

# Nagy alakváltozású szilárdságtan: gyenge alak és Newton-iteráció (Total Lagrange)

## 1 Kinematika és feszültségmértékek

Legyen a referencia konfiguráció  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  határával  $\partial\Omega_0 = \Gamma_{0u} \cup \Gamma_{0t}$ . A leképezés:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega_0.$$

Deformációgradiens:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}.$$

Jobb Cauchy–Green-tenzor és Green–Lagrange alakváltozási tenzor:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}).$$

Total Lagrange leírásban tipikusan a II. Piola–Kirchhoff feszültséget használjuk:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E}).$$

(Hiperelaszticitás esetén  $\mathbf{S} = 2 \partial\psi/\partial\mathbf{C}$ , és a konzisztens anyagi tangens  $\mathbb{C} := \partial\mathbf{S}/\partial\mathbf{E}$ .)

## 2 Erőegyensúly és peremfeltételek (referencia konfigurációban)

A referencia konfigurációban a test-erő sűrűség legyen  $\mathbf{b}_0$  (N/m<sup>3</sup>), a kijelölt traction peremen a névleges felületi terhelés legyen  $\mathbf{t}_0$  (N/m<sup>2</sup>). A peremfeltételek:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ a } \Gamma_{0u}\text{-n}, \quad \mathbf{P} \mathbf{N} = \mathbf{t}_0 \text{ a } \Gamma_{0t}\text{-n},$$

ahol  $\mathbf{N}$  a referencia konfiguráció külső egységnormálisa, és az I. Piola–Kirchhoff feszültség:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S}.$$

## 3 Gyenge alak (virtuális munka elve)

Válasszunk tesztfüggvényt  $\delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}_0$ , ahol

$$\mathcal{V}_0 := \{\delta\mathbf{v} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \delta\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ a } \Gamma_{0u}\text{-n}\}.$$

A belső és külső virtuális munka:

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}; \delta\mathbf{v}) := \int_{\Omega_0} \mathbf{P}(\mathbf{u}) : \nabla_0 \delta\mathbf{v} \, dV,$$

$$\delta W_{\text{ext}}(\delta\mathbf{v}) := \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_0 \, dV + \int_{\Gamma_{0t}} \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_0 \, dA.$$

A gyenge alak:

$$\boxed{\delta W(\mathbf{u}; \delta\mathbf{v}) := \delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}; \delta\mathbf{v}) - \delta W_{\text{ext}}(\delta\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \delta\mathbf{v} \in \mathcal{V}_0.} \quad (1)$$

**Megjegyzés (terheléstípus).** A fenti  $\mathbf{t}_0$  és  $\mathbf{b}_0$  referencia konfigurációhoz kötött (“dead load”). Ha a terhelés a jelenlegi konfigurációt követi (“follower load”), akkor  $\delta W_{\text{ext}}$  linearizációjában további tagok jelennek meg.

## 4 Newton–Raphson iteráció: reziduum és konzisztens linearizáció

A (1) egyenletből definiáljuk a nemlineáris operátort (reziduumot):

$$R(\mathbf{u})[\delta \mathbf{v}] := \delta W(\mathbf{u}; \delta \mathbf{v}).$$

A feladat: találni  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{\bar{\mathbf{u}}}$ -t úgy, hogy

$$R(\mathbf{u})[\delta \mathbf{v}] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0,$$

ahol  $\mathcal{U}_{\bar{\mathbf{u}}}$  a Dirichlet-peremfeltételek kielégítő függvénytér.

### 4.1 Newton-lépés

Adott  $k$  iterációban  $\mathbf{u}^k$  mellett keressük az inkrementumot  $\Delta \mathbf{u}$ , hogy

$$\boxed{DR(\mathbf{u}^k)[\Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}] = -R(\mathbf{u}^k)[\delta \mathbf{v}] \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0,} \quad (2)$$

majd frissítünk:

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}.$$

### 4.2 A belső virtuális munka linearizációja (anyag + geometria)

Mivel a külső munka (dead load esetén) nem függ  $\mathbf{u}$ -től, ezért

$$DR(\mathbf{u})[\Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}] = D\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{v})[\Delta \mathbf{u}].$$

A belső tag:

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{P}(\mathbf{u}) : \nabla_0 \delta \mathbf{v} \, dV = \int_{\Omega_0} (\mathbf{F}(\mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{u})) : \nabla_0 \delta \mathbf{v} \, dV.$$

Szorzatszabállyal:

$$D\mathbf{P}[\Delta \mathbf{u}] = D(\mathbf{F} \mathbf{S})[\Delta \mathbf{u}] = (D\mathbf{F}[\Delta \mathbf{u}]) \mathbf{S} + \mathbf{F} (D\mathbf{S}[\Delta \mathbf{u}]).$$

Továbbá

$$D\mathbf{F}[\Delta \mathbf{u}] = \nabla_0 \Delta \mathbf{u}.$$

**Anyagi rész.** A  $D\mathbf{S}$  kinematikán keresztül:

$$D\mathbf{S}[\Delta \mathbf{u}] = \mathbb{C} : D\mathbf{E}[\Delta \mathbf{u}], \quad \mathbb{C} := \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}.$$

A Green–Lagrange alakváltozás variációja:

$$D\mathbf{E}[\Delta \mathbf{u}] = \frac{1}{2} (D\mathbf{F}^T[\Delta \mathbf{u}] \mathbf{F} + \mathbf{F}^T D\mathbf{F}[\Delta \mathbf{u}]) = \frac{1}{2} ((\nabla_0 \Delta \mathbf{u})^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla_0 \Delta \mathbf{u}).$$

**Geometriai rész.** A geometriai rész a  $(D\mathbf{F})\mathbf{S}$  tagból származik.

### 4.3 Konzisztens bilineáris forma (tangens)

Ezekkel a Newton-baloldal (tangens) bilineáris formában:

$$DR(\mathbf{u})[\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}] = \underbrace{\int_{\Omega_0} (\nabla_0 \Delta\mathbf{u} \mathbf{S}) : \nabla_0 \delta\mathbf{v} \, dV}_{\text{geometriai (initial stress) rész}} + \underbrace{\int_{\Omega_0} (\mathbf{F}(\mathbb{C} : D\mathbf{E}[\Delta\mathbf{u}])) : \nabla_0 \delta\mathbf{v} \, dV}_{\text{anyagi (material) rész}}. \quad (3)$$

**Ekvivalens alak (gyakran használt).** A második tagban be lehet vezetni a *virtuális* és *inkrementális* Green–Lagrange alakváltozásokat:

$$\delta\mathbf{E}(\delta\mathbf{v}) = \frac{1}{2} ((\nabla_0 \delta\mathbf{v})^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla_0 \delta\mathbf{v}), \quad \Delta\mathbf{E}(\Delta\mathbf{u}) = \frac{1}{2} ((\nabla_0 \Delta\mathbf{u})^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla_0 \Delta\mathbf{u}),$$

amivel az anyagi rész sok anyagtörvény mellett írható:

$$\int_{\Omega_0} \delta\mathbf{E}(\delta\mathbf{v}) : \mathbb{C} : \Delta\mathbf{E}(\Delta\mathbf{u}) \, dV$$

(ekkor figyelni kell az index-konvenciókra és arra, hogy  $\mathbb{C}$  negyedrendű tenzor).

### 4.4 Newton-algoritmus (pszeudokód)

1. Válassz kezdeti tippet:  $\mathbf{u}^0$ .
2.  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
  - (a) Számítsd ki a reziduumot:  $R(\mathbf{u}^k)[\delta\mathbf{v}]$ .
  - (b) Állítsd elő a tangens bilineáris formát:  $DR(\mathbf{u}^k)[\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}]$  a (3) szerint.
  - (c) Oldd meg:  $DR(\mathbf{u}^k)[\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}] = -R(\mathbf{u}^k)[\delta\mathbf{v}] \quad \forall \delta\mathbf{v}$ .
  - (d) Frissítés:  $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}$ .
  - (e) Konvergencia-ellenőrzés (pl.  $\|\Delta\mathbf{u}\|$  vagy  $\|R\|$  alapján).