Tópicos Avançados em Programação Competitiva

Funções Geradoras

perchuts

UFMG

28 de agosto de 2025

Sumário

Séries de Potência Formais

Funções geradoras são úteis para resolvermos problemas de combinatória algebricamente.
Dada uma sequência (a_n), dizemos que sua função geradora $F(x)$ é a série

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + xa_1 + x^2 a_2 + \cdots + x^n a_n + \ldots$$

Quase sempre estamos interessados apenas nos *coeficientes* da série, então não nos importa qualquer noção de convergência.
Nesse contexto dizemos que as funções geradoras são Séries de Potência Formais.

Exemplos

A sequência $(a_n) = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ tem como função geradora

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Podemos encontrar uma expressão para $P(x)$:

$$P(x) - xP(x) = 1 \iff P(x) = \frac{1}{1-x}$$

Exemplos

(a_n) com $a_n = n$ tem como função geradora

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

Note que $P'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$
Então

$$Q(x) = xP'(x) = x(\frac{1}{1-x})' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Exemplos

(f_n) com $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, e $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Qual é a função geradora $F(x)$? Não é fácil calcular seus coeficientes, mas podemos encontrar uma expressão para ela.

$$
\begin{aligned}
&f_{n+1} + f_n = f_{n+2} \\
&x^{n+2} f_{n+1} + x^{n+2} f_n = x^{n+2} f_{n+2} \\
&\sum_{n=0}^{\infty} (f_n + f_{n+1}) x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} x^{n+2} \\
&x^2 F(x) + x F(x) = F(x) - x \\
&F(x)[x^2 + x - 1] = -x \\
&F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}
\end{aligned}
$$

Propriedades/definições úteis

- Convolução: $A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$
  Seja $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_n x^n$
- Definimos $[x^n]P(x) = p_n$
- $[x^n]x^m P(x) = [x^{n-m}]P(x)$
- $[x^n]\frac{1}{1-x}P(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i$
- $[x^n]\frac{1}{(1-x)^k} = \binom{n+k-1}{k-1}$
- Defina as séries $P_0(x) := P(x)$ e $P_{k+1}(x) := xP'_k(x)$. Vale que $[x^n]P_k(x) = n^k p_n$

Função Geradora Exponencial

Considere agora a série formal

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

P é a função geradora exponencial da sequência (a_n) e definimos que $[x^n]P(x) = a_n$. Se A, B são EGFs, temos que

$$[\frac{x^n}{n!}]A(x)B(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p_i q_{n-i}$$

Esse fato torna as EGFs muito úteis.

Como implementar?

Vários dos algoritmos abaixo usam a NTT como subrotina. Por isso vamos trabalhar sobre $\mathbb{Z}_{998244353}$ na maior parte do tempo. É altamente recomendável usar uma primitiva de aritmética modular.

Operações comuns

Seja $P(x)$ um polinômio de grau n. É possível computar:

- $P'(x)$ e $\int P(x)$ em $O(n)$;
- Primeiros n termos de $P^{-1}(x)$ em $O(n \log n)$;
- Primeiros n termos de $e^{P(x)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P^i(x)}{i!}$ em $O(n \log n)$;
- Primeiros n termos de $\ln P(x)$ em $O(n \log n)$.

A biblioteca da UFMG implementa todas essas operações. Entender o funcionamento dos algoritmos não é necessário para a grande maioria dos problemas.

Problemas!

AtCoder ARC110D - Binomial Coefficient is Fun

Enunciado

Temos uma sequência A de N inteiros não negativos. Compute a soma de $\prod_{i=1}^{N} \binom{B_i}{A_i}$ sobre todas as sequências B de N inteiros não negativos cuja soma é no máximo M.

AtCoder ARC110D - Binomial Coefficient is Fun

Enunciado

Temos uma sequência A de N inteiros não negativos. Compute a soma de $\prod_{i=1}^{N} \binom{B_i}{A_i}$ sobre todas as sequências B de N inteiros não negativos cuja soma é no máximo M.

Restrições

$1 \leq N \leq 2000$
$1 \leq M \leq 10^9$
$0 \leq A_i \leq 2000$

AtCoder ARC110D - Binomial Coefficient is Fun

Solução

Queremos representar aquele produtório como um produto de coeficientes de polinômios. Fixado um i, vamos começar encontrando a função geradora $F_i(x)$ de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $a_n = \binom{n}{A_i}$.

AtCoder ARC110D - Binomial Coefficient is Fun

Solução

Queremos representar aquele produtório como um produto de coeficientes de polinômios. Fixado um i, vamos começar encontrando a função geradora $F_i(x)$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $a_n = \binom{n}{A_i}$.

$$F_i(x) = \frac{x^{A_i}}{(1-x)^{A_i+1}}$$

Seja $P(x) = \prod_{i=1}^{N} F_i(x)$. Note que

$$[x^k]P(x) = \sum_{B_1+\cdots+B_N=k} \prod_{i=1}^{N} \binom{B_i}{A_i}$$

AtCoder ARC110D - Binomial Coefficient is Fun

Solução

Seja $P(x) = \prod_{i=1}^{N} F_i(x)$. Note que

$$[x^k]P(x) = \sum_{B_1+\cdots+B_N=k} \prod_{i=1}^{N} \binom{B_i}{A_i}$$

Então a resposta será igual a $\sum_{i=0}^{M} [x^i]P(x) = [x^M]\frac{1}{1-x}P(x)$. Seja $S = \sum A_i$. Por fim,

$$[x^M]\frac{1}{1-x}P(x) = [x^M]\frac{x^S}{(1-x)^{S+N+1}} = \binom{M+N}{S+N}$$

LOJ 2409 - Sum

Enunciado

Temos uma sequência A de N inteiros não negativos. Defina

$$f_k = \sum_{i=1}^{N} A_i^k \mod 998244353$$

Compute $f_1, f_2, \dots, f_n$.

LOJ 2409 - Sum

Enunciado

Temos uma sequência A de N inteiros não negativos. Defina

$$f_k = \sum_{i=1}^{N} A_i^k \mod 998244353$$

Compute $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Restrições

$1 \leq N \leq 2 \times 10^5$
$0 \leq A_i \leq 10^9$

LOJ 2409 - Sum

Solução

Seja $F_i(x)$ a função geradora de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $a_n = A_i^n$. Veja que

$$F_i(x) = \frac{1}{1 - A_i x}$$

Note que $P(x) = \sum_{i=1}^{N} F_i(x)$ é a função geradora de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Como computar $P(x)$?

LOJ 2409 - Sum

Solução

Como computar $P(x)$? Divisão e conquista!

LOJ 2409 - Sum

Solução

Como computar $P(x)$? Divisão e conquista!

Por indução podemos mostrar que a soma de m F_i's distintos, ou seja, $\sum_{i=1}^{m} F_{j_i}(x)$, é igual a $\frac{A(x)}{B(x)}$, onde A, B são polinômios de grau m.

LOJ 2409 - Sum

Solução

Como computar $P(x)$? Divisão e conquista!

Por indução podemos mostrar que a soma de m F_i's distintos, ou seja, $\sum_{i=1}^{m} F_{j_i}(x)$, é igual a $\frac{A(x)}{B(x)}$, onde A, B são polinômios de grau m.

Então para computar $\sum_{i=l}^{r} F_i(x)$ basta computar cada metade do intervalo recursivamente, e em seguida somar as frações calculadas usando 3 convoluções: $\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1}{B_1 B_2}$.

Obtendo $P(x) = \frac{C(x)}{D(x)}$ calculamos $D^{-1}(x)$ e convoluimos o resultado com $C(x)$ para obter a função geradora da resposta.

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Enunciado

Conte, módulo 998244353, o número de grafos G simples não direcionados e conexos de N vértices satisfazendo a seguinte condição:

- O número de arestas em todo circuito† de G é um número primo.

† Um circuito é uma trilha fechada (que começa e termina no mesmo vértice) que pode repetir vértices mas não arestas.

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Enunciado

Conte, módulo 998244353, o número de grafos G simples não direcionados e conexos de N vértices satisfazendo a seguinte condição:

- O número de arestas em todo circuito† de G é um número primo.

† Um circuito é uma trilha fechada (que começa e termina no mesmo vértice) que pode repetir vértices mas não arestas.

Restrições

$2 \leq N \leq 2.5 \times 10^5$

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Solução

Vamos caracterizar quando G cumpre a condição. Suponha que existem dois ciclos distintos $C_1, C_2 \in G$ que compartilham pelo menos um vértice, e que C_1 e C_2 têm um número primo de vértices.

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Solução

Vamos caracterizar quando G cumpre a condição. Suponha que existem dois ciclos distintos $C_1, C_2 \in G$ que compartilham pelo menos um vértice, e que C_1 e C_2 têm um número primo de vértices.

Lema:

O grafo com arestas $E(C_1) \oplus E(C_2)$ tem um ciclo de tamanho par.

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Solução

Vamos caracterizar quando G cumpre a condição. Suponha que existem dois ciclos distintos $C_1, C_2 \in G$ que compartilham pelo menos um vértice, e que C_1 e C_2 têm um número primo de vértices.

Lema:

O grafo com arestas $E(C_1) \oplus E(C_2)$ tem um ciclo de tamanho par.

Resumo da prova:

Mostre por indução em $|V(C_1)| + |V(C_2)|$. Os casos base são quando $C_1 \oplus C_2$ consiste de apenas um ciclo e quando $E(C_1) \cap E(C_2) = \emptyset$.

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Solução

Se não há interseção em vértices para todo par de ciclos distintos de G, então G é um cacto e as únicas trilhas fechadas possíveis são os próprios ciclos. Então basta que todo ciclo tenha tamanho primo.

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Solução

O problema se reduziu a contar o número de cactos com todos os ciclos tendo tamanho primo. Após comprimir todo ciclo em um "super vértice", o problema se torna uma generalização de contar árvores com n vértices.

Sabemos contar quantas árvores de n vértices existem?

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Solução

O problema se reduziu a contar o número de cactos com todos os ciclos tendo tamanho primo. Após comprimir todo ciclo em um "super vértice", o problema se torna uma generalização de contar árvores com n vértices.

Sabemos contar quantas árvores de n vértices existem? Sim!

Sequências de Prüfer

Existe uma bijeção entre as sequências de $n - 2$ inteiros variando de 1 a n e as árvores de n vértices rotulados. Essa bijeção é construída usando as Sequências de Prüfer.

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Solução

Suponha que após a compressão de ciclos o grafo tenha m super vértices e que eles tenham comprimido $s_1, \ldots, s_m$ vértices do grafo original.

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Solução

Suponha que após a compressão de ciclos o grafo tenha m super vértices e que eles tenham comprimido $s_1, \ldots, s_m$ vértices do grafo original. Usando as sequências de Prüfer como inspiração, qual é o número de maneiras de conectar esses super vértices?

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Solução

Usando as sequências de Prüfer como inspiração, qual é o número de maneiras de conectar esses super vértices?

$$n^{m-2}\prod_{i=1}^{m} s_i = \frac{1}{n^2}\prod_{i=1}^{m} ns_i$$

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Solução

Usando as sequências de Prüfer como inspiração, qual é o número de maneiras de conectar esses super vértices?

$$n^{m-2} \prod_{i=1}^{m} s_i = \frac{1}{n^2} \prod_{i=1}^{m} n s_i$$

Logo a resposta é igual a

$$\frac{1}{n^2} \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_m=n \\ s_i=1 \text{ ou } 3 \leq s_i \in P}} \binom{n}{s_1, \ldots, s_m} \prod_{i=1}^{m} n s_i C(s_i)$$

Onde $C(i)$ é o número de ciclos com i vértices. Como temos um multinomial na conta, é útil pensar em EGFs.

AtCoder ABC387G - Prime Circuit

Solução

Considere a EGF representando a contribuição de um único ciclo para o somatório:

$$F(x) = \sum_{i \text{ primo}} niC(i)\frac{x^i}{i!} = nx + \sum_{i \text{ primo} \geq 3} \frac{n}{2}x^i$$

Iterando pelo número m de ciclos, a resposta será

$$n![x^n]\sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^m(x)}{m!} = n![x^n]e^{F(x)}$$

Problemas Sugeridos

- Codar soluções para os problemas da apresentação!
- AtCoder ABC226H - Random Kth Max
- AtCoder ARC160D - Mahjong
- (CF Gym - Jiangsu 2022) F - Pockets
- (CF Gym - Sichuan 2025) E - Competition Graph