{f_i^*})^2 = \sum_{i=1}^{r}(1 - \frac{f_i}{f_i^*})^2 \tag{1.7}$$

Таким образом, получаем следующую задачу оптимизации:

$$f = (1 - \frac{z_1}{z_1^{min}})^2 + (1 - \frac{z_2}{z_2^{min}})^2 + (1 - \frac{f_3}{f_3^{min}})^2 \tag{1.8}$$

```
function tim_8
clc; clearvars

f1 = @(X) 0.8*X(1)+2*X(2)+5*X(3)+4*X(4)+6*X(5)+5*X(6); %->max
f2 = @(X) 0.9*X(1)+8*X(2)+2*X(5); %->min
function [f3] = f3(X)
if (0.3*X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+0.5*X(6)) <= 25
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6); %->min
else
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6) +100*(0.3*X(1)+0.5*X(6)+X(2)+X(3)
    ↪ +X(4)+X(5)-25); %->min
end
end

z1 = @(N) -f1(N);

% Ôóíêöèîíàëüíûå îãðàèœåíèß
A = [0.3,1,1,1,1,0.5];
b = 100;

% Ïàðàìåòðèœåñêèå îãðàíèœåíèß
lb = [0;   0; 3;   2;   0; 0];
ub = [100; 3; 100; 100; 5; 100];


% Ïîèñê îïòèìóìà œàñòíûõ êðèòåðèåâ
[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb,ub)
[x_2, f2_opt] = fmincon(f2, lb, A, b, [], [], lb,ub);
[x_3, f3_opt] = fmincon(@f3, lb, A, b, [], [], lb,ub);

f = @(N) (1-z1(N)/z1_opt)^2+(1-f2(N)/f2_opt)^2+(1-f3(N)/f3_opt)^2;
[N, f_opt] = fmincon(f, lb, A, b, [], [], lb, ub)
f1(N)
f2(N)
f3(N)
end
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
N =

     0.018152
   0.00019544
        3.994
        2.994
     0.018675
      0.99437


f_opt =

   3.3906e+10


ans =

       37.045


ans =

      0.05525
```

```
ans =

      291.63
```

Результат:

- 37.045 - показатель Э+В
- 0.05525 - показатель последствий
- 291.63 гривны - стоимость

1.5 Оценка Парето-оптимальности полученных решений

Для того чтобы уменьшить количество альтернатив, среди которых лицо, принимающее решение (ЛПР), должно сделать выбор, можно выделить множество Парето среди всех полученных решений. Для этого была составлена таблица и построен график.

Метод	f_1	f_2	f_3
Выделение главного критерия	369.4921	50	5000
Аддитивная свертка	38	0.0528	297.88
Мультипликативная свертка	38.185	0.052818	299.58
Минимакс	38.495	7.6421	361.58
Метод последовательных уступок	399.84	124	13322
fgoalattain	49	0	367
Введение метрики в пространстве критериев	37.045	0.055	291.63

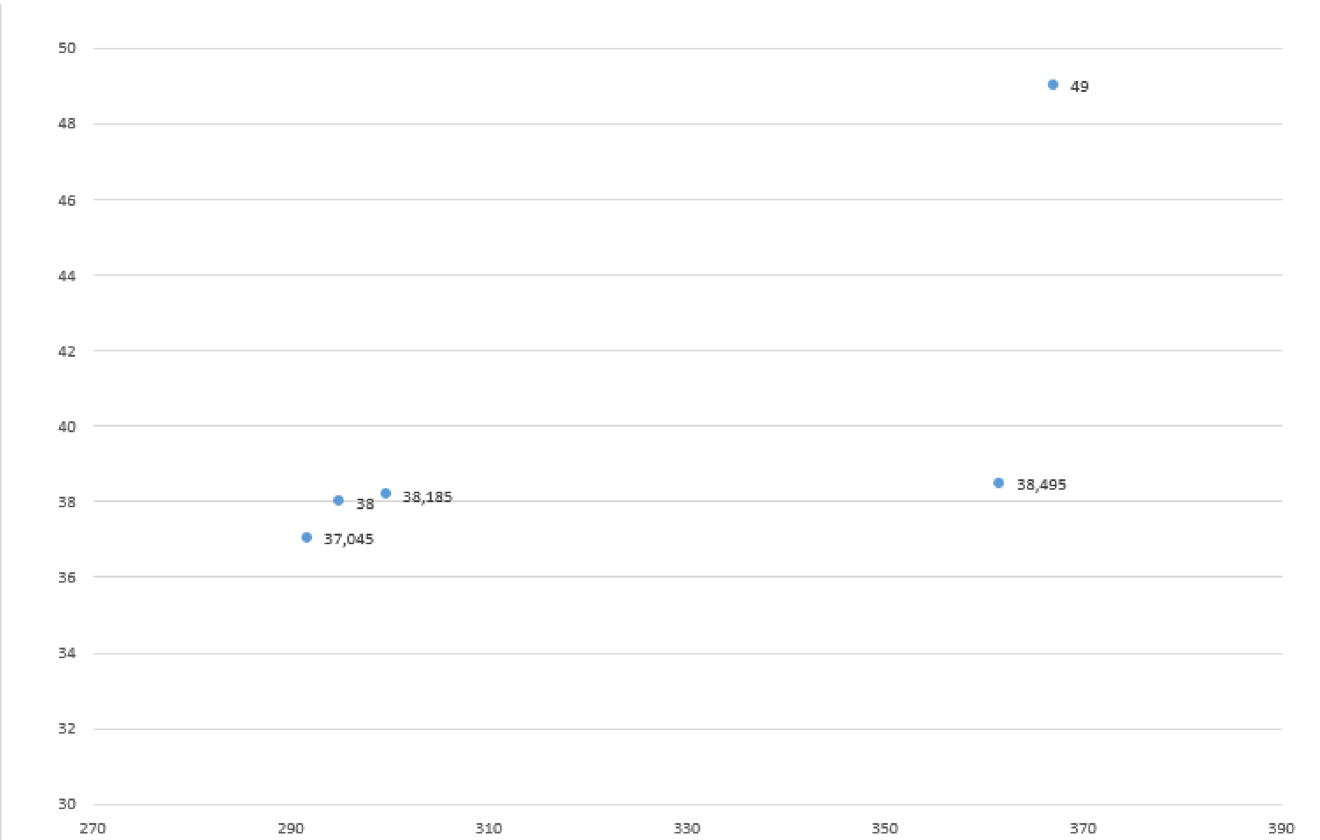

Рис. 1.1: Оценки от полученных решений на плоскости критериев: красным выделено множество Парето

Паррето-оптимальным являеться точка 49;367 (fgoalattain показал лучшее решение). В графике не были учетны точки выделения главного критерия и метода последовательных уступков.

1.6 Решение задачи стохастического программирования

Рассмотрим задачу стохастического программирования на основе задачи однокритериальной оптимизации, которая была получена из исходной методом введения метрики в пространстве критериев.

Преобразуем ограничение системы:

$$0.3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 0.5x_6 < 100$$

$$M(\alpha_1) = 0.3, M(\alpha_2) = 1, M(\alpha_3) = 1, M(\alpha_4) = 1, M(\alpha_5) = 1, M(\alpha_6) = 0.5$$
$$D(\alpha_1) = 0.15, D(\alpha_2) = 0.5, D(\alpha_3) = 0.5, D(\alpha_4) = 0.5, D(\alpha_5) = 0.5, D(\alpha_6) = 0.25$$

Решение задачи представлено как скрипт в программе Matlab

```
function tim_8
clc; clearvars

f1 = @(X) 0.8*X(1)+2*X(2)+5*X(3)+4*X(4)+6*X(5)+5*X(6); %->max
f2 = @(X) 0.9*X(1)+8*X(2)+2*X(5); %->min
function [f3] = f3(X)
if (0.3*X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)+0.5*X(6)) <= 25
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6); %->min
else
f3 = 50*X(1)+30*X(2)+30*X(3)+50*X(4)+70*X(5)+20*X(6) +100*(0.3*X(1)+0.5*X(6)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)-25); %->min
end
end

function [c, ceq] = nonlin(N)

  c = m1*N(1)+m2*N(2) + m3*N(3)+m4*N(4)+m5*N(5)+m6*N(6) + K*sqrt(d1*N(1)^2 + d2*N(2)^2 + d3*N(3)^2 + d4*N(4)^2+ d5*N(5)^2+ d6*N(6)^2) - 100;
 ceq = [];
end

z1 = @(N) -f1(N);

% Ôóíêöèîíàëüíûå îãðàèœåíèß
A = [0.3,1,1,1,1,0.5];
b = 100;

% Ïàðàìåòðèœåñêèå îãðàíèœåíèß
lb = [0;   0; 3;   2;   0; 0];
ub = [100; 3; 100; 100; 5; 100];

% Ïîèñê îïòèìóìîâ œàñòíûõ êðèòåðèåâ
[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb,ub);
[x_2, f2_opt] = fmincon(f2, lb, A, b, [], [], lb,ub);
[x_3, f3_opt] = fmincon(@f3, lb, A, b, [], [], lb,ub);

f = @(N) (1-z1(N)/z1_opt)^2+(1-f2(N)/f2_opt)^2+(1-f3(N)/f3_opt)^2;

options = optimoptions('fmincon','Display','none');

alpha = 0.1:0.1:0.9;
Ka = icdf('Normal', alpha, 0, 1);
global K
global m1; global m2; global m3; global m4;global m5; global m6
global d1; global d2; global d3; global d4;global d5;global d6
m1=0.3;m2=1;m3=1;m4=1;m5=1;m6=0.5;
d1=0.15;d2=0.2;d3=0.2;d4=0.2;d5=0.2;d6=0.25;

[Ndet, ~] = fmincon(f, lb,[0.2,1,1,1,1,0.5; A], [100; b], [], [], lb, ub, [], options);

N = zeros(6,numel(alpha));
```

```
for i = 1:numel(alpha)
 K = Ka(i);
 [N(:,i), ~] = fmincon(f, lb, A, b, [], [], lb, ub, @nonlin, options);
end

F1 = cellfun(f1, num2cell(N,1));
F2 = cellfun(f2, num2cell(N,1));
F3 = cellfun(@f3, num2cell(N,1));

fprintf('%.1f& %6.4f& %6.4f& %6.4f& %6.4f& %6.4f& %6.4f& %6.4f& %6.4f& %6.4f \\\\ \\hline \n', [alpha; N(1,:); N(2,:); N(3,:); N(4,:);N(5,:);N(6,:); F1; F2; F3])

fprintf('\nДля детерминированных ограничений:\n')
fprintf('X_1 = %3.4f, X_2 = %3.4f, x_3= %6.4f, x_4 = %6.3f,x_5 = %6.3f,x_6 = %6.3f, f1 = %.2f, f2 = %.0f, f3 = %.2f\n', ...
 Ndet(1), Ndet(2), Ndet(3), Ndet(4),Ndet(5),Ndet(6), f1(Ndet), f2(Ndet), f3(Ndet))

end
```

Результаты выполнения программы приведены в таблице:

a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	f_1	f_2	f_3
0.1	0.0182	0.0002	3.9938	2.9938	0.0187	0.9941	37.0420	0.0553	291.6089
0.2	0.0182	0.0002	3.9938	2.9938	0.0187	0.9941	37.0415	0.0553	291.6050
0.3	0.0182	0.0002	3.9937	2.9938	0.0187	0.9941	37.0411	0.0553	291.6023
0.4	0.0182	0.0002	3.9937	2.9937	0.0187	0.9941	37.0408	0.0553	291.6001
0.5	0.0182	0.0002	3.9937	2.9937	0.0187	0.9940	37.0405	0.0553	291.5980
0.6	0.0182	0.0002	3.9937	2.9937	0.0187	0.9940	37.0402	0.0553	291.5959
0.7	0.0182	0.0002	3.9936	2.9937	0.0187	0.9940	37.0399	0.0553	291.5937
0.8	0.0182	0.0002	3.9936	2.9936	0.0187	0.9940	37.0396	0.0553	291.5913
0.9	0.0091	0.0001	3.9953	2.9954	0.0093	0.9958	37.0006	0.0276	290.6555

Для детерминированных ограничений: $\mathrm{X}_1 = 0.0182, X_2 = 0.0002, x_3 = 3.9937, x_4 = 2.994, x_5 = 0.019, x_6 = 0.994, f1 = 37.04, f2 = 0, f3 = 291.60$

Этот метод малочувствителен к параметрам. Значения в таблице практически не меняются.