

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ И ПРОГРАММНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**Отчёт по лабораторной работе №4**

**Курс: «Методы оптимизации и принятия решений»**

**Тема: «Анализ GERT-сети»**

Выполнил студент:

Ерниязов Тимур Ертлеуевич

Группа: 13541/2

Проверил:

Сиднев Александр Георгиевич

Санкт-Петербург  
2019 г.

# Содержание

# Лабораторная работа №4

## 1.1 Задание

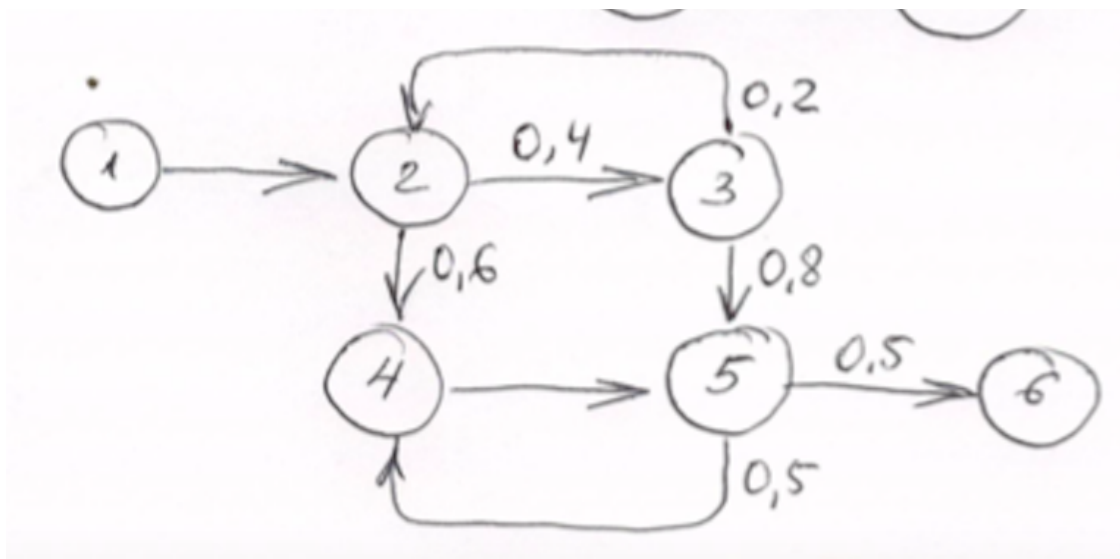


Рис. 1.1: Исходный граф системы

### Часть 1

Каждой дуге  $(ij)$  поставлены в соответствие следующие данные:

- закон распределения времени выполнения работы (будем считать его нормальным);
- параметры закона распределения; (математическое ожидание  $M$  и дисперсия  $D$ ).
- вероятность  $P_{ij}$  выполнения работы, показанная на графе.

Необходимо найти:

- вероятность выхода в завершающий узел графа (для всех вариантов узел 6);
- математическое ожидание;
- дисперсию времени выхода процесса в завершающий узел графа;
- начальные моменты первых 10 порядков.

В отчете перечислить все петли всех порядков, обнаруженные на графе, выписать уравнение Мейсона, получить решение для  $W_E(s)$  и найти требуемые параметры.

### Часть 2

Решить задачу используя методику анализа потокового графа, основанную на обработке матрицы передач (Branch Transmittance Matrix).

## 1.2 Ход работы

### 1.2.1 Построение замкнутой GERT-сети

Чтобы определить эквивалентную W-функцию для анализируемой GERT-сети, необходимо замкнуть сеть дугой, исходящей из узла 6 в узел 1:

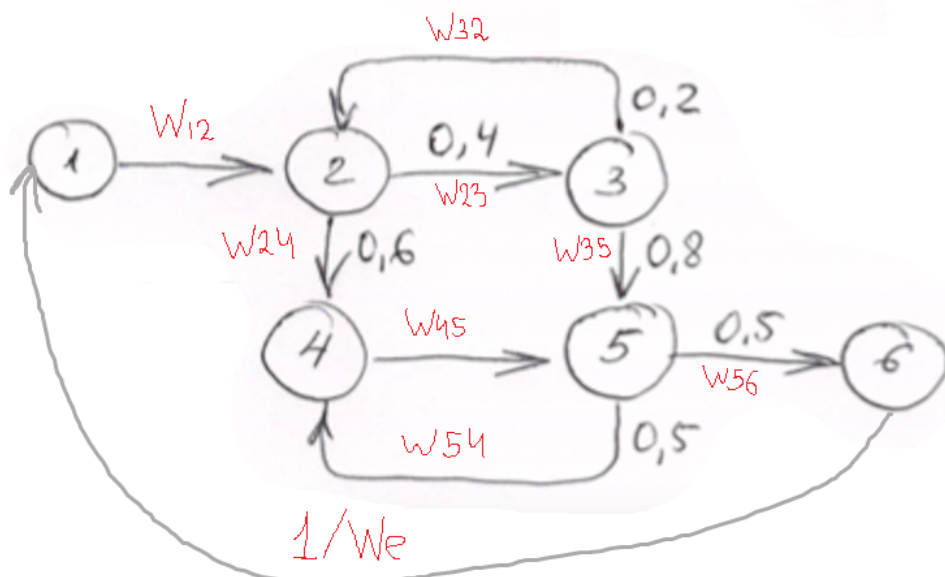


Рис. 1.2: Замкнутая GERT-сеть

### 1.2.2 Построение W-функции

Найдем W-функции для дуг GERT-сети:

Начало	Конец	Вероятность	M	D	W-функция
1	2	1	44	25	$1 \cdot e^{44s+12.5s^2}$
2	3	0.4	24	25	$0.4 \cdot e^{24s+12.5s^2}$
2	4	0.6	40	25	$0.6 \cdot e^{40s+12.5s^2}$
3	2	0.2	34	25	$0.2 \cdot e^{34s+12.5s^2}$
3	5	0.8	15	9	$0.8 \cdot e^{15s+4.5s^2}$
4	5	1	32	25	$1 \cdot e^{32s+12.5s^2}$
5	4	0.5	11	4	$0.5 \cdot e^{11s+2s^2}$
5	6	0.5	24	25	$0.5 \cdot e^{24s+12.5s^2}$

### 1.2.3 Построение уравнения Мейсона

Петли первого порядка:

$$W_{45} \cdot W_{54}$$

$$W_{23} \cdot W_{32}$$

$$W_{12} \cdot W_{23} \cdot W_{35} \cdot W_{56} \frac{1}{W_E}$$

$$W_{12} \cdot W_{24} \cdot W_{45} \cdot W_{56} \frac{1}{W_E}$$

Петли второго порядка:  $W_{23} \cdot W_{32} \cdot W_{45} \cdot W_{54}$

Таким образом уравнение Мейсона будет иметь следующий вид:

$$H = 1 - W_{45}W_{54} - W_{23}W_{32} - W_{12}W_{23}W_{35}W_{56}\frac{1}{W_E} - W_{12}W_{24}W_{45}W_{56}\frac{1}{W_E} + W_{23}W_{32}W_{45}W_{54}$$

В результате эквивалентная W-функция равняется:

$$W_E(s) = -\frac{W_{12}W_{24}W_{45} + W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}W_{56}}{W_{12}W_{23}W_{31} + W_{12}W_{24}W_{45}W_{53}W_{31} + W_{34}W_{45}W_{53} - 1}$$

## 1.2.4 Расчет статистических значений

Расчет математического ожидания ( $\mu_{1E}$ ) и дисперсии ( $\sigma_E$ ) производится по следующим образом:

$$W_E(s) = p_E \cdot M_E(s), p_E = W_E(0) \implies M_E(s) = \frac{W_E(s)}{W_E(0)}$$

$$\mu_{1E} = \left. \frac{dM_E(s)}{ds} \right|_{s=0}$$

$$\mu_{2E} = \left. \frac{d^2 M_E(s)}{ds^2} \right|_{s=0}$$

$$\sigma_E = \mu_{2E} - \mu_{1E}^2$$

Разработаем скрипт для расчета статистических значений в среде MATLAB:

Листинг 1.1: Matlab скрипт

```

1 clear all;
2 close all;
3 clc;
4 format long g;
5
6 syms s;
7
8 % W-functions
9 W12 = 0.5 * exp(10*s + 8 * s^2);
10 W16 = 0.5 * exp(23 * s + 312.5 * s^2);
11 W22 = 0.2 * exp(13 * s + 128 * s^2);
12 W26 = 0.8 * exp(11 * s + 128 * s^2);
13 W35 = 1 * exp(10 * s + 40.5 * s^2);
14 W41 = 0.4 * exp(37 * s + 128 * s^2);
15 W43 = 0.3 * exp(12 * s + 128 * s^2);
16 W46 = 0.3 * exp(12 * s + 1200.5 * s^2);
17 W54 = 0.3 * exp(15 * s + 312.5 * s^2);
18 W55 = 0.5 * exp(19 * s + 8 * s^2);
19 W56 = 0.2 * exp(42 * s + 40.5 * s^2);
20
21 % We(s)
22 We = (W12 * W26 + W16 - W16 * W22 - W16 * W35 * W54 * W43 - W16 * W55 - W12 *
      W26 * W55 - W12 * W26 * W35 * W54 * W43 + W16 * W22 * W35 * W54 * W43 + W16
      * W22 * W55) / (1 - W35 * W54 * W43 - W22 - W55 + W22 * W55 + W22 * W35 *
      W54 * W43);
23 We = simplify(We);
24
25 % We(0)
26 We0 = subs(We, 's', 0);
27 fprintf('We(0) = %.3f\n', double(We0));
28
29 % Me(s)
30 Me = We / We0;
31
32 % me1
33 me1 = diff(Me, 's', 1);
34 me1 = subs(me1, 's', 0);
35 fprintf('me1 = %.3f\n', double(me1));
36
37 % me2
38 me2 = diff(Me, 's', 2);
39 me2 = subs(me2, 's', 0);

```

```

40 fprintf('me2 = %.3f\n', double(me2));
41
42 % de
43 de = me2 - me1 ^ 2;
44 fprintf('de = %.3f\n', double(de));

```

Результат вычисления статистических значений:

Листинг 1.2: Matlab скрипт

```

1 We(0) = 1.000
2 me1 = 23.625
3 me2 = 1065.438
4 de = 507.297

```

## 1.2.5 Часть 2

Определим матрицу  $Q$ :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{23} & q_{24} & 0 & 0 \\ q_{31} & 0 & 0 & q_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{45} & q_{46} \\ 0 & 0 & q_{53} & 0 & 0 & q_{56} \\ w_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определим матрицу коэффициентов  $A = I_6 - Q^T$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_{31} & 0 & 0 & -w_{61} \\ -q_{12} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_{23} & 1 & 0 & -q_{53} & 0 \\ 0 & -q_{24} & -q_{34} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_{45} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_{46} & -q_{56} & 1 \end{pmatrix}$$

Находим

$$\det(A)$$

далее

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial w_{61}}$$

$$\det(A|w_{61}=0)$$

Далее можно вывести  $W_E(S)$  с помощью формулы:

$$W_E(S) = -\frac{\frac{\partial \det(A)}{\partial w_{61}}}{\det(A|w_{61}=0)}$$

Для расчетов, был написан matlab скрипт.

Листинг 1.3: Matlab скрипт

```

1 clc; clearvars
2
3 syms q12
4 syms q22
5 syms q23
6 syms q32
7 syms q34
8 syms q45
9 syms q51
10 syms q55
11 syms q56
12 syms w61
13 syms s

```

```

14
15 Q=[0 q12 0 0 0 0;
16     0 q22 q23 0 0 0;
17     0 q32 0 q34 0 0;
18     0 0 0 0 q45 0;
19     q51 0 0 0 q55 q56;
20     w61 0 0 0 0 0];
21
22 A1 = eye(size(Q,1)) - transpose(Q);
23 disp(A1);
24
25 det_A1 = det(A1);
26
27 det_dw=diff(det_A1, w61);
28
29 det2_A1=subs(det_A1, w61, 0);
30
31 We= -det_dw/det2_A1;
32 disp(We);

```

#### Листинг 1.4: Результат

```

1 [ 1, 0, 0, 0, -q51, -w61]
2 [-q12, 1 - q22, -q32, 0, 0, 0]
3 [ 0, -q23, 1, 0, 0, 0]
4 [ 0, 0, -q34, 1, 0, 0]
5 [ 0, 0, 0, -q45, 1 - q55, 0]
6 [ 0, 0, 0, 0, -q56, 1]
7
8
9 -(q12*q23*q34*q45*q56)/(q22 + q55 + q23*q32 - q22*q55 - q23*q32*q55 + q12*q23*
   q34*q45*q51 - 1)

```

Во второй строчке был получен  $W_E(S)$ , который полностью (за исключением знаков) совпадает с  $W_E(S)$  найденным в части 1.

Далее, имея  $W_E(S)$  находим необходимые переменные.

#### Листинг 1.5: Matlab скрипт

```

1 clc; clearvars
2
3 %M — математическое ожидание
4 %D — дисперсия
5 %P — вероятность
6 P12 = 1; M12 = 20; D12 = 9;
7 P22 = 0.6; M22 = 30; D22 = 16;
8 P23 = 0.4; M23 = 40; D23 = 25;
9 P32 = 0.5; M32 = 28; D32 = 16;
10 P34 = 0.5; M34 = 37; D34 = 16;
11 P45 = 1; M45 = 30; D45 = 25;
12 P51 = 0.2; M51 = 30; D51 = 16;
13 P55 = 0.1; M55 = 10; D55 = 4;
14 P56 = 0.7; M56 = 30; D56 = 16;
15
16 syms q12
17 syms q22
18 syms q23
19 syms q32
20 syms q34
21 syms q45
22 syms q51
23 syms q55
24 syms q56
25 syms w61

```

```

26 syms s
27
28 Q=[0 q12 0 0 0 0;
29     0 q22 q23 0 0 0;
30     0 q32 0 q34 0 0;
31     0 0 0 0 q45 0;
32     q51 0 0 0 q55 q56;
33     w61 0 0 0 0 0];
34
35 A1 = eye(size(Q,1)) - transpose(Q);
36 disp(A1);
37
38 det_A1 = det(A1);
39 disp(det_A1);
40
41 det_dw=diff(det_A1, w61);
42 disp(det_dw);
43
44 det2_A1=subs(det_A1, w61, 0);
45 disp(det2_A1);
46
47 We= -det_dw/det2_A1;
48 disp(We);
49
50
51 syms s
52
53 We=subs(We, q12, P12*exp(M12*s+D12/2*s^2));
54 We=subs(We, q22, P22*exp(M22*s+D22/2*s^2));
55 We=subs(We, q23, P23*exp(M23*s+D23/2*s^2));
56 We=subs(We, q32, P32*exp(M32*s+D32/2*s^2));
57 We=subs(We, q34, P34*exp(M34*s+D34/2*s^2));
58 We=subs(We, q45, P45*exp(M45*s+D45/2*s^2));
59 We=subs(We, q51, P51*exp(M51*s+D51/2*s^2));
60 We=subs(We, q55, P55*exp(M55*s+D55/2*s^2));
61 We=subs(We, q56, P56*exp(M56*s+D56/2*s^2));
62
63 We = simplify(We)
64 We0 = subs(We, 's', 0) % We(0)
65
66 % Нахождение мат. ожидания и дисперсии
67 Me = We/We0;
68
69 % Нахождение производной го1– порядка при s=0
70 m1 = diff(Me, 's');
71 m1 = subs(m1, 's', 0) % Замена символа s на 0 в выражении m1
72
73 % Нахождение производной го2– порядка при s=0
74 m2 = diff(Me, 's', 2);
75 m2=subs(m2, 's', 0) % Замена символа s на 0 в выражении m2
76
77 % Нахождение дисперсии времени выхода процесса в завершающий узел графа
78 D = m2 - (m1)^2

```

Листинг 1.6: Результат

```

1 We =
2 -(7*exp((s*(91*s + 314))/2))/(5*exp(2*s*(s + 5)) - 3*exp(10*s*(s + 4)) + 30*exp
   (2*s*(4*s + 15)) - exp((3*s*(15*s + 52))/2) + 10*exp((s*(41*s + 136))/2) +
   2*exp((s*(91*s + 314))/2) - 50)
3
4 We0 =
5 1
6
7 m1 =

```



8	2845/7
9	
10	m2 =
11	11938987/49
12	
13	D =
14	3844962/49

Были получены следующие результаты:

1. Вероятность выхода в завершающий узел графа равна 100% ( $p = W_E = 1$ ).
2. Математическое ожидание 406,43.
3. Дисперсия времени выхода процесса в завершающий узел графа 78 468,61.

Которые полностью совпадает с результатами части 1.

### 1.3 Вывод

В ходе данной лабораторной работы были получены навыки работы с вероятностными графами и их обработка с помощью методики GERT. При заданных значениях вероятности, мат. ожидания и дисперсии для каждой дуги исходного графа достаточно легко рассчитываются W-функции, которые необходимы для построения формулы Мейсона. После этого из формулы Мейсона по формулам математической статистики достаточно легко рассчитывается результирующее мат. ожидание и дисперсия.

Решение путем анализа потокового графа показало аналогичные результаты, что подтверждает корректность решения. Однако, метод анализа потокового графа выполняется заметно медленнее, даже на небольшом графе.