Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №4

Курс: «Методы оптимизации и принятия решений»

Тема: «Анализ GERT-сети»

Выполнил студент:

Волкова Мария Дмитриевна
Группа: 13541/2

Проверил:

Сиднев Александр Георгиевич

Санкт-Петербург
2019 г.

Содержание

Лабораторная работа №4

1.1 Задание

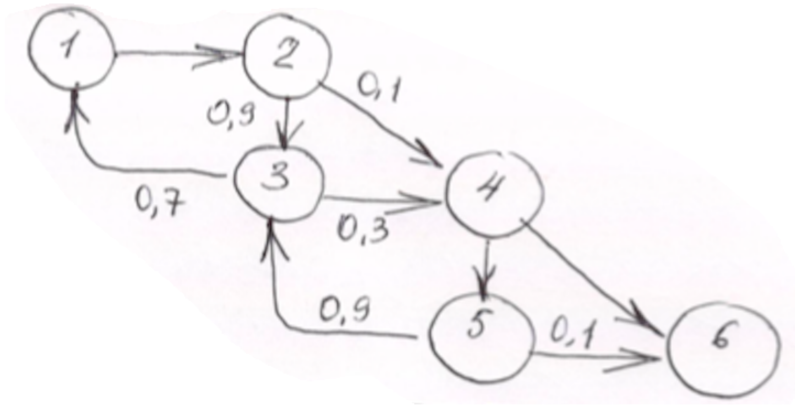

Рис. 1.1: Исходный граф системы

Часть 1

Каждой дуге (ij) поставлены в соответствие следующие данные:

- закон распределения времени выполнения работы (будем считать его нормальным);
- параметры закона распределения; (математическое ожидание M и дисперсия D).
- вероятность P_{ij} выполнения работы, показанная на графе.

Необходимо найти:

- вероятность выхода в завершающий узел графа (для всех вариантов узел 6);
- математическое ожидание;
- дисперсию времени выхода процесса в завершающий узел графа;
- начальные моменты первых 10 порядков.

В отчете перечислить все петли всех порядков, обнаруженные на графе, выписать уравнение Мейсона, получить решение для $W_E(s)$ и найти требуемые параметры.

Часть 2

Решить задачу используя методику анализа потокового графа, основанную на обработке матрицы передач (Branch Transmittance Matrix).

1.2 Ход работы

1.2.1 Построение замкнутой GERT-сети

Чтобы определить эквивалентную W-функцию для анализируемой GERT-сети, необходимо замкнуть сеть дугой, исходящей из узла 6 в узел 1:

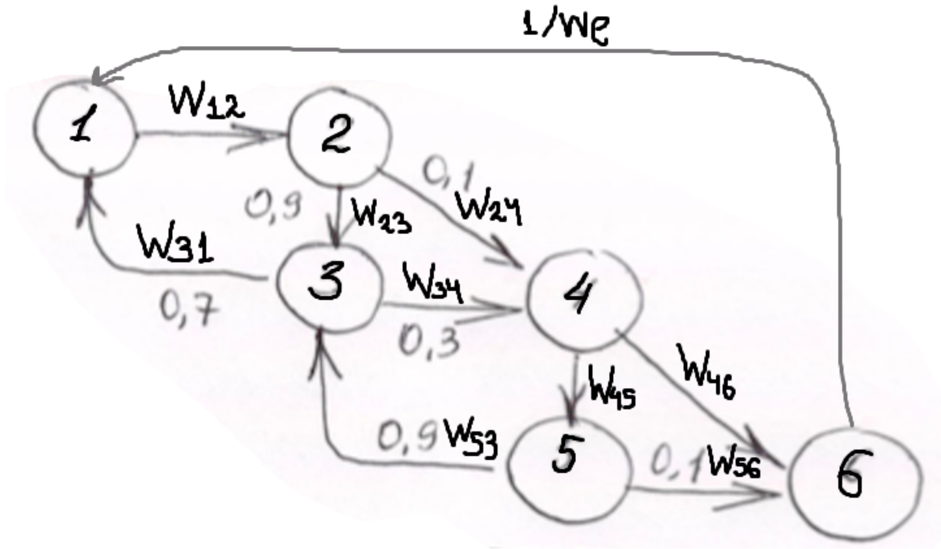

Рис. 1.2: Замкнутая GERT-сеть

1.2.2 Построение W-функции

Найдем W-функции для дуг GERT-сети:

Начало	Конец	Вероятность	M	D	W-функция
1	2	1	38	16	$1 \cdot e^{38s+8s^2}$
2	4	0.1	32	16	$0.1 \cdot e^{32s+8s^2}$
4	6	1	30	16	$1 \cdot e^{30s+8s^2}$
5	6	0.1	43	25	$0.1 \cdot e^{43s+12.5s^2}$
4	5	1	28	16	$1 \cdot e^{28t+8s^2}$
5	3	0.9	37	16	$0.9 \cdot e^{37s+8s^2}$
3	4	0.3	20	9	$0.3 \cdot e^{20s+4.5s^2}$
2	3	0.9	19	9	$0.9 \cdot e^{19s+4.5s^2}$
3	1	0.7	33	16	$0.7 \cdot e^{33s+8s^2}$

1.2.3 Построение уравнения Мейсона

Петли первого порядка:
$W_{12} \cdot W_{23} \cdot W_{31}$
$W_{34} \cdot W_{45} \cdot W_{53}$
$W_{12} \cdot W_{24} \cdot W_{45} \cdot W_{53} \cdot W_{31}$
$W_{12} \cdot W_{24} \cdot W_{46} \cdot \frac{1}{W_E}$
$W_{12} \cdot W_{23} \cdot W_{34} \cdot W_{45} \cdot W_{56} \cdot \frac{1}{W_E}$
Петлей второго порядка на графе нет.

Таким образом уравнение Мейсона будет иметь следующий вид:
$H = 1 - W_{12}W_{23}W_{31} - W_{12}W_{24}W_{45}W_{53}W_{31} - W_{34}W_{45}W_{53} - W_{12}W_{24}W_{46}\frac{1}{W_E} - W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{56}\frac{1}{W_E}$

В результате эквивалентная W-функция равняется:
$W_E(s) = -\frac{W_{12}W_{24}W_{45}+W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{56}}{W_{12}W_{23}W_{31}+W_{12}W_{24}W_{45}W_{53}W_{31}+W_{34}W_{45}W_{53}-1}$

1.2.4 Рассчет статистических значений

Расчет математического ожидания (μ_{1E}) и дисперсии (σ_E) производится по следующим образом:
$W_E(s) = p_E \cdot M_E(s), p_E = W_E(0) \Longrightarrow M_E(s) = \frac{W_E(s)}{W_E(0)}$
$\mu_{1E} = \frac{dM_E(s)}{ds}|s = 0$
$\mu_{2E} = \frac{d^2M_E(s)}{ds^2}|s = 0$
$\sigma_E = \mu_{2E} - \mu_{1E}^2$

Разработаем скрипт для расчета статистических значений в среде MATLAB:

Листинг 1.1: Matlab скрипт

```
clear all;
close all;
clc;
format long g;

syms s;

% W-functions
W12 = 0.5 * exp(10*s + 8 * s^2);
W16 = 0.5 * exp(23 * s + 312.5 * s^2);
W22 = 0.2 * exp(13 * s + 128 * s^2);
W26 = 0.8 * exp(11 * s + 128 * s^2);
W35 = 1 * exp(10 * s + 40.5 * s^2);
W41 = 0.4 * exp(37 * s + 128 * s^2);
W43 = 0.3 * exp(12 * s + 128 * s^2);
W46 = 0.3 * exp(12 * s + 1200.5 * s^2);
W54 = 0.3 * exp(15 * s + 312.5  * s^2);
W55 = 0.5 * exp(19 * s + 8 * s^2);
W56 = 0.2 * exp(42 * s + 40.5 * s^2);

% We(s)
We = (W12 * W26 + W16 - W16 * W22 - W16 * W35 * W54 * W43 - W16 * W55 - W12 *
    W26 * W55 - W12 * W26 * W35 * W54 * W43 + W16 * W22 * W35 * W54 * W43 + W16
     * W22 * W55) / (1 - W35 * W54 * W43 - W22 - W55 + W22 * W55 + W22 * W35 *
    W54 * W43);
We = simplify(We);

% We(0)
We0 = subs(We, 's', 0);
fprintf('We(0) = %.3f\n', double(We0));

% Me(s)
Me = We / We0;

% me1
me1 = diff(Me, 's', 1);
me1 = subs(me1, 's', 0);
fprintf('me1 = %.3f\n', double(me1));

% me2
me2 = diff(Me, 's', 2);
me2 = subs(me2, 's', 0);
```

```
fprintf('me2 = %.3f\n', double(me2));

% de
de = me2 - me1 ^ 2;
fprintf('de = %.3f\n', double(de));
```

Результат вычисления статистических значений:

```
We(0) = 1.000
me1 = 23.625
me2 = 1065.438
de = 507.297
```

Листинг 1.2: Matlab скрипт

```
We(0) = 1.000
me1 = 23.625
me2 = 1065.438
de = 507.297
```

1.2.5 Часть 2

Определим матрицу Q:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{23} & q_{24} & 0 & 0 \\ q_{31} & 0 & 0 & q_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{45} & q_{46} \\ 0 & 0 & q_{53} & 0 & 0 & q_{56} \\ w_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определим матрицу коэффициентов $A = I_6 - Q^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_{31} & 0 & 0 & -w_{61} \\ -q_{12} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_{23} & 1 & 0 & -q_{53} & 0 \\ 0 & -q_{24} & -q_{34} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_{45} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_{46} & -q_{56} & 1 \end{pmatrix}$$

Находим

$$det(A)$$

далее

$$\frac{\partial det(A)}{\partial w_{61}}$$

$$det(A|w_{61} = 0)$$

Далее можно вывести $W_E(S)$ с помощью формулы:

$$W_E(S) = -\frac{\frac{\partial det(A)}{\partial w_{61}}}{det(A|w_{61} = 0)}$$

Для расчетов, был написан matlab скрипт.

Листинг 1.3: Matlab скрипт

```
clc; clearvars

syms q12
syms q22
syms q23
syms q32
syms q34
syms q45
```

```
syms q51
syms q55
syms q56
syms w61
syms s

Q=[0 q12 0 0 0 0;
   0 q22 q23 0 0 0;
   0 q32 0 q34 0 0;
   0 0 0 0 q45 0;
   q51 0 0 0 q55 q56;
   w61 0 0 0 0 0];

A1 = eye(size(Q,1)) - transpose(Q);
disp(A1);

det_A1 = det(A1);

det_dw=diff(det_A1, w61);

det2_A1=subs(det_A1, w61, 0);

We= -det_dw/det2_A1;
disp(We);
```

Листинг 1.4: Результат

```
[    1,       0,    0,    0,     -q51, -w61]
[ -q12, 1 - q22, -q32,    0,        0,    0]
[    0,    -q23,    1,    0,        0,    0]
[    0,       0, -q34,    1,        0,    0]
[    0,       0,    0, -q45, 1 - q55,     0]
[    0,       0,    0,    0,     -q56,    1]


-(q12*q23*q34*q45*q56)/(q22 + q55 + q23*q32 - q22*q55 - q23*q32*q55 + q12*q23*
   q34*q45*q51 - 1)
```

Во второй строчке был получен $W_E(S)$, который полностью(за исключением знаков) совпадает с $W_E(S)$ найденным в части 1.

Далее, имея $W_E(S)$ находим необходимые переменные.

Листинг 1.5: Matlab скрипт

```
clc; clearvars

%M — математическое ожидание
%D — дисперсия
%P — вероятность
P12 = 1; M12 = 20; D12 = 9;
P22 = 0.6; M22 = 30; D22 = 16;
P23 = 0.4; M23 = 40; D23 = 25;
P32 = 0.5; M32 = 28; D32 = 16;
P34 = 0.5; M34 = 37; D34 = 16;
P45 = 1; M45 = 30; D45 = 25;
P51 = 0.2; M51 = 30; D51 = 16;
P55 = 0.1; M55 = 10; D55 = 4;
P56 = 0.7; M56 = 30; D56 = 16;

syms q12
syms q22
syms q23
syms q32
```

```
syms q34
syms q45
syms q51
syms q55
syms q56
syms w61
syms s

Q=[0 q12 0 0 0 0;
   0 q22 q23 0 0 0;
   0 q32 0 q34 0 0;
   0 0 0 0 q45 0;
   q51 0 0 0 q55 q56;
   w61 0 0 0 0 0];

A1 = eye(size(Q,1)) - transpose(Q);
disp(A1);

det_A1 = det(A1);
disp(det_A1);

det_dw=diff(det_A1, w61);
disp(det_dw);

det2_A1=subs(det_A1, w61, 0);
disp(det2_A1);

We= -det_dw/det2_A1;
disp(We);


syms s

We=subs(We, q12, P12*exp(M12*s+D12/2*s^2));
We=subs(We, q22, P22*exp(M22*s+D22/2*s^2));
We=subs(We, q23, P23*exp(M23*s+D23/2*s^2));
We=subs(We, q32, P32*exp(M32*s+D32/2*s^2));
We=subs(We, q34, P34*exp(M34*s+D34/2*s^2));
We=subs(We, q45, P45*exp(M45*s+D45/2*s^2));
We=subs(We, q51, P51*exp(M51*s+D51/2*s^2));
We=subs(We, q55, P55*exp(M55*s+D55/2*s^2));
We=subs(We, q56, P56*exp(M56*s+D56/2*s^2));

We = simplify(We)
We0 = subs(We, 's', 0)  % We(0)

% Нахождение мат. ожидания и дисперсии
Me = We/We0;

% Нахождение производной го1- порядка при s=0
m1 = diff(Me, 's');
m1 = subs(m1, 's', 0)    % Замена символа s на 0 в выражении m1

% Нахождение производной го2- порядка при s=0
m2 = diff(Me, 's',2);
m2=subs(m2, 's', 0)      % Замена символа s на 0 в выражении m2

% Нахождение дисперсии времени выхода процесса в завершающий узел графа
D = m2 - (m1)^2
```

Листинг 1.6: Результат

```
We =
-(7*exp((s*(91*s + 314))/2))/(5*exp(2*s*(s + 5)) - 3*exp(10*s*(s + 4)) + 30*exp
    (2*s*(4*s + 15)) - exp((3*s*(15*s + 52))/2) + 10*exp((s*(41*s + 136))/2) +
    2*exp((s*(91*s + 314))/2) - 50)
```

```

We0 =
1

m1 =
2845/7

m2 =
11938987/49

D =
3844962/49
```

Были получены следующие результаты:

1. Вероятность выхода в завершающий узел графа равна 100% ($p = W_E = 1$).
2. Математическое ожидание 406,43.
3. Дисперсия времени выхода процесса в завершающий узел графа 78 468,61.

Которые полностью совпадает с результатами части 1.

1.3 Вывод

В ходе данной лабораторной работы были получены навыки работы с вероятностными графами и их обработка с помощью методики GERT. При заданных значениях вероятности, мат. ожидания и дисперсии для каждой дуги исходного графа достаточно легко расчитываются W-функции, которые необходимы для построения формулы Мейсона. После этого из формулы Мейсона по формулам математической статистики достаточно легко расчитывается результирующее мат. ожидание и дисперсия.

Решение путем анализа потокового графа показало аналогичные результаты, что подтверждает корректность решения. Однако, метод анализа потокового графа выполняется заметно медленнее, даже на небольшом графе.