Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №1

Курс: «Методы оптимизации и принятия решений»

Тема: «Многокритериальная оптимизация»

Выполнил студент:

Волкова Мария Дмитриевна
Группа: 13541/2

Проверил:

Сиднев Александр Георгиевич

Санкт-Петербург
2019 г.

Содержание

Лабораторная работа №1

1.1 Цель работы

Научиться решать задачи по многокритериальной оптимизации.

1.2 Программа работы

1. Осуществить переход от многокритериальной задачи к однокритериальной с использованием следующих подходов:
   - Выделение главного критерия
   - Свертка критериев (аддитивная и мультипликативная)
   - Максимин или минимакс (он же метод максиминной свертки)
   - Метод последовательных уступок
   - fgoalattain
   - Ведение метрики в пространстве критериев
2. Решить задачу стохастического программирования для одной из однокритериальных задач, превратив детерминированное ограничение в вероятностное по схеме

   $$P(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} - b_{ij} \leq 0) \geq a_i$$

   Менять a_i в следующем диапазоне $0.1 \leq a_i \leq 0.9$.

   Считать случайной величиной b_i или элементы $a_{ij}i$-й строки матрицы A (по выбору).

   Разрешается изменить формулировку исходной задачи, придумать собственную задачу, найти другую аналогичную задачу, которая могла бы быть сформулирована как многокритериальная.

1.3 Индивидуальное задание

Задача 5

Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ.

Для производства красок используются два ингредиента: A и B. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы A и B на 1 т соответствующих красок.

Ингридиент	Расход. т		Запас, т
	Краска для наружных работ	Краска для внутренних работ	
А	1	2	6
Б	2	1	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 1-го вида никогда не превышает спроса на краску 2-го вида более, чем на 4 т в сутки. Оптовая цена одной тонны краски равна 3000 рублей для первго вида и 2000 рублей за краску второго вида. Розничная цена одной тонны краски первого вида равно 5500 рублей, а второго вида - 3000 рублей. Выручка от розничной продажи должна быть не менее 60 процентов общей выручки от розничной и оптовой продаж.

Какое количество краски каждого ивда надо производить в условиях ограниченного количества ингридиентов А и В, чтобы доход от оптовой реализации продукции был максимальный? Какое количество краски каждого ивда надо производить, чтобы доход от розничной реализации продукции был максимальный? Какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы остаток ингридиента А на складе был минимальный?

1.3.1 Математическая модель задачи многокритериальной оптимизации

- x_1 - суточный объем краски для наружных работ для оптовой продажи
- x_2 - суточный объем краски для внутренних работ для оптовой продажи
- x_3 - суточный объем краски для наружных работ для розничной продажи
- x_4 - суточный объем краски для внутренних работ для розничной продажи

Ограничения:

1. Расход не превышает запасов
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 8$$
2. Объем производства не отрицательный
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$
3. Ограничение на спрос
$$x_1 + x_3 \leq x_2 + x_4 + 4$$
4. Ограничение по выручке
$$5.5x_3 + 3x_4 \geq 0.6(3x_1 + 2x_2 + 5.5x_3 + 3x_4)$$

Запишем все в систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 8 \\ x_1 + x_3 \leq x_2 + x_4 + 4 \\ 5.5x_3 + 3x_4 \geq 0.6(3x_1 + 2x_2 + 5.5x_3 + 3x_4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Критерии:

1. Максимизация от оптовой продажи
$$F_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to max$$
2. Максимизация от розничной продажи
$$F_2(x_3, x_4) = 5.5x_3 + 3x_4 \to max$$
3. Минимизация остатка ингридиента А
$$F_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6 - x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 \to min$$

1.3.2 Поиск оптимумов частных критериев

Найдем оптимумы каждой из целевых функций независимо от других. Для этого необходимо решить три задачи однокритериальной оптимизации: для z_1, z_2, f_3 при тех же ограничениях на x_1, x_2, x_3, x_4 что имеют место для задачи многокритериальной оптимизации.

Для решение данной задачи, был использован MATLAB.

```
clc; clearvars

f1 = @(X) 3000*X(1)+2000*X(2);
f2 = @(X) 5500*X(3) + 3000*X(4);
f3 = @(X) 6 - X(1) - 2*X(2) - X(3) - 2*X(4) ;

z1 = @(N) -f1(N);
z2 = @(N) -f2(N);

% restrictions
A = [1,2,1,2;
    2,1,2,1;
    1,-1,1,- 1;
    1800 , 1200 , -2200 , -1200];
b = [6; 8; 4; 0];
lb = [0; 0; 0; 0];

% optimize
[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb,[], [],optimset('Display','iter'))
[x_2, z2_opt] = fmincon(z2, lb, A, b, [], [], lb,[], [],optimset('Display','iter'))
[x_3, f3_opt] = fmincon(f3, lb, A, b, [], [], lb,[], [],optimset('Display','iter'))
```

```

                                                    First-order      Norm of
 Iter F-count            f(x)  Feasibility   optimality         step
    0       5   -4.950000e+00    0.000e+00    5.717e-01
    1      10   -6.302886e+00    0.000e+00    5.717e-01    8.520e-01
    2      16   -6.518066e+00    0.000e+00    3.062e-01    1.548e-01
    3      21   -6.691077e+00    0.000e+00    1.001e-01    1.795e-01
    4      26   -6.822780e+00    0.000e+00    8.958e-02    1.415e-01
    5      31   -6.885711e+00    0.000e+00    6.112e-02    4.319e-01
    6      36   -6.892135e+00    0.000e+00    1.998e-02    5.356e-02
    7      41   -6.948929e+00    0.000e+00    6.657e-03    1.295e-01
    8      46   -6.966495e+00    0.000e+00    5.448e-04    5.259e-02
    9      51   -6.966507e+00    0.000e+00    4.001e-05    2.099e-04
   10      56   -6.966665e+00    0.000e+00    1.445e-06    4.322e-04

x_1 =

       1.4333
       1.3333
          1.9
   2.0221e-06

z1_opt =

      -6.9667



                                                    First-order      Norm of
 Iter F-count            f(x)  Feasibility   optimality         step
    0       5   -8.415000e+00    0.000e+00    3.923e+00
    1      10   -1.357578e+01    0.000e+00    3.854e+00    1.239e+00
    2      15   -2.178396e+01    0.000e+00    2.797e+00    1.905e+00
    3      21   -2.165480e+01    0.000e+00    1.359e+00    7.020e-02
    4      27   -2.187350e+01    0.000e+00    6.853e-01    7.249e-02
    5      32   -2.200738e+01    0.000e+00    1.008e-01    8.503e-02
    6      37   -2.229160e+01    0.000e+00    2.894e-02    1.370e-01
    7      42   -2.233249e+01    0.000e+00    3.640e-03    1.341e-01
    8      47   -2.233253e+01    0.000e+00    2.007e-04    2.224e-04
    9      52   -2.233333e+01    0.000e+00    1.312e-05    8.979e-04
   10      57   -2.233333e+01    0.000e+00    4.000e-07    3.718e-06
```

```
x_2 =

   7.2727e-08
   1.3333e-07
       3.3333
       1.3333

z2_opt =

      -22.333



                                                         First-order      Norm of
 Iter F-count            f(x)  Feasibility   optimality         step
    0       5    6.000000e-02    0.000e+00    5.981e-02
    1      10    5.049996e-03    0.000e+00    5.034e-03    1.774e-02
    2      15    9.689612e-04    0.000e+00    4.969e-03    8.163e-03
    3      20    9.992642e-04    0.000e+00    4.181e-03    2.909e-02
    4      25    9.994618e-04    0.000e+00    2.503e-03    7.972e-02
    5      30    9.995901e-04    0.000e+00    1.350e-03    1.781e-01
    6      35    2.002702e-04    0.000e+00    2.360e-04    6.194e-02
    7      40    2.011916e-06    0.000e+00    7.092e-06    3.342e-03
    8      45    1.999949e-06    0.000e+00    7.097e-06    2.785e-02
    9      50    1.999966e-06    0.000e+00    7.111e-06    9.423e-02
   10      55    1.999985e-06    0.000e+00    7.101e-06    1.834e-01
   11      60    1.999997e-06    0.000e+00    2.000e-06    1.330e-01

x_3 =

      0.48418
       0.7245
       1.4535
       1.3066

f3_opt =

        2e-06
```

1. Максимизация дохода от оптовой продажи
   - 1.4333 -объем краски для наружных работ для оптовой продажи
   - 1.3333 - объем краски для внутренних работ для оптовой продажи
   - 1.9 - объем краски для наружных работ для розничной продажи
   - 2.0221e-06 - объем краски для внутренних работ для розничной продажи
   - 6966.7 рублей дохода с оптовой продажи
2. Максимизация дохода от розничной продажи
   - 7.2727e-08 -объем краски для наружных работ для оптовой продажи
   - 1.3333e-07 - объем краски для внутренних работ для оптовой продажи
   - 3.3333 - объем краски для наружных работ для розничной продажи
   - 1.3333 - объем краски для внутренних работ для розничной продажи
   - 22333 рублей дохода с розничной продажи
3. Минимизация остатка ингридиента A
   - 0.48418 - -объем краски для наружных работ для оптовой продажи
   - 0.7245- объем краски для внутренних работ для оптовой продажи
   - 1.4535- объем краски для наружных работ для розничной продажи
   - 1.3066 - объем краски для внутренних работ для розничной продажи
   - 2e-06 - остаток ингридиента A (0.000002 тонны = 2 грамма)

1.4 Переход от многокритериальной задачи к однокритериальной

1.4.1 Выделение главного критерия

Один из критериев - главный - имеет существенно более высокий приоритет, чем все остальные, но по остальным критериям вариант тоже не должен быть слишком плох. Пусть главный критерий - второй, следовательно, для оставшихся целевых функций необходимо указать нижние границы. Теперь, прибыль от оптовой продажи должна быть большее 5000 рублей, а остаток ингридиента A должен быть не больше 0.001 (1 кг).

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 \leq 5.999$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 5000$$

В соответствии с изменениями скрипт был дополнен ограничениями.

```
clc; clearvars

f = @(X) 5.5*X(3) + 3*X(4);

z = @(N) -f(N);

%
A = [1,2,1,2;
     2,1,2,1;
     1,-1,1,- 1;
     1.8  , 1.2  , -2.2  , -1.2;
     -3,-2,0,0;
     -1,-2,-1,-2];
b = [6; 8; 4; 0; -5; 5.999];

%
[x, opt] = fmincon(z, [0; 0; 0; 0], A, b, [], [], [0; 0; 0; 0],[], [],optimset('Display','ite
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
x =    0.77778
       1.3333
       2.5556
        3e-06

opt = -14.056
```

Таким образом было получено значение в 8233.3$, что составляет 89% от оптимума. Время использования станков - 1950 часов(упор в ограничение), доход на внешнем рынке - 1000$(упор в ограничение).

- 0.77778 - объем краски для наружных работ для оптовой продажи
- 1.3333 - объем краски для внутренних работ для оптовой продажи
- 2.5556 - объем краски для наружных работ для розничной продажи
- 0.000003 - объем краски для внутренних работ для розничной продажи
- 14056 рублей доход от розничной продажи

Таким образом общий доход состовляет 19056 рублей, доход от оптовой торговли 5000 рублей, остаток ингридиента A 0.000014 тонны (14 грамм),

1.4.2 Свертка критериев

Аддитивная свертка критериев

Для использования метода аддитивной свертки необходимо выполнить нормировку критериев, с тем чтобы сделать их значения соизмеримыми, а единицы измерения – безразмерными. Выполним нормировку следующим образом:

$$\overline{z_1} = \frac{z_1}{|z_1^{min}|} = -\frac{3x_1 + 2x_2}{6.966} \tag{1.1}$$

$$\overline{z_2} = \frac{f_2}{|f_2^{min}|} = \frac{5.5x_3 + 3x_4}{22.333} \tag{1.2}$$

$$\overline{f_3} = \frac{z_3}{|z_3^{min}|} = \frac{6 - x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4}{0.000002} \tag{1.3}$$

Формула аддитивной свертки имеет вид:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i(x), 0 < \lambda_i < 1, \sum_i \lambda_i = 1, \tag{1.4}$$

где $f_i(x)$ - критерии оптимальности, r – их общее число, а λ_i - параметры важности.

```
clc; clearvars

f1 = @(X) 3*X(1)+2*X(2);
f2 = @(X) 5.5*X(3) + 3*X(4);
f3 = @(X) 6 - X(1) - 2*X(2) - X(3) - 2*X(4) ;

z1 = @(N) -f1(N);
z2 = @(N) -f2(N);

A = [1,2,1,2;
    2,1,2,1;
    1,-1,1,- 1;
    1.8 , 1.2 , -2.2 , -1.2];
b = [6; 8; 4; 0];

lb = [0; 0; 0; 0];

[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb);
[x_2, z2_opt] = fmincon(z2, lb, A, b, [], [], lb);
[x_3, f3_opt] = fmincon(f3, lb, A, b, [], [], lb);


% add convolution
z1_norm = @(N) z1(N)/abs(z1_opt);
f2_norm = @(N) z2(N)/abs(z2_opt);
z3_norm = @(N) f3(N)/abs(f3_opt);

f = @(N) 0.4*z1_norm(N) +0.2*f2_norm(N) + 0.4*z3_norm(N);

A = [1,2,1,2;
    2,1,2,1;
    1,-1,1,- 1;
    1.8 , 1.2 , -2.2 , -1.2;
    -3,-2,0,0;
    -1,-2,-1,-2];
b = [6; 8; 4; 0; -5; 5.999];

[N, f_opt] = fmincon(f, lb, A, b, [], [], lb,[], [],optimset('Display','iter'))
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```

                                            First-order      Norm of
 Iter F-count            f(x)  Feasibility   optimality         step
    0       5    2.999566e+03    5.000e-02    7.363e+02
    1      10   -6.447386e-02    0.000e+00    7.966e+00    1.091e-01
    2      15   -4.457773e-01    0.000e+00    8.620e-01    2.832e-02
    3      20   -4.995092e-01    0.000e+00    5.701e-01    4.361e-01
    4      25   -5.760184e-01    0.000e+00    3.939e-01    6.329e-01
    5      30   -5.764319e-01    0.000e+00    1.227e-02    4.336e-03


N =     1.468
      0.67023
```

```
      1.8653
     0.66311

f_opt = -0.57643

>> f1(N)
ans = 5.7446

>> f2(N)
ans = 12.248

>> f3(N)
ans = 4.8547e-11
```

Метод аддитивной свертки позволил получить решение:

- f_1 - 5744.6 сумма дохода от оптовой продажи
- f_2 - 12248 сумма дохода от розничной продажи
- f_3 - 0.000000000048547 остаток ингридиента A

Мультипликативная свертка критериев

Формула мультипликативной свертки имеет вид:

$$F(x) = \prod_{i=1}^{r} f_i(x)^{\lambda_i} \tag{1.5}$$

где $f_i(x)$ - критерии оптимальности, r - их общее число, а λ_i - показатели важности. Нормировка уже была произведена в аддитивной свертки, в итоге получим следующую задачу однокритериальной оптимизации:

$$f = \overline{z_1}^{0.3} * \overline{z_2}^{0.3} * \overline{f_3}^{0.4} \tag{1.6}$$

```
clc; clearvars

f1 = @(X) 3*X(1)+2*X(2);
f2 = @(X) 5.5*X(3) + 3*X(4);
f3 = @(X) 6 - X(1) - 2*X(2) - X(3) - 2*X(4) ;

z1 = @(N) -f1(N);
z2 = @(N) -f2(N);

%
A = [1,2,1,2;
    2,1,2,1;
    1,-1,1,- 1;
    1.8 , 1.2 , -2.2 , -1.2;
    -3,-2,0,0;
    -1,-2,-1,-2];
b = [6; 8; 4; 0; -5; 5.999];

%
lb = [0; 0; 0; 0];


f = @(N) ((f1(N)/6.9667)^0.3)*((f2(N)/22.333)^0.3)*((f3(N)/0.00002)^0.4)

[N, f_opt] = fmincon(f, lb, A, b, [], [], lb,[], [],optimset('Display','iter'))

f1(N)
f2(N)
f3(N)
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
                                                   First-order      Norm of
 Iter F-count            f(x)  Feasibility   optimality         step
    0       5    1.656357e+01     5.000e-02    9.420e-01
    1      10    9.229170e+00     0.000e+00    2.726e+02    2.176e-01
Objective function returned complex; trying a new point...
    2      16    5.916115e+00     0.000e+00    6.152e+02    1.727e-02
Objective function returned complex; trying a new point...
    3      22    1.135423e+00     0.000e+00    1.090e+04    1.113e-02
    4      31    7.887753e-01     0.000e+00    2.783e-01    1.589e-02
    5      36    2.594208e-01     0.000e+00    8.759e+04    3.742e-01
    6      45    2.586715e-01     0.000e+00    1.115e+00    1.364e+00
    7      50    1.895838e-01     0.000e+00    6.314e+04    5.109e-02
    8      55    1.545341e-01     0.000e+00    1.273e+05    1.064e-02
    9      58    5.498348e-02     0.000e+00    5.427e+03    3.880e-04

N = 0.1818
    2.2273
    1.3636
    0.0000

f_opt = 0.0550

ans = 5.0000

ans = 7.5000

ans = 4.1216e-08
```

Результат:

- 5000 доход от оптовой продажи
- 7500 доход от розничной продажи
- 0.00000004 тонны остатка на скалде

Эта свертка привела к очень плохому результату f3, что, возможно, являеться результатом расставления коэффициентов λ .

1.4.3 Минимакс (максимин)

Максиминную свертку представим в следующем виде: $C_i(a) = \min w_i C_i(a)$

Решение a^* является наилучшим, если для всех a выполняется условие $C(a^*) \geq C(a)$, или $a^* = \arg\max C(a) = \arg\max\min w_i C_i(a)$.

Для реализации максиминной свертки необходимо в fminimax передавать функции обратные целевым (функция funminmax). Так как оцениваемые показатели разновелики, необходимо нормировать критерии. Что было произведено ранее.

```
clc; clearvars

f1 = @(X) 3*X(1)+2*X(2);
f2 = @(X) 5.5*X(3) + 3*X(4);
f3 = @(X) 6 - X(1) - 2*X(2) - X(3) - 2*X(4) ;

z1 = @(N) -f1(N);
z2 = @(N) -f2(N);

%
A = [1,2,1,2;
    2,1,2,1;
    1,-1,1,- 1;
    1.8 , 1.2 , -2.2 , -1.2;
    -3,-2,0,0;
    -1,-2,-1,-2];
b = [6; 8; 4; 0; -5; 5.999];
```

```
%
lb = [0; 0; 0; 0];

[x, f] = fminimax (@funminmax, lb, A, b, [], [], lb,[], [],optimset('Display','iter'))
f1(x)
f2(x)
f3(x)
function f = funminmax (X)
f(1) = -(3*X(1)+2*X(2))/6.9667;
f(2) = -(5.5*X(3) + 3*X(4))/22.333;
f(3) = (6 - X(1) - 2*X(2) - X(3) - 2*X(4))/0.000002;
end
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
                    Objective         Max      Line search      Directional
 Iter  F-count          value    constraint    steplength       derivative    Procedure
    0       6               0        3e+06
    1      13       5.821e-10            0             1         2.99e-10
    2      20      -3.793e-05    3.793e-05             1         -0.00622
    3      27      -6.404e-05    6.404e-05             1         -0.00158    Hessian modified
    4      34      -6.061e-06    6.061e-06             1          0.00975    Hessian modified
    5      41      -2.327e-07    2.325e-07             1           0.0353    Hessian modified tw

x =
    0.9324
    1.1075
    0.8155
    1.0186


f =
   -0.7194   -0.3377   -0.0000

ans =
    5.0121

ans =
    7.5411

ans =
  -4.4409e-16
```

Результат:

- 5012 доход от оптовой продажи
- 7541.1 доход от розничной продажи
- 0.0000000000000004409 тонны остатка на скалде

Процентное соотношение первого и второго критерия относительно оптимума примерно равное, второй критерий по сути игнорируется.

1.4.4 Метод последовательных уступок

Для решения данной задачи была выбрана уступка = 10%. Предположим, что критерии пронумерованы в следующем порядке важности:

$$z_1 > z_2 > f_3$$

Для первого критерия уже решена задача поиска оптимального значения в п 1.2.1. То есть:

$$6966.7 * 0.9 = 6270.03$$

То ограничения критерия выглядит следующим образом:

$$-0 * x_1 - 2 * x_2 \leq -6270.03$$

Запишем ограничения в скрипт

```
clc; clearvars

f1 = @(X) 3000*X(1)+2000*X(2);
f2 = @(X) 5500*X(3) + 3000*X(4);
f3 = @(X) 6 - X(1) - 2*X(2) - X(3) - 2*X(4) ;

z1 = @(N) -f1(N);
z2 = @(N) -f2(N);

%
A = [1,2,1,2;
    2,1,2,1;
    1,-1,1,- 1;
    18000 , 12000 , -22000 , -12000;
    -3,-2,0,0];
b = [6; 8; 4; 0;-1.2366];

%
lb = [0; 0; 0; 0];

%
[x_3, f3_opt] = fmincon(f3, lb, A, b, [], [], lb,[], [],optimset('Display','iter'))
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
                                               First-order      Norm of
 Iter F-count            f(x)  Feasibility   optimality         step
    0       5    6.000000e-02    0.000e+00    5.980e-02
    1      10    6.610707e-03    0.000e+00    6.588e-03    1.731e-02
    2      15    9.587832e-04    0.000e+00    5.499e-03    1.925e-03
    3      20    9.995050e-04    0.000e+00    1.945e-03    3.025e-03
    4      25    2.003025e-04    0.000e+00    8.061e-04    6.447e-03
    5      30    1.999767e-04    0.000e+00    6.715e-04    2.740e-02
    6      35    1.999781e-04    0.000e+00    3.636e-04    6.986e-02
    7      40    4.001334e-05    0.000e+00    4.306e-05    2.814e-02
    8      45    4.008279e-07    0.000e+00    4.869e-07    1.684e-03

x_3 = 0.90505
      0.95746
        1.0711
        1.0545


f3_opt = 4.0083e-07

>> f1(x_3)
ans =  4630.1
```

Как и ожидалось при минимизации функции z_3 учитывалось и ограничения для z_1, что существенное уменьшило результат для z_3.

В соответствии с полученным значением введем ограничение для второго критерия.

$$0.00000040083 * 0.9 = 3.6074710^-7$$

Ограничения критерия выглядит следующим образом:

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 \leq -3.60747 * 10^-7$$

```
clc; clearvars

f1 = @(X) 3000*X(1)+2000*X(2);
f2 = @(X) 5500*X(3) + 3000*X(4);
f3 = @(X) 6 - X(1) - 2*X(2) - X(3) - 2*X(4) ;

z1 = @(N) -f1(N);
```

```
z2 = @(N) -f2(N);

%
A = [1,2,1,2;
    2,1,2,1;
    1,-1,1,- 1;
    18000 , 12000 , -22000 , -12000;
    -3,-2,0,0;
    -1,-2,-1,-2];
b = [6; 8; 4; 0;-1.2366; -0.000000360747];

%
lb = [0; 0; 0; 0];

%
[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb,[], [],optimset('Display','iter'))
[x_2, z2_opt] = fmincon(z2, lb, A, b, [], [], lb,[], [],optimset('Display','iter'))
[x_3, f3_opt] = fmincon(f3, lb, A, b, [], [], lb,[], [],optimset('Display','iter'))
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```

                                              First-order      Norm of
 Iter F-count            f(x)  Feasibility   optimality         step
    0       5    -8.415000e+03    0.000e+00    3.987e+03
    1      10    -1.105920e+04    0.000e+00    3.596e+03    1.101e+00
    2      15    -1.983224e+04    0.000e+00    3.583e+03    2.265e+00
    3      20    -2.043509e+04    0.000e+00    3.022e+00    2.613e-01
    4      25    -2.047784e+04    0.000e+00    2.497e-01    5.502e-02
    5      30    -2.047843e+04    0.000e+00    1.243e-03    2.242e-04


x_2 = 7.3771e-07
       0.6183
       3.3333
      0.71503

z2_opt   = -20478

>> f1(x_1)
ans =   6966.7

>> f3(x_3)
ans =   4.0108e-07
```

Результат:

- 6966.7 доход от оптовой продажи
- 20478 доход от розничной продажи
- 0.00000040108 тонны остатка на скалде

По результатам видно, что за счет последовательности, при оптимизации каждого следующего критерия учитываются и уступка предыдущих критериев.

1.4.5 Метод достижения цели (fgoalattain)

Fgoalattain решает задачу достижения цели, которая является одной из формулировок задач для векторной оптимизации. x = fgoalattain(fun, x_0, goal, weight, ...):

- fun – целевая функция,
- x_0 – начальные значения,
- goal – целевые значения,
- weight – веса.

Пусть goal $= (z_1^{min}, f_2^{min}, z_3^{min})$, w $= (|z_1^{min}|, |f_2^{min}|, |z_3^{min}|)$. Тогда скрипт для решения задачи будет выглядеть следующим образом:

```
clc; clearvars

f1 = @(X) 3*X(1)+2*X(2);
f2 = @(X) 5.5*X(3) + 3*X(4);
f3 = @(X) 6 - X(1) - 2*X(2) - X(3) - 2*X(4) ;

z1 = @(N) -f1(N);
z2 = @(N) -f2(N);

%
A = [1,2,1,2;
    2,1,2,1;
    1,-1,1,- 1;
    1.8 , 1.2 , -2.2 , -1.2];
b = [6; 8; 4; 0];

%
lb = [0; 0; 0; 0];

%
[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb);
[x_2, z2_opt] = fmincon(z2, lb, A, b, [], [], lb);
[x_3, f3_opt] = fmincon(f3, lb, A, b, [], [], lb);

% fgoalattain
f = @(N) [z1(N), z2(N), f3(N)];
goal = [z1_opt, z2_opt, f3_opt];
w = abs(goal);

A = [1,2,1,2;
    2,1,2,1;
    1,-1,1,- 1;
    1.8 , 1.2 , -2.2 , -1.2];
b = [6; 8; 4; 0];

[N, f_opt, af] = fgoalattain(f, lb, goal, w, A, b, [], [], lb, [], [],optimset('Display','ite
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```

                       Attainment        Max      Line search     Directional
 Iter  F-count            factor    constraint    steplength      derivative    Procedure
    0      6                   0         3e+06
    1     13              0.6389     0.0009599             1           0.317
    2     20              0.5859             0             1          -0.223     Hessian modified
    3     27              0.5354     0.0005027             1          -0.158     Hessian modified tw
    4     34              0.5162     1.476e-10             1          -0.158     Hessian modified tw



N =

      0.49627
      0.99253
       1.3817
       1.0685



f_opt =

      -3.4739       -10.805    7.9426e-07



af =

```

```
      0.5162
```

Значение переменной af, говорит о том, что полученное решение на 51.62% хуже цели.
Результат:

- 3473.9 доход от оптовой продажи
- 10805 доход от розничной продажи
- 0.00000079426 тонны остатка на скалде

1.4.6 Введение метрики в пространстве критериев

Для перехода к однокритериальной задаче оптимизации методом введения метрики в пространстве целевых функций необходимо определить координаты «идеальной» точки $a = (f_1^*, f_2^*, ..., f_r^*)$, где $f_i = min f_i(x)$. Эти значения уже были получены в п. 1.2.1, и поэтому:

$$a = (-6966.7, 22333, 0.0000002)$$

Введем в пространстве критериев метрику в виде евклидова расстояния:

$$p(y, a) = [\sum_{i=1}^{r} (a_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{1.7}$$

Тогда за целевую функцию (обобщенный критерий), с учётом необходимости нормировки, можно взять выражение:

$$f = \sum_{i=1}^{r} (\frac{a_i - f_i}{f_i^*})^2 = \sum_{i=1}^{r} (1 - \frac{f_i}{f_i^*})^2 \tag{1.8}$$

Таким образом, получаем следующую задачу оптимизации:

$$f = (1 - \frac{z_1}{z_1^{min}})^2 + (1 - \frac{z_2}{z_2^{min}})^2 + (1 - \frac{f_3}{f_3^{min}})^2 \tag{1.9}$$

```
clc; clearvars

f1 = @(X) 3*X(1)+2*X(2);
f2 = @(X) 5.5*X(3) + 3*X(4);
f3 = @(X) 6 - X(1) - 2*X(2) - X(3) - 2*X(4) ;

z1 = @(N) -f1(N);
z2 = @(N) -f2(N);

%
A = [1,2,1,2;
    2,1,2,1;
    1,-1,1,- 1;
    1.8 , 1.2 , -2.2 , -1.2];
b = [6; 8; 4; 0];

%
lb = [0; 0; 0; 0];

%
[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb);
[x_2, z2_opt] = fmincon(z2, lb, A, b, [], [], lb);
[x_3, f3_opt] = fmincon(f3, lb, A, b, [], [], lb);

f = @(N) (1-z1(N)/z1_opt)^2+(1-z2(N)/z2_opt)^2+(1-f3(N)/f3_opt)^2;
[N, f_opt] = fmincon(f, lb, A, b, [], [], lb, [],[],optimset('Display','iter'))
```

После выполнения программы были получены следующие результаты:

```
                                          First-order      Norm of
 Iter F-count            f(x)  Feasibility   optimality         step
    0       5    8.999430e+08    0.000e+00    1.491e+08
```

```
     1      10    3.900771e+08    3.950e-02    3.956e+10    5.247e-02
     2      15    3.644136e+08    3.818e-02    3.824e+10    1.479e+00
     3      20    2.056525e+05    0.000e+00    3.795e+03    7.357e-01
     4      25    2.052122e+05    0.000e+00    9.735e+05    5.228e-02
     5      30    8.060028e+04    0.000e+00    3.219e+08    7.905e-01
     6      35    7.948621e+04    0.000e+00    3.220e+08    3.778e-02
     7      40    2.691802e+04    0.000e+00    5.255e+08    4.529e-01
     8      45    2.689503e+04    0.000e+00    9.258e+07    5.402e-04
     9      50    2.799711e+03    0.000e+00    1.258e+08    2.256e-01
    10      55    1.645051e+03    0.000e+00    1.503e+08    4.163e-01
    11      60    1.644845e+03    0.000e+00    1.194e+08    9.591e-04
    12      65    1.601568e+03    0.000e+00    1.172e+07    1.021e-02
    13      70    5.738848e+02    0.000e+00    1.081e+07    9.829e-02
    14      75    5.684260e+02    0.000e+00    3.286e+06    6.122e-03
    15      80    1.736093e+02    0.000e+00    2.183e+06    2.325e-01
    16      85    3.699605e+01    0.000e+00    4.873e+03    2.375e-02
    17      90    8.035343e+00    0.000e+00    6.670e+04    1.748e-02
    18      95    1.555337e+00    0.000e+00    2.262e+05    1.722e-02
    19     100    3.944559e-01    0.000e+00    2.917e+05    1.450e-02
    20     105    2.892920e-01    0.000e+00    3.107e+05    1.112e-02
    21     142    2.892920e-01    0.000e+00    6.559e+04    2.009e-10

N =

       1.6603
      0.95498
        1.673
      0.37835


f_opt =

      0.28929

>> f1(N)
ans = 6.891

>> f2(N)
ans = 10.337

>> f3(N)
ans =   1.9501e-06
```

Результат:

- 6891 доход от оптовой продажи
- 10337 доход от розничной продажи
- 0.0000019501 тонны остатка на скалде

1.5 Оценка Парето-оптимальности полученных решений

Для того чтобы уменьшить количество альтернатив, среди которых лицо, принимающее решение (ЛПР), должно сделать выбор, можно выделить множество Парето среди всех полученных решений. Для этого была составлена таблица и построен график.

Парето-оптимальным являются решение в точке (19056;0.0000004).

1.6 Решение задачи стохастического программирования

Рассмотрим задачу стохастического программирования на основе задачи однокритериальной оптимизации, которая была получена из исходной методом введения метрики в пространстве критериев.

Преобразуем второе ограничение системы:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 8$$

Метод	f$_1$	f$_2$	f$_3$	f$_1 + f_2$
Выделение главного критерия	5000	14055	0.0000004	19056
Аддитивная свертка	5744.6	12248	0.000000000048547	17992,6
Мультипликативная свертка	5000	7500	0.00000004	12500
Минимакс	5012.1	7541.1	0.0000000000000004409	12553.2
Метод последовательных уступок	6966.7	20478	0.00000040108	27444,7
fgoalattain	3473.9	10805	0.00000079426	14278,9
Введение метрики в пространстве критериев	6981	10337	0.0000019501	17318

в вероятностное, тогда:

$$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \leq 8) \geq \alpha$$

где все a_i нормально распределены и имеют следующие математические ожидания и дисперсии:

$$M(\alpha_1) = 2, M(\alpha_2) = 1, M(\alpha_3) = 2, M(\alpha_4) = 1 \; D(\alpha_1) = 1, D(\alpha_2) = 1, D(\alpha_3) = 1, D(\alpha_4) = 1$$

Где СКО равно половине математического ожидания. По таблице функции распределения стандартного нормального закона находим $K_a(0.1 \leq \alpha \leq 0.9)$

$$K_{0.1} = -1.2816, K_{0.2} = -0.8416, K_{0.3} = -0.5244, K_{0.4} = -0.2533, K_{0.5} = 0$$
$$K_{0.6} = 0.2533, K_{0.7} = 0.5244, K_{0.8} = 0.8416, K_{0.9} = 1.2816$$

Таким образом, вероятностное ограничение становится эквивалентно детерминированному неравенству:

$$2x_1 + x_2 + 2 * x_3 + x_4 + K_\alpha * \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \leq 8 \tag{1.10}$$

Решение задачи представлено как скрипт в программе Matlab

```
clc; clearvars

f1 = @(X) 3*X(1)+2*X(2);
f2 = @(X) 5.5*X(3) + 3*X(4);
f3 = @(X) 6 - X(1) - 2*X(2) - X(3) - 2*X(4) ;
z1 = @(N) -f1(N);
z2 = @(N) -f2(N);

A = [1,2,1,2;
    2,1,2,1;
    1,-1,1,- 1;
    1.8 , 1.2 , -2.2 , -1.2];
b = [6; 8; 4; 0];

lb = [0; 0; 0; 0];

[x_1, z1_opt] = fmincon(z1, lb, A, b, [], [], lb);
[x_2, z2_opt] = fmincon(z2, lb, A, b, [], [], lb);
[x_3, f3_opt] = fmincon(f3, lb, A, b, [], [], lb);

f = @(N) (1-z1(N)/z1_opt)^2+(1-z2(N)/z2_opt)^2+(1-f3(N)/f3_opt)^2;

options = optimoptions('fmincon','Display','none');

alpha = 0.1:0.1:0.9;
Ka = icdf('Normal', alpha, 0, 1); %                                    N(0,1)
global K
global m1; global m2; global m3; global m4
global d1; global d2; global d3; global d4
m1=2;m2=1;m3=2;m4=1;
d1=1;d2=1;d3=1;d4=1;

[Ndet, ~] = fmincon(f, lb,[2,1,2,1; A], [8; b], [], [], lb, [], [], options);

N = zeros(4,numel(alpha));
for i = 1:numel(alpha)
```

```
 K = Ka(i);
 [N(:,i), ~] = fmincon(f, lb, ...
 A, b, [], [], lb, [], @nonlin, options);
end
%%
F1 = cellfun(f1, num2cell(N,1));
F2 = cellfun(f2, num2cell(N,1));
F3 = cellfun(f3, num2cell(N,1));

function [c, ceq] = nonlin(N)
global K;
global m1; global m2; global m3; global m4
global d1; global d2; global d3; global d4
  c = m1*N(1)+m2*N(2) + m3*N(3)+m4*N(4) + K*sqrt(d1*N(1)^2 + d2*N(2)^2 + d3*N(3)^2 + d4*N(4)^
 ceq = [];
end
```

Результаты выполнения программы приведены в таблице:

a	x_1	x_2	x_3	x_4	f_1	f_2	f_3
0.1	1.6668	0.0000	1.6547	1.339	5.00	13	0.00
0.2	1.4141	1.3244	1.9069	0.015	6.89	11	0.00
0.3	1.5812	1.0823	1.7464	0.254	6.91	10	0.00
0.4	2.2318	0.0003	1.0981	1.335	6.70	10	0.00
0.5	1.6511	0.4623	1.6797	0.872	5.88	12	0.00
0.6	1.4688	0.7653	1.4689	0.766	5.94	10	0.00
0.7	1.2848	0.8575	1.2848	0.858	5.57	10	0.00
0.8	1.0915	0.9543	1.0915	0.954	5.18	9	0.00
0.9	0.8401	1.0800	0.8401	1.080	4.68	8	0.00

Задача чувствительна к выбранному ограничению, т.к. для различных K получились разные результаты.

Увеличение доверительной вероятности α приводит к ухудшению оценок получаемых решений по первому и второму критерию.

При $\alpha < 0.5$ квантиль приобретает отрицательное значение. За счет чего ограничения **ослабевают**(их выполнение становится менее важным), и например решение при $\alpha = 0.5$ практические совпадает с оптимум для первого и второго критерия одновременно.

А при $\alpha > 0.5$ ограничения становяться более **жесткими**, что уменьшает общий доход.

Значение третьего критерия получить не удалось, так как решение чувствительно до 4 знаков после запятой.