

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ И ПРОГРАММНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Отчёт по лабораторной работе №2

Курс: «Методы оптимизации и принятия решений»

Тема: «Анализ GERT-сети»

Выполнил студент:

Волкова Мария Дмитриевна

Группа: 13541/2

Проверил:

Сиднев Александр Георгиевич

Санкт-Петербург
2019 г.

Содержание

1	Лабораторная работа №2	2
1.1	Задание	2
1.2	Ход работы	4
1.2.1	Построение замкнутой GERT-сети	4
1.2.2	Построение W-функции	4
1.2.3	Построение уравнения Мейсона	5
1.2.4	Расчет статистических значений	5
1.2.5	Часть 2	6
1.3	Вывод	9

Лабораторная работа №2

1.1 Задание

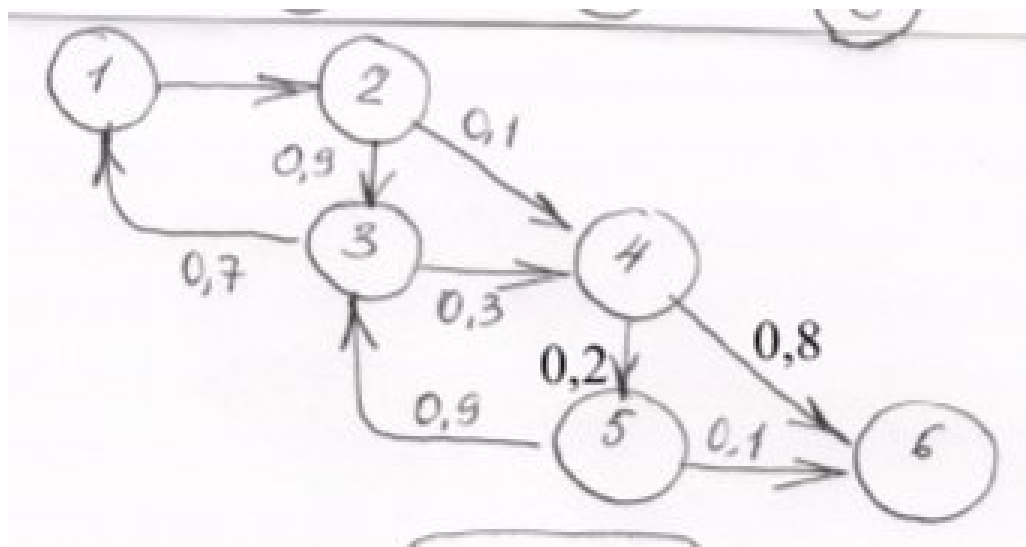


Рис. 1.1: Исходный граф системы

Часть 1

Каждой дуге (ij) поставлены в соответствие следующие данные:

- закон распределения времени выполнения работы (будем считать его нормальным);
- параметры закона распределения; (математическое ожидание M и дисперсия D).
- вероятность P_{ij} выполнения работы, показанная на графе.

Необходимо найти:

- вероятность выхода в завершающий узел графа (для всех вариантов узел 6);
- математическое ожидание;
- дисперсию времени выхода процесса в завершающий узел графа;
- начальные моменты первых 10 порядков.

В отчете перечислить все петли всех порядков, обнаруженные на графе, выписать уравнение Мейсона, получить решение для $W_E(s)$ и найти требуемые параметры.

Часть 2

Решить задачу используя методику анализа потокового графа, основанную на обработке матрицы передач (Branch Transmittance Matrix).

1.2 Ход работы

1.2.1 Построение замкнутой GERT-сети

Чтобы определить эквивалентную W-функцию для анализируемой GERT-сети, необходимо замкнуть сеть дугой, исходящей из узла 6 в узел 1:

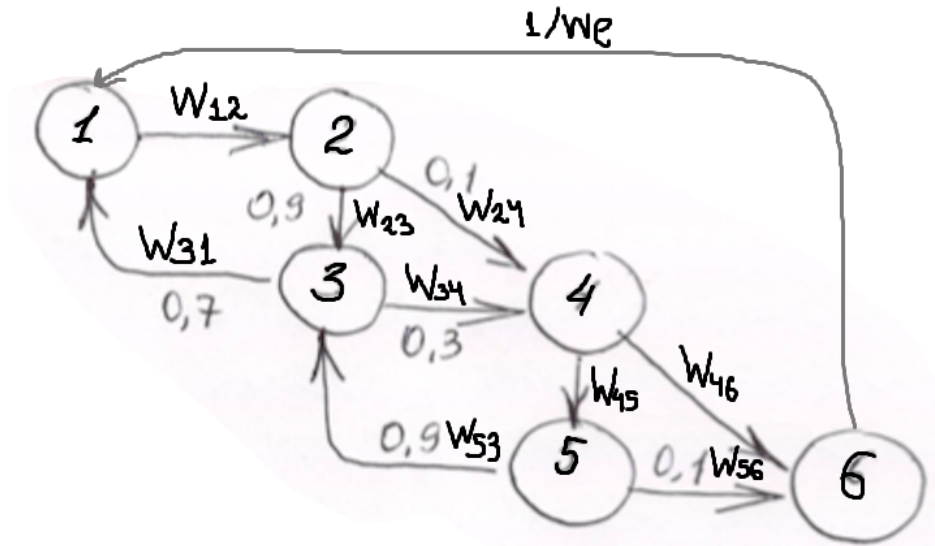


Рис. 1.2: Замкнутая GERT-сеть

1.2.2 Построение W-функции

Найдем W-функции для дуг GERT-сети из производящей функции моментов треугольного распределения и запишем это в таблицу:

$$MGF = \left(\frac{2(e^{\frac{sb}{2}} - e^{\frac{sa}{2}})}{(b-a)s} \right)^2$$

$$W = P * MGF$$

Начало	Конец	Вероятность	М	D	W-функция
1	2	1	38	16	$\frac{0.00192367(e^{7.6s} - e^{30.4s})^2}{s^2}$
2	3	0.9	19	9	$\frac{0.00692521(e^{3.8s} - e^{15.2s})^2}{s^2}$
2	4	0.1	32	16	$\frac{0.000271267(e^{6.4s} - e^{25.6s})^2}{s^2}$
3	1	0.7	33	16	$\frac{0.00178553(e^{6.6s} - e^{26.4s})^2}{s^2}$
3	4	0.3	20	9	$\frac{0.00208333(e^{4s} - e^{16s})^2}{s^2}$
4	5	0.2	28	16	$\frac{0.000708617(e^{5.6s} - e^{22.4s})^2}{s^2}$
4	6	0.8	30	16	$\frac{0.00246914(e^{6s} - e^{24s})^2}{s^2}$
5	3	0.9	37	16	$\frac{0.00182615(e^{7.4s} - e^{29.6s})^2}{s^2}$
5	6	0.1	43	25	$\frac{0.000150231(e^{8.6s} - e^{34.4s})^2}{s^2}$

1.2.3 Построение уравнения Мейсона

Петли первого порядка:

$$W_{12} \cdot W_{23} \cdot W_{31}$$

$$W_{34} \cdot W_{45} \cdot W_{53}$$

$$W_{12} \cdot W_{24} \cdot W_{45} \cdot W_{53} \cdot W_{31}$$

$$W_{12} \cdot W_{24} \cdot W_{46} \cdot \frac{1}{W_E}$$

$$W_{12} \cdot W_{24} \cdot W_{45} \cdot W_{56} \cdot \frac{1}{W_E}$$

$$W_{12} \cdot W_{23} \cdot W_{34} \cdot W_{46} \cdot \frac{1}{W_E}$$

$$W_{12} \cdot W_{23} \cdot W_{34} \cdot W_{45} \cdot W_{56} \cdot \frac{1}{W_E}$$

Петлей второго порядка на графе нет.

Таким образом уравнение Мейсона будет иметь следующий вид:

$$H = 1 - W_{12}W_{23}W_{31} - W_{34}W_{45}W_{53} - W_{12}W_{24}W_{45}W_{53}W_{31} - W_{12}W_{24}W_{46}\frac{1}{W_E} - W_{12}W_{24}W_{45}W_{56}\frac{1}{W_E} - W_{12}W_{23}W_{34}W_{46}\frac{1}{W_E} - W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{56}\frac{1}{W_E}$$

Получаем эквивалентную W-функцию:

$$W_E(s) = - \frac{W_{12}W_{24}W_{46} + W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{56} + W_{12}W_{23}W_{34}W_{46} + W_{12}W_{24}W_{45}W_{56}}{W_{12}W_{23}W_{31} + W_{12}W_{24}W_{45}W_{53}W_{31} + W_{34}W_{45}W_{53} - 1}$$

1.2.4 Расчет статистических значений

Расчет математического ожидания (μ_{1E}) и дисперсии (σ_E) производится по следующим образом:

$$\mu_{1E} = \left. \frac{dM_E(s)}{ds} \right|_{s=0}$$

$$\mu_{2E} = \left. \frac{d^2 M_E(s)}{ds^2} \right|_{s=0}$$

$$\sigma^2 = \mu_{2E} - \mu_{1E}^2$$

$$p_E = W_E(0)$$

Далее приведен скрипт для расчета статистических значений в среде MATLAB:

Листинг 1.1: Скрипт Matlab

```
1 clc;
2 format long g;
3 syms s
4
5 P12 = 1;    M12 = 38;
6 P23 = 0.9; M23 = 19;
7 P24 = 0.1; M24 = 32;
8 P31 = 0.7; M31 = 33;
9 P34 = 0.3; M34 = 20;
10 P45 = 0.2; M45 = 28;
11 P46 = 0.8; M46 = 30;
12 P53 = 0.9; M53 = 37;
13 P56 = 0.1; M56 = 43;
14
15 a = 0.4;
16 b = 1.6;
17
18 W12 = P12*((2*(exp((s*b*M12)/2)-exp((s*a*M12)/2)))/((b*M12-a*M12)*s))^2;
19 W46 = P46*((2*(exp((s*b*M46)/2)-exp((s*a*M46)/2)))/((b*M46-a*M46)*s))^2;
20 W24 = P24*((2*(exp((s*b*M24)/2)-exp((s*a*M24)/2)))/((b*M24-a*M24)*s))^2;
21 W34 = P34*((2*(exp((s*b*M34)/2)-exp((s*a*M34)/2)))/((b*M34-a*M34)*s))^2;
22 W45 = P45*((2*(exp((s*b*M45)/2)-exp((s*a*M45)/2)))/((b*M45-a*M45)*s))^2;
23 W23 = P23*((2*(exp((s*b*M23)/2)-exp((s*a*M23)/2)))/((b*M23-a*M23)*s))^2;
24 W31 = P31*((2*(exp((s*b*M31)/2)-exp((s*a*M31)/2)))/((b*M31-a*M31)*s))^2;
25 W53 = P53*((2*(exp((s*b*M53)/2)-exp((s*a*M53)/2)))/((b*M53-a*M53)*s))^2;
```

```

26 W56 = P56*((2*(exp((s*b*M56)/2)-exp((s*a*M56)/2)))/((b*M56-a*M56)*s))^2;
27
28 We = -((W12*W23*W34*W45*W56 + W12*W23*W34*W46 + W12*W24*W46 + W12*W24*W45*W56)
    /(W12*W23*W31 + W34*W45*W53 + W12*W24*W45*W53*W31 - 1));
29 We = simplify(We);
30 We0 = limit(We, 's', 0);
31
32 % We(0)
33 % We0 = subs(We, 's', 0);
34 fprintf('We(0) = %.3f\n', double(We0));
35
36 M = We / We0;
37
38 m1 = diff(M, 's', 1);
39 m1 = limit(m1, 's', 0);
40 fprintf('m1 = %.3f\n', double(m1));
41
42 m2 = diff(M, 's', 2);
43 m2 = limit(m2, 's', 0);
44 fprintf('m2 = %.3f\n', double(m2));
45
46 D = m2 - m1 ^ 2;
47 fprintf('D = %.3f\n', double(D));

```

Результат вычисления статистических значений:

Листинг 1.2: Matlab скрипт

```

1 We(0) = 1.000
2 m1 = 315.096
3 m2 = 162883.236
4 D = 63598.009

```

Были получены следующие результаты:

1. Вероятность выхода в завершающий граф узла 100%.
2. Математическое ожидание 315.096.
3. Дисперсия времени выхода процесса в завершающий узел графа 63598.009.

1.2.5 Часть 2

Определим матрицу Q :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{23} & q_{24} & 0 & 0 \\ q_{31} & 0 & 0 & q_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{45} & q_{46} \\ 0 & 0 & q_{53} & 0 & 0 & q_{56} \\ w_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определим матрицу коэффициентов $A = I_6 - Q^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_{31} & 0 & 0 & -w_{61} \\ -q_{12} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_{23} & 1 & 0 & -q_{53} & 0 \\ 0 & -q_{24} & -q_{34} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_{45} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_{46} & -q_{56} & 1 \end{pmatrix}$$

Находим

$$\det(A)$$

далее

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial w_{61}}$$

$$\det(A|w_{61} = 0)$$

Далее можно вывести $W_E(S)$ с помощью формулы:

$$W_E(S) = -\frac{\frac{\partial \det(A)}{\partial w_{61}}}{\det(A|w_{61} = 0)}$$

Для расчетов, был написан matlab скрипт.

Листинг 1.3: Matlab скрипт

```

1 close all; clc;
2 format long g;
3
4 P12 = 1;    M12 = 38;
5 P23 = 0.9; M23 = 19;
6 P24 = 0.1; M24 = 32;
7 P31 = 0.7; M31 = 33;
8 P34 = 0.3; M34 = 20;
9 P45 = 0.2;  M45 = 28;
10 P46 = 0.8;  M46 = 30;
11 P53 = 0.9; M53 = 37;
12 P56 = 0.1; M56 = 43;
13
14 a = 0.4;
15 b = 1.6;
16
17 syms q12
18 syms q23
19 syms q31
20 syms q24
21 syms q34
22 syms q45
23 syms q53
24 syms q46
25 syms q56
26 syms w61
27 syms s
28
29 Q=[0 q12 0 0 0 0;
30     0 0 q23 q24 0 0;
31     q31 0 0 q34 0 0;
32     0 0 0 0 q45 q46;
33     0 0 q53 0 0 q56;
34     w61 0 0 0 0 0];
35
36 A1 = eye(size(Q,1)) - transpose(Q);
37
38 det_A1 = det(A1);
39 fprintf('det_A1 = ');
40 disp(det_A1);
41
42 det_dw=diff(det_A1, w61);
43 fprintf('det_dw = ');
44 disp(det_dw);
45
46 det2_A1=subs(det_A1, w61, 0);
47 fprintf('det2_A1 = ');
48 disp(det2_A1);
49
50 We= -det_dw/det2_A1;
51 fprintf('We = ');
52 disp(We);

```

```

53
54 We=subs(We, q12, P12*((2*(exp((s*b*M12)/2)-exp((s*a*M12)/2)))/((b*M12-a*M12)*s)
    )^2);
55 We=subs(We, q23, P23*((2*(exp((s*b*M23)/2)-exp((s*a*M23)/2)))/((b*M23-a*M23)*s)
    )^2 );
56 We=subs(We, q31, P31*((2*(exp((s*b*M31)/2)-exp((s*a*M31)/2)))/((b*M31-a*M31)*s)
    )^2);
57 We=subs(We, q24, P24*((2*(exp((s*b*M24)/2)-exp((s*a*M24)/2)))/((b*M24-a*M24)*s)
    )^2);
58 We=subs(We, q34, P34*((2*(exp((s*b*M34)/2)-exp((s*a*M34)/2)))/((b*M34-a*M34)*s)
    )^2);
59 We=subs(We, q45, P45*((2*(exp((s*b*M45)/2)-exp((s*a*M45)/2)))/((b*M45-a*M45)*s)
    )^2);
60 We=subs(We, q53, P53*((2*(exp((s*b*M53)/2)-exp((s*a*M53)/2)))/((b*M53-a*M53)*s)
    )^2);
61 We=subs(We, q46, P46*((2*(exp((s*b*M46)/2)-exp((s*a*M46)/2)))/((b*M46-a*M46)*s)
    )^2);
62 We=subs(We, q56, P56*((2*(exp((s*b*M56)/2)-exp((s*a*M56)/2)))/((b*M56-a*M56)*s)
    )^2);
63
64 We = simplify(We);
65 We0 = limit(We, 's', 0);
66 fprintf('We(0) = %.3f\n', double(We0));
67
68 M = We/We0;
69
70 m1 = diff(M, 's',1);
71 m1 = limit(m1, 's', 0);
72 fprintf('me1 = %.3f\n', double(m1));
73
74 m2 = diff(M, 's',2);
75 m2 = limit(m2, 's', 0);
76 fprintf('me2 = %.3f\n', double(m2));
77
78 D = m2 - (m1)^2;
79 fprintf('D = %.3f\n', double(D));

```

Листинг 1.4: Результат

```

1 det_A1 = 1 - q34*q45*q53 - q12*q24*q46*w61 - q12*q24*q31*q45*q53 - q12*q23*q34*
    q46*w61 - q12*q24*q45*q56*w61 - q12*q23*q34*q45*q56*w61 - q12*q23*q31
2
3 det_dw = - q12*q24*q46 - q12*q23*q34*q46 - q12*q24*q45*q56 - q12*q23*q34*q45*
    q56
4
5 det2_A1 = 1 - q34*q45*q53 - q12*q24*q31*q45*q53 - q12*q23*q31
6
7 We = -(q12*q24*q46 + q12*q23*q34*q46 + q12*q24*q45*q56 + q12*q23*q34*q45*q56)
    /(q12*q23*q31 + q34*q45*q53 + q12*q24*q31*q45*q53 - 1)
8
9 We(0) = 1.000
10 m1 = 315.096
11 m2 = 162883.236
12 D = 63598.009

```

Были получены следующие результаты:

1. Вероятность выхода в завершающий граф узла 100%.
2. Математическое ожидание 315.096.
3. Дисперсия времени выхода процесса в завершающий узел графа 63598.009.

Решив задачу с помощью Branch Transmittance Matrix проверяем, что формула Мейсона, дисперсия, математическое ожидание и вероятность выхода совпадают.

1.3 Вывод

В ходе данной лабораторной работы были получены навыки работы с вероятностными графами и их обработка с помощью методики GERT. При заданных значениях вероятности, математического ожидания и дисперсии для каждой дуги исходного были выведены W -функции, получена формула Мейсона и рассчитаны математическое ожидание и дисперсия.

Решив задачу с помощью метода анализа потокового графа получили те же значения.