

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО  
ИНСТИТУТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ И ПРОГРАММНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**Расчетное задание**

**Тема:** “Анализ GERT-сети”

**Дисциплина:** “Методы оптимизации и принятия решений”

Выполнил студент:

Школьников Ф.Д.

Группа: 13541/3

Руководитель:

Сиднев А.Г.

Санкт-Петербург  
2019 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Анализ GERT-сети</b>	<b>2</b>
1.1	Постановка задачи . . . . .	2
1.2	Выполнение . . . . .	4
1.2.1	Часть 1 . . . . .	4
1.2.2	Часть 2 . . . . .	8

# Анализ GERT-сети

## 1.1 Постановка задачи

### Вариант 5

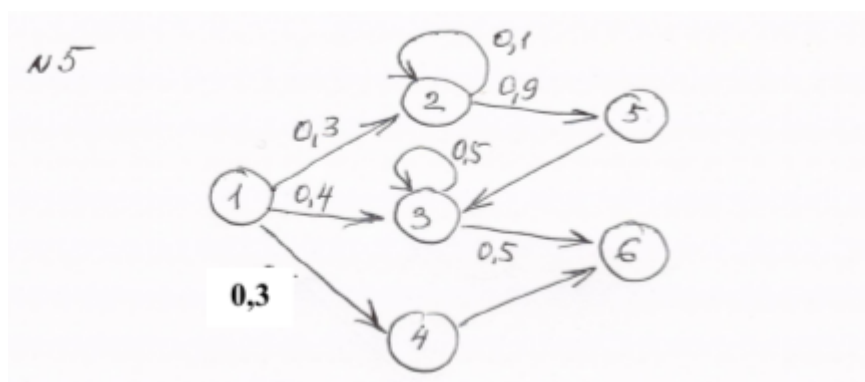


Рис. 1.1: Граф GERT-сети

Каждой дуге-работе  $(ij)$  поставлены в соответствие следующие данные:

1. Закон распределения времени выполнения работы. Будем считать его треугольным;
2. Параметры закона распределения (математическое ожидание  $M$  и дисперсия  $D$ );
3. Вероятность  $p_{ij}$  выполнения работы, показанная на графе.

### Задание

**Часть 1** Используя методику GERT, изложенную в книге «Методы анализа сетей»  
Найти:

1. Вероятность выхода в завершающий узел графа (для всех вариантов узел 6);
2. Производящую функцию длительности процесса от начального узла до завершающего узла;
3. Математическое ожидание длительности процесса от начального узла до завершающего узла;
4. Дисперсию ожидания длительности процесса от начального узла до завершающего узла;
5. Начальные моменты первых 10 порядков;

В отчете перечислить все петли всех порядков, обнаруженные на графе, выписать уравнение Мейсона, получить решение для  $W_E(S)$  и найти требуемые параметры. Примерно так, как это сделано в примере на стр. 403–409 книги Филиппа и Гарсия «Методы анализа сетей»

**Часть 2** Повторить пункты задания 2, 3, 4, 5 используя методику анализа потокового графа, основанную на обработке матрицы передач (Branch Transmittance Matrix).

Для выполнения задания рекомендуется пользоваться следующими источниками:

1. Филипс и Гарсиа «Методы анализа сетей»
2. Презентация GERT\_&\_Flowgraph\_Algebra.pdf (выложена в ИНТРАНЕТ)
3. Ren\_The Methodology of Flowgraph.pdf

## 1.2 Выполнение

### 1.2.1 Часть 1

Чтобы определить эквивалентную W-функцию для анализируемой GERT-сети, необходимо замкнуть сеть дугой, исходящей из узла 6 в узел 1 (рис. 1.2).

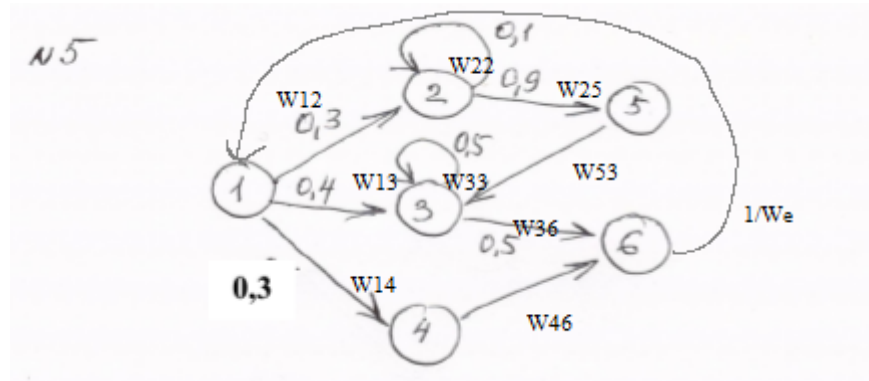


Рис. 1.2: Замкнутая GERT-сеть

Выпишем в таблицу данные графа (мат. ожидание, дисперсия, W-функции для симметричного распределения)

Начало	Конец	Вероятность	Мат. ожидание	Дисперсия	W-функция
1	2	0,3	20	16	$\frac{(2e^{4s} - 2e^{16s})^2}{1920s^2}$
1	3	0,4	35	25	$\frac{(2e^{7s} - 2e^{28s})^2}{4410s^2}$
1	4	0,3	14	4	$5 \frac{(2e^{\frac{14s}{5}} - 2e^{\frac{56s}{5}})^2}{4704s^2}$
2	2	0,1	25	28	$\frac{(2e^{5s} - 2e^{20s})^2}{9000s^2}$
2	5	0,9	20	16	$\frac{(2e^{4s} - 2e^{16s})^2}{640s^2}$
3	3	0,5	20	9	$\frac{(2e^{4s} - 2e^{16s})^2}{1152s^2}$
3	6	0,5	37	16	$25 \frac{(2e^{\frac{37s}{5}} - 2e^{\frac{148s}{5}})^2}{98568s^2}$
4	6	1	17	9	$25 \frac{(2e^{\frac{17s}{5}} - 2e^{\frac{68s}{5}})^2}{10404s^2}$
5	3	1	10	4	$\frac{(2e^{2s} - 2e^{8s})^2}{144s^2}$

#### Петли первого порядка

- $W_{12}W_{25}W_{53}W_{36}\frac{1}{W_e}$
- $W_{13}W_{36}\frac{1}{W_e}$
- $W_{14}W_{46}\frac{1}{W_e}$
- $W_{22}$
- $W_{33}$

## Петли второго порядка

- $W_{22}W_{33}$
- $W_{22}W_{13}W_{36}\frac{1}{W_e}$
- $W_{22}W_{14}W_{46}\frac{1}{W_e}$
- $W_{33}W_{14}W_{46}\frac{1}{W_e}$

## Петли третьего порядка

- $W_{22}W_{33}W_{14}W_{46}\frac{1}{W_e}$

## Формула Мейсона

$$H = 1 - W_{12}W_{25}W_{53}W_{36}\frac{1}{W_e} - W_{13}W_{36}\frac{1}{W_e} - W_{14}W_{46}\frac{1}{W_e} - W_{22} - W_{33} + W_{22}W_{33} + W_{22}W_{13}W_{36}\frac{1}{W_e} +$$

$$W_{22}W_{14}W_{46}\frac{1}{W_e} + W_{33}W_{14}W_{46}\frac{1}{W_e} - W_{22}W_{33}W_{14}W_{46}\frac{1}{W_e} = 0$$

Выразим W-функцию,

$$W_e = \frac{W_{12}W_{25}W_{53}W_{36} + W_{13}W_{36} + W_{14}W_{46} - W_{22}W_{13}W_{36} - W_{22}W_{14}W_{46} - W_{33}W_{14}W_{46} + W_{22}W_{33}W_{14}W_{46}}{1 - W_{22} - W_{33} + W_{22}W_{33}} \quad (1.1)$$

Вычисляя первую и вторую производные по  $s$  функции  $M_E(s)$ , и полагая  $s = 0$ , находим математическое ожидание:

$$\mu_{1E} = \frac{\partial M_E(s)}{\partial s} \Big|_{s=0}$$

и дисперсию:

$$\sigma^2 = \mu_{2E} - [\mu_{1E}]^2$$

Вероятность выхода в завершающий узел графа:

$$p_E = W_E(0)$$

Для проведения данных вычислений был использован следующий скрипт MATLAB'a,

```
1 clc; clearvars
2 %Исходные данные
3 %M - математическое ожидание
4 %D - дисперсия
5 %P - вероятность
6 P12 = 0.3; M12 = 20; D12 = 16;
7 P13 = 0.4; M13 = 35; D13 = 25;
8 P14 = 0.3; M14 = 14; D14 = 4;
9 P22 = 0.1; M22 = 25; D22 = 28;
10 P25 = 0.9; M25 = 20; D25 = 16;
11 P33 = 0.5; M33 = 20; D33 = 9;
12 P36 = 0.5; M36 = 37; D36 = 16;
13 P46 = 1; M46 = 17; D46 = 9;
14 P53 = 1; M53 = 10; D53 = 4;
15
16 syms s
17 a = 0.4;
```

```

18 b = 1.6;
19 %W - функции
20 W12 = P12*((2*(exp((s*b*M12)/2)-exp((s*a*M12)/2)))/((b*M12-a*M12)*s))^2;
21 W13 = P13*((2*(exp((s*b*M13)/2)-exp((s*a*M13)/2)))/((b*M13-a*M13)*s))^2;
22 W14 = P14*((2*(exp((s*b*M14)/2)-exp((s*a*M14)/2)))/((b*M14-a*M14)*s))^2;
23 W22 = P22*((2*(exp((s*b*M22)/2)-exp((s*a*M22)/2)))/((b*M22-a*M22)*s))^2;
24 W25 = P25*((2*(exp((s*b*M25)/2)-exp((s*a*M25)/2)))/((b*M25-a*M25)*s))^2;
25 W33 = P33*((2*(exp((s*b*M33)/2)-exp((s*a*M33)/2)))/((b*M33-a*M33)*s))^2;
26 W36 = P36*((2*(exp((s*b*M36)/2)-exp((s*a*M36)/2)))/((b*M36-a*M36)*s))^2;
27 W46 = P46*((2*(exp((s*b*M46)/2)-exp((s*a*M46)/2)))/((b*M46-a*M46)*s))^2;
28 W53 = P53*((2*(exp((s*b*M53)/2)-exp((s*a*M53)/2)))/((b*M53-a*M53)*s))^2;
29
30 We = (W12*W25*W53*W36 + W13*W36 + W14*W46 + W22*W33*W14*W46 - W22*W13*W36 - W22*
      W14*W46 - W33*W14*W46)/(1 - W22 - W33 + W22*W33);
31
32 We = simplify(We);
33 We0 = limit(We, 's', 0) % We(0)
34 Me = We/We0;
35
36 % Первый начальный момент
37 m1 = diff(Me, 's', 1);
38 m1 = limit(m1, 's', 0)
39
40 % Второй начальный момент
41 m2 = diff(Me, 's', 2);
42 m2 = limit(m2, 's', 0)
43
44 % Третий начальный момент
45 m3 = diff(Me, 's', 3);
46 m3 = limit(m3, 's', 0, 'right')
47
48 % Четвёртый начальный момент
49 m4 = diff(Me, 's', 4);
50 m4 = limit(m4, 's', 0)
51
52 % Дисперсия
53 D = m2 - (m1)^2
54
55 %
56 % a = sum(1:10);
57 %
58 % for i = 1 : 1 : 10
59 %     m = diff(Me, 's', i);
60 %     a(i) = limit(m, 's', 0, 'right');
61 % end

```

В результате выполнения получили,

```

1
2 We0 =
3
4 1
5
6
7 m1 =
8
9 2371/30
10
11
12 m2 =
13

```

```

14 108030703/13500
15
16
17 m3 =
18
19 39106231309/40500
20
21
22 m4 =
23
24 limit((6*((4*exp(4*s) - 16*exp(16*s))^2/(144*s^2) + (5*exp(5*s) - 20*exp(20*s)
    )^2/(1125*s^2) + (exp(4*s) - exp(16*s))^2/(48*s^4) + (exp(5*s) - exp(20*s))
    ^2/(375*s^4) - ((exp(4*s) - exp(16*s))^2*(exp(5*s) - exp(20*s))^2)/(32400*s
    ^6) - ((exp(5*s) - exp(20*s))^2*(4*exp(4*s) - ... Output truncated. Text
    exceeds maximum line length of 25 000 characters for Command Window
    display.
25
26
27 D =
28
29 5926522/3375

```

Были получены следующие результаты:

1. Вероятность выхода в завершающий узел графа  $We0 = 100\%$
2. Математическое ожидание  $2371/30$  ( 79,03 )
3. Дисперсия времени выхода процесса в завершающий узел графа 1 756
4. Начальные моменты первых 3ех порядков

Момент	Значение
$\mu_1$	$\frac{2371}{30}$
$\mu_2$	$\frac{108030703}{13500}$
$\mu_3$	$\frac{39106231309}{40500}$

Максимальный полученный начальный момент – момент третьего порядка, результат дифференцирования 4го порядка матлаб не “съедает”. Никакие из предпринятых попыток ( в том числе и вычисления с помощью Maple ) не привели к успеху.



## 1.2.2 Часть 2

Во второй части расчётного задания необходимо повторить пункты 2,3,4,5 из первого задания основываясь на методе изложенном в :

- Презентация GERT\_&\_Flowgraph\_Algebra.pdf (со слайда 56);
- Ren\_The Methodology of Flowgraph.pdf (со страницы 35).

Первым делом необходимо определить матрицу  $Q$ ,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} & q_{14} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 & q_{25} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 & q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{46} \\ 0 & 0 & q_{53} & 0 & 0 & 0 \\ w_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь определим матрицу коэффициентов  $A = I_6 - Q^T$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w_{61} \\ -q_{12} & 1 - q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{13} & 0 & 1 - q_{33} & 0 & -q_{53} & 0 \\ -q_{14} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -q_{25} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -q_{36} & -q_{46} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее, в соответствии с алгоритмом, находим

$$\det(A)$$

затем,

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial w_{61}}$$

$$\det(A|_{w_{61}=0})$$

Наконец, можно вывести  $W_E(S)$  с помощью формулы:

$$W_E(S) = -\frac{\frac{\partial \det(A)}{\partial w_{61}}}{\det(A|_{w_{61}=0})}$$

Для проведения данных вычислений был использован следующий скрипт MATLAB'a,

```
1 clc; clearvars
2
3
4 %M - математическое ожидание
5 %D - дисперсия
6 %P - вероятность
7 P12 = 0.3; M12 = 20; D12 = 16;
8 P13 = 0.4; M13 = 35; D13 = 25;
9 P14 = 0.3; M14 = 14; D14 = 4;
10 P22 = 0.1; M22 = 25; D22 = 28;
11 P25 = 0.9; M25 = 20; D25 = 16;
12 P33 = 0.5; M33 = 20; D33 = 9;
13 P36 = 0.5; M36 = 37; D36 = 16;
14 P46 = 1; M46 = 17; D46 = 9;
```

```

15 P53 = 1; M53 = 10; D53 = 4;
16
17 syms q12
18 syms q13
19 syms q14
20 syms q22
21 syms q25
22 syms q33
23 syms q36
24 syms q46
25 syms q53
26 syms w61
27 syms s
28 a = 0.4;
29 b = 1.6;
30
31 Q=[0 q12 q13 q14 0 0;
32 0 q22 0 0 q25 0;
33 0 0 q33 0 0 q36;
34 0 0 0 0 0 q46;
35 0 0 q53 0 0 0;
36 w61 0 0 0 0 0];
37
38 A1 = eye(size(Q,1)) - transpose(Q);
39 disp(A1);
40
41 det_A1 = det(A1);
42 disp(det_A1);
43
44 det_dw=diff(det_A1, w61);
45 disp(det_dw);
46
47 det2_A1=subs(det_A1, w61, 0);
48 disp(det2_A1);
49
50 We= -det_dw/det2_A1;
51 disp(We);
52
53
54 syms s
55
56 We=subs(We, q12, P12*((2*(exp((s*b*M12)/2)-exp((s*a*M12)/2)))/((b*M12-a*M12)*s
57 ))^2);
58 We=subs(We, q13, P13*((2*(exp((s*b*M13)/2)-exp((s*a*M13)/2)))/((b*M13-a*M13)*s
59 ))^2);
60 We=subs(We, q14, P14*((2*(exp((s*b*M14)/2)-exp((s*a*M14)/2)))/((b*M14-a*M14)*s
61 ))^2);
62 We=subs(We, q22, P22*((2*(exp((s*b*M22)/2)-exp((s*a*M22)/2)))/((b*M22-a*M22)*s
63 ))^2);
64 We=subs(We, q25, P25*((2*(exp((s*b*M25)/2)-exp((s*a*M25)/2)))/((b*M25-a*M25)*s
65 ))^2);
66 We=subs(We, q33, P33*((2*(exp((s*b*M33)/2)-exp((s*a*M33)/2)))/((b*M33-a*M33)*s
67 ))^2);
68 We=subs(We, q36, P36*((2*(exp((s*b*M36)/2)-exp((s*a*M36)/2)))/((b*M36-a*M36)*s
69 ))^2);
70 We=subs(We, q46, P46*((2*(exp((s*b*M46)/2)-exp((s*a*M46)/2)))/((b*M46-a*M46)*s
71 ))^2);
72 We=subs(We, q53, P53*((2*(exp((s*b*M53)/2)-exp((s*a*M53)/2)))/((b*M53-a*M53)*s
73 ))^2);

```

```

66 We = simplify(We)
67 We0 = limit(We, 's', 0) % We(0)
68
69 Me = We/We0;
70
71 % Первый начальный момент
72 m1 = diff(Me, 's', 1);
73 m1 = limit(m1, 's', 0)
74
75 % Второй начальный момент
76 m2 = diff(Me, 's', 2);
77 m2 = limit(m2, 's', 0)
78
79 % Третий начальный момент
80 m3 = diff(Me, 's', 3);
81 m3 = limit(m3, 's', 0, 'right')
82
83 % Четвёртый начальный момент
84 m4 = diff(Me, 's', 4);
85 m4 = limit(m4, 's', 0)
86
87 % Дисперсия
88 D = m2 - (m1)^2

```

В результате выполнения получили,

```

1 [ 1, 0, 0, 0, 0, -w61]
2 [ -q12, 1 - q22, 0, 0, 0, 0]
3 [ -q13, 0, 1 - q33, 0, -q53, 0]
4 [ -q14, 0, 0, 0, 1, 0]
5 [ 0, -q25, 0, 0, 1, 0]
6 [ 0, 0, -q36, -q46, 0, 1]
7
8 q22*q33 - q33 - q22 - q13*q36*w61 - q14*q46*w61 + q13*q22*q36*w61 + q14*q22*
   q46*w61 + q14*q33*q46*w61 - q14*q22*q33*q46*w61 - q12*q25*q36*q53*w61 + 1
9
10 q13*q22*q36 - q14*q46 - q13*q36 + q14*q22*q46 + q14*q33*q46 - q14*q22*q33*q46
   - q12*q25*q36*q53
11
12 q22*q33 - q33 - q22 + 1
13
14 -(q13*q36 + q14*q46 - q13*q22*q36 - q14*q22*q46 - q14*q33*q46 + q14*q22*q33*
   q46 + q12*q25*q36*q53)/(q22 + q33 - q22*q33 - 1)
15
16
17 We =
18
19 -((125*(exp((14*s)/5) - exp((56*s)/5))^2*(exp((17*s)/5) - exp((68*s)/5))^2)
   /(3058776*s^4) + (5*(exp(7*s) - exp(28*s))^2*(exp((37*s)/5) - exp((148*s)
   /5))^2)/(5433561*s^4) - (125*(exp(4*s) - exp(16*s))^2*(exp((14*s)/5) - exp
   ((56*s)/5))^2*(exp((17*s)/5) - exp((68*s)/5))^2/(880927488*s^6) - ((exp(5*
   s) - exp(20*s))^2*(exp((14*s)/5) - exp((56*s)/5))^2*(exp((17*s)/5) - exp
   ((68*s)/5))^2/(55057968*s^6) + ((exp(2*s) - exp(8*s))^2*(exp(4*s) - exp
   (16*s))^4*(exp((37*s)/5) - exp((148*s)/5))^2/(2725208064*s^8) - ((exp(5*s)
   - exp(20*s))^2*(exp(7*s) - exp(28*s))^2*(exp((37*s)/5) - exp((148*s)/5))
   ^2)/(2445102450*s^6) + ((exp(4*s) - exp(16*s))^2*(exp(5*s) - exp(20*s))^2*(
   exp((14*s)/5) - exp((56*s)/5))^2*(exp((17*s)/5) - exp((68*s)/5))^2)
   /(15856694784*s^8))/((exp(4*s) - exp(16*s))^2/(288*s^2) + (exp(5*s) - exp
   (20*s))^2/(2250*s^2) - ((exp(4*s) - exp(16*s))^2*(exp(5*s) - exp(20*s))^2)
   /(648000*s^4) - 1)
20

```

```

21
22 We0 =
23
24 1
25
26
27 m1 =
28
29 2371/30
30
31
32 m2 =
33
34 108030703/13500
35
36
37 m3 =
38
39 39106231309/40500
40
41
42 m4 =
43
44 limit((6*((4*exp(4*s) - 16*exp(16*s))^2/(144*s^2) + (5*exp(5*s) - 20*exp(20*s)
    )^2/(1125*s^2) + (exp(4*s) - ... Output truncated. Text exceeds maximum
    line length of 25 000 characters for Command Window display.
45
46 D =
47
48 5926522/3375

```

Были получены следующие результаты:

1. Вероятность выхода в завершающий узел графа  $We0 = 100\%$
2. Математическое ожидание  $2371/30$  ( 79,03 )
3. Дисперсия времени выхода процесса в завершающий узел графа 1 756
4. Начальные моменты первых 3ех порядков

Момент	Значение
$\mu_1$	$\frac{2371}{30}$
$\mu_2$	$\frac{108030703}{13500}$
$\mu_3$	$\frac{39106231309}{40500}$

Все результаты полностью совпадают с результатами полученным в первой части расчётного задания.

### 1.3 Вывод

В ходе данной лабораторной работы были получены навыки работы с вероятностными графами и их обработка с помощью методики GERT. При заданных значениях вероятности, мат. ожидания и дисперсии для каждой дуги исходного графа достаточно легко рассчитываются W-функции, которые необходимы для построения формулы Мейсона. После этого из формулы Мейсона по формулам математической статистики достаточно легко рассчитывается результирующее мат. ожидание и дисперсия.

Решение путем анализа потокового графа показало аналогичные результаты, что подтверждает корректность решения. Однако, метод анализа потокового графа выполняется заметно медленнее, даже на небольшом графе.