Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ

Курс: Методы оптимизации и принятия решений

Тема: Марковские модели принятия решений

Выполнил студент группы 13541/3	________________ Д.В. Круминьш (подпись)
Преподаватель	________________ А.Г. Сиднев (подпись)

Санкт-Петербург
2018 г.

Оглавление

Глава 2

Марковские модели принятия решений

2.1 Постановка задачи

Вариант: 12, решить задачу методом итераций по стратегиям для $N = \infty$

Крупная фирма, производящая моющие средства и пользующаяся широкой известностью в связи с успехами в исследованиях по созданию новых продуктов и их рекламированию, выпустила на рынок новый высококачественный стиральный порошок, названный LYE. Руководитель, возглавляющий производство этого продукта, совместно с отделом рекламы разрабатывает специальную рекламную кампанию по сбыту порошка, для которой принят девиз «Порошок LYE нужен всем!» Как и все продукты фирмы, новый продукт в течение первого полугодия будет иметь высокий уровень сбыта. Руководитель полагает, что с вероятностью 0,8 этот уровень сбыта сохранится и в последующем полугодии при условии проведения особой рекламной кампании и что эта вероятность составит всего 0,5, если такую кампанию не проводить. В случае, если уровень сбыта снизится до среднего, у руководителя имеются две возможности. Он может дать указание о проведении исследований с целью улучшения качества продукта. При этом условии с вероятностью 0,7 уровень сбыта к началу следующего полугодия повысится до первоначального высокого значения. С другой стороны, можно ничего не предпринимать в отношении улучшения качества продукта. Тогда с вероятностью 0,6 в начале последующего полугодия уровень сбыта останется средним, однако вследствие изменений потребительских вкусов он может вновь подняться до высокого значения лишь с вероятностью 0,4.

Если сбыт нового стирального порошка начинается на высоком уровне при обычной рекламе, то прибыли в течение полугодия равны 19 единицам в случае, когда этот уровень сохраняется, и равны 13, если уровень сбыта падает. При проведении специальной рекламной кампании соответствующие показатели равны 4,5 и 2 единицам. Если начальный уровень сбыта окажется средним и при этом проводятся исследования с целью улучшения качества продукции, то прибыли составят 11 единиц в случае, когда уровень сбыта поднимается до высокого, и 9 единиц в противном случае. При сохранении продукта в неизменном виде соответствующие прибыли равны 13 и 3 единицам. Предположим, что одна и та же проблема принятия решений относительно сбыта стирального порошка LYE повторяется через каждые полгода в течение бесконечного планового периода.

2.2 Метод итераций по стратегиям

Для начала выпишем все известные параметры задачи.

Система может быть в двух состояних:

1. хороший сбыт(S_1);
2. средний сбыт(S_2).

Организация может предпринять следующие действия(далее стратегии):

1. всегда улучшать сбыт(X_1)
   - при S_1 - создание специальной рекламы(D_1);
   - при S_2 - проведение исследований(D_2).
2. улучшать сбыт только при хорошем сбыте(X_2)
   - при S_1 - создание специальной рекламы(D_1);
   - при S_2 - ничего не делать(D_3).
3. улучшать сбыт только при среднем сбыте(X_3)
   - при S_1 - ничего не делать(D_3);
   - при S_2 - проведение исследований(D_2).
4. всегда ничего не делать(X_4)
   - при S_1 - ничего не делать(D_3);
   - при S_2 - ничего не делать(D_3).

На основе данной информации составим матрицы переходных вероятностей P_1, P_2, P_3, P_4 соответсвующие стратегиям X_1, X_2, X_3, X_4.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} P_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} P_4 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Также составим матрицы доходов R_1, R_2, R_3, R_4.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 4.5 & 2 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} R_2 = \begin{pmatrix} 4.5 & 2 \\ 13 & 3 \end{pmatrix} R_3 = \begin{pmatrix} 19 & 13 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} R_4 = \begin{pmatrix} 19 & 13 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$$

Множество допустимых стратегий $G = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

2.2.1 Этап(1) оценивания параметров

Выбираем стратегию τ - X_4. Тогда, матрицы переходных вероятностей и доходов будут следующими:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 19 & 13 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$$

Учитывая, что $F_\tau(2) = 0$, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} E_\tau - (1 - 0.5) * F_\tau(1) = 16 \\ E_\tau - (1 - 0.4) * F_\tau(1) = 7 \end{cases}$$

```
syms Et Ft
eqn1 = Et - (1-0.5)*Ft == 16;
eqn2 = Et - (1-0.4)*Ft == 7;
[A, B] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2], [Et, Ft])
X = linsolve(A, B)
```

Листинг 2.1: Скрпит для решения системы уравнений

В результате выполнения скрипта matlab, было получено единственное решение:

$$E_\tau = 61; F_\tau(1) = 90$$

2.2.2 Этап(1) улучшения стратегии

Для каждого состояния S_j, где j от 1 до m, найдем допустимое решение, на котором достигается:

$$max(v_j(X_i) + \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(X_i)F_\tau(k)$$

S_j	$\varphi_i = v_j(X_i) + p_{j1}(X_i)F_i(1)$				$max\varphi_i$	X_j
	i=1	i=2	i=3	i=4		
1	4+0.8*(90)= 76	4+0.8*(90)= 76	16+0.5*(90)= 61	16+0.5*(90)= 61	76	X_1, X_2
2	10.4+0.7*(90)= 73.4	7+0.4*(90)= 40	10.4+0.7*(90)= 73.4	7+0.4*(90)= 40	73.4	X_1, X_3

2.2.3 Этап(2) оценивания параметров

Выбираем стратегию τ - X_3. Тогда, матрицы переходных вероятностей и доходов будут следующими:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 19 & 13 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$$

Учитывая, что $F_\tau(2) = 0$, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} E_\tau - (1 - 0.5) * F_\tau(1) = 16 \\ E_\tau - (1 - 0.7) * F_\tau(1) = 10.4 \end{cases}$$

```
syms Et Ft
eqn1 = Et - (1-0.5)*Ft == 16;
eqn2 = Et - (1-0.7)*Ft == 10.4;
[A, B] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2], [Et, Ft])
X = linsolve(A, B)
```

Листинг 2.2: Скрпит для решения системы уравнений

В результате выполнения скрипта matlab, было получено единственное решение:

$$E_\tau = 2; F_\tau(1) = -28$$

2.2.4 Этап(2) улучшения стратегии

Для каждого состояния S_j, где j от 1 до m, найдем допустимое решение, на котором достигается:

$$max(v_j(X_i) + \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(X_i)F_\tau(k)$$

<table>
<tr><td rowspan="2">S_j</td><td colspan="4">$\varphi_i = v_j(X_i) + p_{j1}(X_i)F_i(1)$</td><td rowspan="2">$max\varphi_i$</td><td rowspan="2">$X_j$</td></tr>
<tr><td>i=1</td><td>i=2</td><td>i=3</td><td>i=4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4+0.8*(-28)= -18.4</td><td>4+0.8*(-28)= -18.4</td><td>16+0.5*(-28)= 2</td><td>16+0.5*(-28)= 2</td><td>2</td><td>X_3, X_4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10.4+0.7*(-28)= -9.2</td><td>7+0.4*(-28)= -4.2</td><td>10.4+0.7*(-28)= -9.2</td><td>7+0.4*(-28)= -4.2</td><td>-4.2</td><td>X_2, X_4</td></tr>
</table>

Так как $t \neq \tau$, то снова переходим к этапу оценивания параметров.

2.2.5 Этап(3) оценивания параметров

Выбираем стратегию τ - X_2. Тогда, матрицы переходных вероятностей и доходов будут следующими:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 4.5 & 2 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$$

Учитывая, что $F_\tau(2) = 0$, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} E_\tau - (1 - 0.8) * F_\tau(1) = 4 \\ E_\tau - (1 - 0.4) * F_\tau(1) = 7 \end{cases}$$

```
syms Et Ft
eqn1 = Et - (1-0.8)*Ft == 4;
eqn2 = Et - (1-0.4)*Ft == 7;
[A, B] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2], [Et, Ft])
X = linsolve(A, B)
```

Листинг 2.3: Скрпит для решения системы уравнений

В результате выполнения скрипта matlab, было получено единственное решение:

$$E_\tau = 5/2; F_\tau(1) = -15/2$$

2.2.6 Этап(3) улучшения стратегии

Для каждого состояния S_j, где j от 1 до m, найдем допустимое решение, на котором достигается:

$$max(v_j(X_i) + \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(X_i)F_\tau(k)$$

S_j	$\varphi_i = v_j(X_i) + p_{j1}(X_i)F_i(1)$				$max\varphi_i$	X_j
	i=1	i=2	i=3	i=4		
1	4+0.8*(-15/2)= -2	4+0.8*(-15/2)= -2	16+0.5*(-15/2)= 12.25	16+0.5*(-15/2)= 12.25	12.25	X_3, X_4
2	10.4+0.7*(-15/2)= 5.15	7+0.4*(-15/2)= 4	10.4+0.7*(-15/2)= 5.15	7+0.4*(-15/2)= 4	5.15	X_1, X_3

Так как $t \neq \tau$, то снова переходим к этапу оценивания параметров.

2.2.7 Этап(4) оценивания параметров

Выбираем стратегию τ - X_1. Тогда, матрицы переходных вероятностей и доходов будут следующими:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 4.5 & 2 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$$

Учитывая, что $F_\tau(2) = 0$, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} E_\tau - (1 - 0.8) * F_\tau(1) = 4 \\ E_\tau - (1 - 0.7) * F_\tau(1) = 10.4 \end{cases}$$

```
syms Et Ft
eqn1 = Et - (1-0.8)*Ft == 4;
eqn2 = Et - (1-0.7)*Ft == 10.4;
[A, B] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2], [Et, Ft])
X = linsolve(A, B)
```

Листинг 2.4: Скрпит для решения системы уравнений

В результате выполнения скрипта matlab, было получено единственное решение:

$$E_\tau = -44/5; F_\tau(1) = -64$$

2.2.8 Этап(4) улучшения стратегии

Для каждого состояния S_j, где j от 1 до m, найдем допустимое решение, на котором достигается:

$$max(v_j(X_i) + \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(X_i)F_\tau(k)$$

S_j	$\varphi_i = v_j(X_i) + p_{j1}(X_i)F_i(1)$				$max\varphi_i$	X_j
	i=1	i=2	i=3	i=4		
1	4+0.8*(-64)= -47.2	4+0.8*(-64)= -47.2	16+0.5*(-64)= -16	16+0.5*(-64)= -16	-16	X_3, X_4
2	10.4+0.7*(-64)= -34.4	7+0.4*(-64)= -18.6	10.4+0.7*(-64)= -34.4	7+0.4*(-64)= -18.6	-18.6	X_2, X_4

Итак в этапе(2) и данном, были найдены оптимальные стратегии. То есть

$$\tau = ((X_3 \text{ или } X_4), (X_2 \text{ или } X_4))^T$$

В каждом из двух состояний, имеется два варианта дальнейших действий.

Если подвести итоги, то данное решение означает что:

- В состоянии хорошего сбыта(S_1) - ничего не делать(D_3);
- В состоянии среднего сбыта(S_2) - ничего не делать(D_3).

И судя по данным итогам, ничего не делать(D_3) является лучшей стратегией. Подобный исход можно объяснить тем, что при попытках увеличения сбыта, компания тратит на это деньги и соответственно доход снижается.