

# Total Lagrange formuláció a LowLevelFEM-ben Gyenge alak és operátor-alapú implementáció

## 1 Kiinduló probléma (Total Lagrange)

A referencia-konfigurációban ( $\Omega_0$ ) felírt egyensúlyi egyenlet:

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_0$$

ahol

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}.$$

Peremfeltételek:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_{u,0}, \quad \mathbf{P}\mathbf{N} = \mathbf{t}_0 \quad \text{on } \Gamma_{t,0}.$$

—

## 2 Gyenge alak

A virtuális elmozdulás  $\delta\mathbf{u}$  alkalmazásával:

$$\int_{\Omega_0} \delta\mathbf{F} : \mathbf{P} \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_0 \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{t,0}} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_0 \, d\Gamma_0,$$

ahol

$$\delta\mathbf{F} = \nabla_0 \delta\mathbf{u}.$$

Ez az egyenlet a nemlineáris reziduál:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

—

## 3 Newton-iteráció

Newton-módszerrel:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}^k) \Delta\mathbf{u} = \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{u}^k) - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}^k),$$

ahol a teljes tangens:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{mat}} + \mathbf{K}_{\text{geo}} - \mathbf{K}_{\text{ext}}.$$

—

## 4 Operátor-alapú bontás a LowLevelFEM-ben

A LowLevelFEM-ben a gyenge alak térfogati és felületi tagjai különálló, "buta" operátorokként jelennek meg. A nemlinearitás kizárolag a mezőkön (pl.  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{P}$ ) keresztül lép be.

#### 4.1 poissonMatrixVector

**Gyenge alakbeli eredet**

$$\int_{\Omega_0} \nabla_0 \delta \mathbf{u} : \mathbf{S} : \nabla_0 \mathbf{u} \, d\Omega_0$$

**Szerep**

- geometriai merevség,
- II. PK-feszültséggel súlyozott gradiens–gradiens tag,
- térfogati integrál.

**Megjegyzés** A függvény teljes másodrendű tenzort (nem Voigt-formát) használ, így közvetlenül alkalmas nagy alakváltozásos feladatokra.

---

#### 4.2 gradDivMatrixF

**Gyenge alakbeli eredet**

$$\int_{\Omega_0} (\nabla_0 \cdot \delta \mathbf{u}) \lambda (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}) \, d\Omega_0, \quad \text{deformált konfigurációhoz húzva } \mathbf{F}\text{-fel.}$$

**Szerep**

- anyagi tangens volumetrikus része,
- izotrop anyag  $\lambda$  paramétere,
- $\mathbf{F}$ -függő (nagy alakváltozás).

#### 4.3 poissonMatrixSymGradF

**Gyenge alakbeli eredet**

$$\int_{\Omega_0} 2\mu \delta \mathbf{E} : \mathbf{E} \, d\Omega_0, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u}^T \mathbf{F}).$$

**Szerep**

- anyagi tangens deviátoros része,
- izotrop anyag  $\mu$  paramétere,
- szimmetrikus Green–Lagrange-alapú forma.

#### 4.4 internalForceTL

**Gyenge alakbeli eredet**

$$f_{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{N} : \mathbf{P} \, d\Omega_0.$$

## Szerep

- neplineáris belső erővektor,
- minden Newton-iterációban újraszámolandó,
- térfogati integrál.

**Megjegyzés** A First Piola–Kirchhoff feszültség mezőként kerül be, így az anyagmodell teljesen kívül marad.

---

## 4.5 externalTangentFollowerTL

**Gyenge alakbeli eredet** Follower terhelés esetén:

$$\mathbf{t}_0 = J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{t},$$

$$\mathbf{K}_{\text{ext}} = \int_{\Gamma_{t,0}} \mathbf{N}^T \frac{\partial(J\mathbf{F}^{-T})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{t} \, d\Gamma_0.$$

## Szerep

- külső erők konzisztens Newton-tangense,
- kizárolag felületi integrál,
- csak follower load esetén nem nulla.

**Megjegyzés** Dead load esetén ez a mátrix zérus, és a meglévő `loadVector` elegendő.

---

## 5 Összefoglaló táblázat

LowLevelFEM függvény	Gyenge alak	Integrál	Newton-tag
<code>poissonMatrixVector</code>	$\mathbf{K}_{\text{geo}}$	$\Omega_0$	<i>igen</i>
<code>gradDivMatrixF</code>	$\mathbf{K}_{\text{mat}}$	$\Omega_0$	<i>igen</i>
<code>poissonMatrixSymGradF</code>	$\mathbf{K}_{\text{mat}}$	$\Omega_0$	<i>igen</i>
<code>internalForceTL</code>	$\mathbf{f}_{\text{int}}$	$\Omega_0$	<i>igen</i>
<code>externalTangentFollowerTL</code>	$\mathbf{K}_{\text{ext}}$	$\Gamma_{t,0}$	<i>igen</i>

---

## 6 Záró megjegyzés

A bemutatott struktúra lehetővé teszi, hogy:

- kis és nagy alakváltozás azonos operátorokra épüljön,
- az anyagmodell és a geometria szétváljon,
- a Newton-iteráció konzisztens maradjon.

A LowLevelFEM filozófiája szerint az operátorok *minimális tudásúak*, míg a fizikai nemlinearitás a mezőkön keresztül jelenik meg.