Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №2

Курс: «Методы оптимизации и принятия решений»

Тема: «Марковские модели принятия решений»

Выполнил студент:

Бояркин Никита Сергеевич
Группа: 13541/3

Проверил:

Сиднев Александр Георгиевич

Санкт-Петербург
2018 г.

Содержание

Лабораторная работа №2

1.1 Индивидуальное задание

Вариант 16

Ежедневно утром производится проверка дорогостоящей машины с целью выявления, находится ли она в исправном состоянии, требует мелкого ремонта или нуждается в серьезном ремонте. Обозначим эти состояния 0, 1, 2 соответственно. Если машина находится в совершенно исправном состоянии, то вероятность того, что она останется в таком же состоянии на начало следующего дня, равна p(0|0), вероятность того, что потребуется мелкий ремонт, равна p(1|0) и вероятность того, что возникает необходимость серьезного ремонта, равна p(2|0). В случае когда машина требует ремонта, фирма может прибегнуть к услугам двух ремонтных фирм, одна из которых (фирма F, гарантирующая качество ремонта) взимает плату M за мелкий ремонт и плату R за крупный. Вторая (фирма T, не гарантирующая качества ремонта) взымает соответственно плату m и r, где m<M и r<R. Легко себе представить, что качество работ, производимых фирмой F, выше, чем у фирмы T, что отражается значением вероятности полностью исправного состояния машины на начало следующего за ремонтом дня. Пусть решение d=1 определяет выбор фирмы F и решение d=2 — выбор фирмы T. Обозначим через p(j | i, d) вероятность перехода машины в состояние j на следующем отрезке (j=0,1,2) при условии, что она находится в состоянии I на текущем отрезке (i=1,2) и принимается решение d(d=1,2).

p (0 | 0) = 0.6 (машина осталась исправной)
p (1 | 0) = 0.3 (машина требует мелкого ремонта)
p (2 | 0) = 0.1 (машина требует крупного ремонта)

p (0 | 1, 1) = 0.9 [M = 14] (фирма F выполнила мелкий ремонт)
p (1 | 1, 1) = 0.1 (фирма F в процессе выполнения мелкого ремонта)
p (2 | 1, 1) = 0 (невозможное событие – если выполнен крупный ремонт, то мелкий не нужен)
p (0 | 2, 1) = 0.6 [R = 21] (фирма F выполнила крупный ремонт)
p (1 | 2, 1) = 0.3 [R – M = 7] (фирма F выполнила мелкий ремонт, но надо доделать до крупного)
p (2 | 2, 1) = 0.1 (фирма F в процессе выполнения крупного ремонта)

p (0 | 1, 2) = 0.7 [m = 12] (фирма T выполнила мелкий ремонт)
p (1 | 1, 2) = 0.2 (фирма T в процессе выполнения мелкого ремонта)
p (2 | 1, 2) = 0 (невозможное событие – если выполнен крупный ремонт, то мелкий не нужен)
p (0 | 2, 2) = 0.5 [r = 19] (фирма T выполнила крупный ремонт)
p (1 | 2, 2) = 0.4 [r – m = 7] (фирма T выполнила мелкий ремонт, но надо доделать до крупного)
p (2 | 2, 2) = 0.1 (фирма T в процессе выполнения крупного ремонта)

Найдите оптимальную стратегию и минимальные затраты на отрезке N=∞.

1.2 Ход работы

1.2.1 Решения и стратегии

Имеется три состояния машины:

- 1 – исправна;
- 2 – легкая поломка (необходим мелкий ремонт);
- 3 – серьезная поломка (необходим крупный ремонт);

Для данных состояний имеется три решения:

- X_1 – ничего не делать;
- X_2 – выбрать фирму F;
- X_3 – выбрать фирму T;

Таким образом, возможны следующие стратегии:

№	Исправна	Легкая поломка	Серьезная поломка
1	$X_1, (-)$	$X_2, (F)$	$X_3, (T)$
2	$X_1, (-)$	$X_2, (F)$	$X_2, (F)$
3	$X_1, (-)$	$X_3, (T)$	$X_3, (T)$
4	$X_1, (-)$	$X_3, (T)$	$X_1, (F)$

1.2.2 Построение матриц переходных вероятностей и матриц расходов

P_1 и P_2 – матрицы переходных вероятностей для компаний F и T соответственно:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \; P_2 = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \; P_3 = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}$$

R_1 и R_2 – матрицы расходов для компаний F и T соответственно:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \; R_2 = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 14 & 0 & 0 \\ 21 & 7 & 0 \end{bmatrix} \; R_3 = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 12 & 0 & 0 \\ 19 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.3 Нахождение величин ожидаемого дохода

Ожидаемый доход вычисляется по формуле:

$\nu_i(X_k) = \sum_{j=1}^{m} p_{i,j}(X_k) r_{i,j}(X_k)$

Тогда для первого решения (ничего не делать):

$\nu_1(X_1) = 0$
$\nu_2(X_1) = -$
$\nu_3(X_1) = -$

Для второго решения (выбрать фирму F):

$\nu_1(X_2) = -$
$\nu_2(X_2) = 0.9 \cdot 14 = 12.6$
$\nu_3(X_2) = 0.6 \cdot 21 + 0.3 \cdot 7 = 14.7$

Тогда для третьего решения (выбрать фирму T):

$\nu_1(X_3) = -$
$\nu_2(X_3) = 0.7 \cdot 12 = 8.4$
$\nu_3(X_3) = 0.5 \cdot 19 + 0.4 \cdot 7 = 12.3$

1.2.4 Формулировка задачи в виде задачи линейного программирования

Приведение к задаче линейного программирования производится следующим образом:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{M} \nu_j(X_i)\omega_{ji} \to \max; \\ \sum\limits_{i=1}^{M}\omega_{ji} - \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{M} p_{kj}(X_i)\omega_{ki} = 0, \quad j = \overline{1,m}, \\ \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{M}\omega_{ji} = 1, \\ \omega_{ji} \geqslant 0, j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,M}. \end{cases}$$

Для данной задачи:

$$\begin{cases} 0 \cdot w_{11} + 12.6 \cdot w_{22} + 8.4 \cdot w_{23} + 14.7 \cdot w_{32} + 12.3 \cdot w_{33} \to min \\ (1-0.6) \cdot w_{11} - 0.9 \cdot w_{22} - 0.7 \cdot w_{23} - 0.6 \cdot w_{32} - 0.5 \cdot w_{33} = 0 \\ -0.3 \cdot w_{11} + (1-0.1) \cdot w_{22} + (1-0.2) \cdot w_{23} - 0.3 \cdot w_{32} - 0.4 \cdot w_{33} = 0 \\ -0.1 \cdot w_{11} - 0 \cdot w_{22} - 0.1 \cdot w_{23} + (1-0.1) \cdot w_{32} + (1-0.1) \cdot w_{33} = 0 \\ w_{11} + w_{22} + w_{23} + w_{32} + w_{33} = 1 w_{ij} \geq 0, i = \overline{1,2,3}, j = \overline{1,2,3} \end{cases}$$

1.2.5 Решение задачи

Разработаем скрипт для расчета вероятностей w_{ij} в среде MATLAB:

```
clear all;
close all;
clc;
format long g;

f = [0 12.6 8.4 14.7 12.3];

A=[];
b=[];

Aeq = [0.4 -0.9 -0.7 -0.6 -0.5;
       -0.3 0.9 0.8 -0.3 -0.4;
       -0.1 0 -0.1 0.9 0.9;
       1 1 1 1 1];
Beq = [0; 0; 0; 1];

lb = zeros(5, 1);
ub = ones(5, 1);

[w, opt] = linprog(f, A, b, Aeq, Beq, lb, ub)
```

Результат расчета вероятностей:

```
w =
         0.618181818534862
      1.64185972428138e-10
          0.28181818131737
      3.52227535171652e-09
        0.0999999964613061

opt =
          3.59727273338617
```

Таким образом машина исправна с вероятностью 61.82%. Для мелкого ремонта следует обращаться в фирму Т (28.18%). Для крупного ремонта следует обращаться в фирму F (10%).

1.2.6 Дополнительное задание

Предположите, что фирме F для выполнения крупного ремонта требуется 1 полный рабочий день, а фирме T — 2 полных рабочих дня. Считайте далее, что фирма — владелец машины несет потери в размере c единиц за каждый день ее простоя. Покажите, как при этих условиях нужно изменить уравнения.

Для решения задачи нет смысла определять новые состояния, как это указано в методических указаниях. Достаточно просто изменить матрицы расходов для компаний F и T следующим образом:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} R_2 = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 14 & 0 & 0 \\ 21+c & 7+c & 0 \end{bmatrix} R_3 = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 12 & 0 & 0 \\ 19+2\cdot c & 7+2\cdot c & 0 \end{bmatrix}$$

Дальше задача решается аналогичным образом.

1.3 Вывод

В ходе данной лабораторной работы были определены оптимальные стратегии для конкретной задачи. Машина исправна с вероятностью 61.82%. Для мелкого ремонта следует обращаться в фирму T (28.18%). Для крупного ремонта следует обращаться в фирму F (10%).

Линейное программирование позволяет достаточно легко и быстро решать подобные задачи.