

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ И ПРОГРАММНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Отчёт по лабораторной работе №2

Курс: «Методы оптимизации и принятия решений»

Тема: «Анализ GERT-сети»

Выполнил студент:

Медведев Михаил Анатольевич

Группа: 13541/3

Проверил:

Сиднев Александр Георгиевич

Санкт-Петербург
2019 г.

Содержание

1	Лабораторная работа №2	2
1.1	Индивидуальное задание	2
1.2	Ход работы	3
1.2.1	Часть 1	3
1.2.2	Часть 2	7
1.3	Вывод	10

Лабораторная работа №2

1.1 Индивидуальное задание

Задача 26

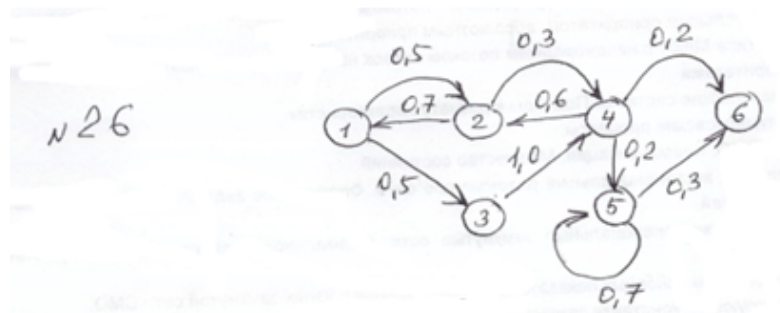


Рис. 1.1: Исходный граф системы

Каждой дуге (ij) поставлены в соответствие следующие данные:

- Закон распределения времени выполнения работы.
По варианту задания закон равномерной плотности (Uniform)
- Параметры закона распределения (математическое ожидание M и дисперсия D).
- Вероятность P_{ij} выполнения работы, показанная на графе.

Параметры задачи:

производящая функция моментов для равномерного распределения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a &= 0.4m \\ b &= 1.6m \\ MGF(s) &= \frac{\exp(sa) - \exp(sb)}{(a - b)s} \end{aligned}$$

Задание

Часть 1

- Вероятность выхода в завершающий узел графа (для всех вариантов узел 6)
- Производящую функцию моментов длительности процесса от начального узла до завершающего узла
- Математическое ожидание длительности процесса от начального узла до завершающего узла
- Дисперсию ожидания длительности процесса от начального узла до завершающего узла
- Начальные моменты первых 10 порядков

Перечислить все петли всех порядков, обнаруженные на графе, выписать уравнение Мейсона, получить решение для и найти требуемые параметры.

Часть 2

Повторить пункты задания 2, 3, 4, 5 используя методику анализа потокового графа, основанную на обработке матрицы передач (Branch Transmittance Matrix).

1.2 Ход работы

1.2.1 Часть 1

Построение замкнутой GERT-сети

Чтобы определить эквивалентную W-функцию для анализируемой GERT-сети, необходимо замкнуть сеть дугой, исходящей из узла 6 в узел 1:

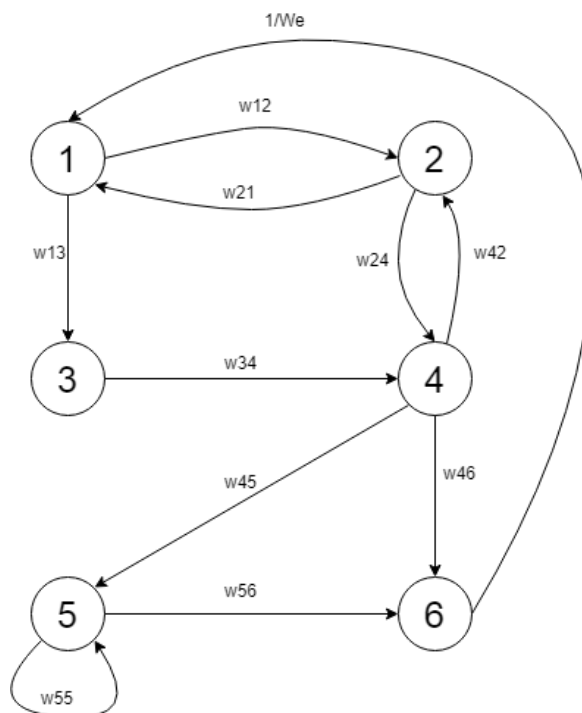


Рис. 1.2: Замкнутая GERT-сеть

Построение W-функции

Найдем W-функции для дуг GERT-сети:

Начало	Конец	Вероятность	Мат. ожидание	Дисперсия	W-функция
1	2	0.5	30	4	$-\frac{e^{12 \cdot s} - e^{48 \cdot s}}{72 \cdot s}$
1	3	0.5	26	36	$-\frac{5 \cdot (e^{10.4 \cdot s} - e^{41.6 \cdot s})}{312 \cdot s}$
2	1	0.7	30	16	$-\frac{7 \cdot (e^{12 \cdot s} - e^{48 \cdot s})}{360 \cdot s}$
2	4	0.3	55	81	$-\frac{e^{22 \cdot s} - e^{88 \cdot s}}{220 \cdot s}$
3	4	1	13	25	$-\frac{5 \cdot (e^{5.2 \cdot s} - e^{20.8 \cdot s})}{78 \cdot s}$
4	2	0.6	45	64	$-\frac{e^{18 \cdot s} - e^{72 \cdot s}}{90 \cdot s}$
4	5	0.2	35	16	$-\frac{e^{14 \cdot s} - e^{56 \cdot s}}{210 \cdot s}$
4	6	0.2	15	25	$-\frac{e^{6 \cdot s} - e^{24 \cdot s}}{90 \cdot s}$
5	5	0.7	30	25	$-\frac{7 \cdot (e^{12 \cdot s} - e^{48 \cdot s})}{360 \cdot s}$
5	6	0.3	28	36	$-\frac{e^{11.2 \cdot s} - e^{44.8 \cdot s}}{112 \cdot s}$

Построение уравнения Мейсона

Петли первого порядка

- W_{55}
- $W_{12}W_{21}$
- $W_{24}W_{42}$
- $W_{13}W_{34}W_{42}W_{21}$
- $W_{12}W_{24}W_{45}W_{56}\frac{1}{W_e}$
- $W_{12}W_{24}W_{46}\frac{1}{W_e}$
- $W_{13}W_{34}W_{45}W_{56}\frac{1}{W_e}$
- $W_{13}W_{34}W_{46}\frac{1}{W_e}$

Петли второго порядка

- $W_{12}W_{21}W_{55}$
- $W_{24}W_{42}W_{55}$
- $W_{13}W_{34}W_{42}W_{21}W_{55}$
- $W_{12}W_{24}W_{46}\frac{1}{W_e}W_{55}$
- $W_{13}W_{34}W_{46}\frac{1}{W_e}W_{55}$

Уравнение Мейсона

$$H = 1 - W_{55} - W_{12}W_{21} - W_{24}W_{42} - W_{13}W_{34}W_{42}W_{21} - W_{12}W_{24}W_{45}W_{56}\frac{1}{W_e} - W_{12}W_{24}W_{46}\frac{1}{W_e} - W_{13}W_{34}W_{45}W_{56}\frac{1}{W_e} - W_{13}W_{34}W_{46}\frac{1}{W_e} + W_{12}W_{21}W_{55} + W_{24}W_{42}W_{55} + W_{13}W_{34}W_{42}W_{21}W_{55} + W_{12}W_{24}W_{46}\frac{1}{W_e}W_{55} + W_{13}W_{34}W_{46}\frac{1}{W_e}W_{55}$$

Выведем $W_E(s)$:

$$W_E(s) = -\frac{W_{12}W_{24}W_{46} + W_{13}W_{34}W_{46} + W_{12}W_{24}W_{45}W_{56} - W_{12}W_{24}W_{46}W_{55} + W_{13}W_{34}W_{45}W_{56} - W_{13}W_{34}W_{46}W_{55}}{W_{55} + W_{12}W_{21} + W_{24}W_{42} - W_{12}W_{21}W_{55} - W_{24}W_{42}W_{55} + W_{13}W_{34}W_{42}W_{21} - W_{13}W_{34}W_{42}W_{21}W_{55} - 1}$$

Расчет статистических значений

Вычислим математическое ожидание и дисперсию: $M_E(s) = 1$ при $s = 0$

Так как $W_E(s) = p_E M_E(s)$, то $p_E = W_E(0)$, тогда $M_E(s) = \frac{W_E(s)}{p_E} = \frac{W_E(s)}{W_E(0)}$

Вычисляя первую и вторую производные по s функции $M_E(s)$, и полагая $s = 0$, находим математическое ожидание:

$$\mu_{1E} = \left. \frac{\partial M_E(s)}{\partial s} \right|_{s=0}$$

и дисперсию:

$$\sigma^2 = \mu_{2E} - [\mu_{1E}]^2$$

Вероятность выхода в завершающий узел графа:

$$p_E = W_E(0)$$

Скрипт на Matlab для расчета статистических значений:

```

1 clear;
2 clc;
3
4 P12 = 0.5; M12 = 30; D12 = 4;
5 P13 = 0.5; M13 = 26; D13 = 36;
6 P21 = 0.7; M21 = 30; D21 = 16;
7 P24 = 0.3; M24 = 55; D24 = 81;
8 P34 = 1; M34 = 13; D34 = 25;
9 P42 = 0.6; M42 = 45; D42 = 64;
10 P45 = 0.2; M45 = 35; D45 = 16;
11 P46 = 0.2; M46 = 15; D46 = 25;
12 P55 = 0.7; M55 = 30; D55 = 25;
13 P56 = 0.3; M56 = 28; D56 = 36;
14
15 syms s
16
17 a12 = 0.4*M12; b12 = 1.6*M12;
18 a13 = 0.4*M13; b13 = 1.6*M13;
19 a21 = 0.4*M21; b21 = 1.6*M21;
20 a24 = 0.4*M24; b24 = 1.6*M24;
21 a34 = 0.4*M34; b34 = 1.6*M34;
22 a42 = 0.4*M42; b42 = 1.6*M42;
23 a45 = 0.4*M45; b45 = 1.6*M45;
24 a46 = 0.4*M46; b46 = 1.6*M46;
25 a55 = 0.4*M55; b55 = 1.6*M55;
26 a56 = 0.4*M56; b56 = 1.6*M56;
27
28 W12 = P12*((exp(s*a12)-exp(s*b12))/((a12-b12)*s));
29 W13 = P13*((exp(s*a13)-exp(s*b13))/((a13-b13)*s));
30 W21 = P21*((exp(s*a21)-exp(s*b21))/((a21-b21)*s));
31 W24 = P24*((exp(s*a24)-exp(s*b24))/((a24-b24)*s));
32 W34 = P34*((exp(s*a34)-exp(s*b34))/((a34-b34)*s));
33 W42 = P42*((exp(s*a42)-exp(s*b42))/((a42-b42)*s));
34 W45 = P45*((exp(s*a45)-exp(s*b45))/((a45-b45)*s));
35 W46 = P46*((exp(s*a46)-exp(s*b46))/((a46-b46)*s));
36 W55 = P55*((exp(s*a55)-exp(s*b55))/((a55-b55)*s));
37 W56 = P56*((exp(s*a56)-exp(s*b56))/((a56-b56)*s));
38
39 numerator = W12*W24*W46 + W13*W34*W46 + W12*W24*W45*W56 + W13*W34*W45*W56 - W12*W24*W46*
    W55 - W13*W34*W46*W55;
40
41 denominator = W55 + W12*W21 + W24*W42 - W12*W21*W55 - W24*W42*W55 + W13*W34*W42*W21 - W13
    *W34*W42*W21*W55 - 1;
42
43 We = - (numerator / denominator);
44
45 We = simplify(We);
46 We0 = limit(We, 's', 0)
47 Me = We/We0;
48
49 % первый начальный момент
50 m1 = diff(Me, 's', 1);
51 m1 = limit(m1, 's', 0)
52
53 % второй начальный момент
54 m2 = diff(Me, 's', 2);
55 m2 = limit(m2, 's', 0)
56
57 % третий начальный момент
58 m3 = diff(Me, 's', 3);
59 m3 = limit(m3, 's', 0)
60
61 % дисперсия
62 D = m2 - (m1)^2

```

Результат вычислений статических значений:

```

1 We0 =
2
3 1
4
5
6 m1 =
7
8 4754/13
9
10
11 m2 =
12
13 944191009/4225
14
15
16 m3 =
17
18 limit((((exp(12*s) - exp(48*s))*(exp(22*s) - exp(88*s))*(6*exp(6*s) - 24*exp(24*s)))
    /(39600*s^5) + ((exp(6*s) - exp(24*s))*(exp(22*s) - exp(88*s))*(12*exp(12*s) - 48*exp
    (48*s))) - ..... (12960*s^2) + ((exp(22*s) - exp(88*s))... Output truncated. Text
    exceeds maximum line length of 25,000 characters for Command Window display.
19
20 D =
21
22 379178109/4225

```

В результате:

- вероятность выхода в завершающий узел графа $W_{E0} = 100\%$
- математическое ожидание $= 4754/13 = 365.7$
- дисперсия времени выхода процесса в завершающий узел графа $= 379178109/4225 = 89746.3$
- начальные моменты первых двух порядков

Момент	Значение
μ_1	$\frac{4754}{13}$
μ_2	$\frac{944191009}{4225}$

С помощью Matlab удалось получить только начальные моменты первых двух порядков. Начальный момент третьего порядка не удалось получить как с помощью Matlab, так и с помощью WolframAlfa, Maxima, Maple.

1.2.2 Часть 2

Определим матрицу Q , не забывая про обратную связь.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{21} & 0 & 0 & q_{24} & 0 & 0 \\ q_{13} & 0 & 0 & q_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{42} & 0 & q_{45} & q_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} & q_{56} \\ w_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определим матрицу коэффициентов $A = I_6 - Q^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -q_{21} & -q_{13} & 0 & 0 & -w_{61} \\ -q_{12} & 1 & 0 & -q_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_{24} & -q_{34} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_{45} & 1 - q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_{46} & -q_{56} & 1 \end{pmatrix}$$

Находим

$$\det(A)$$

далее,

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial w_{61}}$$

$$\det(A|_{w_{61}=0})$$

Далее можно вывести $W_E(S)$ с помощью формулы:

$$W_E(S) = -\frac{\frac{\partial \det(A)}{\partial w_{61}}}{\det(A|_{w_{61}=0})}$$

Скрипт на Matlab для расчета статистических значений:

```
1 clear; clc; clearvars
2
3 P12 = 0.5; M12 = 30; D12 = 4;
4 P13 = 0.5; M13 = 26; D13 = 36;
5 P21 = 0.7; M21 = 30; D21 = 16;
6 P24 = 0.3; M24 = 55; D24 = 81;
7 P34 = 1; M34 = 13; D34 = 25;
8 P42 = 0.6; M42 = 45; D42 = 64;
9 P45 = 0.2; M45 = 35; D45 = 16;
10 P46 = 0.2; M46 = 15; D46 = 25;
11 P55 = 0.7; M55 = 30; D55 = 25;
12 P56 = 0.3; M56 = 28; D56 = 36;
13
14 a12 = 0.4*M12; b12 = 1.6*M12;
15 a13 = 0.4*M13; b13 = 1.6*M13;
16 a21 = 0.4*M21; b21 = 1.6*M21;
17 a24 = 0.4*M24; b24 = 1.6*M24;
18 a34 = 0.4*M34; b34 = 1.6*M34;
19 a42 = 0.4*M42; b42 = 1.6*M42;
20 a45 = 0.4*M45; b45 = 1.6*M45;
21 a46 = 0.4*M46; b46 = 1.6*M46;
22 a55 = 0.4*M55; b55 = 1.6*M55;
```



```

23 a56 = 0.4*M56; b56 = 1.6*M56;
24
25 syms q12
26 syms q13
27 syms q21
28 syms q24
29 syms q34
30 syms q42
31 syms q45
32 syms q46
33 syms q55
34 syms q56
35 syms w61
36 syms s
37
38 Q=[ 0   q12 q13  0   0   0;
39     q21  0   0   q24  0   0;
40     0   0   0   q34  0   0;
41     0   q42  0   0   q45 q46;
42     0   0   0   0   q55 q56;
43     w61  0   0   0   0   0];
44
45 A1 = eye(size(Q,1)) - transpose(Q);
46 disp(A1);
47
48 det_A1 = det(A1);
49 disp(det_A1);
50
51 det_dw = diff(det_A1, w61);
52 disp(det_dw);
53
54 det2_A1=subs(det_A1, w61, 0);
55 disp(det2_A1);
56
57 We= -det_dw / det2_A1;
58 disp(We);
59
60 We = subs(We, q12, P12*((exp(s*a12)-exp(s*b12))/((a12-b12)*s)));
61 We = subs(We, q13, P13*((exp(s*a13)-exp(s*b13))/((a13-b13)*s)));
62 We = subs(We, q21, P21*((exp(s*a21)-exp(s*b21))/((a21-b21)*s)));
63 We = subs(We, q24, P24*((exp(s*a24)-exp(s*b24))/((a24-b24)*s)));
64 We = subs(We, q34, P34*((exp(s*a34)-exp(s*b34))/((a34-b34)*s)));
65 We = subs(We, q42, P42*((exp(s*a42)-exp(s*b42))/((a42-b42)*s)));
66 We = subs(We, q45, P45*((exp(s*a45)-exp(s*b45))/((a45-b45)*s)));
67 We = subs(We, q46, P46*((exp(s*a46)-exp(s*b46))/((a46-b46)*s)));
68 We = subs(We, q55, P55*((exp(s*a55)-exp(s*b55))/((a55-b55)*s)));
69 We = subs(We, q56, P56*((exp(s*a56)-exp(s*b56))/((a56-b56)*s)));
70
71 We = simplify(We)
72 We0 = limit(We, 's', 0)
73 Me = We/We0;
74
75 % первый начальный момент
76 m1 = diff(Me, 's', 1);
77 m1 = limit(m1, 's', 0)
78
79 % второй начальный момент
80 m2 = diff(Me, 's', 2);
81 m2 = limit(m2, 's', 0)
82
83 % третий начальный момент
84 m3 = diff(Me, 's', 3);
85 m3 = limit(m3, 's', 0)
86
87 % дисперсия
88 D = m2 - (m1)^2

```

В результате получили следующее:

```

1 [ 1, -q21, 0, 0, 0, -w61]
2 [ -q12, 1, 0, -q42, 0, 0]
3 [ -q13, 0, 1, 0, 0, 0]
4 [ 0, -q24, -q34, 1, 0, 0]
5 [ 0, 0, 0, -q45, 1 - q55, 0]
6 [ 0, 0, 0, -q46, -q56, 1]
7
8 q12*q21*q55 - q12*q21 - q24*q42 - q55 + q24*q42*q55 - q13*q21*q34*q42 - q12*q24*q46*w61 -
   q13*q34*q46*w61 + q13*q21*q34*q42*q55 - q12*q24*q45*q56*w61 + q12*q24*q46*q55*w61 -
   q13*q34*q45*q56*w61 + q13*q34*q46*q55*w61 + 1
9
10 q12*q24*q46*q55 - q13*q34*q46 - q12*q24*q45*q56 - q12*q24*q46 - q13*q34*q45*q56 + q13*q34
   *q46*q55
11
12 q12*q21*q55 - q12*q21 - q24*q42 - q55 + q24*q42*q55 - q13*q21*q34*q42 + q13*q21*q34*q42*
   q55 + 1
13
14 -(q12*q24*q46 + q13*q34*q46 + q12*q24*q45*q56 - q12*q24*q46*q55 + q13*q34*q45*q56 - q13*
   q34*q46*q55)/(q55 + q12*q21 + q24*q42 - q12*q21*q55 - q24*q42*q55 + q13*q21*q34*q42 -
   q13*q21*q34*q42*q55 - 1)
15
16
17 We =
18 ((7*(exp(6*s) - exp(24*s))*(exp(12*s) - exp(48*s))^2*(exp(22*s) - exp(88*s)))/(513216000*
   s^4) + ((exp(6*s) - exp(24*s))*(exp(12*s) - exp(48*s))*(exp(22*s) - exp(88*s)))
   /(1425600*s^3) + (5*(exp(6*s) - exp(24*s))*(exp((26*s)/5) - exp((104*s)/5))*(exp((52*s)
   )/5) - exp((208*s)/5))/(438048*s^3) + (7*(exp(6*s) - exp(24*s))*(exp(12*s) - exp(48*s)
   ))*(exp((26*s)/5) - exp((104*s)/5))*(exp((52*s)/5) - exp((208*s)/5))/(31539456*s^4) -
   ((exp(12*s) - exp(48*s))*(exp(14*s) - exp(56*s))*(exp(22*s) - exp(88*s))*(exp((56*s)
   )/5) - exp((224*s)/5)))/(372556800*s^4) - (5*(exp(14*s) - exp(56*s))*(exp((26*s)/5) -
   exp((104*s)/5))*(exp((52*s)/5) - exp((208*s)/5))*(exp((56*s)/5) - exp((224*s)/5))
   /(114476544*s^4))/((7*(exp(12*s) - exp(48*s))^2)/(25920*s^2) - (7*(exp(12*s) - exp(48*
   s)))/(360*s) + (49*(exp(12*s) - exp(48*s))^3)/(9331200*s^3) + ((exp(18*s) - exp(72*s))
   *(exp(22*s) - exp(88*s)))/(19800*s^2) + (7*(exp(12*s) - exp(48*s))*(exp(18*s) - exp
   (72*s))*(exp(22*s) - exp(88*s)))/(7128000*s^3) + (49*(exp(12*s) - exp(48*s))^2*(exp
   (18*s) - exp(72*s))*(exp((26*s)/5) - exp((104*s)/5))*(exp((52*s)/5) - exp((208*s)/5))
   /(11354204160*s^5) + (7*(exp(12*s) - exp(48*s))*(exp(18*s) - exp(72*s))*(exp((26*s)/5)
   - exp((104*s)/5))*(exp((52*s)/5) - exp((208*s)/5)))/(31539456*s^4) - 1)
19
20
21 We0 =
22 1
23
24
25 m1 =
26 4754/13
27
28
29 m2 =
30 944191009/4225
31
32
33 m3 =
34 limit((((exp(12*s) - exp(48*s))*(exp(22*s) - exp(88*s))*(6*exp(6*s) - 24*exp(24*s)))
   /(39600*s^5) + ((exp(6*s) - exp(24*s))*(exp(22*s) - exp(88*s))*(12*exp(12*s) - 48*exp
   (48*s)))/(39600*s^5) + ... Output truncated. Text exceeds maximum line length of
   25,000 characters for Command Window display.
35
36 D =
37 379178109/4225

```

В результате:

- вероятность выхода в завершающий узел графа $W_E0 = 100\%$
- математическое ожидание $= 4754/13 = 365.7$
- дисперсия времени выхода процесса в завершающий узел графа $= 379178109/4225 = 89746.3$
- начальные моменты первых двух порядков

Момент	Значение
μ_1	$\frac{4754}{13}$
μ_2	$\frac{944191009}{4225}$

Все результаты абсолютно совпадают с тем, что получили в первой части лабораторной работы.

1.3 Вывод

В ходе данной лабораторной работы были получены навыки работы с вероятностными графами и их обработка с помощью методики GERT. При заданных значениях вероятности, математического ожидания и дисперсии для каждой дуги исходного графа достаточно легко рассчитываются W-функции, которые необходимы для построения формулы Мейсона. После этого из формулы Мейсона по формулам математической статистики рассчитываются начальные моменты первых 2 порядков.

Решение путем анализа потокового графа показало аналогичные результаты, что подтверждает корректность решения.