

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ И ПРОГРАММНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**Отчёт по лабораторной работе №4**

**Курс: «Методы оптимизации и принятия решений»**

**Тема: «Анализ GERT-сети»**

Выполнил студент:

Бояркин Никита Сергеевич

Группа: 13541/3

Проверил:

Сиднев Александр Георгиевич

Санкт-Петербург  
2018 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Лабораторная работа №4</b>	<b>2</b>
1.1	Индивидуальное задание . . . . .	2
1.2	Ход работы . . . . .	3
1.2.1	Построение замкнутой GERT-сети . . . . .	3
1.2.2	Построение W-функции . . . . .	3
1.2.3	Построение уравнения Мейсона . . . . .	3
1.2.4	Расчет статистических значений . . . . .	4
1.2.5	Дополнительное задание . . . . .	5
1.3	Вывод . . . . .	6

# Лабораторная работа №4

## 1.1 Индивидуальное задание

### Задача 25

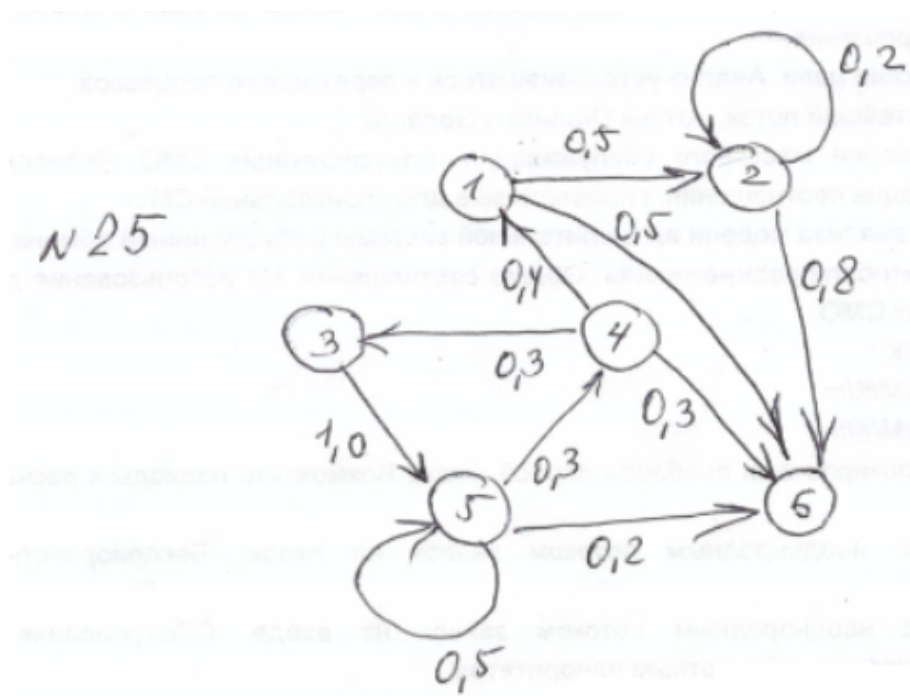


Рис. 1.1: Исходный граф системы

Каждой дуге  $(ij)$  поставлены в соответствие следующие данные:

- Закон распределения времени выполнения работы. Будем считать его нормальным.
- Параметры закона распределения (математическое ожидание  $M$  и дисперсия  $D$ ).
- Вероятность  $P_{ij}$  выполнения работы, показанная на графе.

Необходимо найти:

- Вероятность выхода в завершающий узел графа (для всех вариантов узел 6).
- Математическое ожидание.
- Дисперсию времени выхода процесса в завершающий узел графа.

В отчете перечислить все петли всех порядков, обнаруженные на графе, выписать уравнение Мейсона, получить решение для  $W_E(s)$  и найти требуемые параметры.

### Дополнительное задание

Решить задачу используя методику анализа потокового графа, основанную на обработке матрицы передач (Branch Transmittance Matrix).

## 1.2 Ход работы

### 1.2.1 Построение замкнутой GERT-сети

Чтобы определить эквивалентную W-функцию для анализируемой GERT-сети, необходимо замкнуть сеть дугой, исходящей из узла 6 в узел 1:

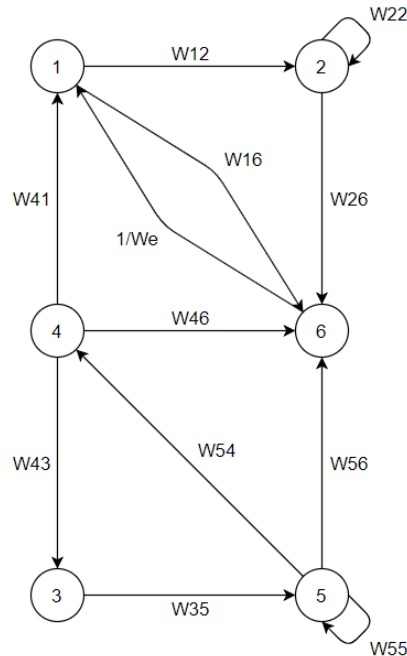


Рис. 1.2: Замкнутая GERT-сеть

### 1.2.2 Построение W-функции

Найдем W-функции для дуг GERT-сети:

Начало	Конец	Вероятность	Мат. ожидание	Дисперсия	W-функция
1	2	0.5	10	4	$0.5 \cdot e^{10t+8t^2}$
1	6	0.5	23	25	$0.5 \cdot e^{23t+312.5t^2}$
2	2	0.2	13	16	$0.2 \cdot e^{13t+128t^2}$
2	6	0.8	11	16	$0.8 \cdot e^{11t+128t^2}$
3	5	1	10	9	$1 \cdot e^{10t+40.5t^2}$
4	1	0.4	37	16	$0.4 \cdot e^{37t+128t^2}$
4	3	0.3	12	16	$0.3 \cdot e^{12t+128t^2}$
4	6	0.3	12	49	$0.3 \cdot e^{12t+1200.5t^2}$
5	4	0.3	15	25	$0.3 \cdot e^{15t+312.5t^2}$
5	5	0.5	19	4	$0.5 \cdot e^{19t+8t^2}$
5	6	0.2	42	9	$0.2 \cdot e^{42t+40.5t^2}$

### 1.2.3 Построение уравнения Мейсона

Найдем все петли первого порядка:

$$\begin{aligned}
 &W_{12} \cdot W_{26} \cdot \frac{1}{W_E} \\
 &W_{16} \cdot \frac{1}{W_E} \\
 &W_{35} \cdot W_{54} \cdot W_{43} \\
 &W_{22} \\
 &W_{55}
 \end{aligned}$$

Найдем все петли второго порядка:

$$\begin{aligned}
 &W_{16} \cdot W_{22} \cdot \frac{1}{W_E} \\
 &W_{16} \cdot W_{35} \cdot W_{54} \cdot W_{43} \cdot \frac{1}{W_E} \\
 &W_{16} \cdot W_{55} \cdot \frac{1}{W_E} \\
 &W_{12} \cdot W_{26} \cdot W_{55} \cdot \frac{1}{W_E} \\
 &W_{12} \cdot W_{26} \cdot W_{35} \cdot W_{54} \cdot W_{43} \cdot \frac{1}{W_E} \\
 &W_{22} \cdot W_{55} \\
 &W_{22} \cdot W_{35} \cdot W_{54} \cdot W_{43}
 \end{aligned}$$

Найдем все петли третьего порядка:

$$\begin{aligned}
 &W_{16} \cdot W_{22} \cdot W_{35} \cdot W_{54} \cdot W_{43} \cdot \frac{1}{W_E} \\
 &W_{16} \cdot W_{22} \cdot W_{55} \cdot \frac{1}{W_E}
 \end{aligned}$$

Таким образом уравнение Мейсона будет иметь следующий вид:

$$H = 1 - (W_{12}W_{26}\frac{1}{W_E} + W_{16}\frac{1}{W_E} + W_{35}W_{54}W_{43} + W_{22} + W_{55}) + (W_{16}W_{22}\frac{1}{W_E} + W_{16}W_{35}W_{54}W_{43}\frac{1}{W_E} + W_{16}W_{55}\frac{1}{W_E} + W_{12}W_{26}W_{55}\frac{1}{W_E} + W_{12}W_{26}W_{35}W_{54}W_{43}\frac{1}{W_E} + W_{22}W_{55} + W_{22}W_{35}W_{54}W_{43}) - (W_{16}W_{22}W_{35}W_{54}W_{43}\frac{1}{W_E} + W_{16}W_{22}W_{55}\frac{1}{W_E})$$

В результате эквивалентная W-функция равняется:

$$W_E(s) = \frac{W_{12}W_{26} + W_{16} - W_{16}W_{22} - W_{16}W_{35}W_{54}W_{43} - W_{16}W_{55} - W_{12}W_{26}W_{55} - W_{12}W_{26}W_{35}W_{54}W_{43} + W_{16}W_{22}W_{35}W_{54}W_{43} + W_{16}W_{22}W_{55}}{1 - W_{35}W_{54}W_{43} - W_{22} - W_{55} + W_{22}W_{55} + W_{22}W_{35}W_{54}W_{43}}$$

## 1.2.4 Расчет статистических значений

Расчет математического ожидания ( $\mu_{1E}$ ) и дисперсии ( $\sigma_E$ ) производится по следующим образом:

$$W_E(s) = p_E \cdot M_E(s), p_E = W_E(0) \implies M_E(s) = \frac{W_E(s)}{W_E(0)}$$

$$\mu_{1E} = \left. \frac{dM_E(s)}{ds} \right|_{s=0}$$

$$\mu_{2E} = \left. \frac{d^2 M_E(s)}{ds^2} \right|_{s=0}$$

$$\sigma_E = \mu_{2E} - \mu_{1E}^2$$

Разработаем скрипт для расчета статистических значений в среде MATLAB:

```

1 clear all;
2 close all;
3 clc;
4 format long g;
5
6 syms s;
7
8 % W-functions
9 W12 = 0.5 * exp(10*s + 8 * s^2);
10 W16 = 0.5 * exp(23 * s + 312.5 * s^2);
11 W22 = 0.2 * exp(13 * s + 128 * s^2);
12 W26 = 0.8 * exp(11 * s + 128 * s^2);
13 W35 = 1 * exp(10 * s + 40.5 * s^2);
14 W41 = 0.4 * exp(37 * s + 128 * s^2);
15 W43 = 0.3 * exp(12 * s + 128 * s^2);
16 W46 = 0.3 * exp(12 * s + 1200.5 * s^2);
17 W54 = 0.3 * exp(15 * s + 312.5 * s^2);
18 W55 = 0.5 * exp(19 * s + 8 * s^2);
19 W56 = 0.2 * exp(42 * s + 40.5 * s^2);
20
21 % We(s)
22 We = (W12 * W26 + W16 - W16 * W22 - W16 * W35 * W54 * W43 - W16 * W55 - W12 * W26 * W55 -
      W12 * W26 * W35 * W54 * W43 + W16 * W22 * W35 * W54 * W43 + W16 * W22 * W55) / (1 -
      W35 * W54 * W43 - W22 - W55 + W22 * W55 + W22 * W35 * W54 * W43);
23 We = simplify(We);
24
25 % We(0)
26 We0 = subs(We, 's', 0);
27 fprintf('We(0) = %.3f\n', double(We0));
28
29 % Me(s)

```

```

30 Me = We / We0;
31
32 % me1
33 me1 = diff(Me, 's', 1);
34 me1 = subs(me1, 's', 0);
35 fprintf('me1 = %.3f\n', double(me1));
36
37 % me2
38 me2 = diff(Me, 's', 2);
39 me2 = subs(me2, 's', 0);
40 fprintf('me2 = %.3f\n', double(me2));
41
42 % de
43 de = me2 - me1 ^ 2;
44 fprintf('de = %.3f\n', double(de));

```

Результат вычисления статистических значений:

```

1 We(0) = 1.000
2 me1 = 23.625
3 me2 = 1065.438
4 de = 507.297

```

### 1.2.5 Дополнительное задание

Для данного метода W-функция  $W_e$  рассчитывается по формуле:

$$M_{1n} = \frac{1}{w_{n1}} = -\frac{\frac{\delta \det(\tilde{A})}{\delta w_{n1}}}{\det(\tilde{A}|_{w_{n1}=0})}, \text{ где}$$

$$n = 6, \tilde{A} = I_n - \tilde{Q}^T, A = I - Q^T, q_{ij}(s) = p_{ij}m_{ij}(s)$$

Разработаем скрипт для расчета статистических значений при помощи анализа потокового графа в среде MATLAB:

```

1 clear all;
2 close all;
3 clc;
4 format long g;
5
6 syms s;
7 syms W61;
8
9 % W-functions
10 W12 = 0.5 * exp(10*s + 8 * s^2);
11 W16 = 0.5 * exp(23 * s + 312.5 * s^2);
12 W22 = 0.2 * exp(13 * s + 128 * s^2);
13 W26 = 0.8 * exp(11 * s + 128 * s^2);
14 W35 = 1 * exp(10 * s + 40.5 * s^2);
15 W41 = 0.4 * exp(37 * s + 128 * s^2);
16 W43 = 0.3 * exp(12 * s + 128 * s^2);
17 W46 = 0.3 * exp(12 * s + 1200.5 * s^2);
18 W54 = 0.3 * exp(15 * s + 312.5 * s^2);
19 W55 = 0.5 * exp(19 * s + 8 * s^2);
20 W56 = 0.2 * exp(42 * s + 40.5 * s^2);
21
22 Q = [0 W12 0 0 0 W16;
23      0 W22 0 0 0 W26;
24      0 0 0 0 W35 0;
25      W41 0 W43 0 0 W46;
26      0 0 0 W54 W55 W56;
27      W61 0 0 0 0 0];
28
29 % Determinate A
30 A = eye(size(Q, 1)) - Q';
31 detA = det(A);
32 dDetA = diff(detA, W61, 1);
33 detA0 = subs(detA, W61, 0);

```

```

34
35 % We(s)
36 We = dDetA / detA0;
37 We = simplify(We);
38
39 % We(0)
40 We0 = subs(We, 's', 0);
41 fprintf('We(0) = %.3f\n', double(We0));
42
43 % Me(s)
44 Me = We / We0;
45
46 % me1
47 me1 = diff(Me, 's', 1);
48 me1 = subs(me1, 's', 0);
49 fprintf('me1 = %.3f\n', double(me1));
50
51 % me2
52 me2 = diff(Me, 's', 2);
53 me2 = subs(me2, 's', 0);
54 fprintf('me2 = %.3f\n', double(me2));
55
56 % de
57 de = me2 - me1 ^ 2;
58 fprintf('de = %.3f\n', double(de));

```

Результат вычисления статистических значений:

```

1 We(0) = -1.000
2 me1 = 23.625
3 me2 = 1065.438
4 de = 507.297

```

Результаты идентичны предыдущему решению, за исключением  $W_e(0)$ , что объясняется результирующей функцией взятой с обратным знаком.

### 1.3 Вывод

В ходе данной лабораторной работы были получены навыки работы с вероятностными графами и их обработка с помощью методики GERT. При заданных значениях вероятности, мат. ожидания и дисперсии для каждой дуги исходного графа достаточно легко рассчитываются W-функции, которые необходимы для построения формулы Мейсона. После этого из формулы Мейсона по формулам математической статистики достаточно легко рассчитывается результирующее мат. ожидание и дисперсия.

Решение путем анализа потокового графа показало аналогичные результаты, что подтверждает корректность решения. Однако, метод анализа потокового графа выполняется заметно медленнее, даже на небольшом графе.