Aalto-yliopisto

Keskeinen raja-arvolause ja sen sovellukset liiketoiminnassa

25. maaliskuuta 2025

Agenda of the presentation

Lyhyt kertaus: Suurten lukujen laki

Normaalijakauma

Keskeinen raja-arvolause

Sovellukset

Kohdeyleisö

- Ensimmäisen ja toisen vuoden kandiopiskelijat

Moraali

- Suurten lukujen laki

Opetustavoitteet

Luennon jälkeen

1. osaamme approksimoida todennäköisyyksiä klassisen keskeisen raja-arvo lauseen avulla,

Table of Contents

Table of Contents

Normaalijakauma on absoluuttisesti jatkuva jakauma. Merkitsemme normaalijakaumaa parametrein $\mu \in (-\infty, \infty)$ ja $\sigma^2 \in (0, \infty)$ notaatiolla $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Jakauman $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Normaalijakauma on absoluuttisesti jatkuva jakauma. Merkitsemme normaalijakaumaa parametrein $\mu \in (-\infty, \infty)$ ja $\sigma^2 \in (0, \infty)$ notaatiolla $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Jakauman $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Tällöin normaalijakauman kertymäfunktio voidaan esittää tiheysfunktion avulla

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

kuva

Table of Contents

Lause

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia niin, että* $\mathbb{E}\left(|X_1|^2\right) < \infty$. *Merkitsemme* $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ *ja* $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}$. *Tällöin, kun otoskoko n on suuri,*

$$\tilde{X} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

noudattaa likimain standardinormaalijakaumaa $\mathrm{N}(0, 1)$,

Lause

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia niin, että* $\mathbb{E}\left(|X_1|^2\right) < \infty$. *Merkitsemme* $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu = \mathbb{E}\left(X_1\right)$ *ja* $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}\left(X_1\right)}$. *Tällöin, kun otoskoko n on suuri,*

$$\tilde{X} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

noudattaa likimain standardinormaalijakaumaa $\mathrm{N}\left(0, 1\right)$,

$$\mathbb{P}\left(\tilde{X} \leq x\right) \approx \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Intuitio

Toisin sanoen kun otoskoko n on suuri, niin $\bar{X}$ noudattaa likimain jakaumaa

$$\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Kurssin ulkopuolista asiaa

-

Table of Contents

Sovellus 1: Todennäköisyyksien approksimointi

Sovellus 2: Luottamusväli

Tiivistelmä

Lähdeluettelo