Wspomaganie Decyzji w Warunkach Ryzyka

Projekt: WDWR 17421

Mateusz Perciński Z59827

26 maja 2017

Treść zadania

Rozważmy następujące zagadnienie planowania produkcji:

- Przedsiębiorstwo wytwarza 4 produkty P1,...,P4 na następujących maszynach: 4 szlifierkach, 2 wiertarkach pionowych, 3 wiertarkach poziomych, 1 frezarce i 1 tokarce. Wymagane czasy produkcji 1 sztuki produktu (w godzinach) w danym procesie obróbki zostały przedstawione w poniższej tabeli:

	P1	P2	P3	P4
Szlifowanie	0,4	0,6	-	-
Wiercenie pionowe	0,2	0,1	-	0,6
Wiercenie poziome	0,1	-	0,7	-
Frezowanie	0,06	0,04	-	0,05
Toczenie	-	0,05	0,02	-

- Dochody ze sprzedaży produktów (w zł/sztukę) określają składowe wektora $\mathbf{R} = (R_1, ..., R_4)^T$. Wektor $\mathbf{R}$ opisuje 4-wymiarowy rozkład t-Studenta z 4 stopniami swobody, którego wartości składowych zostały zawężone do przedziału $[5; 12]$. Wektor wartości oczekiwanych μ oraz macierz kowariancji Σ niezawężonego rozkładu t-Studenta są następujące:

$$\mu = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 16 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 9 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Istnieją ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów w danym miesiącu:

	P1	P2	P3	P4
Styczeń	400	0	200	300
Luty	700	400	500	0
Marzec	0	800	600	400

- Jeżeli sprzedaż danego produktu przekracza 80 procent ilości jaką może wchłonąć rynek, jego dochód spada o 20 procent.

- Istnieje możliwość składowania do 200 sztuk każdego produktu w danym czasie w cenie 1 zł/sztukę za miesiąc. W chwili obecnej (grudzień) w magazynach znajduje się po 50 sztuk każdego produkt. Istnieje wymaganie, aby tyle pozostało również pod koniec marca.

- Przedsiębiorstwo pracuje 6 dni w tygodniu w systemie dwóch zmian. Każda zmiana trwa 8 godzin. Można założyć, że każdy miesiąc składa się z 24 dni roboczych.

Polecenia

1. Zaproponować jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka z wartością oczekiwaną jako miarą zysku. Wyznaczyć rozwiązanie optymalne.

2. Jako rozszerzenie powyższego zaproponować dwukryterialny model zysku i ryzyka ze średnią jako miarą zysku i średnią różnicą Giniego jako miarą ryzyka. Dla decyzji $\mathbf{x} \in Q$ średnia różnica Giniego jest definiowana jako $\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{t'=1}^{T} \sum_{t"=1}^{T} |r_{t'}(\mathbf{x}) - r_{t"}(\mathbf{x})| p_{t'} p_{t"}$, gdzie $r_{t'}(\mathbf{x})$ oznacza realizację dla scenariusza t, p_t prawdopodobieństwo scenariusza t.

   (a) Wyznaczyć obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni zysk-ryzyko.

   (b) Wskazać rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku. Jakie odpowiadają im wartości w przestrzeni ryzyko-zysk?

   (c) Wybrać trzy dowolne rozwiązania efektywne. Sprawdzić, czy zachodzi pomiędzy nimi relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Wyniki skomentować, odnieść do ogólnego przypadku.

1 Jednokryterialny model wyboru

Jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka ma umożliwić wybór rozwiązania optymalnego ze względu na maksymalizację wartości oczekiwanej zysku. Wartość oczekiwana ma być określana na podstawie scenariuszy wygenerowanych z rozkładu t-Studenta o parametrach podanych w treści zadania. Przyjęto, że wszystkie scenariusze mają takie same prawdopodobieństwo.

1.1 Parametry modelu

W tabeli 1 zestawiono wszystkie przyjęte parametry modelu razem z opisami. Takie samo nazwy przyjęto podczas implementacji modelu. W przypadku wektorów oraz macierzy parametrów w nawiasach kwadratowych podano ich rozmiar odwołując się do parametrów liczbowych.

1.2 Zmienne decyzyjne

Zmienne decyzyjne są kontrolowanymi przez decydenta, kluczowymi dla problemu wartościami. Celem systemu jest dobranie przez solver takich wartości tych zmiennych, które pozwolą na osiągnięcie najlepszego rozwiązania zadania. W tabeli 2 przedstawiono zmienne decyzyjne wykorzystane w modelu wraz z opisami. Zastosowano konwencję nazw identyczną, jak w przypadku parametrów modelu.

1.3 Ograniczenia

Z punktu widzenia projektowania modelu, najważniejsze jest prawidłowe dobranie przedstawionych założeniach ograniczeń. Zidentyfikowano następujące ograniczenia modelu:

- Ograniczenie dolne wartości zmiennych decyzyjnych – wartości nie mogą być mniejsze od zera:

$$\underset{\substack{m \in months \\ p \in products \\ mc \in machines}}{\forall} workTime[m][mc][p] >= 0 \tag{1}$$

$$\underset{\substack{m \in months \\ p \in products}}{\forall} produce[m][p] >= 0 \tag{2}$$

Tabela 1: Tabela zawierająca parametry modelu jednokryterialnego

Nazwa parametru	Opis
nMachType	Ilość typów maszyn (procesów) dostępnych w fabryce
nMonth	Ilość miesięcy uwzględnionych w symulacji
nProdType	Ilość typów produktów
nScenarios	Ilość scenariuszy wygenerowanych do symulacji
machines[nMachType]	Wektor typów maszyn (procesów)
months[nMonth]	Wektor miesięcy symulacji
products[nProdType]	Wektor typów produktów
machineCount[nMachType]	Wektor ilości maszyn danego typu
prodTime[nMachType][nProdType]	macierz czasów produkcji danego produktu na danej maszynie
maxInMonth[nMonth][nProdType]	macierz maksymalnej ilości produktów, jakie można sprzedać w danym miesiącu
nHours	Ilość godzin pracy fabryki w miesiącu
mu[nProdType]	Wektor wartości oczekiwanych rozkładu t-Studenta do generacji scenariuszy
sigma [nProdType][nProdType]	Macierz kowariancji dla rozkłady t-Studenta
sellProfit[nScenarios][nProdType]	Macierz wygenerowanych sceniariuszy dochodów ze sprzedaży produktów
storageCost	Koszt trzymania jednej sztuki produktu w magazynie przez miesiąc
storageMax[nProdType]	Wektor maksymalnej pojemności magazynu dla każdego typu produktu
storageStart[nProdType]	Wektor ilości początkowej produktów w magazynie

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} sell[m][p] >= 0 \tag{3}$$

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} stock[m][p] >= 0 \tag{4}$$

$$\forall_{\substack{i \in scenarios \\ m \in months \\ p \in products}} lowerProfit[i][m][p] >= 0 \tag{5}$$

- Ograniczenie ilości jednocześnie pracujących maszyn - Ze względu na to, że każda pojedyncza maszyna może pracować w ciągu miesiąca *nHours* godzin, to dla każdego typu maszyny, czas ich pracy nie może przekroczyć wartości iloczynu ilości maszyn danego typu oraz czasu *nHours*.

$$\forall_{\substack{m \in months \\ mc \in machines}} \sum_{p \in products} (workTime[m][mc][p] <= machineCount[mc] * nHours) \tag{6}$$

- Ograniczenie definiujące czas pracy maszyn - czas pracy danego typu maszyny to iloczyn ilości wyprodukowanych sztuk danego produktu i czasu trwania danego procesu technologicznego dla jednej sztuki:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ mc \in machines \\ p \in products}} workTime[m][mc][p] == produce[m][p] * prodTime[mc][p] \tag{7}$$

Tabela 2: Tabela zawierająca zmienne decyzyjne modelu

Nazwa zmiennej	Opis
produce[nMonth][nProdType]	Macierz zawierające ilości wytwarzanych sztuk danego typu produktu w danym miesiącu
sell[nMonth][nProdType]	Macierz zawierająca ilości sprzedawanych sztuk danego typu produktu w danym miesiącu
stock[nMonth][nProdType]	Macierz zawierająca ilości sztuk danego typu produktu znajdujących się w magazynie w danym miesiącu
workTime[nMonth][nMachType][nProdType]	Macierz zawierająca czas pracy każdej maszyny dla każdego typu produktu w kazdym miesiącu
if80prec[nMonth][nProdType]	Macierz zmiennych binarnych (1 jeśli sprzedaż danego produktu w danym miesiącu przekroczyła 80% wartości maksymalnej, 0 - w przeciwnym wypadku)
lowerProfit[nScenarios][nMonth][nProdType]	Macierz przechowująca kwoty, jaką należy odjąć od zysków z poszczególnych typów produktów w poszczególnych miesiącach, ze względu na przekroczenie 80% pojemności rynku. Zmienna niezbędna do wyeliminowania obecności zmiennej binarnej w funkcji oceny

- Ograniczenie rynkowe maksymalnej sprzedaży w danym miesiącu:

$$\underset{\substack{m\in months\\ p\in products}}{\forall} sell[m][p] == maxInMonth[m][p] \tag{8}$$

- Ograniczenia ustawiające zmienną binarną po przekroczeniu 80 procent pojemności rynku:

$$\underset{\substack{m\in months\\ p\in products}}{\forall} sell[m][p] <= 0.8 * maxInMonth[m][p] + 1000000 * if80prec[m][p] \tag{9}$$

$$\underset{\substack{m\in months\\ p\in products}}{\forall} sell[m][p] >= 0.8 * maxInMonth[m][p] * if80prec[m][p] \tag{10}$$

- Ograniczenia linearyzujące wpływ zmiennej binarnej na funkcje celu:

$$\underset{\substack{i\in scenarios\\ m\in months\\ p\in products}}{\forall} lowerProfit[i][m][p] <= 1000000 * if80prec[m][p] \tag{11}$$

$$\underset{\substack{i\in scenarios\\ m\in months\\ p\in products}}{\forall} lowerProfit[i][m][p] <= 0.2 * sell[m][p] * sellProfit[i][p] \tag{12}$$

$$\underset{\substack{i\in scenarios\\ m\in months\\ p\in products}}{\forall} 0.2 * sell[m][p] * sellProfit[i][p] - lowerProfit[i][m][p] + 1000000 * if80prec[m][p] <= 1000000; \tag{13}$$

- Ograniczenie sprzedaż do ilości sztuk wyprodukowanych oraz znajdujących się w magazynie. Dla pierwszego miesiąca ma ono postać:

$$\underset{\substack{m \in months \\ p \in products}}{\forall} sell[m][p] <= produce[m][p] + storageStart[p] \tag{14}$$

  Dla każdego następnego miesiąca:

$$\underset{\substack{m \in months \\ p \in products}}{\forall} sell[m][p] <= produce[m][p] + stock[m-1][p] \tag{15}$$

- Ograniczenie definiujące ilość produktów pozostających w magazynach na następny miesiąc, jako sumę sztuk wyprodukowanych i będących w magazynie na początku tego miesiąca pomniejszoną o ilość sprzedaną w tym miesiącu. Dla pierwszego miesiąca:

$$\underset{\substack{m \in months \\ p \in products}}{\forall} stock[m][p] == (produce[m][p] + storageStart[p]) - sell[m][p] \tag{16}$$

  Dla każdego następnego miesiąca:

$$\underset{\substack{m \in months \\ p \in products}}{\forall} stock[m][p] == (produce[m][p] + stock[m-1][p]) - sell[m][p] \tag{17}$$

1.4 Funkcja celu

Funkcja celu dla modelu jednokryterialnego to maksymalizacja wartości oczekiwanej zysku dla wszystkich scenariuszy. Dla każdego scenariusza została przyjęta funkcja zysku w postaci

$$\begin{split}\underset{\substack{i < nScernarios \\ i \in N}}{\forall} profit[i] = \sum_{m \in months} \sum_{p \in products} (sell[m][p] \cdot sellProfit[i][p] \\ - lowerProfit[i][m][p] - stock[m][p] * storageCost)\end{split} \tag{18}$$

1.5 Implementacja modelu

1.5.1 Generacja scenariusz dochodów ze sprzedaży

Dochody ze sprzedaży poszczególnych produktów są określone wektorem losowym określonym w treści zadania. Do wygenerowania wektorów opisujących konkretne scenariusze sprzedaży wykorzystano pakiet MASS dla języka R. Skrypt drukujący wektory do pliku został napisany w środowisku R Studio IDE. Załącznik 1 to wspomniany skrypt - *t-student.R*. Do potrzeby symulacji wygenerowano 1000 scenariuszy.

1.5.2 Model

Rozwiązanie zadania zaimplementowano w całości przy pomocy programu IBM ILOG CPLEX Optimization Studio przy wykorzystaniu solvera CPLEX. Nazwy parametrów oraz zmiennych decyzyjnych pokrywają się z nazwami opisanymi w tabelach 1 i 2. Załącznik 2 to plik *wdwr17421-1.dat*, który definiuje parametry modelu. Załącznik 3 to plik *wdwr17421-1.mod*, który wczytuje parametry modelu, definiuje zmienne decyzyjne, funkcję oceny oraz ograniczenia modelu. Dla przyśpieszenia implementacji modelu przyjęto, że kolejne miesiące, produkty oraz procesy technologiczne będą opisane liczbami naturalnymi. Miesiące ponumerowane są w kolejności występowania, produkty według indeksu przy literze P w nazwie, a procesy technologiczne w następujące kolejności:

1. Szlifowanie,
2. Wiercenie pionowe,
3. Wiercenie poziome,
4. Frezowanie,
5. Toczenie.

1.6 Rozwiązanie

Optymalne rozwiązanie maksymalizacji wartości oczekiwanej zysku zostało obliczone przez solver CPLEX. Optymalny zysk wyniósł około 26023,63 zł. Wynik taki jest osiągany dla następujących wartości zmiennych decyzyjnych:

$$\mathbf{sell} = \begin{pmatrix} 320 & 0 & 160 & 240 \\ 700 & 320 & 500 & 0 \\ 0 & 800 & 600 & 320 \end{pmatrix}, \mathbf{if80prec} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{stock} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix}, \mathbf{produce} = \begin{pmatrix} 270 & 0 & 110 & 190 \\ 700 & 270 & 500 & 0 \\ 50 & 850 & 650 & 370 \end{pmatrix}$$

Macierze z czasami pracy maszyn dla poszczególnych typów produktów zostały przedstawione oddzielnie dla każdego miesiąca:

$$\mathbf{workTime}[\mathbf{1}] = \begin{pmatrix} 108 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 0 & 0 & 114 \\ 27 & 0 & 77 & 0 \\ 16.2 & 0 & 0 & 9.5 \\ 0 & 0 & 2.2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{workTime}[\mathbf{2}] = \begin{pmatrix} 280 & 162 & 0 & 0 \\ 140 & 27 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 350 & 0 \\ 42 & 10.8 & 0 & 0 \\ 0 & 13.5 & 10 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{workTime}[\mathbf{3}] = \begin{pmatrix} 20 & 510 & 0 & 0 \\ 10 & 85 & 0 & 222 \\ 5 & 0 & 455 & 0 \\ 3 & 34 & 0 & 18.5 \\ 0 & 42.5 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierzy lowerProfit nie przedstawiono w raporcie ze względu na jej wielkość. Pełne wyniki działania solvera dołączono do raportu jako załącznik 4.

1.7 Wnioski

Z przeprowadzonej sytuacji wynika, że możliwości produkcyjne fabryki przekraczają pojemność rynku. W celu maksymalizacji w niektórych miesiącach opłaca się sprzedawać poszczególne produkty, nawet po przekroczeniu 80% pojemności rynku. Nie ma potrzeby magazynowania produktów, poza wymaganym minimum.

2 Model dwukryterialny zysku i ryzyka

2.1 Model zadania

Model przedsiębiorstwa pozostał w całości taki, jak w pierwszej części zadania. Miarą zysku jest wartość oczekiwana, czyli w przypadku równie prawdopodobnych scenariuszy - średnia. Miarą ryzyka w danym zadaniu jest średnia różnica Giniego wyrażająca się wzorem:

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{t'=1}^{T} \sum_{t"=1}^{T} |r_{t'}(\mathbf{x}) - r_{t"}(\mathbf{x})| p_{t'} p_{t"}, \tag{19}$$

gdzie $r_{t'}(\mathbf{x})$ oznacza realizację dla scenariusza t, a p_t - prawdopodobieństwo scenariusza t.

Zgodnie z przyjętymi w projekcie oznaczeniami wyrażenie określające miarę ryzyka będzie wyglądało następująco:

$$giniRisk = \frac{1}{2} \cdot \sum_{t1 \in scenarios} \sum_{t2 \in scenarios} |profit[t1] - profit[t2]| \cdot \frac{1}{nScenarios} \cdot \frac{1}{nScenarios} \tag{20}$$

2.2 Model preferencji

Model preferencji został zbudowany na podstawie wymaganego poziomu średniej przy minimalizacji ryzyka.

$$avgProfit < minAvgProfit \tag{21}$$

$$minimizeginiRisk \tag{22}$$

minAvgProfit jest dodatkowym parametrem modelu. Załączniki 5 i 6 to pliki z paramtrami i modelem zadania dwukryterialnego wyboru - pliki źródłowe dla solvera CPLEX.

2.3 Zbiór rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko-zysk

Rysunek 1 przedstawia rozwiązania efektywne modelu w przestrzeni ryzyko-zysk. Niebieskie trójkąty przedstawiają rozwiązanie efektywne dla różnych wartości wymaganego poziomu zysku. Ze względu na możliwości obliczeniowe komputera rozwiązania 52 równo odległe rozwiązania, każe biorące pod uwagę 30 scenariuszy. Wprowadzono ograniczenie czasu solvera poświęconego jednemu rozwiązania do 5 min. Obliczenia zajęły ponad 3 godziny. Załączniki 7 i 8 to pliki parametrów oraz modelu wraz ze skryptem dla solvera CPLEX, służące do uzyskania rozwiązań. Kolorem żółtym oznaczono rozwiązanie maksymalnego zysku oraz minimalnego ryzyka. Odpowiadające im wartości zawarte są w tabeli 2.4.

2.4 Rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku

Na wykresie 1 kolorem żółtym oznaczono rozwiązania maksymalnego zysku oraz minimalnego ryzyka. Odpowiadające im wartości w przestrzeni ryzyko zysk zawarte są w tabeli 2.4.

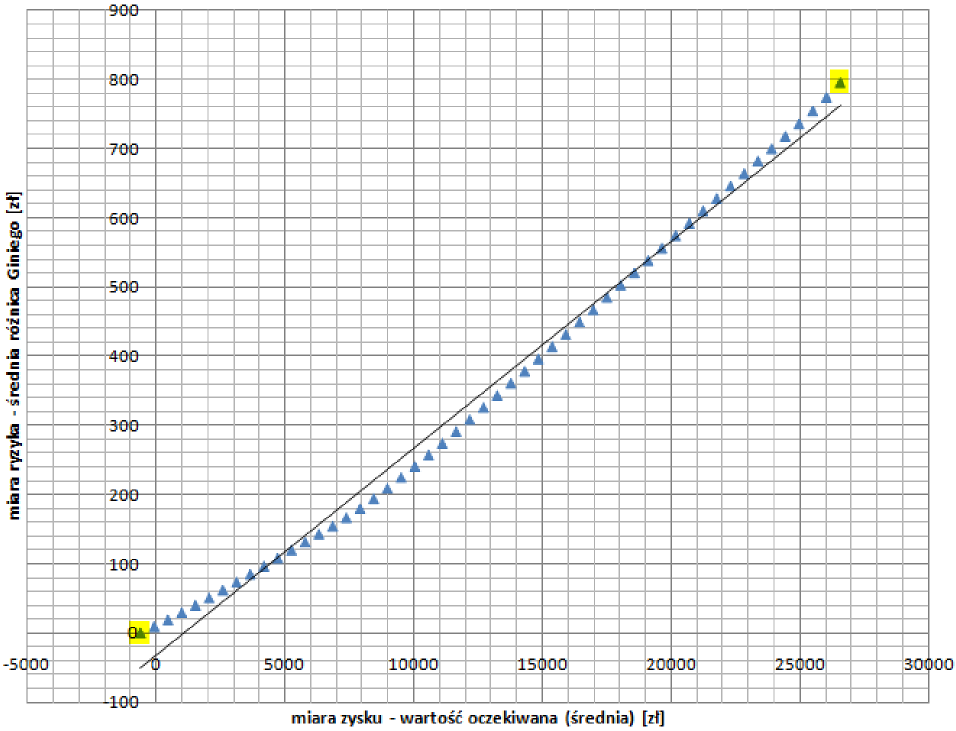
Tabela 3: Rozwiązania maksymalnego zysku i minimalnego ryzyka

	Miara zysku	Miara ryzyka
Maksymalizacja zysku	26553.9 zł	796.113 zł
Minimalizacja ryzyka	-600.00 zł	0.0 zł

Rozwiązanie zadania jednokryterialnego maksymalizacji zysku wiąże się maksymalizacją ryzyka, natomiast zadanie minimalizacji ryzyka, bez ograniczeń na miarę zysku powoduje stratę (zysk ujemny) spowodowaną brakiem sprzedaży oraz kosztami utrzymania minimalnego stanu magazynu.

2.5 Sprawdzenie dominacji stochastycznej wybranych rozwiązań efektywnych

W celu sprawdzenia dominacji stochastycznej pierwszego rzędu (FSD) wybrano 3 rozwiązania efektywne modelu. Zostały oznaczone literami A, B, C. Wartości średniego zysku oraz miary



Rysunek 1: Obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko-zysk

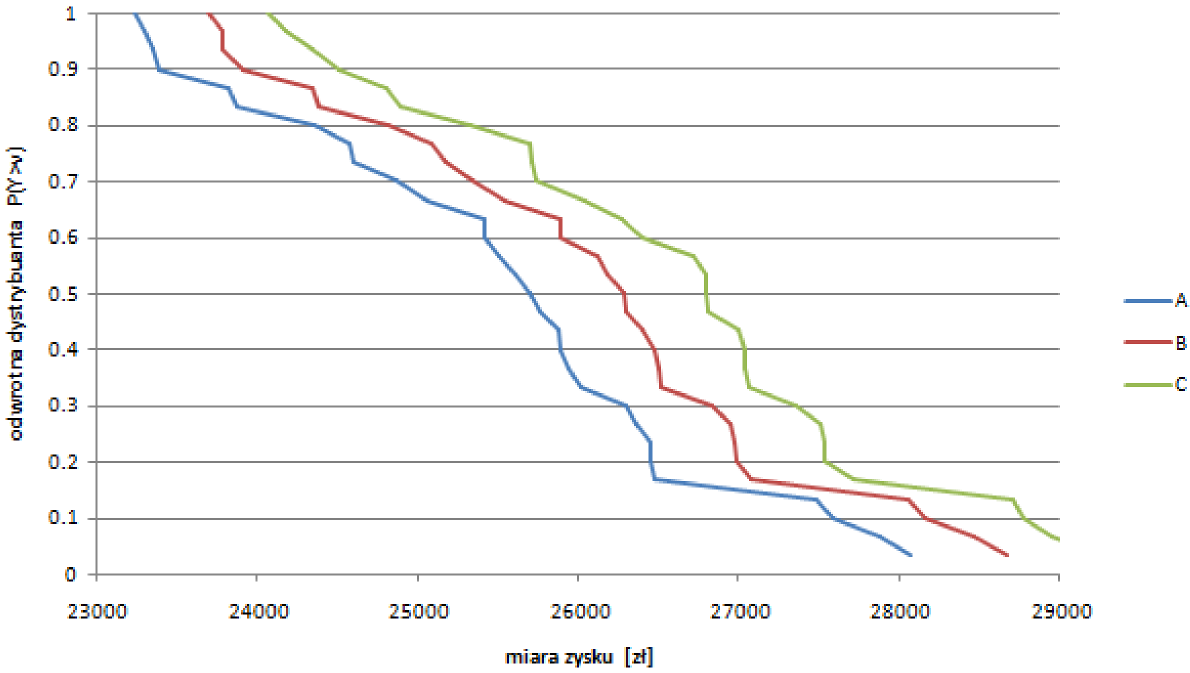
ryzyka odpowiadające tym rozwiązaniom zostały przedstawione w tabeli 2.5. Wybrano rozwiązanie, które były do siebie najbardziej zbliżone pod względem średniej zysku. Jej wartość różniła się o około 500 zł. Załączniki 9 i 10 to pliki parametrów oraz modelu wraz ze skryptem dla solvera CPLEX, służące do wygenerowania informacji o zysku i ryzyku dla poszczególnych scenariuszy.

Tabela 4: Rozwiązania wybrane do analizy dominacji FSD

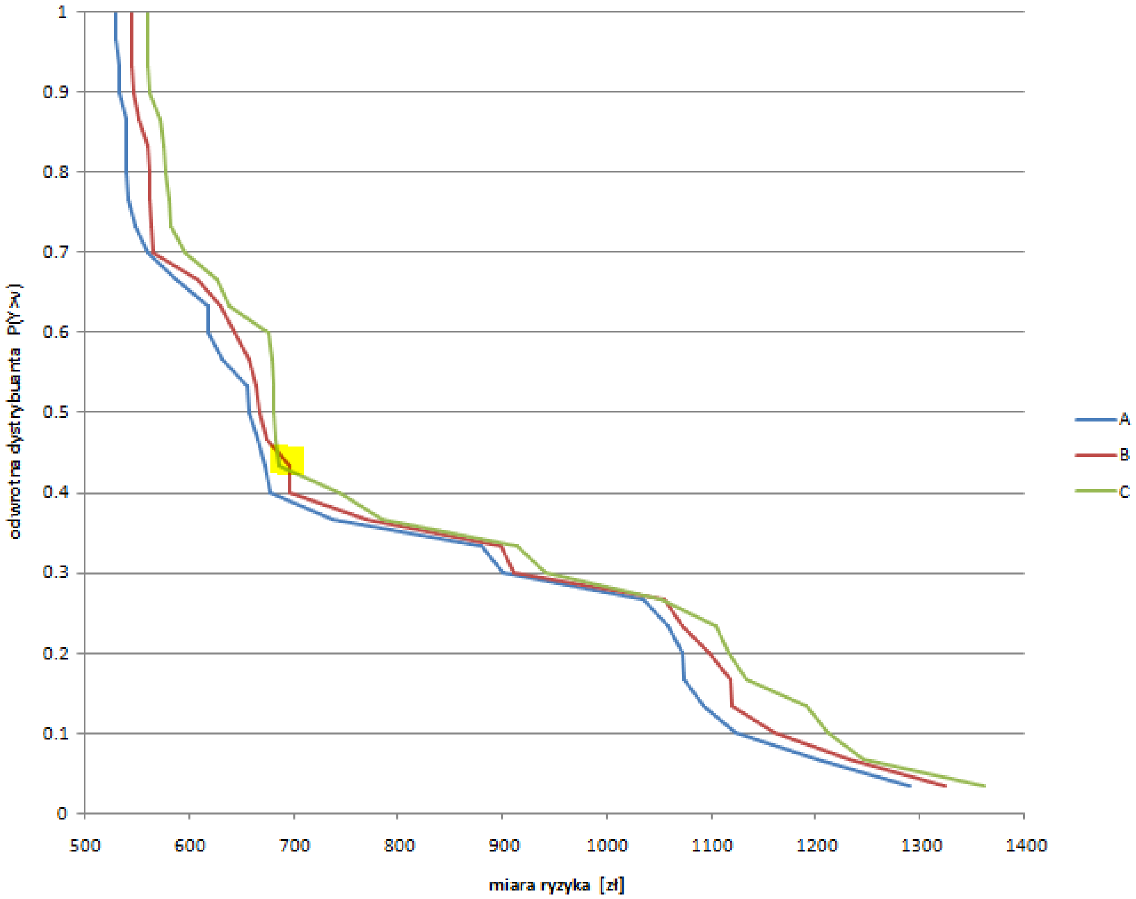
	A	B	C
Ograniczenie minimalnego zysku	25488.1 zł	26020.5 zł	26552.9 zł
Średni zysk	25488.3 zł	26020.6 zł	26553.9 zł
Miara ryzyka	755.133 zł	774.872 zł	796.113 zł

Aby sprawdzić dominację wzajemną dominację rozwiązań w sensie FSD narysowano odwrotne dystrybuanty dla obydwu kryteriów. Rysunek 2 przedstawia wykres odwrotnej dystrybuanty rozkładu średniego zysku pomiędzy scenariuszami dla 3 wybranych rozwiązań efektywnych. Z wykresu można odczytać, że rozwiązanie C dominuje rozwiązania A i B w sensie FSD, tzn. że dla każdego scenariusza miara zysku w przypadku decyzji C jest większa niż w przypadku decyzji A i B. Rozwiązanie B dominuje w sensie FSD rozwiązanie A.

Rysunek 3 to wykres odwrotnej dystrybuanty rozkładu średniego różnicy Giniego jako miary ryzyka pomiędzy scenariuszami dla tych samych 3 rozwiązań efektywnych. Ze względu na miarę ryzyka rozwiązanie A dominuje rozwiązania B, C, natomiast rozwiązanie B nie dominuje "ściśle" rozwiązania C. Powodem jest przecinanie się dystrybuant w miejscu oznaczonym na żółto na wykresie na rysunku 2.



Rysunek 2: Odwrotna dystrybuanta rozkładu średniego zysku między scenariuszami



Rysunek 3: Odwrotna dystrybuanta rozkładu średniej różnicy Giniego między scenariuszami

Spis tabel

Spis załączników

1. t-Student.R - skrypt generujący wektory opisujące dochód ze sprzedaży produktów w poszczególnych scenariuszy,
2. wdwr17421-1.dat - plik definiujący parametry modelu jednokryterialnego,
3. wdwr17421-1.mod - plik implementujący model jednokryterialny,
4. wdwr17421-1.log - pełne wyniki działania solvera dla modelu jednokryterialnego,
5. wdwr17421-2.dat - plik definiujący parametry modelu dwukryterialnego,
6. wdwr17421-2.mod - plik implementujący model dwukryterialny,
7. wdwr17421-3.dat - plik definiujący parametry modelu dwukryterialnego,
8. wdwr17421-3.mod - plik implementujący model oraz skrypt do uzyskania obrazu rozwiązań w przestrzeni ryzyko-zysk,
9. wdwr17421-4.dat - plik definiujący parametry modelu,
10. wdwr17421-4.mod - plik implementujący model oraz skrypt do uzyskania danych do analizy dominacji FSD.