

Transició de fase en propietats de grafs*

GRAU A CURS 2018-2019

Departament de Ciències de la Computació
alg@cs.upc.edu

Resum

Aquesta pràctica té com a objectiu una estudi experimental de la transició de fase en processos de percolació.

*La pràctica es farà en grups de 3 persones (excepcionalment 2 o 4, sota autorització expressa). La **composició dels grups** s'haurà de comunicar a alg@cs.upc.edu abans del **24 d'Abril de 2019**.*

*El lliurament de la pràctica es farà en línia via Racó, teniu temps fins les 10:00 hores del dia **13 de Maig de 2019**. Alguns grups podeu rebre preguntes per e-mail entre el 27 de Maig i el 2 de Juny, i les **haureu de respondre abans de les 10:00 hores del dia 3 de Maig de 2019**.*

I. OBJECTIUS

L'objectiu d'aquesta pràctica és, per una part, portar a terme un estudi experimental de la transició de fase per diferents propietats de grafs sobre grafs aleatoris i sobre grafs en què les arestes i/o els nodes poden fallar. D'altra banda, aquesta pràctica ha de servir també per obtenir coneixement de diferents models de grafs aleatoris d'ús habitual en els estudis experimentals d'algorismes per a problemes sobre grafs.

Les fallides permanents a un graf es poden modelitzar de diferents maneres. En aquest projecte podeu assumir que es corresponen a un senzill procés aleatori de percolació per nodes (*site percolation*) o per arestes (*bond percolation*). El model de percolació a un graf G està definit per un paràmetre $q \in [0, 1]$ que representa la probabilitat de fallida i proporciona un nou graf G_q . En un procés de percolació per nodes a un graf G el paràmetre q representa la probabilitat de que un node falli. Així obtenim un graf G_q en què, per a cada node $u \in V(G)$, de forma independent, decidirem si el node u continua al graf (amb probabilitat $1 - q$ no falla) o si esborrem u (amb probabilitat q falla). En un procés de percolació per arestes el paràmetre representa la probabilitat de fallida d'una aresta. En aquest cas, per a cada aresta $e \in E(G)$, mantindrem e amb probabilitat $1 - q$ i la treurem amb probabilitat q . Observeu que en el cas de percolació per arestes $V(G_q) = V(G)$.

*La versió més actualitzada d'aquest document, així com qualsevol material addicional relacionat es publicarà al Racó.

Una vegada tenim fixat un procés de percolació en un graf G volem estudiar per quins valor de q podem esperar que certa propietat Π es doni al graf G_q . Per a moltes propietats Π es pot trobar un valor llindar de q_Π de manera que, amb alta probabilitat, els grafs G_q amb $q > q_\Pi$ verifiquen la propietat Π , però en canvi els grafs G_q amb $q < q_\Pi$ amb alta probabilitat no verifiquen Π . Quan es dona aquest tipus de comportament es diu que la propietat Π presenta una transició de fase al voltant de q_Π .

Podeu trobar una descripció exacta d'un procés de *site percolation* a una graella quadrada $n \times n$ al material de suport del llibre *Algorithms* [1] (<https://algs4.cs.princeton.edu/lectures/15UnionFind-2x2.pdf>, a partir de la transparència 41). En concret, allà s'estudia la transició de fase a una graella, sota percolació de nodes, de la propietat d'existència d'una connexió entre els nodes de la part de dalt de la graella amb els nodes de la part de sota de la graella. En aquest cas se sap que la transició de fase per a aquesta propietat en graells grans apareix al voltant de 0,593.

En el cas de models de grafs aleatoris la transició de fase s'estudia en relació als valors crítics dels paràmetres que defineixen el graf.

Us demanem que analitzeu experimentalment l'existència o no de transició de fase en processos de percolació en grafs i en grafs aleatoris per a diferents propietats. Concretament, us demanem que implementeu algorismes per:

- (a) Donats G i $q \in [0, 1]$ obtenir els grafs corresponents al procés de percolació de nodes i d'arestes.
- (b) Estudiar la transició de fase a graells quadrades $n \times n$, sota un procés de percolació de nodes i un d'arestes, de la propietat estudiada a <https://algs4.cs.princeton.edu/lectures/15UnionFind-2x2.pdf>.
- (c) Estudiar la transició de fase a grafs aleatoris (segons diferents models) d'una versió adient de la propietat estudiada a (b).
- (d) Estudiar la transició de fase d'altres propietats de grafs (diferents de la propietat estudiada a (b)) a grafs amb percolació i/o a grafs aleatoris.

Com hem esmentat abans, l'objectiu d'aquest projecte és, per una part, que veieu experimentalment l'existència o no de transició de fase per a diferents propietats i amb diferents tipus de grafs (amb percolació i/o aleatoris segons diferents models) grans. Dins d'aquest objectiu s'encabeix el de conèixer diferents models de grafs aleatoris i ser capaços de fer-los servir en un estudi experimental. També ens interessa que analitzeu el temps de còmput de les implementacions dels algorismes que permeten comprovar les propietats sota estudi en funció dels diferents valors dels paràmetres dels models de grafs.

II. ENTREGA

El nivell de sofisticació i esforç dedicat a la pràctica és opcional i, naturalment, es tindrà en compte a l'hora d'avaluar-la. En la versió més senzilla (suficient per aprovar el projecte si està acompanyada d'un bon disseny d'experiments) caldria que implementessiu programes en C++ per als problemes proposats als apartats (a), (b) i (c). Per tenir una bona nota caldria fer, a més, l'anàlisi de la transició de fase d'una altra propietat en models que incloguin al menys un model de graf aleatori o bé de la mateixa propietat en més models aleatoris, percolació en altres grafs o grafs aleatoris.

Tingueu en compte que haureu de mesurar el temps dels algorismes. A més, potser haureu de fer un seguiment de diversos comptadors que permetin quantificar el tipus i la quantitat de treball que els vostres programes fan, tant teòrics com experimentals, en el conjunt de grafs considerats.

III. ALGUNS PUNTERS

Aquest document és intencionadament vague. Per tant, a més d'analitzar i experimentar amb diferents famílies de grafs, processos de percolació, grafs aleatoris i propietats, haureu de documentar les fonts d'informació, les decisions preses i el disseny d'experiments que els hi donen suport. Per qualsevol font que feu servir cal que proporcioneu una referència adient, l'adreça web (si cal), les modificacions i/o simplificacions fetes en les vostres implementacions i/o la selecció de models de grafs.

Per cobrir l'apartat (c) (o el (d)) podeu seleccionar els models de grafs i les propietats que us agradin més. Una possibilitat per triar propietats és lligar-les a algun concepte d'interès, per exemple: **(1)** lligades a *connectivitat* (ser connex, o k -connex, o tenir una component connexa gegant, etc.), o **(2)** lligades a *recorreguts* (tenir un camí hamiltonià, o ser un graf eulerià, etc.), o bé **(3)** lligades a *propietats topològiques* del graf (tenir diàmetre constant o petit, la mida del k -core, etc.) Així com qualsevol propietat que us sembli interessant de la teoria de xarxes.

En quant als models de grafs aleatoris o no podeu trobar alguns models per triar seguint els enllaços a https://en.wikipedia.org/wiki/Random_graph o les implementacions de generadors a NetworkX. També podeu trobar definicions d'alguns models de grafs aleatoris als capítols 12–15 del llibre [2].

IV. QUÈ CAL LLIURAR

Cal lliurar una carpeta comprimida (.zip|.tgz|.tar.gz) que contingui:

- Una documentació adequada dels algorismes i mètodes que heu implementat, les proves que heu fet i la comparació dels resultats que heu obtingut. També és interessant que indiqueu altres idees que hagueu provat, encara que no hagin

donat bons resultats, o d'altres que no heu explorat. El document ha de ser en format PDF i ha d'incloure les referències bibliogràfiques adients.

- Una carpeta amb tots els codis font necessaris per compilar i executar el vostre projecte (en C++). S'han d'incloure les instruccions per a la compilació i execució, així com els conjunts de dades utilitzats i/o els programes per generar-les.
- Tingueu en compte que la documentació entregada ens ha de permetre valorar el nivell d'assoliment de la competència transversal que hem d'avaluar: **Capacitat d'autoaprenentatge**. En el context del projecte hi ha uns quants aspectes rellevants relacionats amb aquesta competència: propietats de grafs, models de grafs aleatoris, implementacions eficients d'algorismes, i el disseny i anàlisi dels experiments.
- La documentació ha de recollir i presentar la feina feta, les fonts que s'han consultat, el que heu après i els resultats de l'experimentació. En particular és molt important que reflecteixi de forma succinta el que heu après. Si no es compleix aquesta condició, la qualificació final del projecte reflectirà la qualitat de la presentació i no la del codi entregat.

REFERÈNCIES

- [1] R. Sedgewick and K. Wayne. *Algorithms*. Addison-Wesley, 4th edition, 2011.
<https://algs4.cs.princeton.edu/>
- [2] M.E.J. Newman. *Networks. An Introduction*. Oxford University Press, 2010.

