Оптимизация разомкнутых неоднородных ССМО на основе двухмоментной аппроксимации СМО типа GI/G/m

По материалам статьи

Gabriel R. Bitran, Reinaldo Morabito

Open Queueing Networks: Optimization and Performance Evaluation Models for Discrete Manufacturing Systems

и Главы 6 книги Башарина и др. Анализ очередей в вычислительных сетях

Приближенные методы расчета открытых сетей по двум моментам

Модели ССМО

Сети Джексона

- Однородные M/M/1 открытые сети,
- Однородные M/M/m открытые сети,

Обобщенные сети Джексона

- Однородные GI/G/1 открытые сети,
- Однородные GI/G/m открытые сети,
- Неоднородные GI/G/m открытые сети

Задача 1

Оптимизация многоканальной однородной разомкнутой сети Джексона – оптимальный выбор интенсивностей обслуживания в каналах при заданном числе каналов в узлах сети.

Дано: Вектор $\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2}, \ . \ . \ . \ , \boldsymbol{m_M})$, суммарная интенсивность обслуживания в сети $\boldsymbol{D}$.

Найти оптимальное распределение суммарной интенсивности $\boldsymbol{D}$ по отдельным каналам узлов сети

Задача 1

$$\min T = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\lambda_0}\left[\overline{t_{ож\,i}}(\mu_i) + \frac{1}{\mu_i}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{M} m_i \cdot \mu_i = D$$

Задача 2

$$min\left\{\sum_{i=1}^{M} m_i \cdot \mu_i\right\}$$

$$T = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\lambda_0}\left[\overline{t_{ож\,i}}(\mu_i) + \frac{1}{\mu_i}\right] = T_{пред}$$

Задача 10

$$\min T = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\lambda_0}\left[\overline{t_{ож\,i}(\mu_i)} + \frac{1}{\mu_i}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_i = D$$

Однородные M/M/1 открытые сети

Задача 10

$$\mu_{i\,opt} = \lambda_i + D_e \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sum_{j=1}^{M} \sqrt{\lambda_j}}$$

$D_e = D - \sum_{i=1}^{M} \sqrt{\lambda_i}$ — добавочная интенсивность сети

Задача 20

$$\min \sum_{i=1}^{M} \mu_i$$

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \left[\frac{1}{\mu_i - \lambda_i} \right] = T_{пред}$$

$$\mu_{i\,opt} = \lambda_i + \frac{1}{\lambda_0} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_i}}{T_{пред}} \sum_{j=1}^{M} \sqrt{\lambda_j}$$

Задача 1

$$\min T=\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\left[\overline{t_{ож\,i}}(\mu_i)+\frac{1}{\mu_i}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{M} m_i\cdot\mu_i=D$$

Задача 2

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{M} m_i\cdot\mu_i\right\}$$

$$T=\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\left[\overline{t_{ож\,i}}(\mu_i)+\frac{1}{\mu_i}\right]=T_{пред}$$

$$\overline{t_{ож\,i}}=\frac{\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{m_i}\cdot P_i(0)}{m_i\cdot m_i!\cdot\mu_i\left(1-\frac{\lambda_i}{m_i\mu_i}\right)^2}=\frac{\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{m_i}\cdot P_i(0)}{m_i!\cdot\mu_i\left(m_i-\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^2}$$

$$P_i(0)=\left[\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^j\frac{1}{j!}+\frac{\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{m_i+1}}{m_i!\left(m_i-\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)}\right]^{-1}$$

Задача 1

$$F\left(\vec{\mu},\beta\right)=T\left(\vec{\mu}\right)+\beta\left[\sum_{i=1}^{M} m_i\cdot\mu_i-D\right]$$

$$\nabla F\left(\vec{\mu},\beta\right)=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\mu_i}=\dfrac{\lambda_i}{\lambda_0}\left[\dfrac{\partial\left(\overline{t_{ож\,i}}(\mu_i)\right)}{\partial\mu_i}-\left(\dfrac{1}{\mu_i}\right)^2\right]+\beta\cdot m_i\cdot\mu_i=0\ ,i=\overline{1,M}\\ \sum_{i=1}^{M} m_i\cdot\mu_i=D\end{cases}$$

Задача 2

$$F\left(\vec{\mu},\beta\right)=\sum_{i=1}^{M} m_i\mu_i+\beta\left[\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\left[\overline{t_{ож\,i}}(\mu_i)+\frac{1}{\mu_i}\right]-T_{пред}\right]$$

$$\nabla F\left(\vec{\mu},\beta\right)=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\mu_i}=m_i+\beta\dfrac{\lambda_i}{\lambda_0}\left[\dfrac{\partial\left(\overline{t_{ож\,i}}(\mu_i)\right)}{\partial\mu_i}-\left(\dfrac{1}{\mu_i}\right)^2\right]=0\,,\ i=\overline{1,M}\\ T=\displaystyle\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\left[\overline{t_{ож\,i}}(\mu_i)+\frac{1}{\mu_i}\right]=T_{пред}\end{cases}$$

Расчет однородных ССМО типа GI/G/1

Анализ ССМО GI/G/m

Дано

$$\left[\{\lambda_{0j}\},\{ca_{0j}\},\{\mu_j\},\{cs_j\},Q=\{q_{ij}\}\right]$$

Найти

$$T=\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\left[\overline{t_{ож\,i}}+\frac{1}{\mu_i}\right]$$

Расчет однородных ССМО типа **GI/G/1** и GI/G/m

$$\{\lambda_j\} \Rightarrow \{ca_j\} \Rightarrow \{\overline{t_{ож\,j}}\} \Rightarrow T = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \left[\overline{t_{ож\,i}} + \frac{1}{\mu_i} \right]$$

$$\Phi(\lambda, ca, \mu, cs) = 0$$

Расчет неоднородных ССМО типа GI/G/1 и GI/G/m

Приведение неоднородной ССМО

к однородной

$$\left\{Q^{(l)}\right\}_{l=\overline{1,V}} \Rightarrow Q$$

$$\left\{\mu_i^{(l)}\right\}_{\substack{i=\overline{1,M}\\ l=\overline{1,V}}} \Rightarrow \left\{\mu_i\right\}_{i=\overline{1,M}}$$

$$\left\{cs_i^{(l)}\right\}_{\substack{i=\overline{1,M}\\ l=\overline{1,V}}} \Rightarrow \left\{cs_i\right\}_{i=\overline{1,M}}$$

$$\left\{ca_{0i}^{(l)}\right\}_{\substack{i=\overline{1,M}\\ l=\overline{1,V}}} \Rightarrow \left\{ca_{0i}\right\}_{i=\overline{1,M}}$$

Приведение неоднородной ССМО типа GI/G/1 и GI/G/m к однородной

Приведение неоднородной ССМО к однородной

$$\left\{Q^{(l)}\right\}_{l=\overline{1,V}} \Rightarrow Q$$

$$\left\{\mu_i^{(l)}\right\}_{\substack{i=\overline{1,M}\\ l=\overline{1,V}}} \Rightarrow \left\{\mu_i\right\}_{i=\overline{1,M}}$$

$$\left\{cs_i^{(l)}\right\}_{\substack{i=\overline{1,M}\\ l=\overline{1,V}}} \Rightarrow \left\{cs_i\right\}_{i=\overline{1,M}}$$

$$\left\{ca_{0i}^{(l)}\right\}_{\substack{i=\overline{1,M}\\ l=\overline{1,V}}} \Rightarrow \left\{ca_{0i}\right\}_{i=\overline{1,M}}$$

$$q_{ij} = \frac{\sum_{r=1}^{R} \lambda_{ij}^{(r)}}{\lambda_i}.$$

$$E\left(s_j\right) = \frac{1}{\mu_j} = \frac{\sum_{r=1}^{R} s_j^{(r)} \cdot \lambda_j^{(r)}}{\lambda_i}.$$

$$cs_j = \frac{\sum_{r=1}^{R} \lambda_j^{(r)} E\left(s_{jr}\right)^2 \left(cs_{jr} + 1\right)}{\lambda_j E\left(s_j\right)^2} - 1$$

Приведение неоднородной ССМО типа GI/G/1 и GI/G/m к однородной

Приведение неоднородной ССМО к однородной

$$\left\{Q^{(l)}\right\}_{l=\overline{1,V}} \Rightarrow Q$$

$$\left\{\mu_i^{(l)}\right\}_{\substack{i=\overline{1,M}\\ l=\overline{1,V}}} \Rightarrow \left\{\mu_i\right\}_{i=\overline{1,M}}$$

$$\left\{cs_i^{(l)}\right\}_{\substack{i=\overline{1,M}\\ l=\overline{1,V}}} \Rightarrow \left\{cs_i\right\}_{i=\overline{1,M}}$$

$$\left\{ca_{0i}^{(l)}\right\}_{\substack{i=\overline{1,M}\\ l=\overline{1,V}}} \Rightarrow \left\{ca_{0i}\right\}_{i=\overline{1,M}}$$

$$\left.\begin{array}{l} ca_{0j} = w_j \sum\limits_{r=1}^{R} \dfrac{ca_0^{(r)} \lambda_0^{(r)} q_{0j}^{(r)}}{\sum\limits_{r=1}^{R} \lambda_0^{(r)} q_{0j}^{(r)}} + 1 - w_j \text{ , где} \\[2em] w_j = \dfrac{1}{1 + 4\left(1-\rho_j\right)^2 \left(v_j - 1\right)} \text{ , где} \\[2em] v_j = \dfrac{1}{\sum\limits_{r=1}^{R} \left(\dfrac{ca_0^{(r)} \lambda_0^{(r)} q_{0j}^{(r)}}{\sum\limits_{r=1}^{R} \lambda_0^{(r)} q_{0j}^{(r)}} \right)^2} . \end{array}\right\}$$

Оптимизация разомкнутых ССМО

2 задачи

Задача 1 SP2.1

$$min\ T = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\lambda_0}\left[\overline{t_{ож\ i}}(\mu_i) + \frac{1}{\mu_i}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{M} m_i \cdot \mu_i = D$$

Задача 2 SP1.1

$$min\left\{\sum_{i=1}^{M} m_i \cdot \mu_i\right\}$$

$$T = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\lambda_0}\left[\overline{t_{ож\ i}}(\mu_i) + \frac{1}{\mu_i}\right] = T_{пред}$$

Оптимизация разомкнутых ССМО

5 алгоритмов оптимизации однородных разомкнутых ССМО

Оптимизация разомкнутых ССМО

№ ал-ма	Тип ал-ма
1	SP1.1/J/M/N (задача 2)
2	SP2.1/J/M/N (задача 1)
3	SP1.1/G/S/R (задача 2)
4	SP2.1/G/S/R (задача 1)
5	SP1.1/G/M/N,R (задача 2)

Условные обозначения $\alpha / \beta / \chi / \delta$

- Нотация обозначения моделей (задач)

$\alpha \in \{SP1.1, SP2.1, SP3.1\}$	тип задачи
$\beta \in \{J, G\}$	открытая СМО Джексона (J) обобщенная открытая СМО (G)
$\chi \in \{S, M\}$	простые обслуживающие устройства (S) многоканальные устройства (M)
$\delta \in \{R, N\}$	параметр решения – математическое ожидание интенсивности обслуживания (R) параметр решения – число обслуживающих устройств в каждой станции (N)

Модели SP1.1/J/M/N

$F_j(m_j)$ – стоимость выделения m_j машин в станции j

$PI_j(m_j)$ – коэффициент приоритета, определенный как фактор увеличения стоимости и уменьшения WIP в станции j

$$PI_j(m_j) = \frac{\Delta F_j(m_j+1)}{-v_j \Delta L_j(m_j+1)}$$

$$\Delta F_j(m_j+1) = F_j(m_j+1) - F_j(m_j) \geq 0$$
$$\Delta L_j(m_j+1) = L_j(m_j+1) - L_j(m_j) < 0$$

Минимизировать стоимость покупки оборудования, не превышая заданный уровень незавершенных работ WIP L_T. Управляемые переменные - мощность каждой станции.

Сеть Джексона, многоканальные обслуживающие устройства, параметр решения – число обслуживающих устройств в станции.

SP 1.1/J/M/N

$$\min F(m) = \sum_{j=1}^{n} F_j(m_j)$$

при условии, что:

$$L(m) \leq L_T$$

где $m_j \geq m_j^0, m_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n.$

Алгоритм 1

Предлагается 4 алгоритма: алгоритмы 2 и 4 предназначены для балансировки производящих систем, тогда как алгоритмы 1 и 3 эффективно распределяют ресурсы.

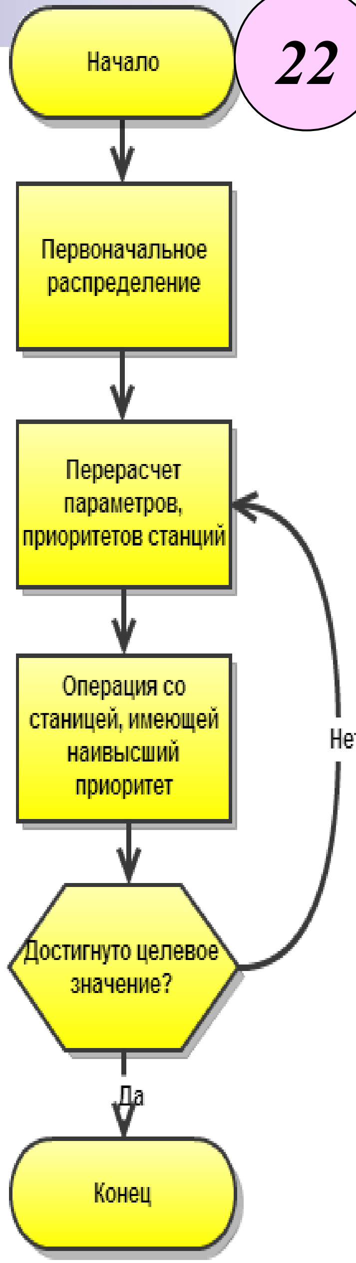
1. Алгоритм начинается с выделения $m_j = m_j^0, j = 1, \dots, n$. Это решение недопустимо ($L(m^0) > L_T$) и его стоимость $F(m^0)$ меньше, чем минимальная стоимость SP 1.1/J/M/N.

2. На каждой итерации перерассчитываются стоимость $F(m)$, WIP $L(m)$ (используя (38) и (39)), и $PI_j(m_j)$ (используя (41)). Обслуживающее устройство добавляется в станцию j^* с наименьшим индексом $PI_j(m_j)$ (жадная стратегия), используя: $PI_{j*} = \min\{PI_j(m_j),\ j = 1, \dots, n\}$

3. Алгоритм прерывается, если $L(m)$ достигает целевого значения L_T (допустимое решение).

Оценка эффективности (~5%):

$$F(m^{p-1}) < F(m^*) \le F(m^p)$$



Модель SP2.1/M/N; Алгоритм 2

$PI_j(m_j)$ – индекс приоритета:

$$PI_j(m_j) = -v_j \Delta L_j(m_j + 1)$$

где $\Delta L_j(m_j + 1) = L_j(m_j + 1) - L_j(m_j) < 0.$

Алгоритм 2

1. Распределение $m_j = m_j^0,\ j = 1, \dots, n.$
2. На каждой итерации перерассчитывается показатель WIP $L(m)$ ((38), (39)) и индекс $PI_j(m_j)$ (44). В станцию j^* добавляется машина с наибольшим значение индекса PI_{j^*} (жадная стратегия): PI_{j^*} $=max\{PI_j(m_j), j = 1, \dots, n\}$
3. Алгоритм завершается если суммарное количество выделенных машин достигает предела M (допустимое решение).

Распределить (или перераспределить) машины так, чтобы оптимизировать оценку производительности (WIP).

Многоканальные гомогенные обслуживающие устройства, параметр решения – число обслуживающих устройств в станции.

SP2.1/J/M/N)

$$\boldsymbol{\min L(m)}$$

при условии, что:

$$\sum_{j=1}^{n} m_j = M$$

где

$$m_j \geq m_j^0,\ m_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \dots, n$$

Модель SP1.1/G/S/R; Алгоритм 3

$PI_j\left(\mu_j\right)$ - индекс приоритета, фактор увеличения предельной стоимости и уменьшения предельного показателя WIP в станции j:

$$PI_j\left(\mu_j\right) = \frac{\partial F_j(\mu_j)/\partial(\mu_j)}{-v_j \partial L_j(\mu_j)/\partial(\mu_j)}$$

Алгоритм 3

1. Алгоритм начинается с выделения $\mu_j = \mu_j^{\,0}$, а также вычисления ca_j и cs_j.
2. На каждой итерации перерассчитывается стоимость $F(\mu)$, WIP $L(\mu)$ (используя (48) и (49)) и $PI_j\left(\mu_j\right)$ (используя (51)). Мощность добавляется в станцию j^* с наименьшим значением индекса PI_{j^*} (жадная стратегия): PI_{j^*} $= min\{PI_j(m_j), j = 1, \dots, n\}$
3. Алгоритм прекращается, как только значение $L(\mu)$ достигает целевого уровня L_T (допустимое решение)

Минимизировать стоимость покупки оборудования, не превышая заданный уровень незавершенных работ WIP L_T. Управляемые переменные - мощность каждой станции. Обобщенная сеть, многоканальные обслуживающие устройства.

L_T - целевое значение параметра сети WIP, такое, что $L\left(\mu^0\right) > L_T$. $F_j(\mu_j)$ - стоимость выделения мощности μ_j в станцию j, выражаемая выпуклой неубывающей дифференцируемой функцией.

(SP1.1/G/S/R)

$$\min F(\mu) = \sum_{j=1}^{n} F_j(\mu_j)$$

при условии, что

$$L(\mu) \le L_T$$

где

$$\mu_j \ge \mu_j^0, \quad j = 1, \dots, n$$

Модель SP1.1/G/M/R&N с дискретными переменными

Для оценки параметров каждой станции применяются приближенные методы декомпозиции:

$$\Phi(m, \lambda, ca, \mu, cs) = 0$$

Применяя закон Литтла получаем математическое ожидание числа работ в станции j:

$$L_j\left(m_j, \lambda_j, ca_j, \mu_j, cs_j\right) = \frac{\lambda_j\left(ca_j + cs_j\right)}{2} Lq_j(M/M/m_j) + \frac{\lambda_j}{\mu_j}$$

Битран и Тирупати рассмотрели конечное число альтернатив изменения мощности для каждой станции.

u_{jk} - двоичная переменная выбора альтернативы:

$$u_{jk} = \begin{cases} 1, \text{если альтернатива } k \text{ выбрана для станции } j \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Минимизировать стоимость покупки оборудования, не превышая WIP L_T. Управляемые переменные - мощность каждой станции. Обобщенная сеть, многоканальные обслуживающие устройства, параметр решения – матем. ожидание интенсивности обслуживания. Мощность выделяется дискретно. Работы в сети принадлежат разным классам, и каждый класс проходит по сети по детерминированному маршруту.

(SP1.1/G/M/R)

$$\min F(u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n_j} f_{jk} u_{jk}$$

при условии, что

$$L(u) \le L_T$$

$$\sum_{k=1}^{n_j} u_{jk} = 1$$

где $j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n_j;\ u_{jk} \in \{0, 1\}$, L_T – целевое (желаемое) значение параметра WIP для сети.

Алгоритм 4

1. Алгоритм начинается с допустимого выделения мощности $\mu_j \geq \mu_j^1$ и вычисления ca_j и cs_j (используя (47)) для каждой станции j. Определим J_0 как набор доступных станций, J_1 как набор станций, мощность которых увеличена, и J_2 как набор станций, мощность которых сокращена. Изначально, $J_0 = \{1,2,\ldots,n\}$, а J_1 и J_2 – пустые. Вычислим ε_j таким образом, что: $PI_j(\mu_j)\left(\lambda_j + \varepsilon_j\right) = \max\left\{PI_j(\mu_j), j \in J_0\right\}$

2. На каждой итерации перерассчитывается WIP $L(\mu)$ (используя (48) и (49)), а также $PI_j(\mu_j)$ (используя (54)). Находим станцию j_1 с наименьшим индексом PI_{j1}: $PI_{j1} = \min\left\{PI_j(\mu_j), j \in J_0\right\}$ и станцию j_2 с наибольшим индексом PI_{j2}: $PI_{j2} = \max\left\{PI_j(\mu_j), j \in J_0\right\}$
   1. Если $j_1 \in J_1$, то $J_0 \leftarrow J_0 - \{j_1\}$.
   2. Если $j_2 \in J_2$, то $J_0 \leftarrow J_0 - \{j_2\}$.
   3. Если $j_1 \notin J_1$ и $j_1 \notin J_2$, то определяем $\Delta_1 = \min\{\Delta, \mu_{j1} - \lambda_{j1} - \varepsilon_{j1}\}$ и выполняем $\mu_{j1} \leftarrow \mu_{j1} - \Delta_1$, $\mu_{j2} \leftarrow \mu_{j2} + \Delta_1$, $J_1 \leftarrow J_1 \cup \{j_2\}$ и $J_2 \leftarrow J_2 \cup \{j_1\}$.

3. Заканчиваем выполнение, если J_0 пусто или унитарно, или $PI_{j1} = PI_{j2}$.

Можно переформулировать задачу и получить более точное решение (работы Вьена).

Алгоритм 5 SP1.1/G/M/R&N

- m_{jk} – число идентичных машин в станции j в альтернативе k;
- μ_{jk} – ожидаемая скорость обслуживания каждой машины в станции j в альтернативе k;

Алгоритм 5 SP1.1/G/M/R&N

1. Пусть u^1 будет оптимальным решением задачи линейной релаксации SP1.1/G/M/R. Если u^0 является допустимым решением задачи SP1.1/G/M/R, тогда $u^1 = u^0$ является оптимальным решением задачи SP1.1/G/M/R, иначе переходим к шагу 2.

2. Пусть i будет станцией, для которой переменные являются дробными для некоторых k_1 и k_2 $(0 < u^0_{ik1} < 1; 0 < u^0_{ik2} < 1)$. Допустимое решение SP1.1/G/M/R получается из выражений:

$$u^1_{jk} = u^0_{jk}, j \neq i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n_j$$

$$u^1_{jk} = \begin{Bmatrix} 1, \text{если } k = l \\ 0, \text{иначе} \end{Bmatrix},$$

где l такое, что:

$$L_{il} = \max\{L_{ik} | L_{ik} \leq L_{ik1}u^0_{ik1} + L_{ik2}u^0_{ik2}, k = 1, \dots, n_i\}$$

Оценка алгоритма ~0.08%.

Детализация алгоритмов

Алгоритм 1 (начало)

Шаг 1. Найти $\{m_j^0\}, j=\overline{1,n}$, идти к Шагу 2

Шаг 2. Если $L(m^0) \leq L_r$, вектор $\{m_j^0\}, j=\overline{1,n}$ есть оптимальное решение,

Идти к шагу 9, иначе идти к Шагу 3.

Шаг 3. Найти $\{PI_j(m_j)\}, j=\overline{1,n}$, идти к шагу 4

Шаг 4. Найти $PI_{j^*} = \min\limits_{(j)} PI_j(m_j)$, идти к шагу 5

Шаг 5. $m_{j^*} = m_{j^*} + 1$, идти к шагу 6

Детализация алгоритмов

Алгоритм 1 (окончание)

Шаг 6. Пересчитать $L\left(j^*\right), F_j\left(m_{j^*}\right), PI_{j^*}\left(m_{j^*}\right)$, идти к шагу 7

Шаг 7. Коррекция $m, L(m), F\ (m), PI(m)$, идти к шагу 8

Шаг 8. Если $L(m) \le L_r$, то вектор $m = \{m_j\}, j = \overline{1,n}$ есть оптимальное решение,

Идти к шагу 9, иначе идти к шагу 4

Шаг 9. ОСТАНОВ

Детализация алгоритмов

Алгоритм 2 (начало)

Шаг 1. Найти $\{m_j^0\}, j = \overline{1, n}$, идти к Шагу 2

Шаг 2. Если $\sum_{j=1}^{n} m_j^0 = M$, вектор $\{m_j^0\}, j = \overline{1, n}$ есть оптимальное решение,

Идти к шагу 7, иначе идти к Шагу 3.

Шаг 3. Найти $\{PI_j(m_j)\}, j = \overline{1, n}$, идти к шагу 4

Шаг 4. Найти $PI_{j^*} = \max\limits_{(j)} PI_j(m_j)$, идти к шагу 5

Детализация алгоритмов

Алгоритм 2 (окончание)

Шаг 5. $m_{j^*} = m_{j^*} + 1$, идти к шагу 6

Шаг 6. Если $\sum_{j=1}^{n} m_j = M$, вектор $\{m_j\}, j = \overline{1,n}$ есть оптимальное решение,

Идти к шагу 8, иначе идти к шагу 7

Шаг 7. Пересчет $PI_j(m_j^*)$,

идти к шагу 3

Шаг 8. ОСТАНОВ

Детализация алгоритмов

Алгоритм 3 (Обобщенные сети Джексона) (начало)

Шаг 1. Найти допустимое решение $\{\mu_j^0\},\ j=\overline{1,n}$,

Найти $\{ca_j\},\ j=\overline{1,n}$, $L(\mu^0)$ идти к Шагу 2

Шаг 2. Если $L(\mu^0)\le L_r$, вектор $\{\mu_j^0\},\ j=\overline{1,n}$ есть оптимальное решение,

Идти к шагу 9, иначе идти к Шагу 3.

Шаг 3. Найти $\{PI_j(\mu_j)\},\ j=\overline{1,n}$, идти к шагу 4

Шаг 4. Найти $PI_{j^*}=\min\limits_{(j)} PI_j(\mu_j)$, идти к шагу 5

Детализация алгоритмов

Алгоритм 3 (Обобщенные сети Джексона) (окончание)

Шаг 5. $\mu_{j^*} = \mu_{j^*} + \Delta$, идти к шагу 6

Шаг 6. Пересчитать $\rho_{j^*} = \dfrac{\lambda_{j^*}}{\mu_{j^*}}$ и ca_{j^*}, пересчитать также $\{ca_i\}$ всех узлов, связанных с выходом узла j^*: $\{ca_i, i \in I_j\}$, $I_j = \{i : q_{ij} \neq 0\}$[1],

Шаг 7. Пересчитать $L(j^*)$, $F_j(\mu_{j^*})$, $PI_{j^*}(\mu_{j^*})$, идти к шагу 7

Шаг 8. Коррекция $\mu, L(\mu), F(\mu), PI(\mu)$, идти к шагу 9

Шаг 9. Если $L(\mu) \leq L_r$, то вектор $\mu = \{\mu_j\}, j = \overline{1,n}$ есть оптимальное решение,

Идти к шагу 10, иначе идти к шагу 4

Шаг 10. ОСТАНОВ

Детализация алгоритмов

Алгоритм 4 (Обобщенные сети Джексона) (начало)

Шаг 1. Найти допустимое решение $\left\{\mu_j^1\right\} \geq \left\{\mu_j^0\right\},\ j = \overline{1,n}$,

Найти $\left\{ca_j\right\},\ j = \overline{1,n}$, $L\left(\mu^1\right)$.

Сформировать множество $J_0 = \{1,2,\ldots,n\}$ узлов, изначально включающее в себя все узлы ССМО.

Сформировать пустое множество J_1 узлов, получающих добавление интенсивности.

Сформировать пустое множество J_2 узлов, получающих уменьшение интенсивности, идти к Шагу 2

Детализация алгоритмов

Алгоритм 4 (Обобщенные сети Джексона) (продолжение)

Шаг 2. Найти $\{PI_j(\mu_j)\}$, $j \in J_0$, идти к шагу 4

Шаг 3. Найти $PI_{j_2} = \max\limits_{(j)} PI_j(\mu_j)$,

Найти $PI_{j_1} = \min\limits_{(j)} PI_j(\mu_j)$,

If $j_1 \in J_1$, then make $J_0 \leftarrow J_0 - \{j_1\}$.

If $j_2 \in J_2$, then make $J_0 \leftarrow J_0 - \{j_2\}$.

If $j_1 \notin J_1$ and $j_2 \notin J_2$, then define $\Delta_1 = min\{\Delta, \mu_{j_1} - \lambda_{j_1} - \varepsilon_{j_1}\}$ and make $\mu_{j_1} \leftarrow \mu_{j_1} - \Delta_1$, $\mu_{j_2} \leftarrow \mu_{j_2} + \Delta_1$, $J_1 \leftarrow J_1 \cup \{j_2\}$ and $J_2 \leftarrow J_2 \cup \{j_1\}$.

идти к шагу 4

Детализация алгоритмов

Алгоритм 4 (Обобщенные сети Джексона) (окончание)

Шаг 4. Если J_0 есть пустое множество или $PI_{j_1} = PI_{j_2}$,

идти к шагу 9, иначе идти к шагу 5.

Шаг 5. Пересчитать $\rho_{j_2} = \dfrac{\lambda_{j_2}}{\mu_{j_2}}$ и ca_{j_2}, $\rho_{j_1} = \dfrac{\lambda_{j_1}}{\mu_{j_1}}$ и ca_{j_1} пересчитать также $\{ca_i\}$

всех узлов, связанных с выходами узлов j_1 и j_2 [2].

Шаг 6. Пересчитать $L_{j_1}(\mu_{j_1}), L_{j_2}(\mu_{j_2}),\ PI_{j_1}(\mu_{j_1}),\ PI_{j_2}(\mu_{j_2})$, идти к шагу 7

Шаг 7. Коррекция $\mu, L(\mu), PI(\mu)$, идти к шагу 3

Шаг 9. ОСТАНОВ.

Детализация алгоритмов

Алгоритм 5 (Обобщенные сети Джексона)

$$L(u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n_j} v_j L_{jk} u_{jk}$$

$$\text{(SP1.1/G/M/R)} \quad \min \quad F(u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n_j} f_{jk} u_{jk}$$

$$\text{subject to:} \quad L(u) \le L_T$$

$$\sum_{k=1}^{n_j} u_{jk} = 1, \text{ for } j = 1, \ldots, n$$

$$\text{with:} \quad u_{jk} \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, n_j$$

Детализация алгоритмов

Алгоритм 5 (Обобщенные сети Джексона)

Algorithm 5

1. Let u^0 be the optimal solution to the LP relaxation of SP1.1/G/M/R. If u^0 is a feasible solution to SP1.1/G/M/R, then $u^1 = u^0$ is an optimal solution to SP1.1/G/M/R, otherwise go to step 2.

2. Let i be the station which variables are fractional values for some k_1 and k_2 ($0 < u^0_{ik_1} < 1$, $0 < u^0_{ik_2} < 1$). A feasible solution to SP1.1/G/M/R is given by:

$$u^1_{jk} = u^0_{jk}, j \neq i, j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, n_j$$

$$u^1_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{if } k = l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where l is such that:

$$L_{il} = max\{L_{ik} | L_{ik} \leq L_{ik_1} u^0_{ik_1} + L_{ik_2} u^0_{ik_2}, k = 1, \ldots, n_i\}$$

Задача SP3.1

(SP3.1) Targeted number of products and WIP level in each plant:
Objective: minimize cost of equipment acquisition
Decision variables: number of plants, product mix in each plant, capacity of each workstation
Constraints: upper bound on number of products in each plant and WIP level.

SP3.1 also involves a trade-off between cost of adding capacity and reduction of managerial complexity in the system. It may be seen as a special case of class SP1.

Упрощенная интерпретация задачи SP3.1

Задача разбиения ССМО на узлы при сохранении числа классов заявок в сети, ограничении числа классов заявок в узлах удовлетворения ограничений на время прохождения заявки через сеть и минимизации суммарной производительности сети