

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт компьютерных наук и технологий

**Кафедра компьютерных систем и программных технологий**

**РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ**

**Курс:** Методы оптимизации и принятия решений

**Тема:** Анализ GERT-сети

Выполнил студент группы 13541/3

\_\_\_\_\_  
(подпись) Д.В. Круминыш

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(подпись) А.Г. Сиднев

Санкт-Петербург  
2018 г.

# Глава 4

## Анализ GERT-сети

### 4.1 Постановка задачи

Вариант: 36.

Дано:

1. Граф GERT-сети

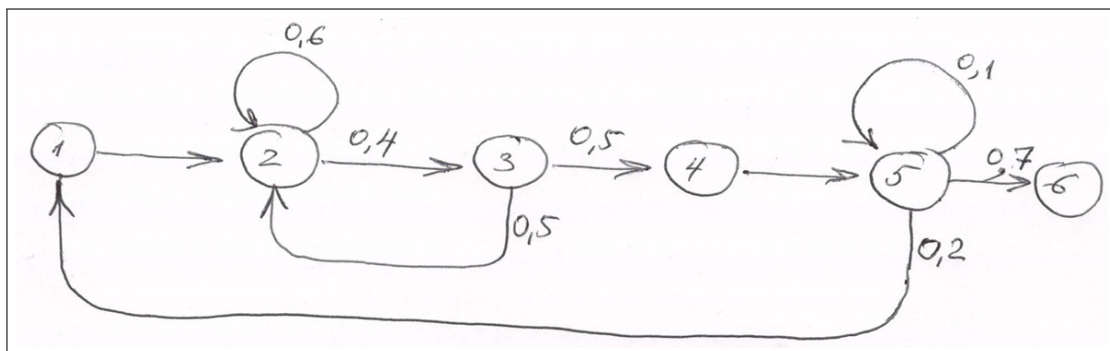


Рис. 4.1: Граф GERT-сети

2. Каждой дуге-работе ( $ij$ ) поставлены в соответствие следующие данные:
  - 2.1. Закон распределения времени выполнения работы. Будем считать его нормальным;
  - 2.2. Параметры закона распределения (математическое ожидание **M** и дисперсия **D**);
  - 2.3. Вероятность  $p_{ij}$  выполнения работы, показанная на графе.

### 4.1.1 Задание

#### Часть 1

Используя методику GERT, изложенную в книге «Методы анализа сетей»

Найти:

1. Вероятность выхода в завершающий узел графа (для всех вариантов узел 6);
2. Производящую функцию длительности процесса от начального узла до завершающего узла;
3. Математическое ожидание длительности процесса от начального узла до завершающего узла;
4. Дисперсию ожидания длительности процесса от начального узла до завершающего узла;

В отчете перечислить все петли всех порядков, обнаруженные на графе, выписать уравнение Мейсона, получить решение для  $W_E(S)$  и найти требуемые параметры. Примерно так, как это сделано в примере на стр. 403–409 книги Филипса и Гарсиа «Методы анализа сетей»

#### Часть 2

Повторить пункты задания 2, 3, 4 используя методику анализа потокового графа, основанную на обработке матрицы передач (Branch Transmittance Matrix).

Для выполнения задания рекомендуется пользоваться следующими источниками:

1. Филипс и Гарсиа «Методы анализа сетей»
2. Презентация GERT\_&\_Flowgraph\_Algebra.pdf (выложена в ИНТРАНЕТ)
3. Ren\_The Methodology of Flowgraph.pdf

## 4.2 Решение

### 4.2.1 Часть 1

Чтобы определить эквивалентную W-функцию для анализируемой GERT-сети, необходимо замкнуть сеть дугой, исходящей из узла 6 в узел 1 (рис. 4.2).

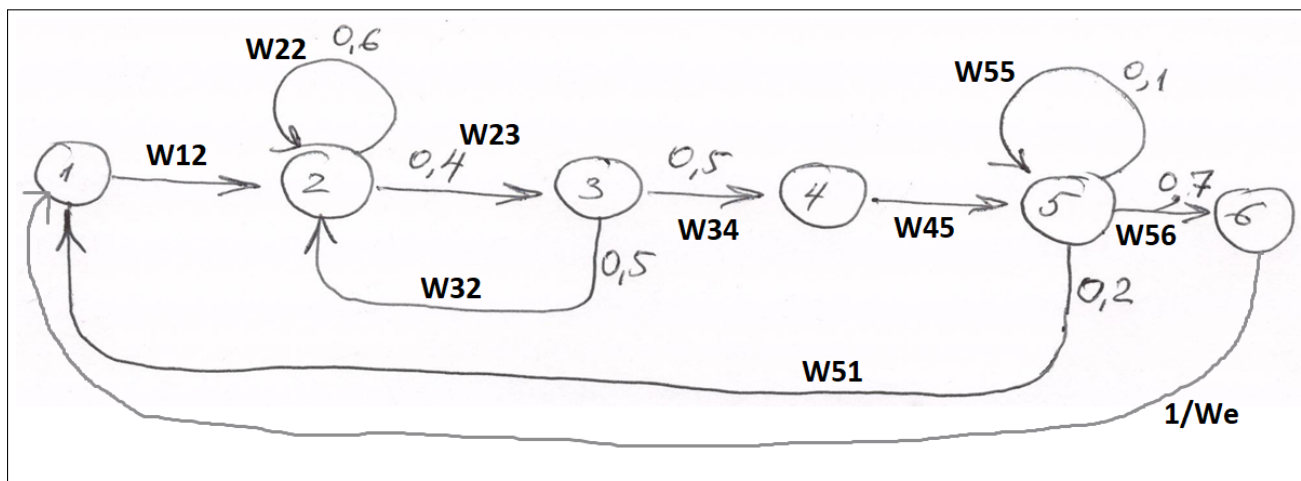


Рис. 4.2: Замкнутая GERT-сеть

Далее, выпишем в таблицу данные графа(мат. ожидание, дисперсия, W-функции)

Начало	Конец	Вес ребра	Мат. ожидание	Дисперсия	W-функция
1	2	1	20	9	$\exp(20s + 4.5s^2)$
2	2	0.6	30	16	$0.6 * \exp(30s + 8s^2)$
2	3	0.4	40	25	$0.4 * \exp(40s + 12.5s^2)$
3	2	0.5	28	16	$0.5 * \exp(28s + 8s^2)$
3	4	0.5	37	16	$0.5 * \exp(37s + 8s^2)$
4	5	1	30	25	$\exp(30s + 12.5s^2)$
5	1	0.2	30	16	$0.2 * \exp(30s + 8s^2)$
5	5	0.1	10	4	$0.1 * \exp(10s + 2s^2)$
5	6	0.7	30	16	$0.7 * \exp(30s + 8s^2)$

Таблица 4.1: Данные анализируемой GERT-сети

**Петли первого порядка:**

- $W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{51};$

- $W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{56}\frac{1}{W_e}$ ;
- $W_{22}$ ;
- $W_{23}W_{32}$ ;
- $W_{55}$ ;

**Петли второго порядка:**

- $W_{22}W_{55}$ ;
- $W_{55}W_{23}W_{32}$ ;

**Уравнение Мейсона:**

$$H = 1 - W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{51} - W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{56}\frac{1}{W_e} - W_{22} - W_{23}W_{32} - W_{55} + W_{22}W_{55} + W_{55}W_{23}W_{32} = 0$$

**Выведем  $W_E(s)$ :**

$$1 - W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{51} - W_{22} - W_{23}W_{32} - W_{55} + W_{22}W_{55} + W_{55}W_{23}W_{32} = W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{56}\frac{1}{W_e}$$

$$W_E(s) = \frac{(W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{56})}{(1 - W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{51} - W_{22} - W_{23}W_{32} - W_{55} + W_{22}W_{55} + W_{55}W_{23}W_{32})}$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию:  $M_E(s) = 1$  при  $s = 0$

Так как  $W_E(s) = p_E M_E(s)$ , то  $p_E = W_E(0)$ , тогда  $M_E(s) = \frac{W_E(s)}{p_E} = \frac{W_E(s)}{W_E(0)}$

Вычисляя первую и вторую производные по  $s$  функции  $M_E(s)$ , и полагая  $s = 0$ , находим математическое ожидание:

$$\mu_{1E} = \left. \frac{\partial M_E(s)}{\partial s} \right|_{s=0}$$

и дисперсию:

$$\sigma^2 = \mu_{2E} - [\mu_{1E}]^2$$

Вероятность выхода в завершающий узел графа:

$$p_E = W_E(0)$$

Был написан скрипт matlab.

```

clc
%Исходные данные
%M — математическое ожидание
%D — дисперсия
%P — вероятность
P12 = 1; M12 = 20; D12 = 9;
P22 = 0.6; M22 = 30; D22 = 16;
P23 = 0.4; M23 = 40; D23 = 25;
P32 = 0.5; M32 = 28; D32 = 16;
P34 = 0.5; M34 = 37; D34 = 16;
P45 = 1; M45 = 30; D45 = 25;
P51 = 0.2; M51 = 30; D51 = 16;
P55 = 0.1; M55 = 10; D55 = 4;
P56 = 0.7; M56 = 30; D56 = 16;

syms s
%W функции
W12 = P12*exp(M12*s+D12/2*s^2);
W22 = P22*exp(M22*s+D22/2*s^2);
W23 = P23*exp(M23*s+D23/2*s^2);
W32 = P32*exp(M32*s+D32/2*s^2);
W34 = P34*exp(M34*s+D34/2*s^2);
W45 = P45*exp(M45*s+D45/2*s^2);
W51 = P51*exp(M51*s+D52/2*s^2);
W55 = P55*exp(M55*s+D55/2*s^2);
W56 = P56*exp(M56*s+D56/2*s^2);

We = (W12*W23*W34*W45*W56)/(1 - W12*W23*W34*W45*W51 - W22 - W23*W32 - W55+W22*
↪ W55+W55*W23*W32);

We = simplify(We)
We0 = subs(We, 's', 0) % We(0)

% Нахождение мат. ожидания и дисперсии
Me = We/We0;

% Нахождение производной первого порядка при s=0
m1 = diff(Me, 's');
m1 = subs(m1, 's', 0) % Замена символа s на 0 в выражении m1

% Нахождение производной второго порядка при s=0
m2 = diff(Me, 's',2);
m2=subs(m2, 's', 0) % Замена символа s на 0 в выражении m2

```

```
% Нахождение дисперсии времени выхода процесса в завершающий узел графа  
D = m2 - (m1)^2
```

Листинг 4.1: Код Matlab

```
We =  
-(7*exp((s*(91*s + 314))/2))/(5*exp(2*s*(s + 5)) - 3*exp(10*s*(s +  
↪ 4)) + 30*exp(2*s*(4*s + 15)) - exp((3*s*(15*s + 52))/2) +  
↪ 10*exp((s*(41*s + 136))/2) + 2*exp((s*(91*s + 314))/2) - 50)  
  
We0 =  
1  
  
m1 =  
2845/7  
  
m2 =  
11938987/49  
  
D =  
3844962/49
```

Листинг 4.2: Результат

Были получены следующие результаты:

1. Вероятность выхода в завершающий узел графа равна 100% ( $p = W_E = 1$ ).
2. Математическое ожидание 406,43.
3. Дисперсия времени выхода процесса в завершающий узел графа 78 468,61.

## 4.2.2 Часть 2

Алгоритм дальнейших действий основан на:

- Презентация GERT\_&Flowgraph\_Algebra.pdf (со слайда 56);
- Ren\_The Methodology of Flowgraph.pdf (со страницы 35).

Определим матрицу  $Q$ , не забывая про обратную связь.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{32} & 0 & q_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{45} & 0 \\ q_{51} & 0 & 0 & 0 & q_{55} & q_{56} \\ w_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определим матрицу коэффициентов  $A = I_6 - Q^T$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -q_{51} & -w_{61} \\ -q_{12} & 1 - q_{22} & -q_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_{23} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q_{34} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_{45} & 1 - q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q_{56} & 1 \end{pmatrix}$$

Находим

$$\det(A)$$

далее

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial w_{61}}$$

$$\det(A|w_{61}=0)$$

Далее можно вывести  $W_E(S)$  с помощью формулы:

$$W_E(S) = -\frac{\frac{\partial \det(A)}{\partial w_{61}}}{\det(A|w_{61}=0)}$$

Для расчетов, был написан matlab скрипт.

```
clc; clearvars
```

```
syms q12
```

```
syms q22
```

```
syms q23
```

```
syms q32
```

```
syms q34
```

```
syms q45
```

```
syms q51
```

```
syms q55
```



```

syms q56
syms w61
syms s

Q=[0 q12 0 0 0 0;
   0 q22 q23 0 0 0;
   0 q32 0 q34 0 0;
   0 0 0 0 q45 0;
   q51 0 0 0 q55 q56;
   w61 0 0 0 0 0];

A1 = eye(size(Q,1)) - transpose(Q);
disp(A1);

det_A1 = det(A1);

det_dw=diff(det_A1, w61);

det2_A1=subs(det_A1, w61, 0);

We= -det_dw/det2_A1;
disp(We);

```

Листинг 4.3: Matlab скрипт

```

[    1,      0,      0,      0,   -q51, -w61]
[ -q12, 1 - q22, -q32,      0,      0,      0]
[    0,   -q23,      1,      0,      0,      0]
[    0,      0, -q34,      1,      0,      0]
[    0,      0,      0, -q45, 1 - q55,      0]
[    0,      0,      0,      0,   -q56,      1]

-(q12*q23*q34*q45*q56)/(q22 + q55 + q23*q32 - q22*q55 - q23*q32*
↪ q55 + q12*q23*q34*q45*q51 - 1)

```

Листинг 4.4: Результат

Во второй строчке был получен  $W_E(S)$ , который полностью(за исключением знаков)

совпадает с  $W_E(S)$  найденным в части 1.

Далее, имея  $W_E(S)$  находим необходимые переменные.

```
clc; clearvars

%M — математическое ожидание
%D — дисперсия
%P — вероятность
P12 = 1; M12 = 20; D12 = 9;
P22 = 0.6; M22 = 30; D22 = 16;
P23 = 0.4; M23 = 40; D23 = 25;
P32 = 0.5; M32 = 28; D32 = 16;
P34 = 0.5; M34 = 37; D34 = 16;
P45 = 1; M45 = 30; D45 = 25;
P51 = 0.2; M51 = 30; D51 = 16;
P55 = 0.1; M55 = 10; D55 = 4;
P56 = 0.7; M56 = 30; D56 = 16;

syms q12
syms q22
syms q23
syms q32
syms q34
syms q45
syms q51
syms q55
syms q56
syms w61
syms s

Q=[0 q12 0 0 0 0;
    0 q22 q23 0 0 0;
    0 q32 0 q34 0 0;
    0 0 0 0 q45 0;
    q51 0 0 0 q55 q56;
    w61 0 0 0 0 0];

A1 = eye(size(Q,1))    transpose(Q);
disp(A1);

det_A1 = det(A1);
disp(det_A1);

det_dw=diff(det_A1 , w61);
disp(det_dw);
```

```

det2_A1=subs(det_A1, w61, 0);
disp(det2_A1);

We= det_dw/det2_A1;
disp(We);

syms s

We=subs(We, q12, P12*exp(M12*s+D12/2*s^2));
We=subs(We, q22, P22*exp(M22*s+D22/2*s^2));
We=subs(We, q23, P23*exp(M23*s+D23/2*s^2));
We=subs(We, q32, P32*exp(M32*s+D32/2*s^2));
We=subs(We, q34, P34*exp(M34*s+D34/2*s^2));
We=subs(We, q45, P45*exp(M45*s+D45/2*s^2));
We=subs(We, q51, P51*exp(M51*s+D51/2*s^2));
We=subs(We, q55, P55*exp(M55*s+D55/2*s^2));
We=subs(We, q56, P56*exp(M56*s+D56/2*s^2));

We = simplify(We)
We0 = subs(We, 's', 0) % We(0)

% Нахождение мат. ожидания и дисперсии
Me = We/We0;

% Нахождение производной го1 порядка при s=0
m1 = diff(Me, 's');
m1 = subs(m1, 's', 0) % Замена символа s на 0 в выражении m1

% Нахождение производной го2 порядка при s=0
m2 = diff(Me, 's', 2);
m2=subs(m2, 's', 0) % Замена символа s на 0 в выражении m2

% Нахождение дисперсии времени выхода процесса в завершающий узел графа
D = m2 (m1)^2

```

#### Листинг 4.5: Matlab скрипт

```

We =
-(7*exp((s*(91*s + 314))/2))/(5*exp(2*s*(s + 5)) - 3*exp(10*s*(s +
↪ 4)) + 30*exp(2*s*(4*s + 15)) - exp((3*s*(15*s + 52))/2) +
↪ 10*exp((s*(41*s + 136))/2) + 2*exp((s*(91*s + 314))/2) - 50)

We0 =

```

```
1  
  
m1 =  
2845/7  
  
m2 =  
11938987/49  
  
D =  
3844962/49
```

Листинг 4.6: Результат

Были получены следующие результаты:

1. Вероятность выхода в завершающий узел графа равна 100% ( $p = W_E = 1$ ).
2. Математическое ожидание 406,43.
3. Дисперсия времени выхода процесса в завершающий узел графа 78 468,61.

Которые полностью совпадает с результатами части 1.