Rassemblement d'agents mobiles

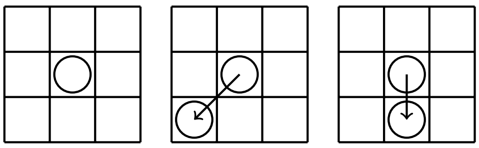
Éloi Perdereau

24 avril 2014

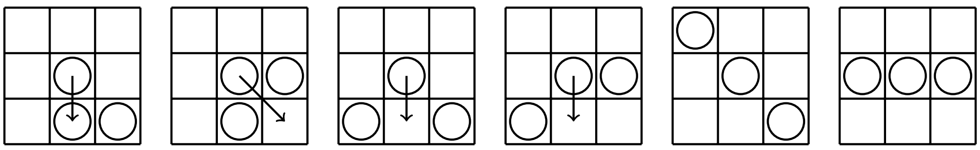
1 Cas

Les cas symétriques sont omis.

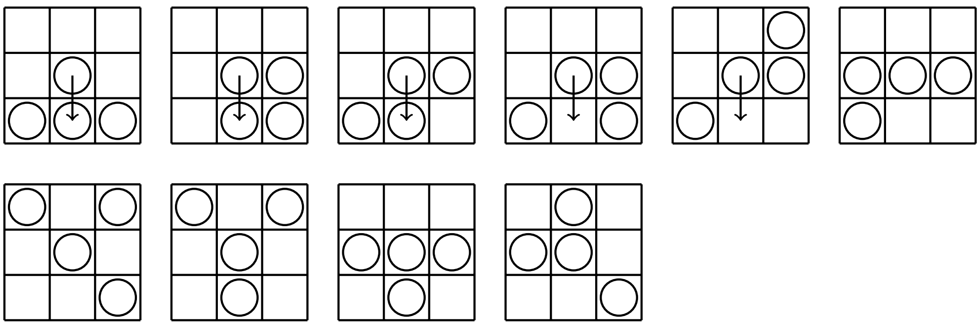
1.1 0 ou 1 voisins



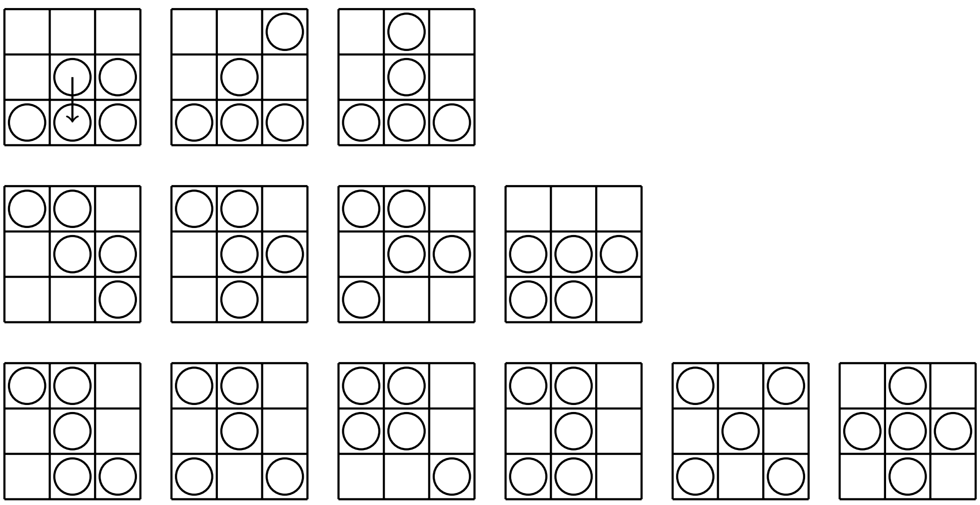
1.2 2 voisins



1.3 3 voisins



1.4 4 voisins



1.5 5 voisins et plus

Pour énumérer les cas avec 5 et 6 robots voisins, il suffit de prendre le complémentaire des cas avec respectivement 3 et 2 robots voisins. Aucun de ces cas n'entraine un mouvement de la part du robot concerné.

1.6 Extension

Tel quels, les cas 6 et 13 peuvent conduire à une déconnexion de l'espace. Pour y remédier, il faut que chaque robot mémorise son entourage d'une ronde sur l'autre (il ne retient que son entourage précédent.) Puis, si à la ronde précédente, il était dans le cas 6 ou 13, il faut qu'il vérifie si au moins une des cases suivante contient un robot : à droite, en bas et en bas à droite. Si ce n'est pas le cas, il revient à sa position précédente. Les cas symétriques sont définis de façon analogues.

Après avoir réglé ces cas de déconnexions, un autre problème survient avec les cas 5 et 6. Il se peut que l'espace alterne entre deux états ce qui rend le rassemblement impossible. Le problème vient du fait que des robots disposés en quinconce soient de nouveau en quinconce à la ronde suivante (avec des positions inversés.) Et ainsi, revenir à la position qu'ils occupaient deux rondes plus tôt. Pour y remédier, on va de nouveau utiliser l'entourage de la ronde précédente : Si à la ronde précédente, un robot était dans le cas 5 ou 6, et qu'il est désormais dans le cas opposé, alors il ne bouge pas pour cette ronde.

1.7 Formalisation

Algorithme 1 :

$finish \leftarrow False$;
$k \leftarrow 0$;
while *not* $finish$ **do**
  $N_k \leftarrow get\_neighbors()$;
  if $k\%2 = 0$ **then**
    if N_k *is case* 1.1.1 *or*
    (N_k *is case* 1.1.2 *or* 1.1.3 *and* $N_{k-2} = rotate180(N_k)$) *or*
    (N_k *is case* 1.3.2 *and* $N_{k-2} = rotate90(N_k)$) **then**
      $finish \leftarrow True$;
      continue;
    end
    if N_k *is case* 1.2.3 *or* 1.2.4 *and* $N_{k-2} = sym(N_k)$ **then**
      don't move (quincunx case);
    else
      move according to N_k;
    end
  else
    if (N_{k-1} *is case* 1.2.4 *or* 1.3.5) *and* ($(i, j+1)$, $(i-1, j)$, $(i-1, j+1)$ *are all empty*) **then**
      move to $(i-1, j)$;
    end
  end
  $k \leftarrow k+1$;
end

1.8 Correctness

We define the *bounding box* $BB(t)$ of the robots as the smallest enclosing rectangle (oriented with the grid's axes) which contains all robots at step t.

Lemma 1.1. *When following the algorithm described above, the bounding box of the robots is monotonically non-inflating, i.e., $BB(t+1) \subseteq BB(t)$ for all t.*

Lemma 1.2. *If there is exactly one robot in the topmost row of the bounding box, then it moves down after at most a constant number of steps.*

2 Calcul du temps de rassemblement dans le cas d'un bloc (draft)

2.1 Cas paire

Bloc de taille n par n avec $n \geq 3$.
On ne considère que un côté (les trois autres sont similaires)
R : le plus petit rectangle englobant tous les robots

Première étape De bloc à disque

Les deux cases prises par les robots sur les bords du côtés se libèrent à chaque ronde. Donc à chaque ronde, le nombre de robots sur le côté diminue de 2. Le temps pour qu'il ne reste plus que 4 robots est

$$\frac{n-4}{2}$$

Deuxième étape Effondrement du disque (ou du cercle)

Le côté ne contient plus que 4 robots adjacents. Donc au bout de deux étapes, il s'effondre. On se rend compte que tant que $n \geq 3$, après chaque effondrement, le côté contient de nouveau 4 robots adjacents. Donc, pour que l'espace devienne un bloc de taille 2 par 2 (cas terminal), il faut que chaque côté "descendent" de $n/2 - 1$, soit un nombre d'étapes de

$$(\frac{n}{2} - 1) * 2$$

Puis il faut une dernière ronde pour que les robots se rendent compte qu'ils ont terminés.

Totaux Le temps total T pour que un bloc se rassemble est donc :

$$T = (\frac{n}{2} - 1) * 2 + \frac{n-4}{2} + 1$$

$$T = n + \frac{n}{2} - 3$$

2.2 Cas impaire

Le cas impaire est assez similaire : On utilise des côtés qui ont 3 robots adjacents, et "descendent" en deux étapes.

Première étape

$$\frac{n-3}{2}$$

Deuxième étape

$$(\frac{n-1}{2}) * 2$$

Pas de ronde en plus après la deuxième étape.

2.3 Cas général (paire et impaire)

$$n + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 3$$

Formule vérifiée pour des blocs de côtés de taille 3 à 50 de côtés de taille 3 à 100.

2.4 Généralisation aux rectangles

On considère des rectangles de taille m par n avec $m \leq n$.

$$\left\lceil \frac{n-4}{2} \right\rceil + 2 * \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 2 \ si \ m \ pair + 1 \ si \ m \ ou \ n \ pair$$

2.5 Généralisation aux carrés (blocs vides)

Tout ce qui a été dis sur les blocs peut s'appliquer (et a été vérifié) aux carrés et aux rectangles. On peut associer les robots qui forment le contour du bloc aux robots qui forment le cercle. Puis, on se rend compte que à chaque étape, les robots correspondant deux à deux prendront la même décision.