Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №2

Курс: «Методы оптимизации и принятия решений»

Тема: «Анализ GERT-сети»

Выполнил студент:

Ерниязов Тимур Ертлеуевич
Группа: 13541/2

Проверил:

Сиднев Александр Георгиевич

Санкт-Петербург
2019 г.

Содержание

Лабораторная работа №2

1.1 Задание

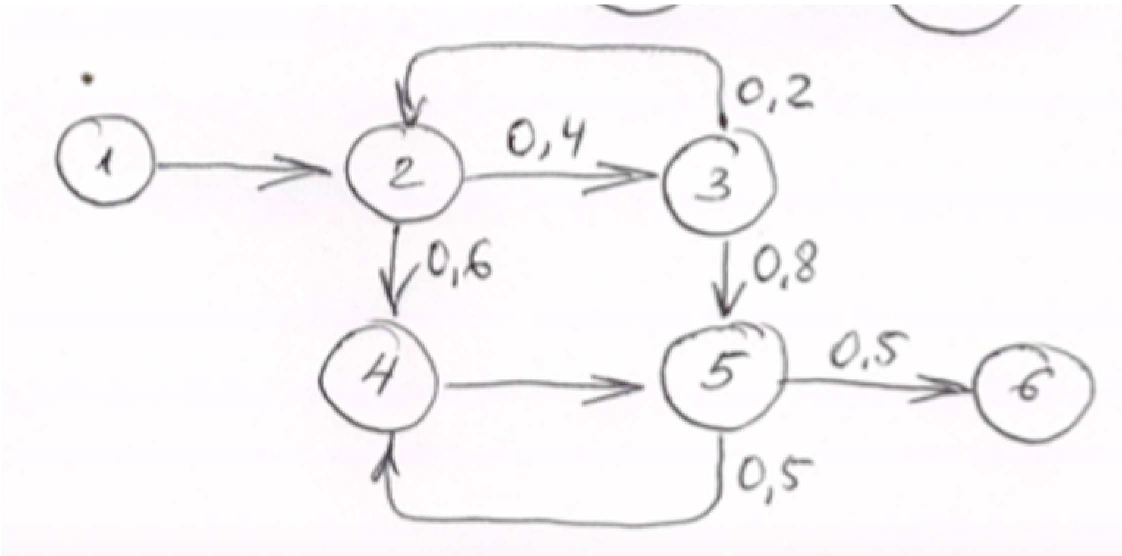

Рис. 1.1: Исходный граф системы

Часть 1

Каждой дуге (ij) поставлены в соответствие следующие данные:

- закон распределения времени выполнения работы (будем считать его нормальным);
- параметры закона распределения; (математическое ожидание M и дисперсия D).
- вероятность P_{ij} выполнения работы, показанная на графе.

Необходимо найти:

- вероятность выхода в завершающий узел графа (для всех вариантов узел 6);
- математическое ожидание;
- дисперсию времени выхода процесса в завершающий узел графа;
- начальные моменты первых 10 порядков.

В отчете перечислить все петли всех порядков, обнаруженные на графе, выписать уравнение Мейсона, получить решение для $W_E(s)$ и найти требуемые параметры.

Часть 2

Решить задачу используя методику анализа потокового графа, основанную на обработке матрицы передач (Branch Transmittance Matrix).

1.2 Ход работы

1.2.1 Построение замкнутой GERT-сети

Чтобы определить эквивалентную W-функцию для анализируемой GERT-сети, необходимо замкнуть сеть дугой, исходящей из узла 6 в узел 1:

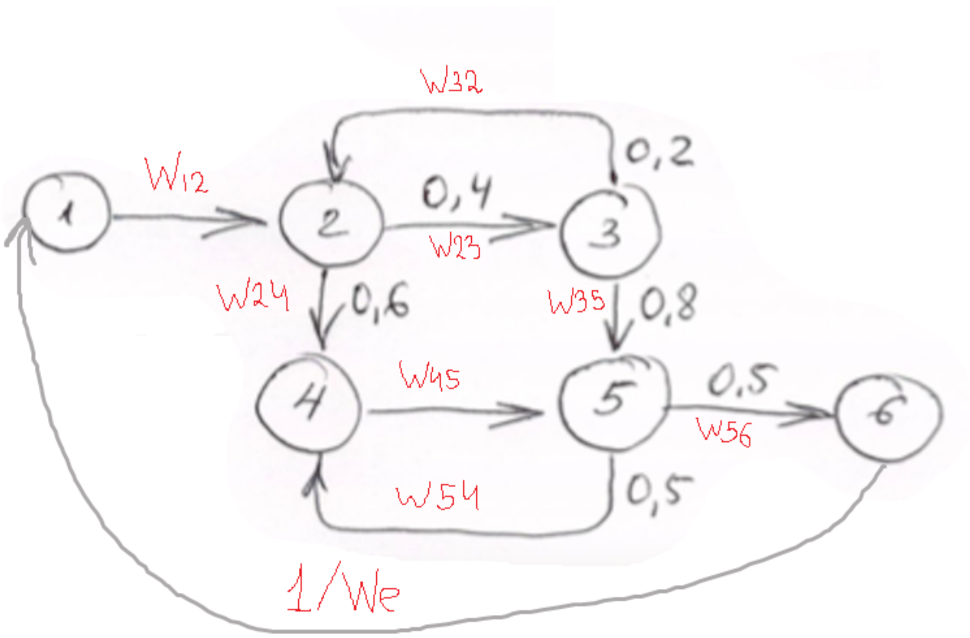

Рис. 1.2: Замкнутая GERT-сеть

1.2.2 Построение W-функции

Найдем W-функции для дуг GERT-сети:

Начало	Конец	Вероятность	M	D	W-функция
1	2	1	44	25	$(0.0014348(e^{8.8s} - 1e^{35.2s})^2)/s^2$
2	3	0.4	24	25	$(0.00192901(e^{4.8s} - 1e^{19.2s})^2)/s^2$
2	4	0.6	40	25	$(0.00104167(e^{8s} - 1e^{32s})^2)/s^2$
3	2	0.2	34	25	$(0.00048058(e^{6.8s} - 1e^{27.2s})^2)/s^2$
3	5	0.8	15	9	$(0.00987654(e^{3s} - 1e^{12s})^2)/s^2$
4	5	1	32	25	$(0.00271267(e^{6.4s} - 1e^{25.6s})^2)/s^2$
5	4	0.5	11	4	$(0.0114784(e^{2.2s} - 1e^{8.8s})^2)/s^2$
5	6	0.5	24	25	$(0.00241127(e^{4.8s} - 1e^{19.2s})^2)/s^2$

1.2.3 Построение уравнения Мейсона

Петли первого порядка:
$W_{45} \cdot W_{54}$
$W_{23} \cdot W_{32}$
$W_{12} \cdot W_{23} \cdot W_{35} \cdot W_{56} \frac{1}{W_E}$
$W_{12} \cdot W_{24} \cdot W_{45} \cdot W_{56} \frac{1}{W_E}$
Петли второго порядка: $W_{23} \cdot W_{32} \cdot W_{45} \cdot W_{54}$
Таким образом уравнение Мейсона будет иметь следующий вид:

$$H = 1 - W_{45}W_{54} - W_{23}W_{32} - W_{12}W_{23}W_{35}W_{56}\frac{1}{W_E} - W_{12}W_{24}W_{45}W_{56}\frac{1}{W_E} + W_{23}W_{32}W_{45}W_{54}$$

В результате эквивалентная W-функция равняется:
$W_E(s) = -\frac{W_{12}W_{23}W_{35}W_{56}+-W_{12}W_{24}W_{45}W_{56}}{W_{23}W_{32}+W_{45}W_{54}+W_{23}W_{32}W_{45}W_{54}-1}$

1.2.4 Рассчет статистических значений

Расчет математического ожидания (μ_{1E}) и дисперсии (σ_E) производится по следующим образом:

$$\mu_{1E} = \frac{dM_E(s)}{ds}|s = 0$$

$$\mu_{2E} = \frac{d^2M_E(s)}{ds^2}|s = 0$$

$$\sigma^2 = \mu_{2E} - \mu_{1E}^2$$

$$p_E = W_E(0)$$

Разработаем скрипт для расчета статистических значений в среде MATLAB:

Листинг 1.1: Matlab скрипт

```
P12 = 1;   M12 = 44; D12 = 25;
P23 = 0.4; M23 = 24; D23 = 25;
P24 = 0.6;   M24 = 40; D24 = 25;
P32 = 0.2; M32 = 34; D32 = 25;
P35 = 0.8;   M35 = 15; D35 = 9;
P45 = 1; M45 = 32; D45 = 25;
P54 = 0.5; M54 = 11; D54 = 4;
P56 = 0.5; M56 = 24; D56 = 25;

syms s

W12 = P12*((2*(exp((s*1.6*M12)/2)-exp((s*0.4*M12)/2)))/((1.6*M12-0.4*M12)*s))^2;
W23 = P23*((2*(exp((s*1.6*M23)/2)-exp((s*0.4*M23)/2)))/((1.6*M23-0.4*M23)*s))^2;
W24 = P24*((2*(exp((s*1.6*M24)/2)-exp((s*0.4*M24)/2)))/((1.6*M24-0.4*M24)*s))^2;
W35 = P35*((2*(exp((s*1.6*M35)/2)-exp((s*0.4*M35)/2)))/((1.6*M35-0.4*M35)*s))^2;
W45 = P45*((2*(exp((s*1.6*M45)/2)-exp((s*0.4*M45)/2)))/((1.6*M45-0.4*M45)*s))^2;
W32 = P32*((2*(exp((s*1.6*M32)/2)-exp((s*0.4*M32)/2)))/((1.6*M32-0.4*M32)*s))^2;
W54 = P54*((2*(exp((s*1.6*M54)/2)-exp((s*0.4*M54)/2)))/((1.6*M54-0.4*M54)*s))^2;
W56 = P56*((2*(exp((s*1.6*M56)/2)-exp((s*0.4*M56)/2)))/((1.6*M56-0.4*M56)*s))^2;

We = ((W12*W23*W35*W56+W12*W24*W45*W56)/(1-W45*W54-W23*W32+W23*W32*W45*W54));
We = simplify(We);

We0 = limit(We, 's', 0)

Me = We / We0;

me1 = diff(Me, 's', 1);
me1 = limit(me1, 's', 0)
me2 = diff(Me, 's', 2);
```

```
me2 = limit(me2, 's', 0)

de = me2 - me1 ^ 2
```

Результат вычисления статистических значений:

Листинг 1.2: Matlab скрипт

```
We0 =1

me1 =4061/23

me2 =946542817/26450

de =121956767/26450
```

Были получены следующие результаты:

1. Вероятность выхода в завершающий узел графа равна 100% ($p = W_E = 1$).
2. Математическое ожидание 4061/23 (176.57).
3. Дисперсия времени выхода процесса в завершающий узел графа 121956767/26450 (4 610,84).

1.2.5 Часть 2

Определим матрицу Q:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{23} & q_{24} & 0 & 0 \\ 0 & q_{32} & 0 & 0 & q_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{54} & 0 & q_{56} \\ w_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определим матрицу коэффициентов $A = I_6 - Q^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_{31} & 0 & 0 & -w_{61} \\ -q_{12} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_{23} & 1 & 0 & -q_{53} & 0 \\ 0 & -q_{24} & -q_{34} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_{45} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_{46} & -q_{56} & 1 \end{pmatrix}$$

Находим

$$det(A)$$

далее

$$\frac{\partial det(A)}{\partial w_{61}}$$

$$det(A|w_{61} = 0)$$

Далее можно вывести $W_E(S)$ с помощью формулы:

$$W_E(S) = -\frac{\frac{\partial det(A)}{\partial w_{61}}}{det(A|w_{61} = 0)}$$

Для расчетов, был написан matlab скрипт.

Листинг 1.3: Matlab скрипт

```
P12 = 1;   M12 = 44;
P23 = 0.4; M23 = 24;
P24 = 0.6;   M24 = 40;
P32 = 0.2; M32 = 34;
P35 = 0.8;   M35 = 15;
P45 = 1; M45 = 32;
```

```
P54 = 0.5; M54 = 11;
P56 = 0.5; M56 = 24;

syms q12
syms q23
syms q24
syms q32
syms q35
syms q45
syms q54
syms q56
syms w61
syms s

Q=[0 q12 0 0 0 0;
   0 0 q23 q24 0 0;
   0 q32 0 0 q35 0;
   0 0 0 0 q45 0;
   0 0 0 q54 0 q56;
   w61 0 0 0 0 0];

A1 = eye(size(Q,1)) - transpose(Q);
det_A1 = det(A1);
det_dw=diff(det_A1, w61);
det2_A1=subs(det_A1, w61, 0);
We = -det_dw/det2_A1

We=subs(We, q12, P12*((2*(exp((s*1.6*M12)/2)-exp((s*0.4*M12)/2)))/((1.6*M12-0.4*M12)*s))^2);
We=subs(We, q23, P23*((2*(exp((s*1.6*M23)/2)-exp((s*0.4*M23)/2)))/((1.6*M23-0.4*M23)*s))^2);
We=subs(We, q24, P24*((2*(exp((s*1.6*M24)/2)-exp((s*0.4*M24)/2)))/((1.6*M24-0.4*M24)*s))^2);
We=subs(We, q32, P32*((2*(exp((s*1.6*M32)/2)-exp((s*0.4*M32)/2)))/((1.6*M32-0.4*M32)*s))^2);
We=subs(We, q45, P45*((2*(exp((s*1.6*M45)/2)-exp((s*0.4*M45)/2)))/((1.6*M45-0.4*M45)*s))^2);
We=subs(We, q54, P54*((2*(exp((s*1.6*M54)/2)-exp((s*0.4*M54)/2)))/((1.6*M54-0.4*M54)*s))^2);
We=subs(We, q56, P56*((2*(exp((s*1.6*M56)/2)-exp((s*0.4*M56)/2)))/((1.6*M56-0.4*M56)*s))^2);
We=subs(We, q35, P35*((2*(exp((s*1.6*M35)/2)-exp((s*0.4*M35)/2)))/((1.6*M35-0.4*M35)*s))^2);

We = simplify(We);
We0 = limit(We, 's', 0)
Me = We / We0;

me1 = diff(Me, 's', 1);
me1 = limit(me1, 's', 0)
me2 = diff(Me, 's', 2);
me2 = limit(me2, 's', 0)

de = me2 - me1 ^ 2
```

Листинг 1.4: Результат

```
We = -(q12*q23*q35*q56 + q12*q24*q45*q56)/(q23*q32 + q45*q54 - q23*q32*q45*q54 - 1)

We0 =1
```

```

me1 =4061/23

me2 =946542817/26450

de =121956767/26450
```

Были получены следующие результаты:

1. Вероятность выхода в завершающий узел графа равна 100% ($p = W_E = 1$).
2. Математическое ожидание 4061/23 (176.57).
3. Дисперсия времени выхода процесса в завершающий узел графа 121956767/26450 (4 610,84).

Которые полностью совпадает с результатами части 1.

1.3 Вывод

В ходе данной лабораторной работы были получены навыки работы с вероятностными графами и их обработка с помощью методики GERT. При заданных значениях вероятности, мат. ожидания для каждой дуги исходного графа достаточно легко расчитываются W-функции для треугольного распределения, которые необходимы для построения формулы Мейсона. После этого из формулы Мейсона по формулам математической статистики достаточно легко расчитывается результирующее мат. ожидание и дисперсия.

Решение путем анализа потокового графа показало аналогичные результаты, что подтверждает корректность решения. Однако, метод анализа потокового графа выполняется заметно медленнее, даже на небольшом графе.