Aalto-yliopisto

Keskeinen raja-arvolause ja sen sovellukset liiketoiminnassa

25. maaliskuuta 2025

Agenda of the presentation

Lyhyt kertaus: Suurten lukujen laki

Normaalijakauma

Keskeinen raja-arvolause

Sovellukset

Kohdeyleisö

- Ensimmäisen ja toisen vuoden kandiopiskelijat

Moraali

- Suurten lukujen laki

Opetustavoitteet

Luennon jälkeen

1. osaamme approksimoida todennäköisyyksiä klassisen keskeisen raja-arvo lauseen avulla,

Table of Contents

Table of Contents

Normaalijakauma on absoluuttisesti jatkuva jakauma. Merkitsemme normaalijakaumaa parametrein $\mu \in (-\infty, \infty)$ ja $\sigma^2 \in (0, \infty)$ notaatiolla $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Jakauman $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ tiheysfunktio on

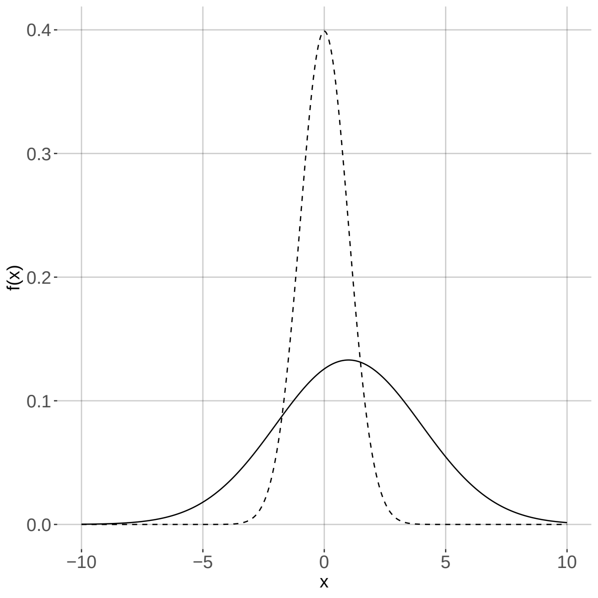
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Normaalijakauma on absoluuttisesti jatkuva jakauma. Merkitsemme normaalijakaumaa parametrein $\mu \in (-\infty, \infty)$ ja $\sigma^2 \in (0, \infty)$ notaatiolla $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Jakauman $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Tällöin normaalijakauman kertymäfunktio voidaan esittää tiheysfunktion avulla

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$



Kuva: Normaalijakaumat $\mathrm{N}(0, 1)$ (katkoviiva) ja $\mathrm{N}(1, 9)$ (jatkuva viiva).

Table of Contents

Simulaatio

1. Simuloi otos riippumattomia ja samoin jakauneita havaintoja $x_1, \ldots, x_n$ (otoskoko on n). Laske keskiarvo

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Simulaatio

1. Simuloi otos riippumattomia ja samoin jakauneita havaintoja $x_1, \ldots, x_n$ (otoskoko on n). Laske keskiarvo

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

2. Toista yllä oleva toimenpide $m = 1000$ kertaa. Näin meillä on m keskiarvoa.

Simulaatio

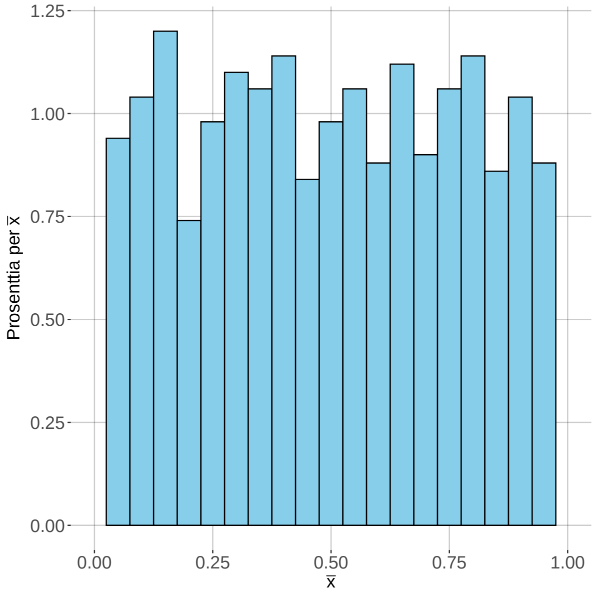
1. Simuloi otos riippumattomia ja samoin jakauneita havaintoja $x_1, \ldots, x_n$ (otoskoko on n). Laske keskiarvo

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

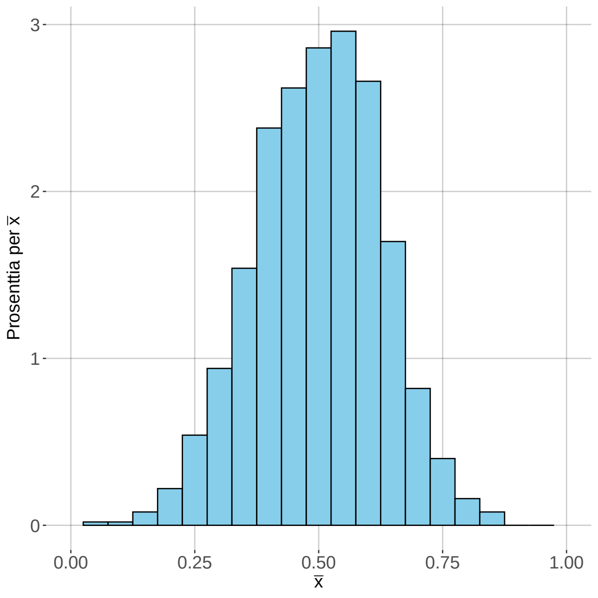
2. Toista yllä oleva toimenpide $m = 1000$ kertaa. Näin meillä on m keskiarvoa.
3. Piirrä histogrammi keskiarvoista.

- Ensin simuloimme otoksia tasajakaumasta $U[0, 1]$ välillä 0-1 (jakauman odotusarvo on 0.5). Kyseisen tasajakauman tiheysfunktio on

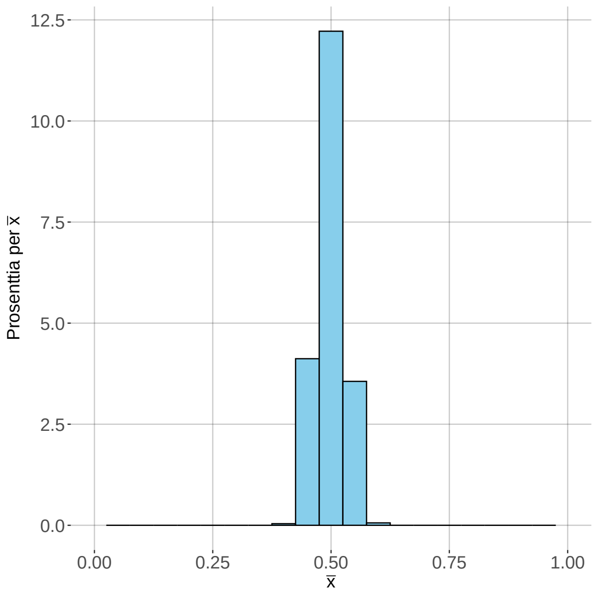
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad x \in [a, b], \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$



Kuva: Tasajakauma $U[0, 1]$, $n = 1$ ja $m = 1000$.



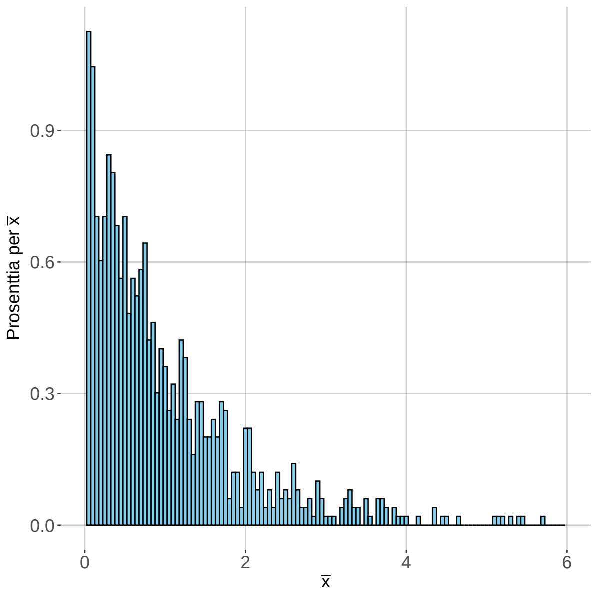
Kuva: Tasajakauma $U[0, 1]$, $n = 5$ ja $m = 1000$.



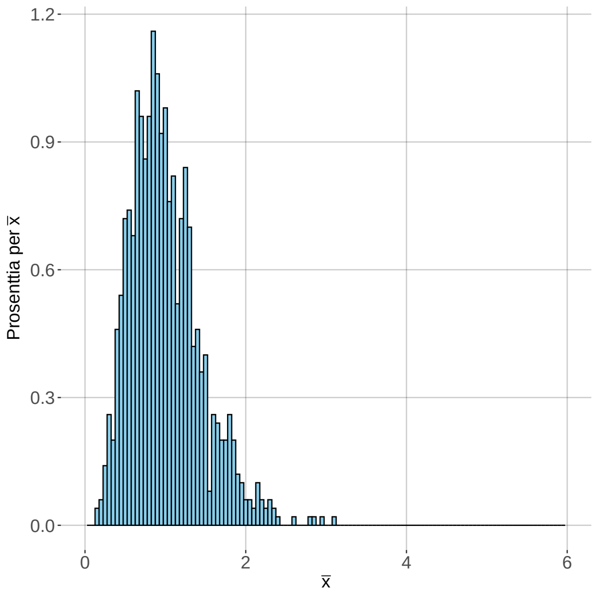
Kuva: Tasajakauma $U[0,1]$, $n = 100$ ja $m = 1000$.

- Seuraavaksi simuloimme otoksia eksponenttijakaumasta $\mathrm{Exp}(1)$ skaalaparametrilla $\lambda = 1$ (jakauman odotusarvo on 1). Kyseisen eksponentijakauman tiheysfunktio on

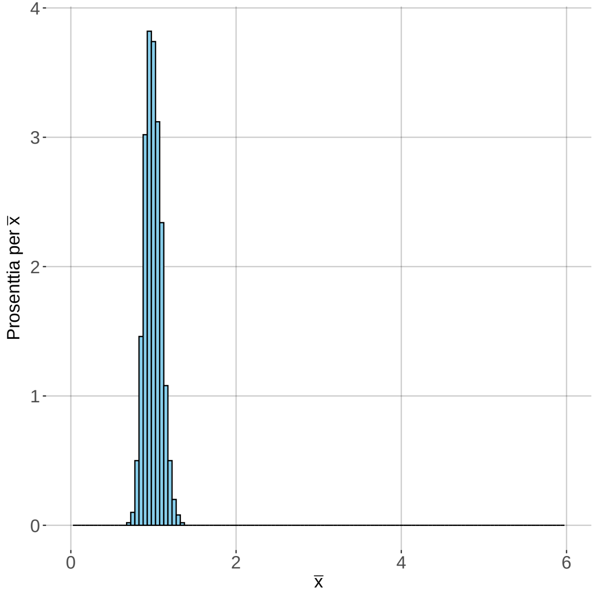
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{kun} \quad x \in [0, \infty), \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$



Kuva: Eksponenttijakauma $\mathrm{Exp}\,(1)$, $n = 1$ ja $m = 1000$.



Kuva: Eksponenttijakauma $\mathrm{Exp}(1)$, $n = 5$ ja $m = 1000$.



Kuva: Eksponenttijakauma $\mathrm{Exp}\,(1)$, $n = 100$ ja $m = 1000$.

Lause

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia niin, että* $\mathbb{E}\left(|X_1|^2\right) < \infty$. *Merkitsemme* $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu = \mathbb{E}\,(X_1)$ *ja* $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}\,(X_1)}$. *Tällöin, kun otoskoko n on suuri,*

$$\tilde{X} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

noudattaa likimain standardinormaalijakaumaa $\mathrm{N}\,(0, 1)$,

Lause

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia niin, että* $\mathbb{E}\left(|X_1|^2\right) < \infty$. *Merkitsemme* $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ *ja* $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}$. *Tällöin, kun otoskoko n on suuri,*

$$\tilde{X} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

noudattaa likimain standardinormaalijakaumaa $\mathrm{N}(0, 1)$,

$$\mathbb{P}\left(\tilde{X} \le x\right) \approx \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Intuitio

Toisin sanoen kun otoskoko n on suuri, niin $\bar{X}$ noudattaa likimain jakaumaa

$$\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Kurssin ulkopuolista asiaa

-

Table of Contents

Sovellus 1: Todennäköisyyksien approksimointi

Sovellus 2: Luottamusväli

Tiivistelmä

Lähdeluettelo