

# **Transició de fase en propietats de grafs**

Pràctica Grau Algorísmia

Curs 2018—2019

Facultat d'Informàtica de Barcelona (UPC)

Autors:

Arnau Arqué (Grup 12)

Pol García (Grup 12)

Pere Vergés (Grup 12)

# Índex

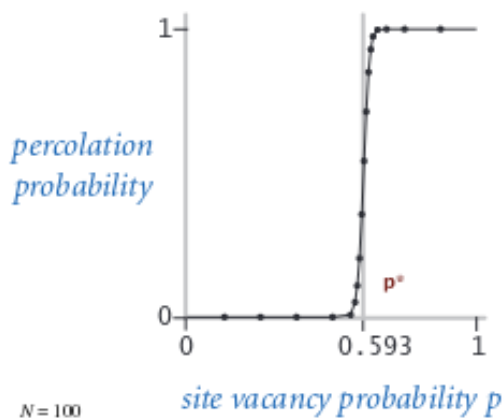
Apartat A.....	Pàgina 3.
Introducció: El procés de percolació .....	Pàgina 3.
Part experimental: Estudi del procés de percolació .....	Pàgina 4.
Percolació per nodes: 50% de fallida .....	Pàgina 5.
Percolació per arestes: 50% de fallida .....	Pàgina 6.
Apartat B.....	Pàgina 7.
Introducció .....	Pàgina 7.
Estudi de la transició de fase: percolació per nodes.....	Pàgina 8.
Donat un percentatge de fallada de nodes, estudiar (...) .....	Pàgina 8.
Càlcul del percentatge de fallida d'un node a partir (...).....	Pàgina 9.
Part experimental .....	Pàgina 9.
Estudi de la transició de fase: percolació per nodes.....	Pàgina 12.
Donat un percentatge de fallada de les arestes, estudiar (...) .....	Pàgina 12.
Càlcul del percentatge de fallida d'un node a partir (...).....	Pàgina 13.
Part experimental .....	Pàgina 13.
Apartat C.....	Pàgina 16.
Introducció .....	Pàgina 16.
Introducció a la part experimental .....	Pàgina 18.
Part experimental: Model d'Erdős-Rényi .....	Pàgina 18.
Part experimental: Model Uniforme .....	Pàgina 24.
Part experimental: Model de Connexió Preferencial (Barabasi-Albert) .....	Pàgina 30.
Apartat D.....	Pàgina 35.
Propietat 1: Connectivitat de grafs .....	Pàgina 35.
Models de grafs aleatoris: Erdős-Rényi .....	Pàgina 36.
Grafs bipartits.....	Pàgina 38.
Percolació de nodes i arestes.....	Pàgina 39.
Arbres binaris .....	Pàgina 39.
Camins .....	Pàgina 42.
Conclusions.....	Pàgina 45.
Propietat 2: Diàmetre d'un graf.....	Pàgina 46.
Informació important per a l'execució dels codis .....	Pàgina 49.
Bibliografia.....	Pàgina 50.

## Apartat A

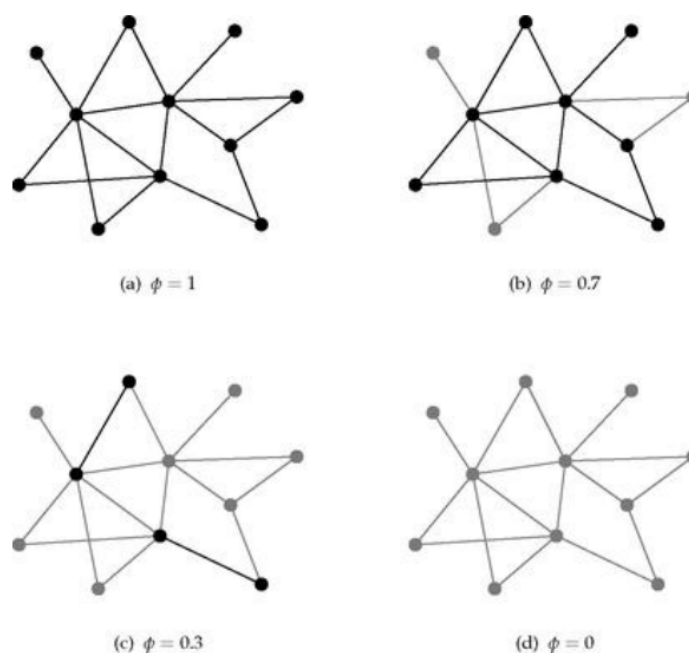
Donats  $G$  i  $q \in [0, 1]$  obtenir els grafs corresponents al procés de percolació de nodes i d'arestes.

### Introducció: El procés de percolació.

La percolació consisteix en el canvi de fase d'alguna propietat del graf, com per exemple que un graf passi de ser connex a no ser-ho. En el cas de la connectivitat en una xarxa a mesura que la probabilitat d'enllaç va augmentat, la connectivitat també ho fa. Es demostra que hi ha un punt crític en el qual s'inicia el canvi de tenir molts nodes aïllats (no conexas) a tenir un majoria de components conexas. Aquest punt crític coincideix amb el que el promig de la xarxa és 1 ( $Z = 1$ ), s'anomena transició de fase (de inconnexa a connexa).



### TRANSICIÓ DE FASE PER A UN GRAF GRAELLA $N \times N$ EN UN PROCÉS DE PERCOLACIÓ



### DIFERENTS EXEMPLES DE GRAFS PERCOLATS

---

## Part experimental: estudi del procés de percolació.

Donats  $G$  i  $q \in [0, 1]$  obtenir els grafs corresponents al procés de percolació de nodes i arestes.

En aquest apartat el que primer ens vam haver de plantejar va ser triar quin tipus d'estructura de dades haurem de fer servir per a tot l'experiment. Les opcions principals que se'ns van acudir foren usar la representació de les matrius com a una llista d'adjacències o com a una matriu d'adjacències. Al final vam optar per la matriu d'adjacències ja que en els experiments s'ha d'eliminar moltes arestes i per tant amb la matriu es fa de manera molt més àgil, a més i en el cas de fer percolació per nodes només cal eliminar una fila i una columna, en canvi si usem la representació de llistes d'adjacència hauriem de fer una cerca per cada node i esborrar les adjacències amb el node esborrat, per tant encara que tingui un cos espacial sigui superior al de la llista d'adjacències en grafs spars, és més eficient a la hora de treballar en grafs no dirigits i a més l'espai que realment cal usar es la meitat ja que es no dirigit si només uses la diagonal superior o inferior de la matriu (encara que la usem tot perquè esteticament és més agradable).

Llavors com bé diu l'enunciat hem de fer el procés de percolació d'un graf donat i una probabilitat donada. El que he fet nosaltres és primer de tot donar tres opcions a l'usuari per tal de triar quin graf vol utilitzar, la primera es que el mateix usuari entri la matriu d'adjacència del seu graf, la segona opció es que escolleixi un dels cinc grafs que nosaltres hem generat, els quals dos son grafs qualsevols, un té la propietat que es connex, l'altre conte un cicle hamiltonia i l'últim té dues components connexes, i finalment l'última que es generar un graf aleatori a partir del nombre de nodes que l'usuari vulgui que tingui el graf i la probabilitat que per cada dos nodes hi hagi una aresta. D'aquesta manera hi ha prou llibertat per tal d'escollir el tipus de graf al qual es vol fer l'estudi de la percolació.

En el cas de la generació del graf aleatori hem fet servir el model de Erdos-Renyi, que amb valors suficientment grans té propietats de la distribució de Poisson.

Per a la percolació de nodes el que fem és recorre tots els nodes que hi ha en el graf i amb la probabilitat que ens ha donat l'usuari decidir si el node es manté en el graf o falla i es elimina. En el cas que el node  $i$  falli, al tenir el graf representat com una matriu d'adjacència només cal que eliminem la fila  $i$  i la columna  $i$  de la matriu d'adjacències per tal de eliminar el node del graf.

En el cas de la percolació per arestes el que hem de fer es recorre la matriu i per cada aresta que hi ha en el graf decidir si es manté o s'elimina, molt similar a la percolació per nodes, en el cas que s'elimini només cal treure la aresta, en la representació de la matriu seria igualar la posició de la adjacència a 0. Gràcies a la representació que hem escollit al començament podem fer totes aquestes operacions molt fàcilment.

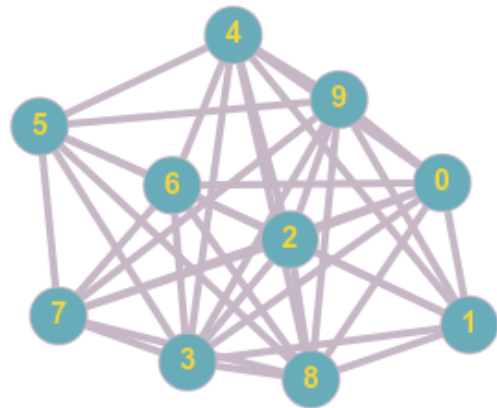
A continuació mostrarem algun exemple de com funciona el nostre codi usant la tercera opció de generació de grafs aleatoris, primer farem percolació amb nodes i després amb arestes:

En els dos casos graf aleatori de 10 nodes amb probabilitat d'adjacència del 85%.

### **Percolació per nodes: 50% de fallada.**

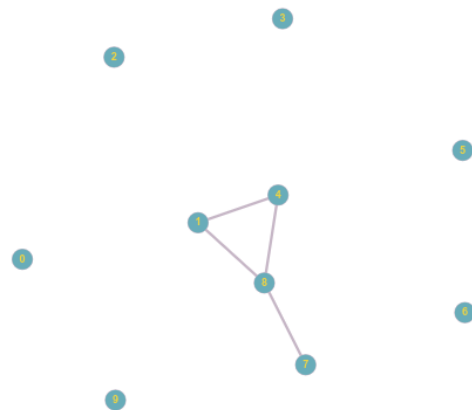
Tenim la sortida del graf aleatori, a l'esquerra hi ha la matriu d'adjacència, i a la dreta es el graf que s'extreu de la matriu

```
Matriu d'adjacencia del graf NO percolat:
0 1 1 1 1 0 1 1 1 1
1 0 1 1 1 0 1 0 1 1
1 1 0 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 0 1 1 0 1 1
0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 0 1 1 0
1 0 1 1 0 1 1 0 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 0 1
1 1 1 1 1 1 0 1 1 0
```



Matriu adjacència i graf després d'haver fet la percolació de nodes amb un 50% de fallida

```
Matriu d'adjacencia del graf percolat:
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 1 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

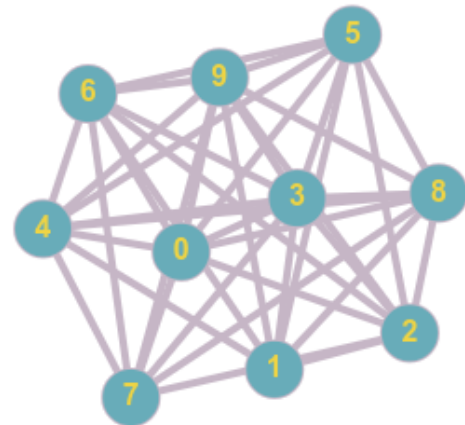


Podem observar que fent percolació de nodes amb un 50% de probabilitat la connectivitat del graf disminueix considerablement.

### Percolació per arestes: 50% de fallada.

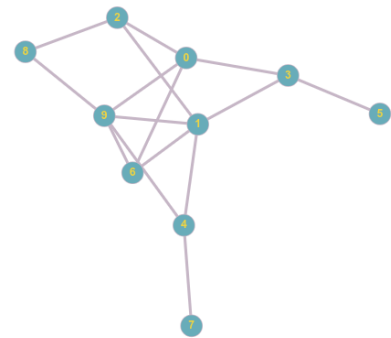
Tenim la sortida del graf aleatori, a l'esquerra hi ha la matriu d'adjacència, i a la dreta es el graf que s'extreu de la matriu.

```
Matriu d'adjacència del graf NO percolat:  
0 0 1 1 1 1 1 1 1 1  
0 0 1 1 1 1 1 0 1 1  
1 1 0 1 0 1 1 1 1 1  
1 1 1 0 1 1 1 1 1 1  
1 1 0 1 0 1 1 1 1 1  
1 1 1 1 1 0 1 0 1 1  
1 1 1 1 1 1 0 1 0 1  
1 0 1 1 1 0 1 0 1 1  
1 1 1 1 1 1 0 1 0 1  
1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
```



Matriu adjacència i graf després d'haver fet la percolació d'arestes amb un 50% de fallada

```
Matriu d'adjacència del graf percolat:  
0 0 1 1 0 0 1 0 0 1  
0 0 1 1 1 0 1 0 0 1  
1 1 0 0 0 0 0 0 0 1  
1 1 0 0 0 1 0 0 0 0  
0 1 0 0 0 0 0 1 0 1  
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0  
1 1 0 0 0 0 0 0 0 1  
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0  
0 0 1 0 0 0 0 0 0 1  
1 1 0 0 1 0 1 0 1 0
```



Podem observar com la percolació d'arestes manté molt més la connectivitat del graf només havent fet un petit experiment. I això té una explicació i es que en el cas que un node falli la connectivitat del graf ja es trenca, en canvi quan una aresta falla la connectivitat només es veurà afectada si era l'última aresta d'algun dels dos nodes a la qual estava connectada.

## Apartat B

Estudiar la transició de fase a graells quadrades  $n \times n$  sota un procés de percolació de nodes i un d'arestes, de la propietat estudiada a:

<https://algs4.cs.princeton.edu/lectures/15UnionFind-2x2.pdf>

---

### Introducció.

En aquest apartat se'ns demana estudiar la transició de fase a graells quadrades  $n \times n$  sota un procés de percolació de nodes i un d'arestes respecte la propietat de trobar un camí entre l'extrem superior i inferior d'aquest (existència d'una connexió entre els dos extrems). Durant tot aquest apartat únicament estudiarem la propietat abans mencionada, per tant sempre que fem referència a la transició de fase serà la transició de fase que fa complir al graf aquesta propietat.

### Grafs graella $G_{m,n}$ .

Un graf graella  $G_{m,n}$  és un graf resultat del producte cartesià  $P_m * P_n$  de grafs camins (Path graphs) de  $m$  i  $n$  vèrtexs. Volem estudiar en quin llinar aquesta graella presentarà una transició de fase sobre si existeix una connexió entre l'extrem superior i inferior, tenint en compte que donat un valor  $p$  cada node estarà obert amb una probabilitat  $1 - p$  i estarà bloquejat amb una probabilitat  $p$  (percolació). A partir d'aquest model abstracte es poden representar molts models físics com ara la circulació de fluids, l'electricitat o les interaccions socials.

Quan el valor del tamany de la graella és suficientment gran la teoria ens garanteix que existeix un llinar  $p^*$  al voltant del qual el graf presenta una transició de fase. Com podem trobar aquest valor? Una manera d'estudiar la transició de fase a graells quadrades sota un procés de percolació estudiant la propietat de **Dynamic Connectivity** (camí entre dos extrems en aquest cas) és utilitzar Union-Find. Podem plantejar-lo mitjançant el mètode de la **Simulació de Monte Carlo**, que consisteix en inicialitzar tot el taulell amb caselles bloquejants i anar afegint aleatòriament caselles de pas fins a poder obtenir un camí entre els dos extrems observats. Adaptant-lo al nostre problema aquest procediment seria generar un graf graella quadrat sota un procés de percolació amb un percentatge de fallada d'un 100% (l'hem aplicat a la inversa) i anar reduint aquest percentatge fins que el graf presenti la transició de fase.

Donat que el problema proposat és molt ampli hem decidit donar a l'usuari diferents eines per estudiar la transició de fase en graells quadrades. L'usuari pot triar entre estudiar la transició de fase per arestes o per nodes, i en cada cas podrà introduir un percentatge de fallada i veure si el graf percola o bé podrà introduir el nombre d'experiments a realitzar i veure a partir de quin percentatge es produeix la transició de fase en base a aquests experiments.

## Estudi de la transició de fase: percolació per nodes.

### 1. Donat un percentatge de fallada dels nodes, estudiar la transició de fase sota el procés de percolació per nodes.

L'usuari entrarà per consola un natural  $n$  que representarà el tamany del graf graella ( $n \times n$ ) i un enter que representarà el percentatge de fallada de node en aquest graf graella. En cas que el node falli voldrà dir que no existirà camí possible on aquest node aparegui. El programa retornarà si el graf graella  $n \times n$  donat percola amb el percentatge de fallada de node.

En aquest cas hem treballat amb una matriu de  $n \times n$ , que representa el graf graella, on cada casella indica si el node està bloquejat (0, si el node està bloquejat cap dels quatre camins possibles a nodes adjacents serà possible) o bé està obert (1, es podrà fer camí entre aquest node i qualssevol node obert adjacent).

Generant un enter amb la funció Random, que representa si el node fallarà o no, el comparem amb el percentatge donat i veiem si el node bloquejarà. Un cop generada tota la matriu de nodes tenint en compte el percentatge de fallada de cada un volem veure si existeix un camí entre l'extrem superior i inferior del graf, i és aquí on veurem la utilitat del Union-Find, que només amb un cost  $N^2$  (com a màxim tota la matriu serà de uns per tant farem  $N^2$  unions, on cada union té un cost amortitzat proper a 1) podrem veure la seva percolació.

Per optimitzar els costos de veure si els dos extrems superiors i inferiors són connexes, que representaria veure per cada node obert de la fila 1 si es connex amb cada node obert de la darrera fila, afegim dos nodes virtuals, un dels quals serà adjacent amb tots els nodes oberts de la primera fila i l'altre amb els de la darrera. Així doncs, després de fer tots els respectius Unions entre els nodes oberts només haurem de fer una única crida a Connected entre els dos nodes virtuals i veure si són connexos.

Donat un taulell amb tamany  $10 \times 10$  i un percentatge de fallada de node d'un 55%, el programa escriurà per consola el graf generat amb uns o zeros en funció de si el taulell percola o no. En aquest cas el taulell no percola, i visualment es pot comprovar com no hi ha cap camí entre els dos extrems superiors i inferiors.

```
Introduir el % de fallada d'un node:
55
El taulell resultant amb tamany 10 es:
0 0 0 0 1 0 1 0 1 1
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
1 0 0 1 0 0 0 0 0 0
0 1 1 0 0 1 0 0 1 1
1 1 1 0 0 1 0 0 0 1
1 1 0 1 1 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 1 0 0 0 0
0 0 1 0 1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 1 1 0 0 1 0
0 0 0 1 1 0 1 1 1 0
El taulell no percola
```

### OUTPUT DESPRÉS DE L'EXECUCIÓ DEL CODI



Així doncs, si els dos nodes virtuals són connexes la funció retornarà que el graf graella percola amb el percentatge de fallada de node donat.

## **2. Càlcul del percentatge de fallada d'un node a partir del qual es produeix la transició de fase.**

Si l'usuari escull aquesta opció serà el programa qui s'encarregarà de calcular amb quin percentatge de fallada de node es produeix la transició de fase. L'usuari passarà com a paràmetre el nombre d'experiments a realitzar (amb 500 experiments ja podem obtenir un resultat prou fiable) i el tamany del graf graella.

Hem adaptat la Simulació de Montecarlo (inicialitzar el graf amb caselles bloquejants i anar afegint aleatoriament caselles de pas fins que percoli) per calcular el percentatge. Cada experiment començarà generant un graf graella  $n \times n$  amb un percentatge de fallada de node d'un 100% i anirem reduint el percentatge en 1 fins que el graf percoli. El percentatge resultant serà la mitjana dels percentatges resultants de cada experiment realitzat.

Com que ja teniem una funció *GeneraMatriu* que li passavem el nombre de nodes per fila i el percentatge de fallada i retornava el graf graella (representat com una matriu) i una altra funció *CalculaPercolacio* que donat un graf graella retornava un bool en funció de si percola o no, no hem necessitat programar cap nova funció auxiliar per desenvolupar aquesta funcionalitat.

## **3. Part experimental.**

Hem plantejat diversos casos d'estudi per veure el funcionament de la transició de fase en un graf graella sota un procés de percolació de nodes. Utilitzant les funcions d'aquest apartat hem pogut desenvolupar un seguit d'experiments que ens permetran estudiar la propietat de trobar un camí entre extrems superiors i inferiors en un graf graella quadrat generat a partir d'un procés de percolació.

### **3.1. Estudi de l'evolució de la transició de fase respecte el tamany del graf graella.**

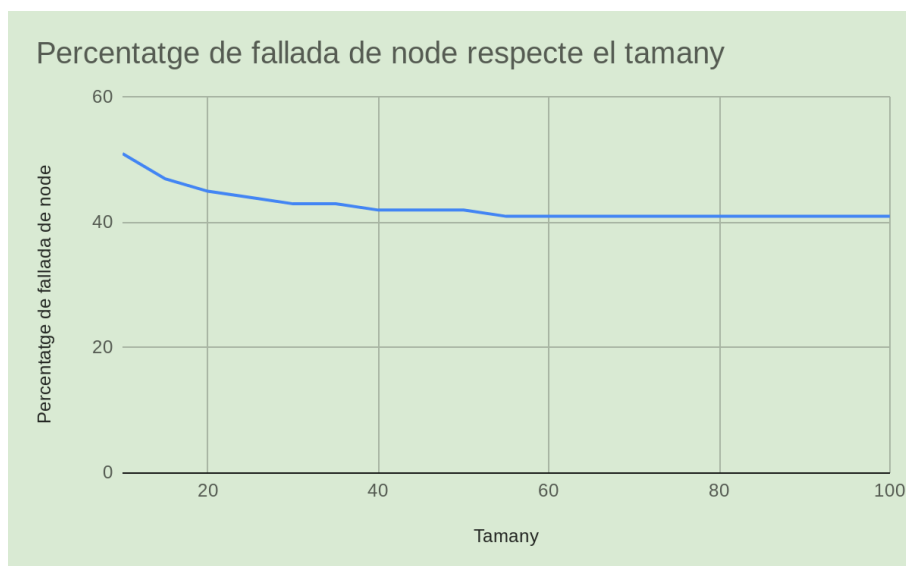
En aquest primer experiment volem veure si el percentatge de fallada de node amb el que es produeix la transició de fase varia amb el tamany del graf graella generat sota un procés de percolació. És a dir, si el percentatge amb el que un node serà de pas o bloquejarà és independent a la distància entre els dos extrems del graf.

Resumim a continuació les característiques de l'experiment que estem a punt de realitzar:

Taula 1 — Característiques de l'experiment

<b>Observació</b>	Pot ser que el percentatge de fallada de node amb el que es produeix la transició de fase sigui depenent al tamany del graf graella generat sota un procés de percolació
<b>Plantejament</b>	Compararem els percentatges de fallada de node amb els que es produeixen transicions de fase dels diferents experiments
<b>Hipòtesis</b>	El percentatge de fallada de node amb el que es produeix la transició de fase no varia amb el tamany del graf graella(H0)
<b>Mètode</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Realitzarem 500 experiments per cada tamany</li><li>• Anirem augmentant el tamany de 5 en 5</li><li>• Compararem els percentatges resultants de cada tamany</li></ul>

Els resultats (taula de resultats b , document adjunt) després de fer 500 experiments amb cada tamany de graella són els següents:



Tal i com van estudiar a la Universitat de Stanford, per tamany de grafs graella grans de nodes podem trobar un llindar amb el que pràcticament segur que percola, ells van estimar que aquest llindar on es veia la transició de fase era proper a un 59,3% de que un node sigui de pas. Com que nosaltres hem plantejat el problema inicialitzant tota la graella amb nodes de pas i afegint nodes bloquejants en funció d'un random i el percentatge donat, l'equivalent al nostre plantejament seria que la transició de fase es produís amb un llindar proper a un 41% de que un node sigui bloquejant, fet que es pot apreciar clarament en els resultats. Per tant veiem com la

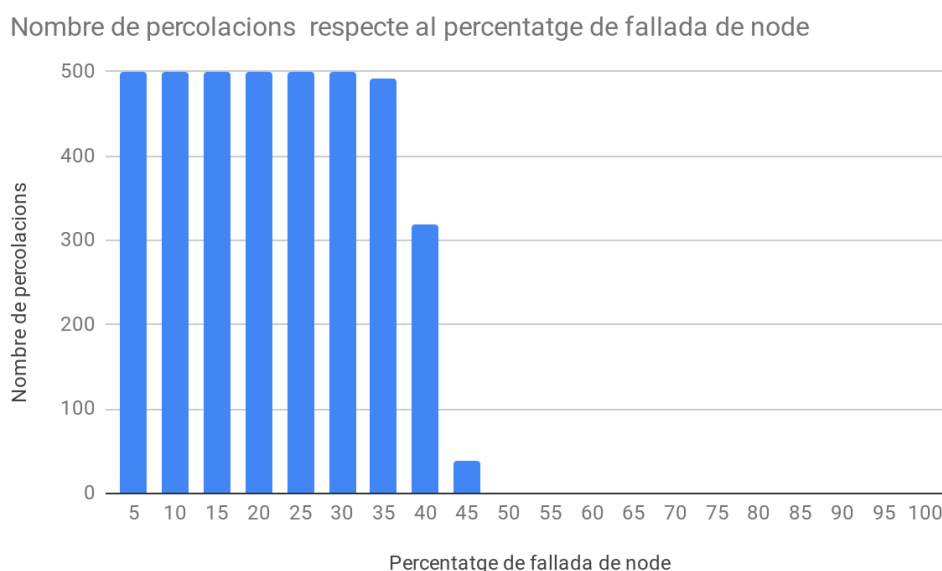
Hipòtesis plantejada es confirma, el llindar on es produeix la transició de fase és independent al tamany del graf graella i es produeix quan cada node té un 59,3% de que sigui de pas.

Un segon experiment serà veure si per sobre del llindar on es produeix la transició de fase (en aquest cas és per sobre ja que representa el percentatge de fallada de node) el graf percola però amb menys probabilitat o simplement per sobre del llindar el graf mai percola.

Taula 2 — Característiques del segon experiment

<b>Observació</b>	Volem estudiar el llindar de transició de fase a partir del qual el graf percola
<b>Plantejament</b>	Per cada percentatge de fallada de node realitzarem experiments i veurem en quants el graf percola
<b>Hipòtesis</b>	Per sobre del percentatge de fallada llindar (41%) estudiat anteriorment el graf no percolerà mai
<b>Mètode</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realitzarem 500 experiments per cada percentatge sobre un tamany fixe (50)</li> <li>• Anirem augmentant el percentatge de 5 en 5</li> <li>• Compararem el resultants de cada percentatge</li> </ul>

Els resultats (taula de resultats b , document adjunt) després de fer 500 experiments amb cada percentatge de fallada de node són els següents:



Podem veure com efectivament, excepte els valors propers al llindar on es produeix la transició de fase (41%), amb percentatges de fallada superiors a aquest mai percola i amb percentatges de fallada inferiors percola sempre. Així doncs, tot i que la gràfica és la inversa ja que en l'estudi de Stanford treballen amb el percentatge de presència en comptes del percentatge de fallada, podem veure com els resultats són exactament els mateixos.

## Estudi de la transició de fase: percolació per nodes.

### 4. Donat un percentatge de fallada de les arestes, estudiar la transició de fase sota el procés de percolació per arestes.

Aquest apartat és molt similar al primer apartat de l'estudi de percolació d'un graf graella donat un percentatge de fallada de node, per descriure'l anirem comparant-lo amb ell i veient les diferències. L'usuari entrarà per consola el nombre de nodes que tindrà el graf graella i el percentatge de fallada d'una aresta. En comptes de treballar amb nodes treballarem amb nodes i arestes, és a dir, que inicialitzarem una graella de  $(2N-1)*(2N-1)$  on totes les arestes seran de pas i anirem aresta per aresta aplicant el percentatge de fallada i en cas de que no falli posarem l'aresta com a aresta de pas i els nodes adjacents també.

Un cop generat el graf hem de veure si percola. Per veure si el graf percola hem reusat la funció "Calcula Percolació" del cas dels nodes. Hem transformat el graf generat d'arestes a un graf graella de nodes, on cada node de pas té una aresta incident. D'aquesta manera estalviem codificar una funció que seria molt semblant.

Per fer-ho més visual per l'usuari hem generat una matriu de  $(2n-1)*(2n-1)$ , on  $n$  representa el nombre de nodes que tindrà una fila del graf graella, amb la que l'usuari podrà veure tots els nodes i només les arestes que s'han generat. Per exemple, donat un graf graella de tamany  $10*10$  nodes i un percentatge de fallada d'aresta d'un 55, el graf que rep l'usuari serà el següent:

```
Introduir el % de fallada d'una aresta:
55
El taulell resultant amb tamany 10 es:

1 % 1 % 1 % 1   1 % 1   1 % 1 % 1   0
      %      %      %      %
1   1 % 1   1 % 1 % 1 % 1   0   1   1
%      %
1 % 1   1   1 % 1 % 1   1 % 1   1 % 1
%      %
1   1 % 1   0   0   1   1 % 1 % 1 % 1
%      %
1 % 1 % 1   0   1   1 % 1   0   1 % 1
%      %
0   1 % 1   0   1 % 1   0   1 % 1 % 1
%      %
1 % 1 % 1 % 1 % 1 % 1 % 1 % 1   0   1 % 1
%      %
1   1   1   1   1   1   1 % 1   1 % 1
%      %
1 % 1   1   1 % 1   1 % 1   1   1 % 1
%      %
1   1 % 1 % 1 % 1 % 1   1   1   1 % 1

El taulell no percola
```

### OUTPUT DESPRÉS DE L'EXECUCIÓ DEL CODI

Aquesta matriu de  $(2n-1)*(2n-1)$  té tots els nodes a 1 i les arestes que s'han generat també a 1 (no la matriu que visualitza l'usuari, sinó la matriu que passem a la funció *CalculaPercolació*). En cas de que la funció *CalculaPercolació* retorni True voldrà dir que el graf percola amb el percentatge de fallada d'arestes donat, en cas contrari rebrà que el graf no percola (com es dona en l'exemple superior).

## **5. Càlcul del percentatge de fallida d'una aresta a partir del qual es produeix la transició de fase.**

Aquest apartat és molt similar a l'apartat equivalent al càlcul del percentatge de fallada de node a partir del qual es produeix una transició de fase. Comencem amb un graf graella generat amb un percentatge de fallada d'aresta d'un 100% i l'anem reduint d'ú en ú fins que arribem a un percentatge on el graf percola, aquest procediment el repetim per cada experiment i retornem la mitjana de tots ells.

## **6. Part experimental.**

A continuació plantejarem diversos experiments per estudiar la transició de fase en grafs graella quadrats sota un procés de percolació d'arestes. L'estudi de Stanford que trobava un llindar estable on es produeix la transició de fase per grafs graella prou grans estava realitzat amb la percolació de nodes. Prosseguiem a estudiar si aquest llindar també el trobem en la percolació d'arestes o varia en algun aspecte.

Per poder comparar els resultats amb la percolació de nodes realitzarem els dos experiments que hem realitzat anteriorment. El primer per veure si el tamany del graf graella influeix en el llindar on es produeix la transició de fase variï i el segon per veure el nombre de percolacions en 500 experiments donat un percentatge de fallada i un tamany de graf constant.

Recordem que per estudiar la propietat de connexió entre els dos extrems superiors i inferiors d'un graf graella quadrat generat sota un procés de percolació d'arestes hem treballat amb una matriu de tamany  $(2n-1)(2n-1)$  on els nodes estan a 1 quan tenen alguna aresta incident i les arestes estan a 1 si s'han generat.

### **3.1. Estudi de l'evolució de la transició de fase respecte el tamany del graf graella.**

En aquest primer experiment volem veure si el percentatge de fallada d'aresta amb el que es produeix la transició de fase varia amb el tamany del graf graella generat sota un procés de percolació. És a dir, si el percentatge amb el que una aresta serà de pas o bloquejarà és independent a la distància entre els dos extrems del graf.

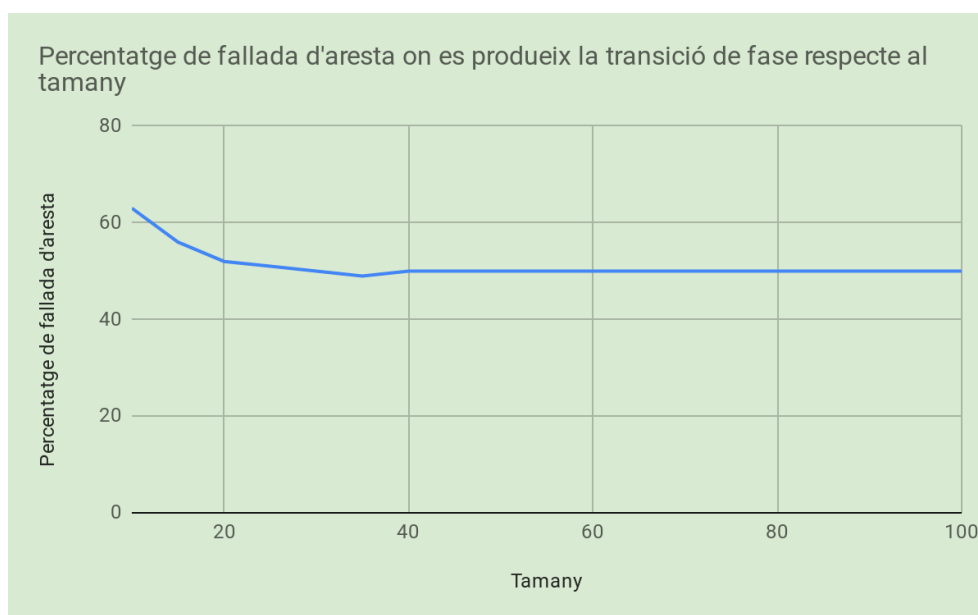
Abans de fer l'experiment ja sabem que experimentalment s'ha trobat que la transició de fase en un graf graella quadrat percolat per arestes es produeix quan el percentatge de fallada d'aresta és inferior o igual a 50%. A continuació ho comprovarem.

Resumim les característiques de l'experiment que estem a punt de realitzar:

Taula 3 — Característiques de l'experiment

<b>Observació</b>	Pot ser que el percentatge de fallada d'aresta amb el que es produeix la transició de fase sigui depenent al tamany del graf graella generat sota un procés de percolació
<b>Plantejament</b>	Compararem els percentatges de fallada d'aresta amb els que es produeixen transicions de fase dels diferents experiments
<b>Hipòtesis</b>	El percentatge de fallada d'aresta amb el que es produeix la transició de fase no varia amb el tamany del graf graella( $H_0$ )
<b>Mètode</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Realitzarem 500 experiments per cada tamany</li><li>• Anirem augmentant el tamany de 5 en 5</li><li>• Compararem els percentatges resultants de cada tamany</li></ul>

Els resultats (taula de resultats b , document adjunt) després de fer 500 experiments amb cada tamany de graella són els següents:



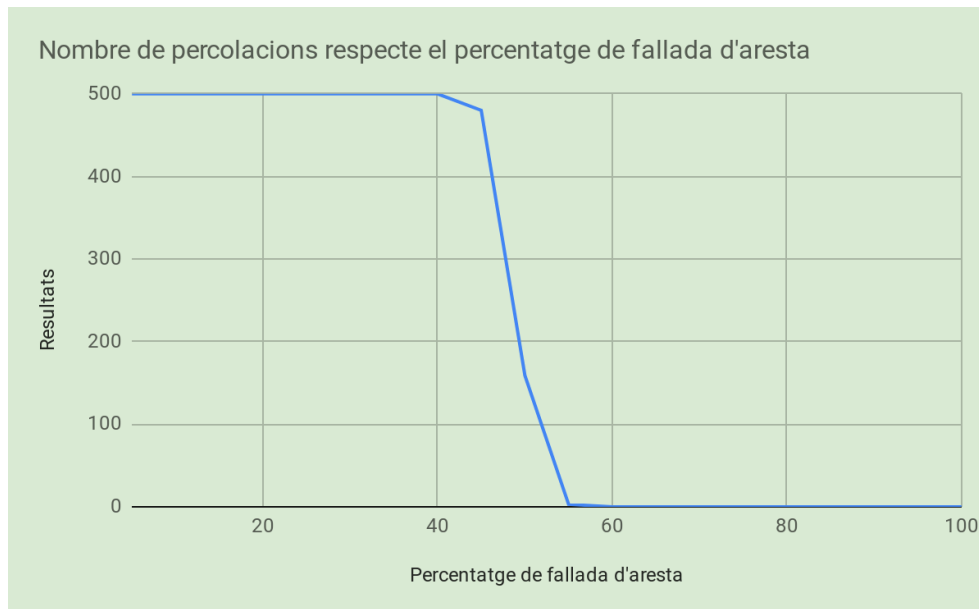
Podem veure doncs que el llindar on es produeix la transició de fase és independent al tamany del graf, i que es produeix amb un percentatge de fallada d'aresta d'un 50%, confirmant així el resultat experimental que ja coneixem. En grafs graella quadrats generats sota un procés de percolació d'arestes el llindar on es produeix la transició de fase és amb un 50% de fallada d'aresta.

Un segon experiment serà veure si per sobre del llindar on es produeix la transició de fase (en aquest cas és per sobre ja que representa el percentatge de fallada d'aresta) el graf percola però amb menys probabilitat o simplement per sobre del llindar el graf mai percola.

Taula 4 — Característiques del segon experiment

Observació	Volem estudiar el llindar de transició de fase a partir del qual el graf percola
Plantejament	Per cada percentatge de fallada d'aresta realitzarem experiments i veurem en quants el graf percola
Hipòtesis	Per sobre del percentatge de fallada llindar (41%) estudiat anteriorment el graf no percolerà mai
Mètode	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realitzarem 500 experiments per cada percentatge sobre un tamany fixe (50)</li> <li>• Anirem augmentant el percentatge de 5 en 5</li> <li>• Compararem el resultants de cada percentatge</li> </ul>

Els resultats (taula de resultats b , document adjunt) després de fer 500 experiments amb cada percentatge de fallada d'aresta són els següents:



Podem veure com efectivament, exceptuant els valors propers al llindar on es produeix la transició de fase (50%), amb percentatges de fallada superiors a aquest mai percola i amb percentatges de fallada inferiors percola sempre.

## Apartat C

**Estudiar la transició de fase a grafs aleatoris (segons diferents models) d'una versió adient de la propietat estudiada a (b).**

---

Introducció.

En aquest apartat, se'ns requeria d'estudiar la transició de fase als grafs aleatoris d'una versió adient de la propietat de l'apartat B. Aquesta, com hem explicat amb anterioritat, consistia en comprovar la connectivitat "top-bottom" en grafs representats mitjançant graelles quadrades de tamany  $N \times N$ . Abans de res, però, vàrem veure necessari fer un estudi prèvi introductori per aprendre més envers aquest nou tipus de graf: els grafs aleatoris.

### **Grafs aleatoris:**

Un graf aleatori és tot aquell graf que ha estat creat mitjançant algun procés aleatori de generació. La idea principal es basa en enllaçar de manera aleatòria un conjunt d' $N$  nodes seguint diferents estratègies. En conseqüència, un graf aleatori no pot haver estat dissenyat seguint un criteri concret.

Arribats a aquest punt, ja sabent què eren els grafs aleatoris ens vam haver de plantejar què significava el fet que hi haguéssin "models" de grafs aleatoris i quins tipus diferents de model existien. D'entre tots els que vàrem trobar, vam escollir-ne tres diferents per fer-ne l'estudi de la transició de fase.

### **Models de grafs aleatoris. Model d'Erdős-Rényi:**

El model d'Erdős-Rényi fou un dels primers models de grafs aleatoris que foren estudiats. El nom del model ret homenatge a Paul Erdős (1913-1996), que fou un matemàtic hongarès que destacà pels seus estudis de combinatòria, teoria de grafs i de números i teoria de l'aproximació, entre d'altres, així com per la seva excentricitat. I també al matemàtic hongarès Alfréd Rényi, que dugué a terme grans aportacions a la teoria combinatòria i a la teoria de grafs envers els grafs aleatoris.

El model defineix un graf de la següent manera:

*Essent  $G_N$  un graf  $G=(V,E)$  amb  $|V| = N$  vèrtexs i sigui  $P$  una probabilitat amb  $0 \leq P \leq 1$ , definim un graf aleatori  $G_{N,P}$  com aquell graf amb  $N$  vèrtexs i una probabilitat  $P$  de que qualsevol parell de vèrtexs  $u,v \in V$  amb  $u \neq v$ , siguin adjacents.*

Aquest model no ha tingut grans aplicacions a la vida real, ja que les xarxes tal i com les coneixem avui en dia no funcionen d'aquesta manera. Tot i així, hem decidit dedicar-li una part del nostre estudi perquè fou un dels primers models de grafs aleatoris estudiats i, a més a més, s'han trobat aproximacions d'aquest model en la teoria de xarxes, més concretament en el camp de les xarxes socials.



### Models de grafs aleatoris. Model Uniforme:

El model Uniforme és un model relativament similar al model d'Erdős-Rényi que, de fet, també fou estudiat pels dos matemàtics. Aquest model es defineix de la següent manera:

*Essent  $G_N$  un graf  $G=(V,E)$  amb  $|V| = N$  vèrtexs, determinarem un nombre d'arestes  $|E| = M$  que tinguin, totes elles, la mateixa probabilitat de ser adjacent a tot parell de vèrtexs  $u,v \in V$  amb  $u \neq v$ . Així doncs es forma el graf aleatori  $G_{N,M}$ .*

### Models de grafs aleatoris. Models de Connexió Preferencial:

Podem definir un procés de connexió preferencial com aquell que donades certes propietats i certs individus d'una població, s'assignen les propietats als individus en funció de la quantitat inicial d'aquestes propietats que ja posseïen els individus inicialment. Per exemplificar-ho farem servir un exemple: suposem que tenim un conjunt de contenidors. Aquests contenidors estan plens d'objectes. Assumirem que no tenen una capacitat màxima definida, per tant, no cal que ens preocupem de la quantitat màxima d'objectes que hi podem introduir. Si seguíssim un procés de connexió preferencial, en cada unitat de temps afegiríem nous objectes als contenidors i cada objecte, seria introduït amb molta més probabilitat als contenidors que estiguessin més plens i amb menys probabilitat als contenidors que no estiguessin tan plens. Així doncs, els contenidors que més objectes tenien, més objectes reben i els contenidors que menys objectes tenien, són els que reben menys objectes.

Hi ha diferents models basats en la connexió preferencial. Nosaltres ens centrarem més concretament en el **model Barabási-Albert**. Novament, el nom del model ret homenatge als autors que el varen popularitzar: el Físic romanès Albert-László Barabási (1967), professor de la Northeastern University de Boston i de la Central European University, conegut per les seves investigacions en el camp de les xarxes. I la també física romanesa Réka Albert, actual professora de la Pennsylvania State University.

Un graf aleatori generat mitjançant el model Barabási-Albert segueix les següents pautes:

Partim d'un graf  $G = (V, E)$  amb  $|V| = n_0$  vèrtexs inicials. Per a cada pas, temps o cicle de generació, es crea o genera un nou vèrtex  $i_N$ . Aquest nou vèrtex serà adjacent a cadascun dels vèrtexs ja adjacents anteriorment amb una probabilitat proporcional al seu grau, és a dir, la probabilitat  $P$  que el nou vèrtex  $i_N$  sigui adjacent a la resta de vèrtexs vindrà donada per l'expressió:

$$P((i_n, j) \in E_{G_{n+1}}) = \frac{g(j)}{\sum_{k \in V} g(k)}$$

El model ha estat molt emprat per simular la generació de xarxes aleatòries complexes. Les xarxes generades seguint aquest model posseeixen una distribució de grau potencial i s'anomenen "xarxes lliures d'escala". Hi ha molts sistemes avui en dia que segueixen un model similar com per exemple internet i les xarxes socials. Per aquest motiu, entre d'altres, hem decidit que seria interessant estudiar aquest model en concret.

---

## Introducció a la part experimental.

Abans de res, ens agradaria explicar breument quins són els passos que seguirem per a l'experimentació amb cadascun dels models i què és el que pretenem amb cadascun d'ells.

### 1. Hipòtesi, objectiu i planificació.

Dedicarem aquest primer punt a parlar de la nostra hipòtesi inicial i els nostres objectius al voltant de l'experiment. A més a més, també explicarem com hem planificat la part experimental amb el determinat model. Direm quins són els nostres objectius, quines són les variables i/o els paràmetres que ens interessa observar i/o modificar durant l'experimentació i, en conseqüència com haurien de ser els nostres codis per poder assolir l'objectiu amb facilitat.

### 2. Disseny i confecció dels codis.

En aquest apartat, descriurem la funcionalitat codi implementat per resoldre l'experiment amb cada model. Determinarem quines han estat les estructures de dades emprades i els motius per als quals han estat convenientment escollides. També explicarem de quina manera, en el moment de la seva execució, obtindrem els resultats. A continuació, procedirem a executar els codis.

### 3. Experimentació i resultats.

Arribats a aquest punt, hem vist convenient fer un breu comentari dels resultats obtinguts després de l'execució del codi. També mostrarem els resultats.

### 4. Anàlisi i Interpretació.

Un cop haguem obtingut els resultats, procedirem a fer una anàlisi exhaustiva del que hem pogut observar i ho deixarem tot a punt per treure les conclusions oportunes.

### 5. Conclusions.

Finalment, després d'haver confeccionat els codis i vist i analitzat els nostres resultats, procedirem a exposar les conclusions que hem deduït a través d'ells.

---

## Part experimental: Model d'Erdős-Rényi.

En aquesta part, ens referirem al model d'Erdős-Rényi com a model ER.

### 1. Hipòtesi, objectiu i planificació.

Per dur a terme aquest experiment, partirem de la hipòtesi que, com en el cas dels grafs representats per una graella  $N \times N$  i posteriorment percolats de l'apartat B, existeix algun llindar a partir del qual es dona la transició de fase i, per tant, trobem un camí "top-bottom" al graf.

És ben sabut, que els grafs generats pel model ER, no tenen ni top ni bottom. Per tant, haurem de redefinir aquest concepte: mirarem si un graf aleatori compleix aquesta propietat si, essent dos vèrtexs aleatoris  $u$  i  $v$  del graf que no siguin adjacents, existeix un camí  $u-v$ . En aquest apartat, direm que si un graf compleix aquesta propietat, el graf és "**2-vèrtex-connex**" o "**2v-connex**", per abreviar.

L'objectiu de l'experiment és generar diferents grafs aleatoris seguint el model ER i observar en quin punt es dona el canvi de fase a partir del qual el graf generat és 2v-connex. Una qüestió important és com determinarem si el graf és 2v-connex o no. Després de valorar diferents

opcions, hem decidit que una possible alternativa a comprovar vèrtex a vèrtex que el graf sigui 2v-connex (cosa que seria molt costosa) és agafar dos vèrtexs qualsevol del graf —que no siguin adjacents— i comprovar si hi ha un camí entre ells. Per tant, aquesta serà la manera en què mirarem si el graf és o no 2v-connex.

Per al model d'ER, hem vist clarament que l'element variable de l'experiment ha de ser la probabilitat  $P$  amb la qual dos vèrtexs qualsevol del graf esdevenen adjacents. Així doncs, basarem el nostre experiment a modificar successivament aquesta probabilitat des de 0 fins a 100, tot observant quan es produeix el canvi de fase. Seguidament intentarem determinar una probabilitat llindar  $P^*$  per a la qual per a la majoria de grafs aleatoris generats amb el model ER amb una probabilitat  $P < P^*$ , no seran 2v-connexos i la majoria de grafs amb  $P > P^*$  sí que ho seran. Per poder dur a terme tot plegat, és bastant evident que necessitarem codis que:

- a) Generin un graf aleatori seguint el model ER donades un nombre de vèrtexs  $N$  i una probabilitat  $P$  de què dos vèrtexs siguin adjacents.
- b) Determinin si, donat un graf generat mitjançant el model ER, aquest és o no 2v-connex.

## **2. Disseny i confecció dels codis.**

Com hem esmentat a la planificació, per poder dur a terme l'experiment necessitarem certes funcions que ens permetin generar un graf aleatori seguint el model ER. Abans, però, descriurem quines són les estructures de dades que ens permetran fer-ho.

### **2.1. Estructures de dades.**

Per començar ens hem hagut de plantejar com representariem els grafs. Hem pensat en diferents opcions però, la que ens ha semblat més apropiada i simple de manipular és una matriu d'adjacència. Aquesta serà de grandària  $N \times N$  on  $N$  és el nombre de vèrtexs del graf. No explicarem el funcionament d'aquesta perquè ens sembla que es basa en un concepte àmpliament conegut i abastament treballat en cursos anteriors.

### **2.2. Funcionalitat: generació de graf aleatori seguint el model ER.**

Per generar un graf aleatori seguint aquest model, serà necessari que l'usuari proporcioni una grandària del graf  $N$  i una probabilitat d'adjacència entre dos vèrtexs  $P$  que, en el nostre cas, hem decidit que sigui entre 0 i 100, permetent també que sigui un valor racional positiu. Així doncs, aquests seran els paràmetres de la funció que s'encarregarà d'aquesta tasca.

El mètode es basarà en el següent: per a cada parell de vèrtexs  $(i, j)$ , calcularà un valor aleatori entre 0 i 100. Si el valor obtingut és menor que  $P$ , aleshores es crearà una aresta entre els dos vèrtexs. Altrament, no es crearà. D'aquesta manera obtindrem la matriu d'adjacència associada al graf aleatori.

La funció es troba al fitxer "c.cc" i s'anomena: "generaGrafAleatoriErdos(...)".

### **2.3. Funcionalitat: comprovar connectivitat.**

Per comprovar si el graf és 2v-connex, com hem explicat a la planificació, agafarem dos vèrtexs qualsevol i mirarem si hi ha un camí entre ells. El mètode necessitarà la matriu d'adjacència prèviament generada. Es basarà a agafar dos vèrtexs aleatoris no adjacents entre si i mirar si

existeix un camí entre ells. Això ho farà recorrent la matriu d'adjacència de manera que des d'un vèrtex  $i$  només es pugui accedir a un vèrtex  $j$  si i només si  $M[i][j] = 1$ .

La funció es troba al fitxer "c.cc" i s'anomena "comprovaConnectivitat(...)".

## **2.4. Main experimental.**

Per dur a terme la recollida de dades hem generat un main experimental en el qual l'usuari ha de determinar el nombre de vèrtexs  $n$  que tindrà el graf que es generarà, el límit superior  $P$  del conjunt de probabilitats amb les quals es generaran els grafs, l'offset  $Off$  d'augment de la probabilitat i el nombre de repeticions  $R$  que es duran a terme per a cada probabilitat d'adjacència diferent.

Així doncs, un cop s'hagin determinat aquests paràmetres, es generaran  $R$  grafs de tamany  $N$  per a cada probabilitat d'adjacència. Aquesta probabilitat, anirà augmentat des de 0 fins a  $P$  de  $Off$  en  $Off$  unitats.

Els resultats s'obtenen de la següent manera: per a cada probabilitat de testeig diferent s'escriu una línia per sortida estàndard que indica:

<nº grafs amb camí> <nº de grafs sense camí>

El main experimental es troba al fitxer "c\_erdos.cc".

Per poder executar el main experimental cal comentar o eliminar el main del fitxer "c.cc".

## **3. Experimentació i resultats.**

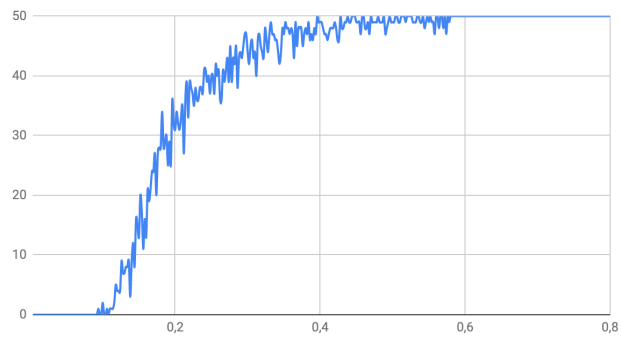
Inicialment, vàrem pensar a iniciar el tamany del graf en 10 nodes i augmentar-lo progressivament fins a un límit superior de 200 nodes amb probabilitats des de 0 fins al 100% i un offset d'un 1%. Un cop vam obtenir els resultats —després d'executar el main experimental—, vam veure que el llindar per a grafs amb tamany tan petit no estava ben definit i, per tant, no en podríem extreure conclusions fermes. Tot i així, gràcies a aquests experiments parcialment fallits —que no hem adjuntat a la memòria perquè no són els definitius—, vàrem poder observar que la probabilitat llindar del canvi de fase, disminuïa dràsticament a mesura que augmentava el tamany del graf però que, a la vegada, es mantenia més estable i, per tant, el podríem acotar millor. Així doncs, vam decidir fer un canvi dràstic amb el tamany dels grafs amb els quals experimentariem. Els tamany definitius escollits van ser de  $n = 1000, 1500, 2000, 2500, 3000$ . Donat que ja havíem vist amb l'experiment anterior que a partir de probabilitats  $> 2\%$  el graf era sempre connex, vam decidir modificar el límit superior de la probabilitat d'adjacència i el vam establir a l'1%. També vàrem modificar l'offset i el vam establir al 0.002% per poder observar a escala més petita quan es produïa el canvi de fase. Per a cada probabilitat —és a dir: per al 0%, 0.002%, 0.004%...— vam generar 50 grafs diferents amb el model ER i en comprovarem la 2v-connectivitat.

Dins la memòria només proporcionarem els gràfics obtinguts després de la recopilació dels resultats. Totes les dades seran adjuntades a l' **[ANNEX1]**. (doc. adjunt)

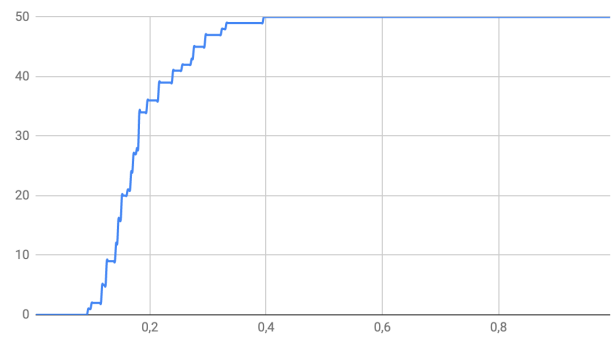
Hem realitzat dos tipus de gràfics per a cada tamany diferent: el primer determina el nombre de grafs 2v-connexos (dels 50 per a cada probabilitat) vs. la probabilitat d'adjacència (des de 0... 1%). El segon gràfic, l'hem generat per no veure les discontinuïtats de la corba generada al gràfic

anterior i sempre proporciona per a cada probabilitat  $P$ , el màxim nombre de grafs generats 2v-connexos des de la probabilitat 0 fins a la probabilitat  $P$ . Veiem-los:

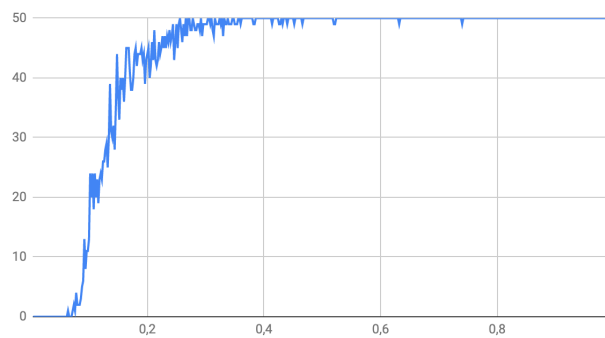
Gràfic 1 — Model Erdős-Rényi [tamany 1000]



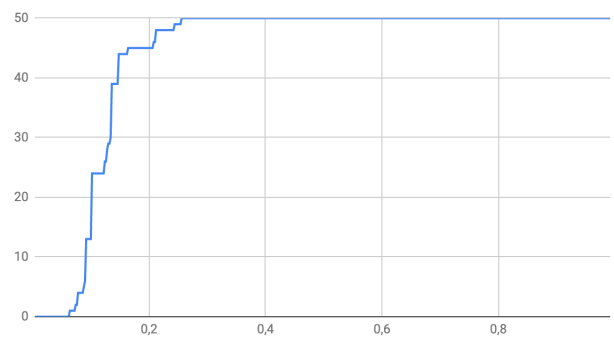
Gràfic 2 — Model Erdős-Rényi [tamany 1000]



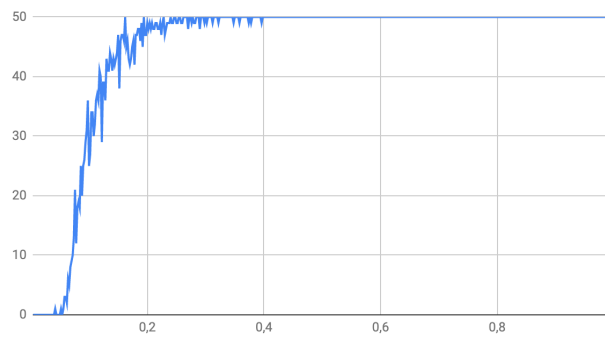
Gràfic 3 — Model Erdős-Rényi [tamany 1500]



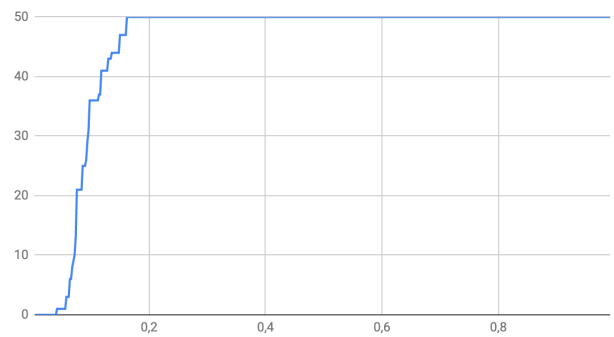
Gràfic 4 — Model Erdős-Rényi [tamany 1500]



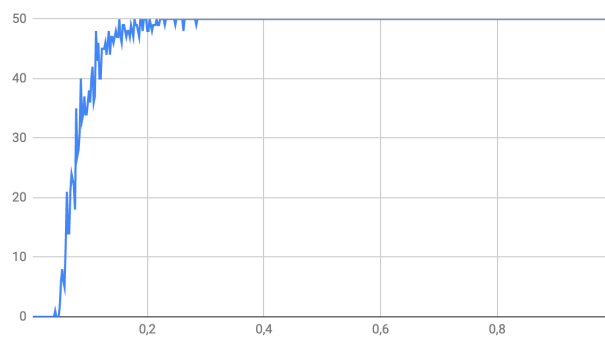
Gràfic 5 — Model Erdős-Rényi [tamany 2000]



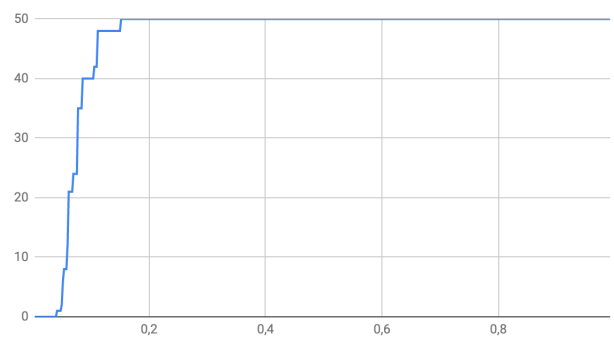
Gràfic 6 — Model Erdős-Rényi [tamany 2000]



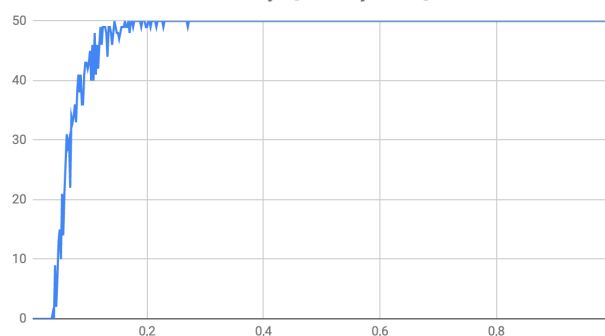
Gràfic 7 — Model Erdős-Rényi [tamany 2500]



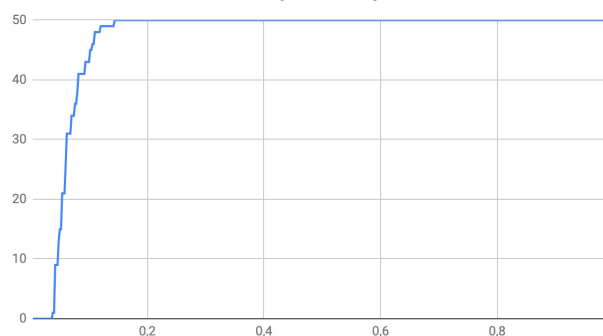
Gràfic 8 — Model Erdős-Rényi [tamany 2500]



Gràfic 9 – Model Erdős-Rényi [tamany 3000]



Gràfic 10 – Model Erdős-Rényi [tamany 3000]



(\*) Totes les línies blaves representen el nombre de grafs 2v-connexos.

(\*\*) Tots els gràfics representen nº de grafs 2v-connexos vs. probabilitat (en %).

#### 4. Anàlisi i interpretació.

Amb els resultats obtinguts hem vist el següent:

- (1) Els grafs de tamany més gran necessiten probabilitat  $P$  més baixa per esdevenir 2v-connexos en el 100% de les repeticions de generació per a aquella probabilitat.

Això ens suggereix que, a mesura que augmenta el tamany dels grafs, aquests necessiten cada cop menys probabilitat per esdevenir 2v-connexos. Per tant, el límit de la probabilitat per la dreta a partir del qual tots els grafs són 2v-connexos disminueix a mesura que augmenta el tamany.

- (2) Per a tots els tamanyos de grafs (alguns en més i d'altres en menys mesura), la corba que indica quants grafs són 2v-connexos per a una probabilitat determinada, creix dràsticament.

Val a dir, que per a tamanyos més grans, la corba creix més ràpidament que per als tamanyos menors.

- (3) Sembla ser que el límit de probabilitat a partir del qual comença a haver grafs 2v-connexos (és a dir, la probabilitat  $P$  per a la qual la corba comença a créixer ràpidament), es manté constant per a tots els tamanyos.

És possible que variï una mica però, sembla ser que la variació respecte d'un tamany respecte els altres és mínima.

#### 5. Conclusions.

Malgrat que haguem dut a terme moltes proves per a cada tamany i probabilitat d'adjacència diferent, és evident que no podem donar cap conclusió ferma en la seva totalitat. Però, un cop havent vist, analitzat i interpretat els nostres resultats, podem determinar que és probable que existeixi un llindar de probabilitat  $P^*$  per al qual la majoria de grafs generats amb  $P < P^*$  no serà 2v-connex i la majoria de grafs generats amb  $P > P^*$  serà potencialment 2v-connex. Amb les nostres dades, no podem donar un punt llindar exacte en funció del tamany del graf, però sí que podem acotar el seu valor. Pel que hem vist al punt anterior [4], és possible que per (1), si tenim un graf

amb  $n \gg$  , el seu llindar per al canvi de fase sigui menor al 0.2% i fins i tot 0.1%. Per (3) és possible que aquest llindar sigui també  $> 0.05\%$

Així doncs, determinem que molt probablement existeixi un llindar per al canvi de fase en grafs aleatoris generats mitjançant el model ER.

---

## Part experimental: Model Uniforme.

En aquest apartat, ens referirem al model Uniforme com a model UNF.

### 1. Hipòtesi, objectiu i planificació.

La nostra hipòtesi seguirà la línia de l'anterior apartat: com ja hem vist en els grafs representats per una graella  $N \times N$  i posteriorment percolats, creiem que és possible que existeixi un llinar a partir del qual es doni la transició de fase i, per tant, trobem un camí “top-bottom” al graf.

Donat que en aquest experiment no tractarem amb “grafs graella”, redefinirem el concepte de connectivitat “top-bottom”: per mirar si un graf aleatori compleix la propietat, agafarem dos vèrtexs a l'atzar del graf i comprovarem si existeix un camí que els connecti. Per a aquest apartat, també ens referirem a aquesta propietat com a: **“2-vèrtexs-connex” o “2v-connex”**.

L'objectiu d'aquest experiment és generar un conjunt de grafs aleatoris seguint el model UNF i observar, com en l'apartat anterior, en quin moment es dona el canvi de fase a partir del qual el graf que generem és 2v-connex. Novament, determinarem si un graf és 2v-connex agafant dos vèrtexs aleatoris no adjacents i comprovant si existeix algun camí entre ells.

En aquest model, així com abans vèiem que havíem de variar la probabilitat d'adjacència, hem vist que l'element variable ha de ser el nombre d'arestes  $M$  a afegir al graf de manera aleatòria. Així doncs, de manera provisional, basarem el nostre experiment en generar grafs diferents

augmentant el nombre d'arestes des de 0 fins a  $MAX\_ARESTES = \frac{n \times (n - 1)}{2}$ . A continuació,

intentarem determinar si existeix un nombre d'arestes  $M^*$  llinar per al qual, gran part dels grafs generats mitjançant el model UNF no siguin 2v-connexos si  $M < M^*$  i esdevinguin 2v-connexos quan  $M > M^*$ .

Per poder experimentar amb la generació de grafs aleatoris amb el model UNF necessitarem codis que:

- Generin un graf aleatori amb el model UNF donat el tamany del graf  $N$  i el nombre d'arestes a inserir aleatòriament  $M$ .
- Determinin si el graf anteriorment generat mitjançant el model UNF és 2v-connex o no.

### 2. Disseny i confecció dels codis.

Abans de res, descriurem les estructures de dades que —pensem— seran adients per desenvolupar l'experiment amb èxit:

#### 2.1. Estructures de Dades.

En aquest sentit, no variarem el que hem emprat per experimentar amb el model anterior. Usarem una matriu d'adjacència de tamany  $N \times N$  on  $N$  és el nombre de vèrtexs del graf a generar.

#### 2.2. Funcionalitat: generació de graf aleatori amb el model UNF.

Per poder generar grafs aleatoris seguint el model UNF, necessitarem que l'usuari proporcioni el tamany del graf  $N$  i el nombre d'arestes a afegir aleatòriament  $M$ . Així doncs, aquests seran els paràmetres del nostre mètode.



La funció iterarà des d'1 fins a  $M$  i, en cada iteració, agafarà dos vèrtexs aleatoris  $u$  i  $v$ . En cas que aquests vèrtexs no siguin adjacents, generarà una aresta que els uneixi, és a dir, essent  $M_{adj}$  la matriu d'adjacència del graf generat, establirà  $M_{adj}[u][v] = 1$ .

La funció es troba al fitxer "c.cc" i s'anomena "generaGrafAleatoriUniforme(...)".

### 2.3. Funcionalitat: comprovar connectivitat.

Per comprovar la connectivitat farem servir el mateix mètode que a l'apartat anterior.

La funció es troba al fitxer "c.cc" i s'anomena "comprovaConnectivitat(...)".

### 2.4. Main experimental: Model Uniforme.

Per fer la recollida de dades hem generat un main experimental per al model UNF. L'usuari ha d'especificar el tamany  $N$  dels grafs que es generaran. A més a més, haurà de determinar el límit superior  $M$  de les arestes a afegir. També haurà de dir quants grafs  $R$  diferents vol generar per a cada nombre d'arestes  $m$  amb  $0 \leq m \leq M$ . Donat que el nombre d'arestes màxim pot ser molt elevat, permetrem que, en lloc d'augmentar d'una en una el nombre d'arestes a afegir en cada iteració, es pugui determinar un offset  $Off$  per augmentar en  $Off$  el nombre d'arestes respecte la iteració anterior.

Un cop hagi establert els paràmetres, es generaran  $R$  grafs de tamany  $N$  per a cada nombre diferent d'arestes a afegir de manera aleatòria. Aquest nombre d'arestes anirà augmentant des de 0 fins a  $M$  en  $Off$  unitats per iteració.

S'obtidran els resultats de manera similar a l'apartat d'Erdős-Rényi. Per a cada nombre d'arestes a afegir, s'escriurà una línia indicant:

<nº grafs amb camí> <nº de grafs sense camí>

(La suma de <nº grafs amb camí> + <nº grafs sense camí> = nº repeticions).

El main experimental es troba al fitxer "c\_uniforme.cc".

Per poder executar el main experimental cal comentar o eliminar el main del fitxer "c.cc".

## 3. Experimentació i resultats.

Arribats a aquest punt, en el qual ja teníem l'experiència de l'experimentació amb el model d'Erdős-Rényi, vam decidir emprar des d'un principi tamanyos elevats dels grafs. Com abans, decidírem fer servir  $n = 1000, 1500, 2000, 2500, 3000$ . Vam fer uns subexperiments previs per veure si, com abans, a partir d'un cert percentatge (en aquest cas, un cert nombre d'arestes) el graf sempre era 2v-connex. En aquest cas, vàrem observar que el nombre d'arestes a partir de les quals el graf sempre era 2v-connex era aproximadament d'unes 3000 arestes per al graf de  $n = 1000$ , mentre que a partir dels grafs  $n = 1500, 2000, 2500$ , era convenient usar aproximadament 4000 arestes. Per últim, vam inserir 6000 arestes per al graf  $n = 3000$ .

Amb l'experimentació vam veure també que el fet d'augmentar les arestes d'una en una era poc eficient i, a més a més, hi havia pocs canvis en la connectivitat dels grafs des de l'addició d'una

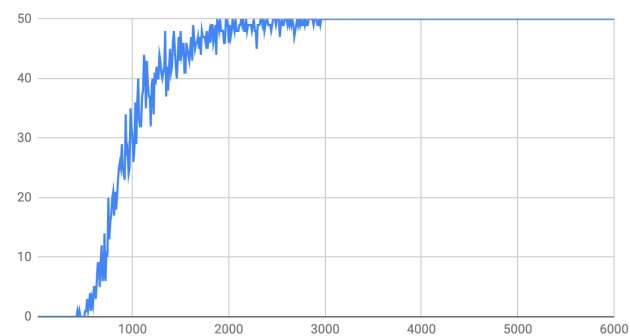
aresta l'altra. Així doncs, varem decidir augmentar l'offset i situar-lo a  $Off = 10$  per als grafs  $n = 1000, \dots, 2500$  i a  $Off = 12$  per al graf  $n = 3000$ .

Vàrem pensar que generant 50 grafs diferents per a cada nombre d'arestes a afegir serien suficients per determinar si aquest era 2v-connex o no i, per tant, vam establir el nombre de repeticions a 50.

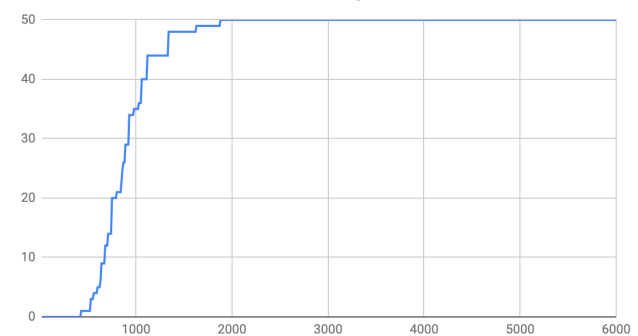
Novament, dins la memòria només proporcionarem els gràfics obtinguts a partir de les dades proporcionades per l'execució del codi. Totes les dades completes es trobaran a l'[ANNEX2]. (doc. adjunt)

Per a cada tamany de graf diferent hem realitzat dos gràfics per a cada tamany. Un indica el nombre de grafs 2v-connexos vs. el nombre d'arestes a afegir de manera aleatòria i l'altre el farem servir per evitar veure les discontinuïtats de la corba del gràfic anterior. Aquest últim representa per a cada nombre d'arestes  $M$ , el màxim nombre de grafs generats 2v-connexos des del nombre d'arestes 0 fins a  $M$ . Veiem-los:

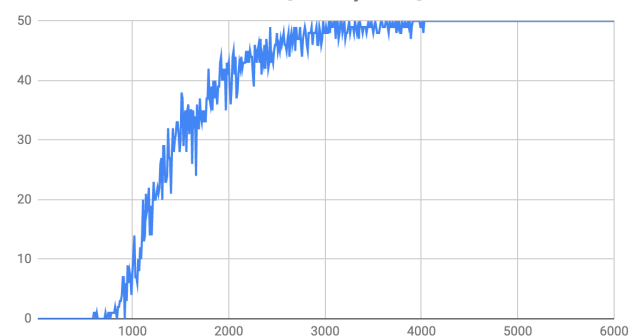
Gràfic 11 – Model Uniforme [tamany 1000]



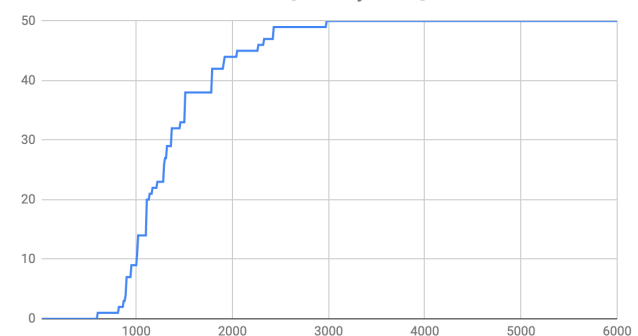
Gràfic 12 – Model Uniforme [tamany 1000]



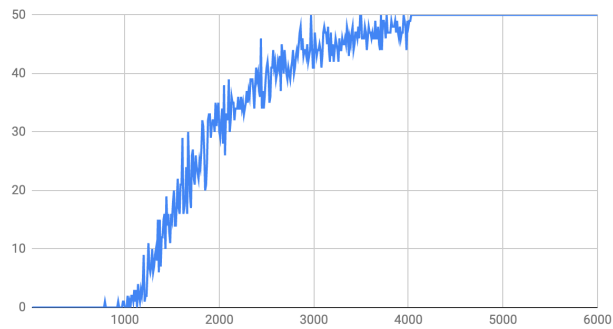
Gràfic 13 – Model Uniforme [tamany 1500]



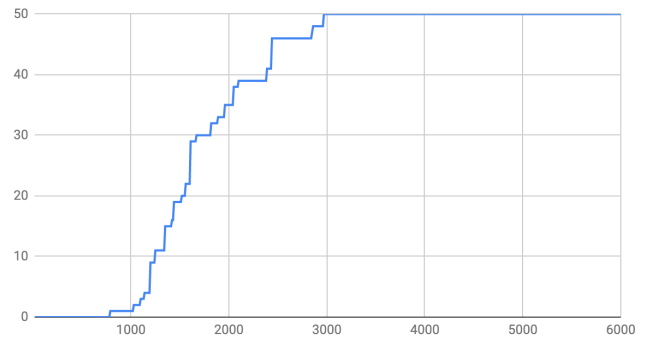
Gràfic 14 – Model Uniforme [tamany 1500]



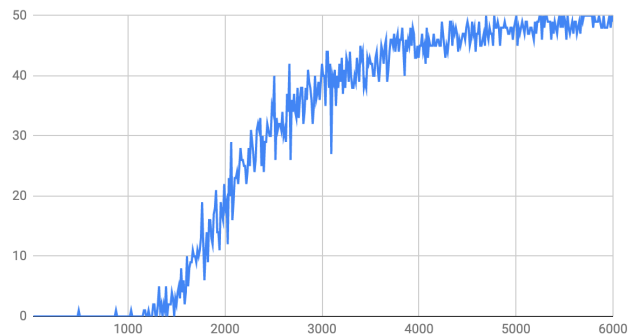
Gràfic 15 – Model Uniforme [tamany 2000]



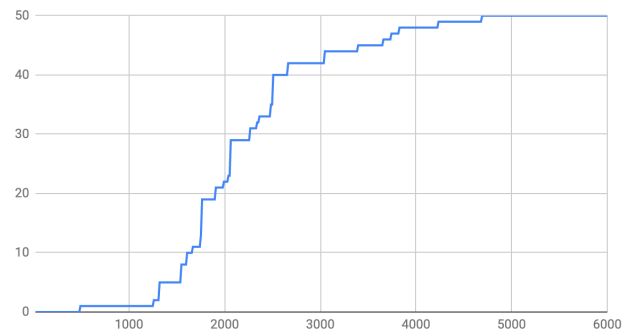
Gràfic 156 – Model Uniforme [tamany 2000]



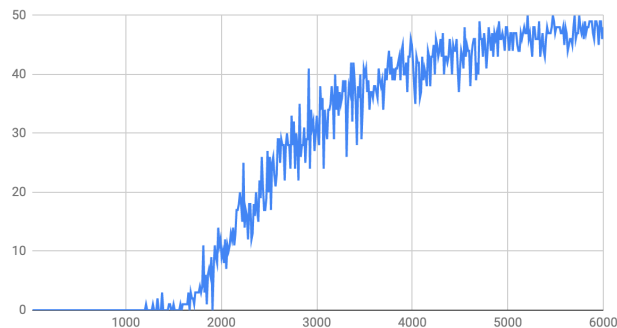
Gràfic 17 – Model Uniforme [tamany 2500]



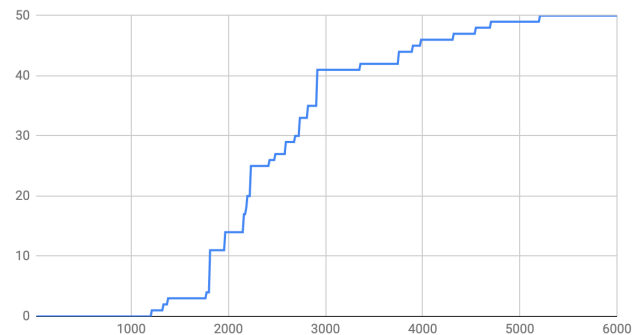
Gràfic 18 – Model Uniforme [tamany 2500]



Gràfic 19 – Model Uniforme [tamany 3000]



Gràfic 20 – Model Uniforme [tamany 3000]



**(\*) Totes les línies blaves representen el nombre de grafs 2v-connexos.**

**(\*\*) Tots els gràfics representen n° de grafs 2v-connexos vs. n° d'arestes inserides aleatòriament.**

#### 4. Anàlisi i interpretació.

Amb els resultats obtinguts hem vist el següent:

(1) Es pot veure clarament que el pendent de les corbes no és tan accentuat com en els grafs que segueixen el model d'Erdős-Rényi (ER).

Però, aquesta visió només es dona perquè el límit d'arestes provades és un nombre molt baix respecte la totalitat de possibles arestes a afegir. Ens expliquem: en el cas d'ER, vàrem situar el límit de probabilitat en 1% i, molt abans, ja s'havia creuat el llindar del canvi de fase. Així doncs, vèiem un pendent molt elevat. Ara, en canvi, el màxim nombre d'arestes provades ha estat de

6000. Si prenem el nombre màxim d'arestes, per exemple, del graf  $n = 3000$ , aquestes 6000 arestes representen:  $\frac{6000}{\frac{3000 \times 2999}{2}} = \frac{6000}{4498500} = 0.0013$ , és a dir un: 0.133% de les arestes. Així

doncs, veiem que el límit provat en el model UNF és molt més baix que el límit d'ER i, malgrat això, el graf ja compleix la 2v-connectivitat. Per tant, encara que no ho veiem, proporcionalment el valor a partir del qual un graf UNF creix és molt més baix que no pas amb ER.

(2) El pendent de les corbes dels gràfics amb tamany menor és més elevat que els de les corbes dels gràfics amb tamany més gran.

Novament, això no és significatiu, de fet és possible que signifiqui el contrari del que sembla a priori. Inicialment —i sense pensar massa en profunditat— es podia arribar a creure que per a tamanyos menors, els grafs generats amb el model UNF esdevenen 2v-connexos més ràpidament. Això, però no sembla pas cert. Un altre cop hem de tenir en compte que per a tots els tamanyos, hem establert el límit d'arestes provades a 6000 però, a diferència de la probabilitat (que des del tamany anterior a un tamany més gran, sempre té el seu màxim al 100%), les arestes d'un graf des d'un tamany a un altre tenen un creixement quadràtic  $O(\frac{n \times (n - 1)}{2}) = O(n^2)$ . Tenint això

en compte, sembla que amb el model UNF, passa el mateix que amb el model ER i per a tamanyos més grans del graf, aquests necessiten un nombre d'arestes més reduït per esdevenir 2v-connexos.

(3) Per al mateix que hem explicat a (2), per a tamanyos més grans dels grafs generats amb el model UNF, la corba que indica quan són 2v-connexos per a un nombre d'arestes determinat creix dràsticament.

(4) Sembla ser que, igual que amb el model ER, el límit inferior d'arestes per al qual els grafs generats amb UNF comencen a ser 2v-connexos es manté constant per a tots els tamanyos o, si més no, varia molt poc.

## 5. Conclusions.

Novament, malgrat que hem dut a terme moltes proves per a cada tamany i nombre d'arestes per afegir diferent, no podem donar cap conclusió ferma en la seva totalitat (més que res perquè caldria dur a terme un estudi encara molt més exhaustiu). Tot i així, havent vist, analitzat i interpretat els nostres resultats és probable que existeixi un llindar  $M^*$  per al qual la majoria dels grafs amb  $M < M^*$  no seran 2v-connexos i la majoria de grafs generats amb  $M > M^*$  seran potencialment 2v-connexos. Amb les nostres dades no podem donar un llindar exacte, però sí que el podem acotar notòriament. Pel que hem vist a l'apartat anterior [4], és possible que, pel que hem comentat a (2), els grafs amb  $n \gg$ , tinguin un llindar per al canvi de fase menor al

0.133% respecte les màximes arestes possibles (aquest valor en concret l'hem deduït a (1) ). A més a més, per (4), és probable que aquest llindar sigui també superior a les 1000 arestes.

Així doncs, determinem que és molt probable que existeixi un llindar per al canvi de fase en grafs aleatoris generats mitjançant el model UNF.

---

## Part experimental: Model de Connexió Preferencial (Barabasi-Albert).

En aquest apartat, ens referirem al model de connexió preferencial de Barabasi-Albert com a BA.

### 1. Planificació.

Partirem de la hipòtesi que, igual que en els grafs representats en una graella  $N \times N$  i posteriorment percolats, existeix un llindar a partir del qual es dona la transició de fase i, per tant, trobem un camí “top-bottom” en el graf.

Donat que no estem tractant amb “grafs-graella”, haurem de redefinir el concepte de “top-bottom”: per mirar si un graf aleatori compleix aquesta propietat, prendrem dos vèrtexs aleatoris i mirarem si existeix un camí que els connecti. D’ara endavant ens referirem a aquesta nova propietat com a **“2-vèrtexs-connex” o, per abbreviar: “2v-connex”**.

L’objectiu de l’experiment serà observar en quin punt —si existeix— es dona el canvi de fase a partir del qual un graf generat a partir del model BA és 2v-connexs. Això ho farem generant diferents grafs aleatoris seguint el model BA i variant els paràmetres de generació entre ells.

La comprovació de si el graf és 2v-connex o no, no variarà respecte als altres apartats: prendrem dos vèrtexs qualsevol no adjacents i comprovarem si existeix un camí entre ells.

Per al model BA no ens ha estat gens fàcil determinar quin és l’element variable. Ens n’hem adonat que tant si augmentem el temps de generació  $t$  i mantenim el nombre d’arestes  $m$  a afegir per a cada vèrtex nou, com si fem a la inversa i augmentem el nombre d’arestes  $m$  a afegir per a cada vèrtex nou i mantenim constant el temps de generació  $t$ , el nombre de grafs 2v-connexos augmentaria. Així doncs, com que a priori no podem saber quin dels dos paràmetres mantenir constant i quin dels dos establir-lo com a variable, hem decidit fer dos experiments diferents: el primer consistirà en variar  $m$  i deixar  $t$  constant i el segon en variar  $t$  i deixar constant  $m$ . Així doncs, en el primer haurem d’intentar trobar un temps de generació  $T^*$  per al qual, la majoria de grafs generats amb  $T < T^*$  no siguin 2v-connexos i els grafs generats amb  $T > T^*$  sí que ho siguin. En el segon experiment farem exactament el mateix però, en lloc de trobar  $T^*$ , intentarem determinar  $M^*$ .

Per dur a terme l’experiment necessitarem codis que:

- Generin un graf aleatori seguint el model BA donat un nombre de vèrtexs inicials  $N$ , un temps de generació  $T$  i un nombre d’arestes a afegir per a cada nou vèrtex  $M$ .
- Determinin si un graf generat mitjançant el model BA és o no 2v-connex.

### 2. Disseny i confecció dels codis.

Abans de descriure els codis que hem confeccionat, explicarem quines estructures de dades hem decidit emprar:

#### 2.1. Estructures de dades.

Com amb els models anteriors, representarem el graf mitjançant la seva matriu d’adjacència. A diferència d’abans, ara ens és necessari tenir emmagatzemats els graus de cada vèrtex. Així doncs, generarem un vector d’enters que per a tota posició  $i$  contindrà el grau del vèrtex associat a la fila  $i$  de la matriu d’adjacència  $[g(i)]$ .

## 2.2. Funcionalitat: generació de graf aleatori seguint el model BA.

Abans de començar ens agradaria matissar unes modificacions que hem hagut d'aplicar al model perquè s'adapti a l'experiment que estem a punt de realitzar.

El model BA original, estableix que els  $N$  vèrtexs inicials estan connectats aleatòriament entre sí. Això, per definició, consistiria en, prèviament a iniciar el temps de generació, generar un subgraf aleatori amb els  $N$  vèrtexs inicials (seguint qualsevol model de generació de grafs aleatoris).

En apartats anteriors ja hem vist que, segons els paràmetres que emprem per a la generació del graf, aquest pot esdevenir 2v-connex. Donat que nosaltres per a cada temps de generació farem que el nou node generat sigui adjacent a la resta de nodes en funció del seu grau, no tindria sentit que el graf inicial fos 2v-connex, perquè aleshores l'experiment no tindria cap sentit. Així doncs, per evitar-ho, establirem que el graf inicial consistirà en un conjunt independent de  $N$  vèrtexs. Com que el model fa servir els graus dels vèrtexs per determinar les adjacències (els que tenen grau més elevat, tenen més possibilitats de tenir un nou node adjacent), establirem que tot vèrtex inicial o no inicial, tingui grau mínim 1. D'ara endavant anomenarem aquest grau mínim com a “**grau fictici**”. El motiu principal d'emprar aquest grau fictici resideix en evitar que algun vèrtex  $j$

tingui probabilitat  $P((i, j) \in E) = \frac{g(j)}{\sum_{k \in V} g(k)} = \frac{0}{\sum_{k \in V} g(k)} = 0$ , de ser adjacent a un altre

vèrtex (perquè serà impossible que algun vèrtex tingui grau  $g(j) = 0$ ; sempre hi haurà grau mínim 1). A més a més, creiem que aquesta petita modificació ens ajuda a, no només fer que el nostre experiment tingui més sentit, sinó també fer que els grafs generats basant-se en la modificació siguin més coherents amb el que solen representar els grafs del model BA, a saber, les xarxes d'internet (exemple: no tindria sentit que un servidor d'internet estigués totalment aïllat de la resta i sense cap possibilitat d'unir-se a la xarxa).

Un cop aclarida la modificació, procedim a explicar què farà la funció:

Per generar el graf seguint el model BA, simplement es generarà una matriu d'adjacència buida i el vector de graus s'establirà inicialment a 1 (pels graus ficticis). Per a cada temps de generació  $t$ , es crearà un nou vèrtex i es generaran  $m$  arestes noves incidents a aquest nou vèrtex i un vèrtex aleatori dels que ja formaven part del graf (que seran escollits en funció del seu grau respecte a la suma de graus total del graf).

La funció es troba al fitxer “c.cc” i s'anomena “generaGrafAleatoriBarabasi(...)”.

## 2.3. Funcionalitat: comprovar 2v-connectivitat.

Per comprovar si el graf és 2v-connex farem servir el mateix mètode que en els apartats anteriors.

La funció es troba al fitxer “c.cc” i s'anomena “comprovaConnectiviat(...)”.

## 2.4. Main experimental: Model de Barabasi-Albert.

Per a la recopilació de dades, hem generat un main a través del qual l'usuari ha d'indicar quins són els  $n$  vèrtexs inicials, el temps de generació  $t$  i el nombre d'arestes  $m$  que s'afegiran per a cada nou node. El main conté dues parts, una per executar l'experiment 1 i l'altra per executar l'experiment 2.

Els resultats s'obtenen de la mateixa manera que en els altres dos models.

El main experimental es troba al fitxer "c\_barabasi.cc".

Per poder executar el main experimental cal comentar o eliminar el main del fitxer "c.cc".

### 3. Experimentació i resultats.

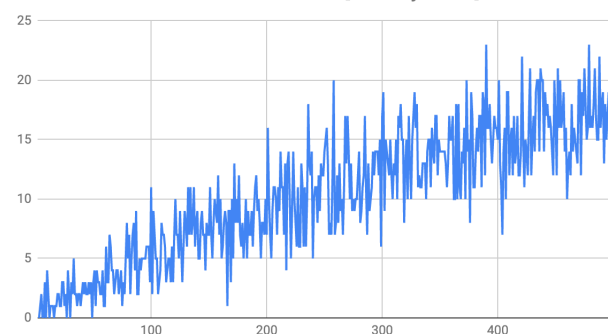
En ambdós experiments ens hem vist forçats a reduir notablement el temps de generació (exp.1) i el nombre d'arestes a inserir per a cada temps de generació (exp.2). Tot i així hem pogut fer dues proves amb tamany de graf diferents per a ambdós experiments. En el primer, hem generat grafs de tamany  $n = 1000, 1500$ . Per a  $n = 1000$  hem establert temps de generació variable des de 0 fins a 500 i en el cas de  $n = 1500$  hem pogut allargar el temps de generació des del 0 fins als aproximadament 700. En ambdós casos hem fet 25 repeticions per a cada temps de generació diferent.

En l'experiment 2, en canvi, hem hagut de reduir molt el nombre de repeticions en benefici de poder augmentar una mica el nombre d'arestes a inserir en cada temps de generació. En concret hem dut a terme 10 repeticions per cada nombre d'arestes a inserir. L'offset també s'ha vist afectat i en el graf  $n = 1000$  l'hem establert a 10 i en el graf de  $n = 2000$  a 100.

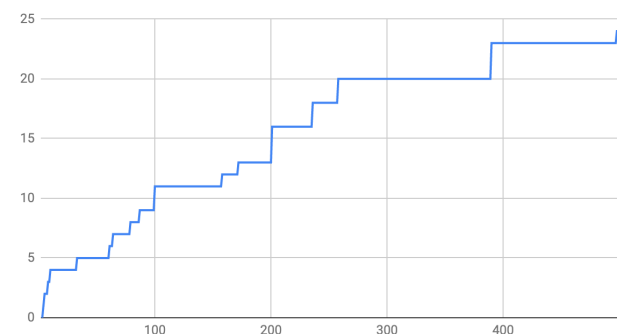
A la memòria només adjuntarem els gràfics. Tot i així, es poden consultar les dades completes a [ANNEX3] i [ANNEX4] (doc. adjunt)

#### EXPERIMENT 1: Variació del temps de generació.

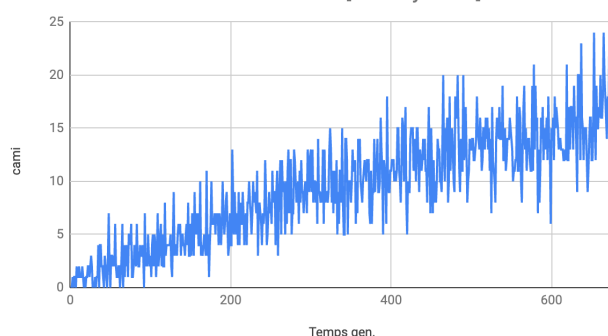
Gràfic 21 — Model Barabasi-Albert [tamany 1000]



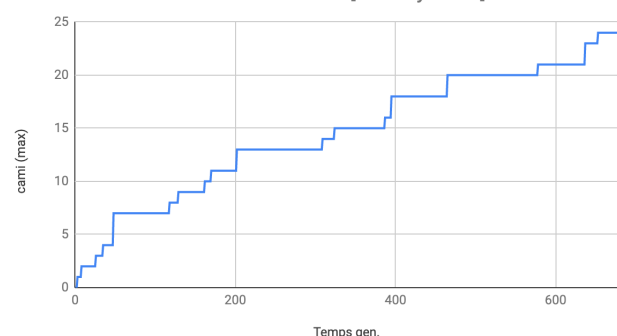
Gràfic 22 — Model Barabasi-Albert [tamany 1000]



Gràfic 23 — Model Barabasi-Albert [tamany 1500]



Gràfic 24 — Model Barabasi-Albert [tamany 1500]



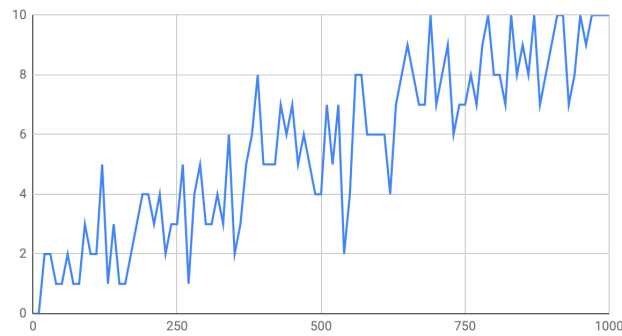
(\*) Totes les línies blaves representen el nombre de grafs 2v-connexos.

(\*\*) Tots els gràfics representen nº de grafs 2v-connexos vs. temps de generació.

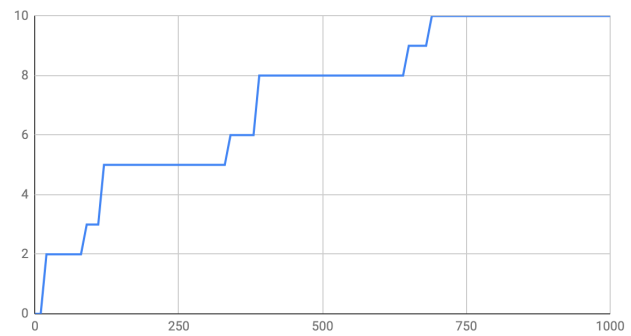


## EXPERIMENT 2: Variació del nº d'arestes.

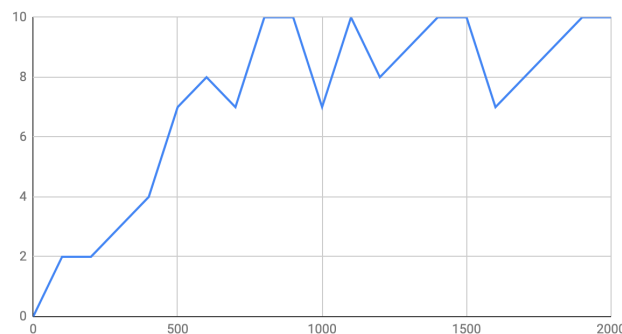
Gràfic 25 – Model Barabasi-Albert [tamany 1000]



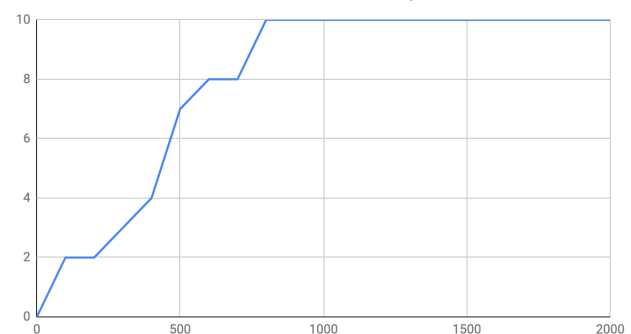
Gràfic 26 – Model Barabasi-Albert [tamany 1000]



Gràfic 27 – Model Barabasi-Albert [tamany 2000]



Gràfic 28 – Model Barabasi-Albert [tamany 2000]



(\*\*) Totes les línies blaves representen el nombre de grafs 2v-connexos.

(\*\*) Tots els gràfics representen nº de grafs 2v-connexos vs. nº arestes inserides en cada temps de generació.

### 4. Anàlisi i interpretació.

#### 4.1. Experiment 1.

En aquest cas, no podem dir massa coses dels resultats que hem pogut recopilar. Tot i així, amb les dades que tenim, podem veure:

- (1) Les corbes dels gràfics semblen tenir una tendència de creixement lineal.
- (2) No sembla que hi hagi cap llindar a partir del qual la corba comenci a créixer de manera dràstica.
- (3) No sembla que hi hagi cap límit a partir del qual la majoria de grafs siguin 2v-connexos.

#### 4.2. Experiment 2.

Les valoracions d'aquest experiment són idèntiques a les de l'experiment 1.

### 5. Conclusions.

Per al model de BA, sembla que no podem determinar un llindar per al qual hi hagi el canvi de fase. És a dir, aparentment no hi ha cap punt a partir del qual els grafs generats mitjançant aquest model siguin majoritàriament 2v-connexos.

Tot i així, de tot plegat podem intuir dues explicacions per les quals pensem que no hem obtingut els resultats esperats:

- a) És possible que els grafs generats amb el model BA no tinguin un llindar definit i, en conseqüència, no es doni la transició de fase.
- b) L'altra possible explicació és que hàgim dissenyat incorrectament l'experiment, és a dir, que hem triat malament els valors que havíem de variar per fer possible la visualització del llindar i la transició de fase.

Així doncs, un cop hem vist i analitzat els resultats, no podem determinar amb seguretat que hi hagi un llindar per al canvi de fase en grafs aleatoris generats mitjançant el model BA.

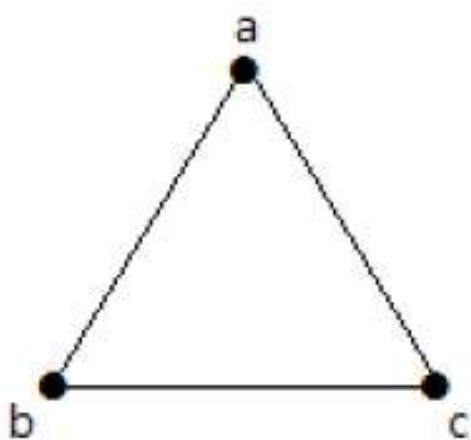
## Apartat D

Esudiar la transició de fase d'altres propietats de grafs (diferents de la propietat estudiada a (b) ) a grafs amb percolació i / o a grafs aleatoris.

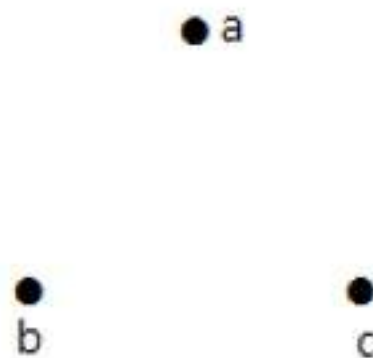
---

### Propietat 1: Connectivitat de grafs.

La propietat de connectivitat en grafs és una de les més bàsiques en el que fa referència a la teoria de grafs. Un graf és connex si per a qualsevol parell de vèrtex del graf hi ha un camí des de un fins a l'altre, en el cas que això no sigui així direm que el graf no és connex, això s'aplica tant en grafs dirigits, no dirigits i grafs amb pesos.



GRAF 1



GRAF 2

En aquest exemple superior tenim que el **graf 1** és connex, ja que hi ha un camí per cada parell de vèrtex, en canvi el **graf 2**, no és connex ja que des de **a** no podem arribar a **b** o **c**.

Lavors el que nosaltres volem observar amb aquest primer experiment és com evoluciona la propietat de la connectivitat (quan deixa un graf de ser connex), quan anem percolant diferents tipus de grafs.

Els experiments d'aquesta primera propietat els hem modelat de la següent manera:

- Hem decidit fer triar 7 tamanyes de grafs segons els seus nodes que són [10, 30, 70, 100, 150, 200, 250], sabem que els dos primers tamanyes 10 i 30 és molt probable que no siguin valors gaire significatius ja que són molt petits, en canvi la resta ja donaran valors més similars i que s'apropen més a la tendència que provoca la probabilitat escollida.
- Per tal de trobar la transició de fase hem decidit fer una primera percolació en la que anem augmentat la fallada de node o aresta, en un 1%.

- Per a cada canvi de probabilitat de fallida fem 200 experiments, és a dir, per a cada tamany de graf i probabilitat diferent, generem 200 grafs i observem si la propietat de connectivitat es manté o no.
- I finalment per tal de localitzar més el canvi de fase fem una segona ronda d'experiment com la anterior per ens focalitzem en la zona on hem vist que hi ha el canvi de fase per tal de ser més precisos (per tant el canvi de probabilitat és més petit (augmentem entre 0.05 i 0.2)), el número de generació de grafs segueix siguent 200 per a canvi de probabilitat.

Plantejant d'aquesta manera intentem arribar a veure el canvi de fase de la connectivitat segons el tipus de grafs que tenim. La nostra intuïció ens diu que quan anem agafant grafs amb tamany grans el canvi que veurem sera relativament petit.

Per tal de donar un punt de vista general de cada experiment hem decidit a cada experiment fer una gràfica de la transició de fase del grafs de tamany 200 ja que creiem que és prou representatiu, ja que si agafem de tamany més petits els resultats solen ser més irregulars i per tant poc representatius. Hem fet dues gràfiques una que és la general (probabilitat de 0 a 100%) i la segona que es intenta veure amb més precisió el canvi de fase (probabilitat de 0 a entre 5 i 20% segons el model).

La resta de la informació està en els arxius .txt adjunts amb la pràctica (hem decidit no afegir-los en l'annex ja que ocupen massa espai). Els arxius són:

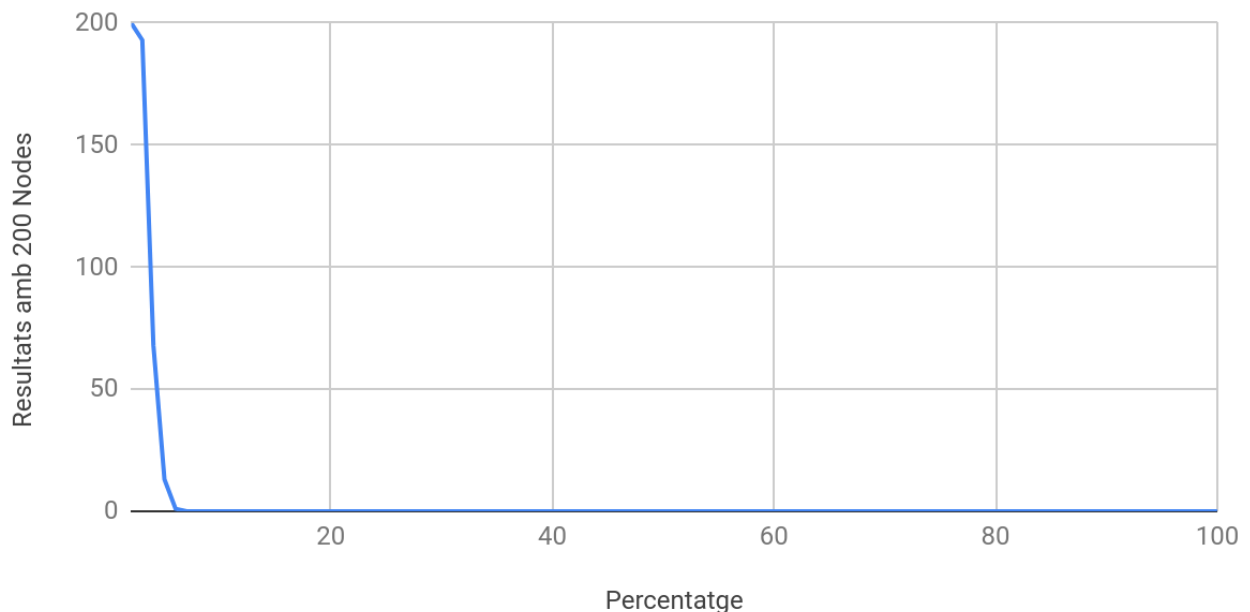
`ConnexBinarisArestes.txt, ConnexBinarisArestes5.txt,`  
`ConnexBinarisNodes.txt, ConnexBinarisNodes5.txt,`  
`ConnexBipartits.txt, ConnexBipartits20..txt,`  
`ConnexCaminsArestes.txt, ConnexCaminsArestes5.txt,`  
`ConnexCaminsNodes.txt, ConnexCaminsNodes5.txt,`  
`ConnexErdos.txt, ConnexErdosP10.txt.`

En aquest apartat hem decidit fer servir el model de generació de grafs aleatoris de Erdos, per a grafs de forma general, després hem fet una adaptació d'aquest model per tal de generar grafs aleatoris bipartits. I després hem generat altres grafs aleatoris als quals els hi hem fet percolació tant d'arestes com de nodes, que son arbres binaris i camins.

### **1. Models de grafs aleatoris: Erdős-Rényi.**

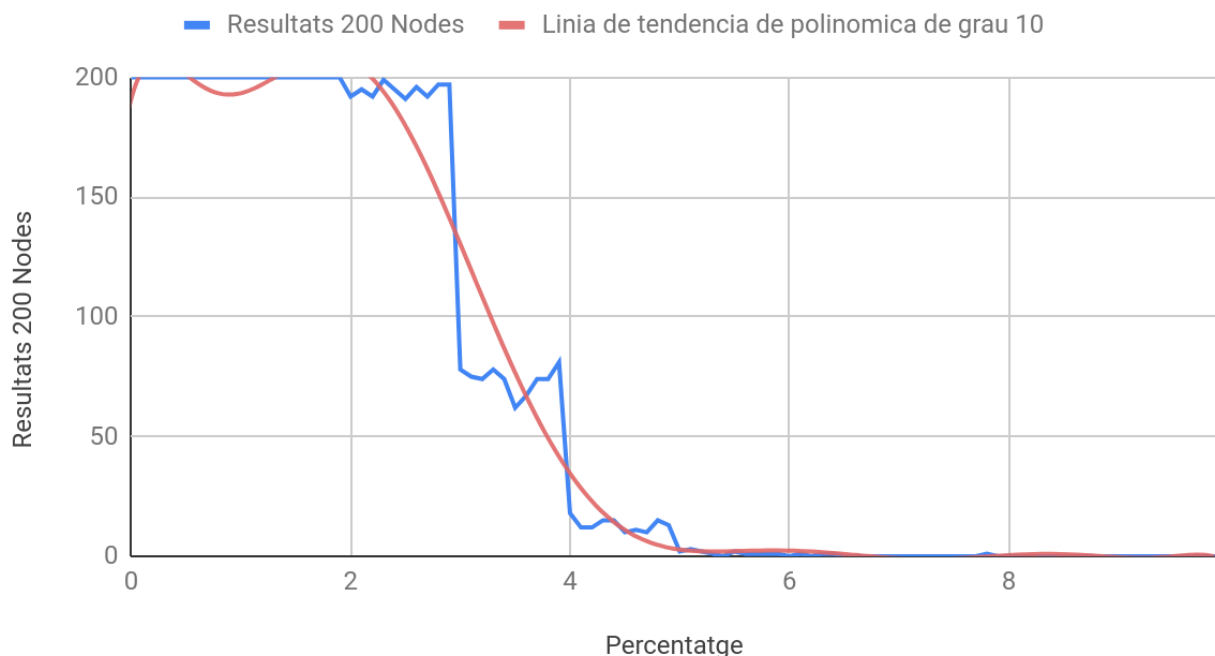
En el el primer model d'Erdos és difícil preveure en quin punt serà el canvi de transició de fase, pero sabem que si el percentatge de fallida es baix segurament serà connex el graf ja que la generació d'arestes serà elevada. Aplicant el sistema que hem explicat abans hem fet els experiments hi els resultat dels grafs generats amb tamany 200, són els següents:

## Resultats Erdos 200 Nodes, probabilitat connectivitat fins al 100%



Amb aquesta primera aproximació observem com la fase de transició està al voltant del 5% de fallida, com hem explicat fem la segona ronda, canviant la probabilitat sumant 0.1% cada vegada, fins arribar al 10% de percolació.

## Resultats Erdos 200 Nodes, probabilitat connectivitat fins al 10%



La línia blava són els resultats de l'experiment, la línia vermella és una aproximació fent servir un polinomi de grau 10, per tal de veure com tendiria si féssim un nombre molt més elevat d'experiments. Amb aquest 'zoom' podem veure més clarament com el canvi de fase està entre

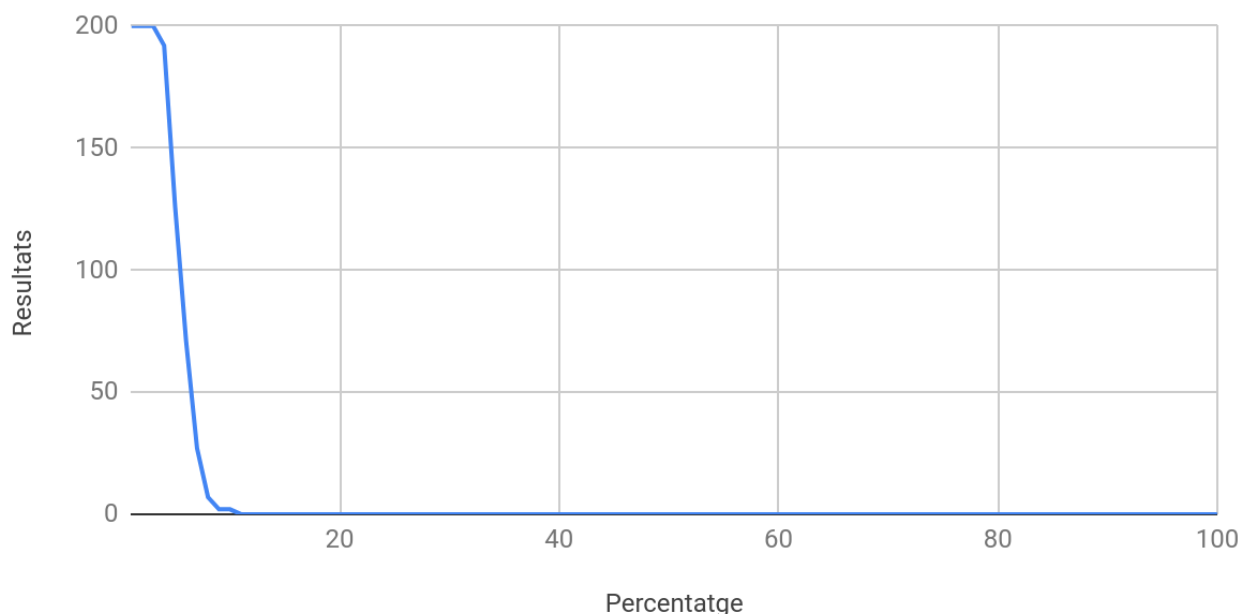
el 2% i el 4% de fallida. El resultat potser és una mica més baix del que esperàvem per a un tant percent de fallida tant petit que els grafs deixen de ser connexos.

## 2. Grafs bipartits.

El nostre model de generació de grafs bipartits aleatoris, és molt similar al de Erdos, però nosaltres obliguem a que els grafs estiguin bipartits, llavors per tal de generar-los has de posar el tamany d'una partició del graf i de l'altre i la probabilitat que hi hagi una connexió entre els dos. En el cas particular d'aquest experiment per tal de fer-ho més senzill hem decidit que les particions del graf serien iguals i per tant cada part del graf té tamany de  $n/2$ .

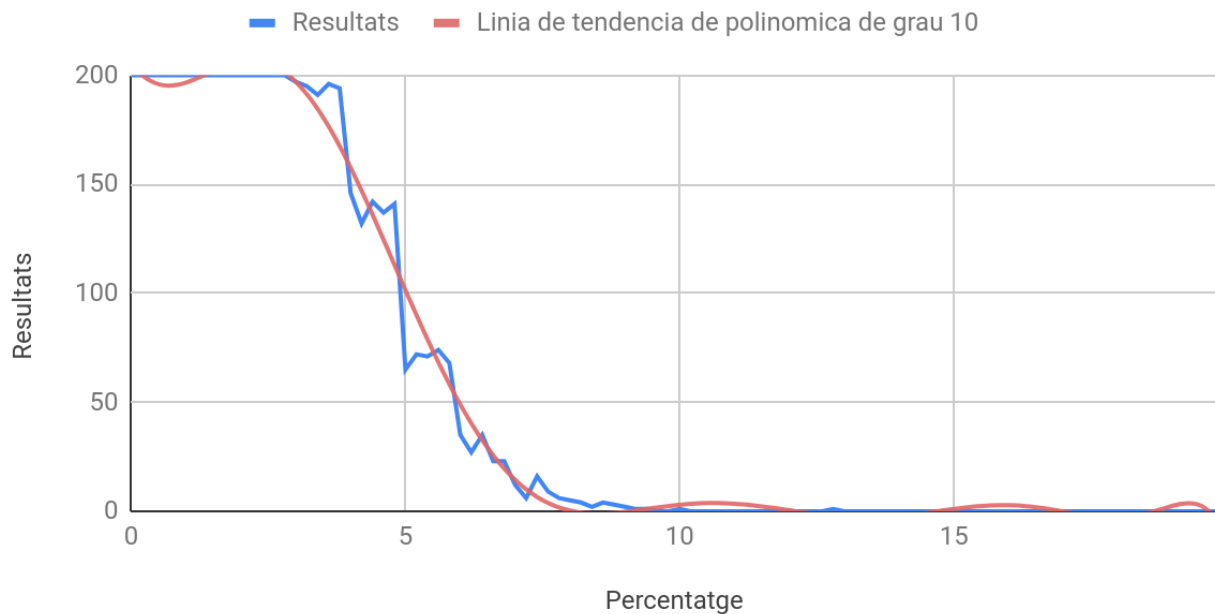
Els resultats obtinguts de fer els experiment han sigut:

### Resultats Bipartits 200 Nodes, probabilitat connectivitat fins al 100%



Podem observar com la percolació es troba a prop del 10% de fallida d'arestes, per tant vol dir que en concret els grafs bipartits són més difícils de trencar la connectivitat que no pas un graf qualsevol (ja que en l'experiment anterior el canvi de fase rondava el 4%). Ara com en l'experiment anterior localitzarem una mica més l'experiment per tal de definir més clarament el canvi de fase.

## Resultats Bipartit 200 Nodes, probabilitat connctivitat fins al 20%



En aquest experiment hem fet també la regressió lineal amb un polinomi de grau 10 per tal de veure la tendència que tindria en general, com observem el canvi de fase es troba entre el 4% i el 7%, per tant com hem comentat fa un moment costa més trencar la connectivitat en grafs bipartit que no pas en grafs generals aleatoris.

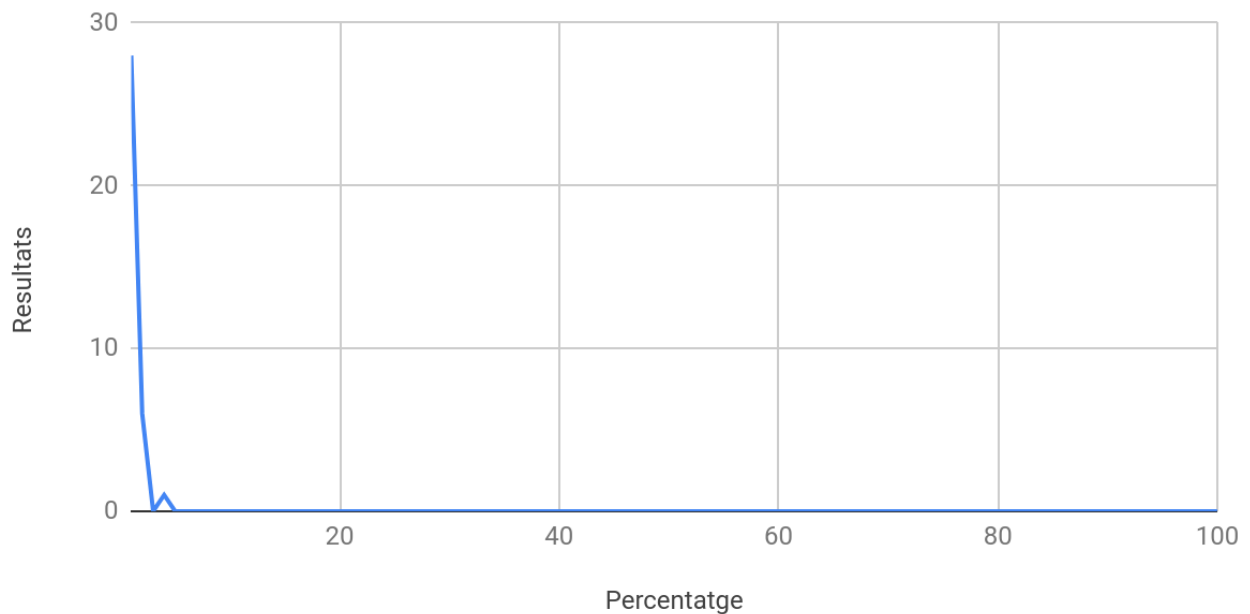
### 3. Percolació de nodes i arestes.

Ara veurem com evoluciona la percolació en dos tipus de grafs segons si es percolen per nodes o arestes, també podem comparar els resultat amb els obtinguts per a grafs aleatoris generals i arribar a conclusions de transició de fase segons el tipus de graf.

### 4. Arbres binaris.

Ara que ja hem vist els resultat de canvi de fase en grafs aleatoris generals podem fer una hipòtesi de com serà el canvi de fase en aquest tipus de grafs. El que creiem es que en arbres binaris la pèrdua de connectivitat sera amb un percentatge de fallida més petit que no pas amb grafs generals, ja que per a que la conectivitat no es perdi els únics nodes que poden fallar són els nodes fulla, i passa el mateix amb les arestes, les úniques arestes que poden fallar són les arestes fulla, per tant en el moment en que un node que no és fulla falli la connectivitat del graf es trencarà.

## Resultats Binari 200 Nodes, probabilitat connectivitat fins al 100% per NODES



Com era d'esperar la transició de fase és molt pròxima al 0, per tant la hipòtesi que havíem fet prèviament era correcta. Ara com hem fet en els altres experiments observarem de més a prop el canvi de fase.

## Resultats Binari 200 Nodes, probabilitat connectivitat fins al 5% per NODES

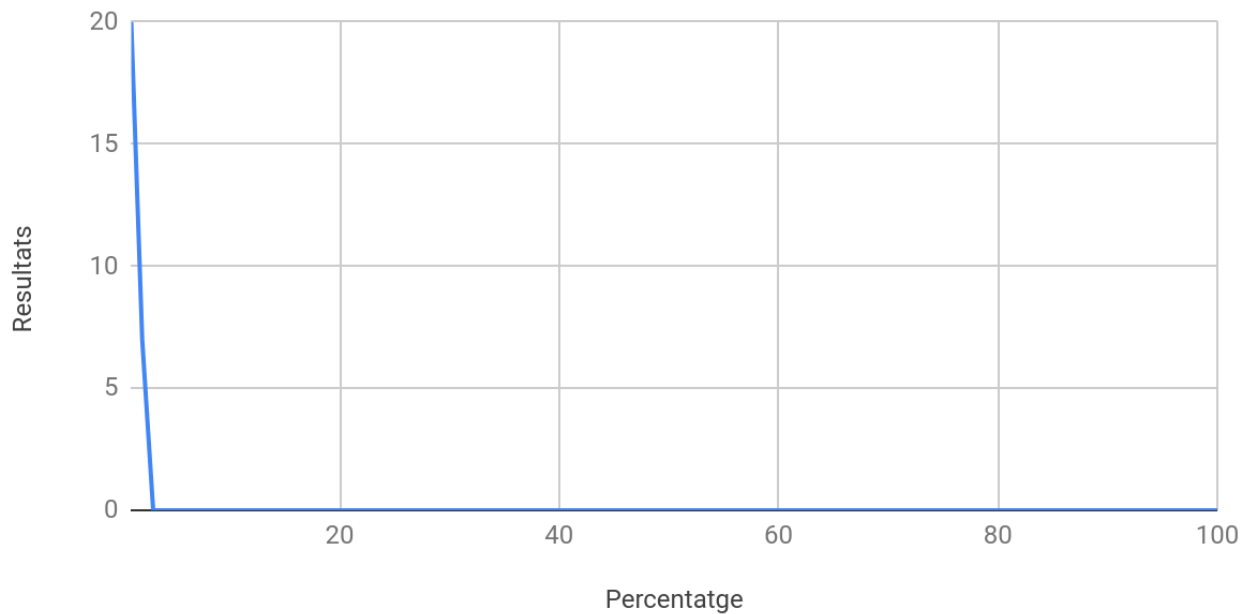


Com podem observar el canvi de fase es produeix a prop del 1% de fallida d'arestes, com en els altres experiment la funció vermella aproxima amb un polinomi de grau 10 els resultats obtinguts per als experiments.

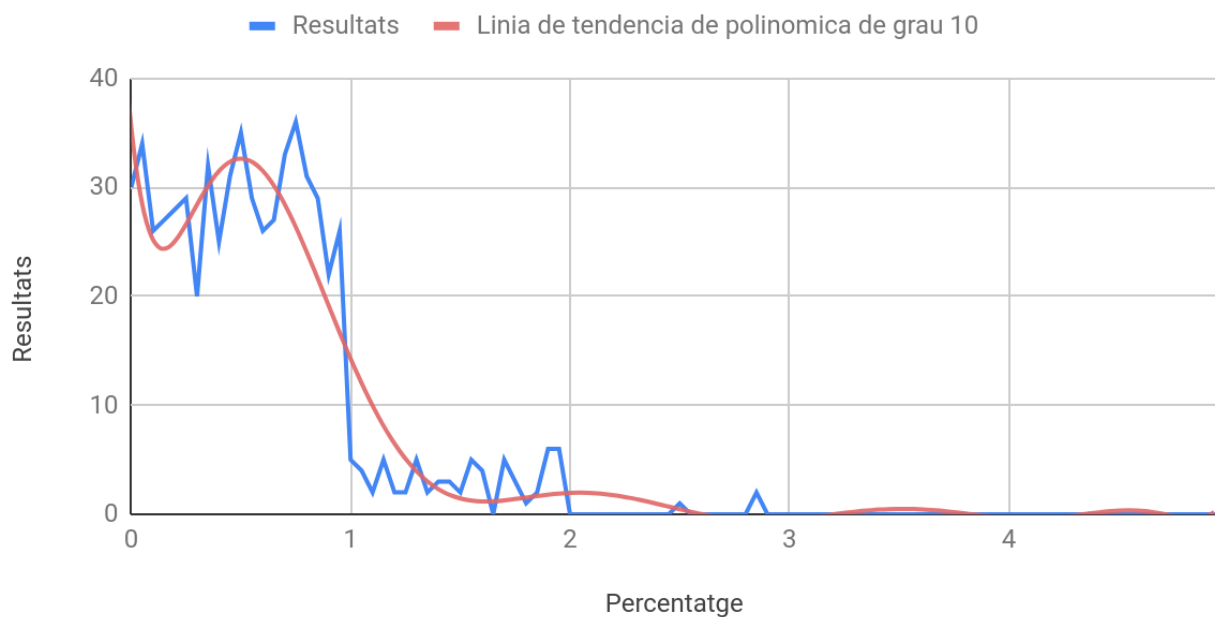


Aquests són els resultats que hem obtingut en fer la percolació per nodes, ara veurem si canvia el canvi de fase quan fem servir percolació d'arestes. Com hem argumentat abans no hi haurà d'haver un canvi significatiu entre fer servir percolació d'arestes o de vèrtexs per a arbres binaris.

### Resultats Binaris 200 Nodes, probabilitat connectivitat fins al 100% per ARESTES



### Resultats Binaris 200 Nodes, probabilitat connectivitat fins al 5% per ARESTES



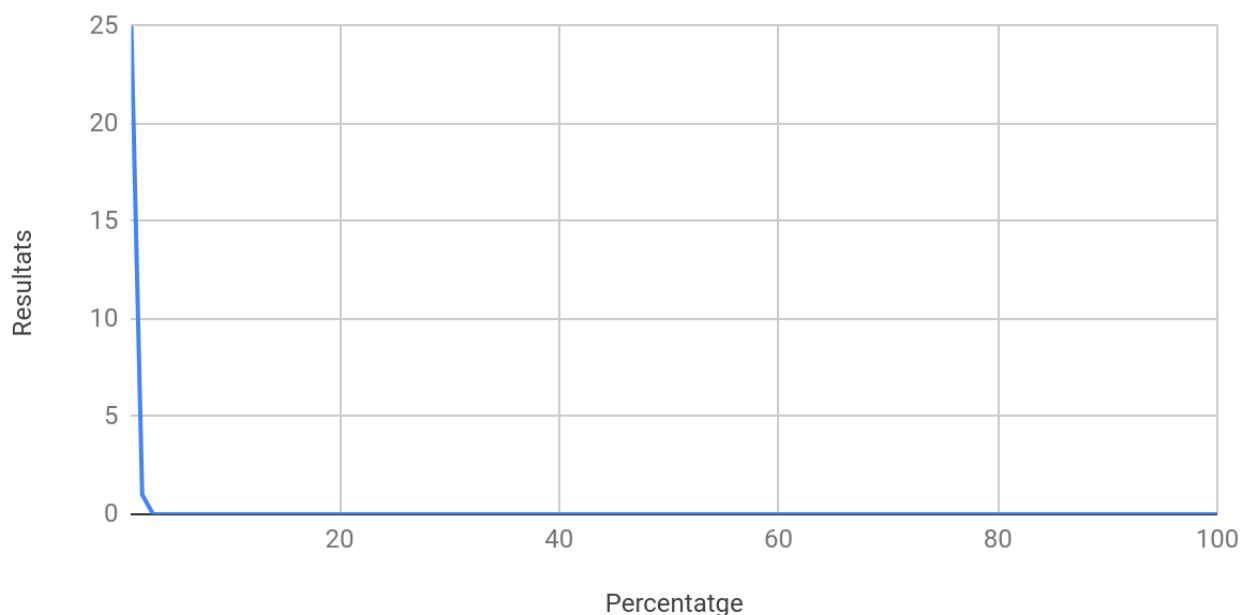
Com era d'esperar el canvi de fase segueix estant al voltant del 1% per tant no hi ha hagut canvi entre fer la percolació per arestes o per nodes.

## 5. Camins.

La hipòtesi que hem fet per a camins és que la connectivitat fallarà abans que qualsevol dels tipus de grafs que hem vist abans, el motiu pel qual pensem que això passarà és que en el cas dels camins només hi ha dos nodes o arestes que poden fallar, que són els extrems, també ho podem mirar com, que en el cas dels camins només hi ha dos fulles i per tant la probabilitat que només fallin les fulles és molt petita, per tant en el moment que el node o aresta que falli no sigui fulla el graf deixarà de ser connex. Per tant suposem que el canvi de fase es produirà en el 1% o en percentatges més petits.

Com en l'experiment anterior comencem per veure la percolació de nodes

### Resultats Camins 200 Nodes, probabilitat connectivitat fins al 100% per NODES



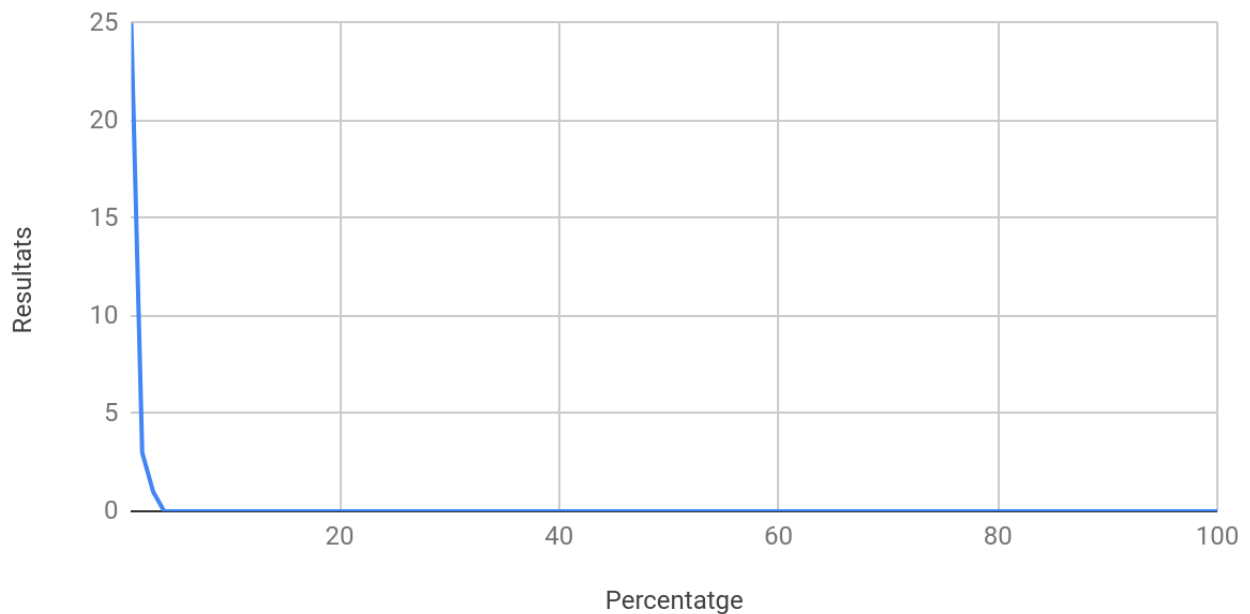
## Resultats Camins 200 Nodes, probabilitat connectivitat fins al 5% per NODES



Com era d'esperar el canvi de fase es troba al voltant del 1%, ens ha sorprès que el canvi de fase no es trobés inclús en valors més petits, no tenim del tot clar a qué és degut que el canvi de fase no sigui més petit que el que hem trobat.

Ara veurem com canvia si ho fem per arestes, per com en l'experiment anterior pel mateix plantejament que hem fet pensam que no hi haurà cap canvi significatiu entre fer-ho per arestes o nodes, ja que els únics que mantenen la connectivitat segueixen seguint els nodes i arestes que es troben en els extrems del camí.

## Resultats Camins 200 Nodes, probabilitat connectivitat fins al 100% per ARESTES



## Resultats Camins 200 Nodes, probabilitat connectivitat fins al 5% per ARESTES



Com havíem sospitat prèviament no hi ha cap canvi entre fer-ho per arestes o vèrtexs, per tant el canvi de fase es troba en 1%.

## **6. Conclusions.**

Hem vist com en general el canvi de fase en grafs aleatoris per a la propietat de connectivitat es troba a prop del 4%, però en el moment en que agafem models de grafs els quals la majoria de nodes tenen poca connectivitat (com a màxim dues arestes incidents) que serien els models que hem vist de arbres binaris o camins. El canvi de fase es troba en percentatge de fallada molt més petits que no pas en grafs que tenen una  $k$  connectivitat més gran ja que trencar la connectivitat serà molt més difícil i per tant el canvi de fase es troba en percentatges molt més alts.

---

## Propietat 2: Diàmetre d'un graf.

En aquest subapartat de l'apartat d estudiarem la transició de fase en grafs aleatoris generats a partir del model Erdős de la propietat del diàmetre.

Recordem que el model Erdős-Rényi a la teoria de grafs és una manera de generar un graf aleatori. En aquest model es té en compte que un nou node s'enllaça amb igual probabilitat que la resta de la xarxa de nodes, és a dir que posseeix una independència estadística amb la resta de nodes de la xarxa.

Hem treballat amb una matriu d'adjacència que representa el graf aleatori generat. Aquest graf estarà generat en funció de el nombre de vèrtexs que li passem i el percentatge de que una aresta sigui de pas, és a dir que una aresta estigui en el graf. Un cop generat el graf volem estudiar la propietat del diàmetre. Per estudiar aquesta propietat hem utilitzat un algorisme ja vist a classe per trobar les distàncies mínimes de tots els vèrtexs a tots els adjacents (APSP) que és l'**algorisme de Floyd-Warshall**. Amb una petita modificació ens podem quedar amb la distància màxima d'un vèrtex a un altre i comparant-les per tots els vèrtexs podem saber el diàmetre del graf.

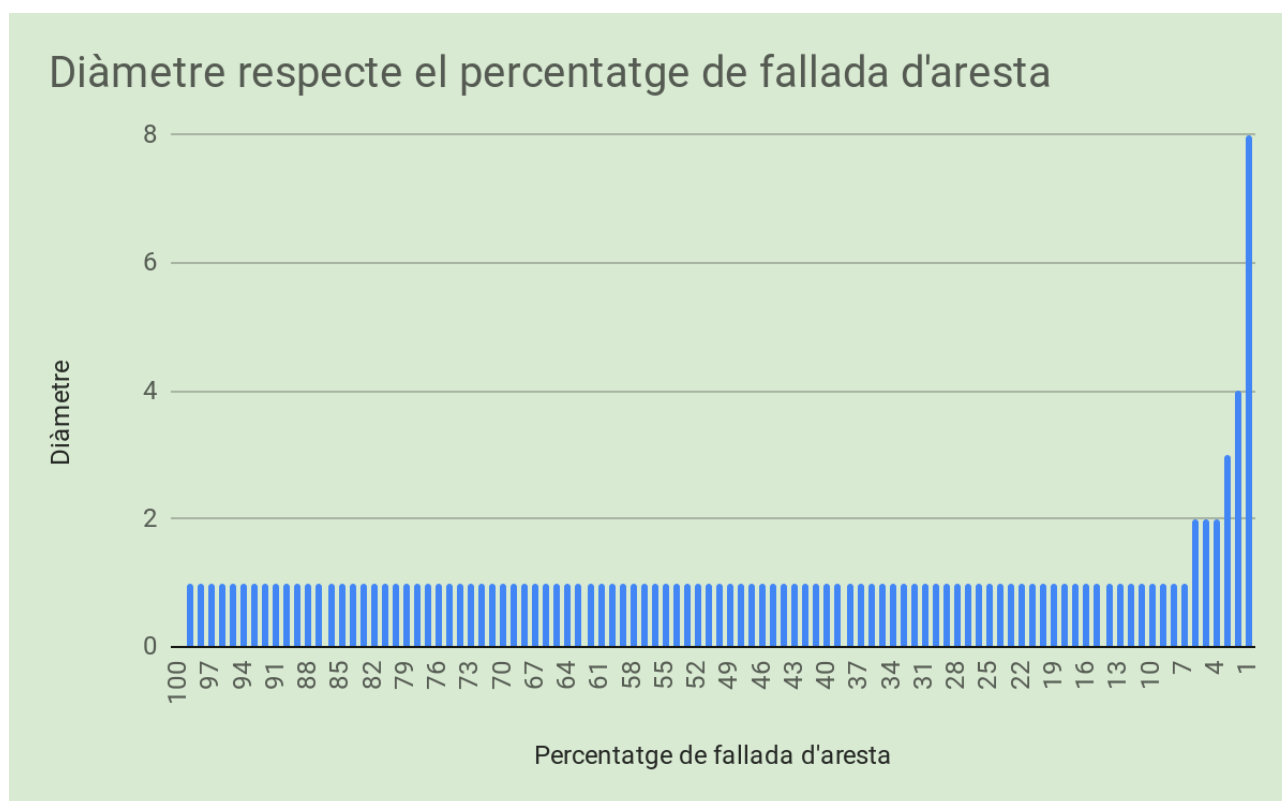
En la teoria de grafs el diàmetre és la major distància entre dos vèrtexs del graf. El que volem veure és si es produeix una transició de fase, és a dir, si el diàmetre del graf passa de ser molt petit comparat amb el nombre de vèrtexs a ser molt gran donat un percentatge concret (llindar). Ho hem implementat amb un algorisme de cost  $O(|V|^4)$  tot i que es podria implementar amb Programació Dinàmica en cost  $O(|V|^3)$ .

Per estudiar experimentalment el comportament del diàmetre en grafs aleatoris generats amb Erdős donarem un tamany de graf prou gran (200 nodes) generat amb Erdős amb una probabilitat de fallada d'aresta d'un 100% i anirem reduïnt aquesta probabilitat i veient com evoluciona el diàmetre.

Resumim a continuació les característiques de l'experiment:

Taula 5 — Característiques de l'experiment

Observació	Pot ser que no es produeixi una transició de fase sinó que el diàmetre vagi baixant de forma lineal amb el percentatge
Plantejament	Comparem els diferents diàmetres trobats en funció del percentatge
Hipòtesis	Existeix una transició de fase, és a dir, un llindar on es produeix un salt considerable entre el tamany del diàmetre
Mètode	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realitzarem 50 experiments per cada percentatge</li> <li>• Anirem augmentant el percentatge de <math>u</math> en <math>u</math></li> <li>• Compararem els diàmetres resultants de cada tamany</li> </ul>



Tal i com es pot apreciar en la gràfica es produeix una transició de fase al voltant del 4%, és a dir un llindar a partir del qual el graf redueix de forma molt considerable el seu diàmetre i abans del qual el diàmetre és elevat.

Aquests resultats són coherents amb els resultats teòrics trobats per la universitat de Carnegie Mellon, on el valor màxim del diàmetre es proper a  $\ln n$ . Com que els algorismes són costosos hem treballat amb un graf relativament petit (200 nodes) i a partir de la transició de fase pren valor màxim 8, pero el valor màxim teòric seria de 6 ( $\ln 200$ ) que es bastant proper, això pot ser degut a que cal que el graf sigui encara més gran per veure-ho. Per tant confirmem la hipòtesis, existeix

una transició de fase, tot i que no hem pogut decidir el llindar de forma clara, a partir del qual el graf redueix el seu diàmetre al mínim, i abans del qual pren valor màxim  $O(\ln n)$ .



## Informació important per a l'execució dels codis

Els codis estan el el zip CodisPracticaA.tar.xz, quan l'obrim trobem els arxius de la pràctica:

- a.cc
- b.cc
- Del apartat c:
  - c.cc
  - c\_barbasi.cc
  - c\_erdos.cc
  - c\_uniform.c
- d.cc

Per tal d'executar-los nomes cal fer **g++ -std=c++11** de cada arxiu, també hi ha una carpeta amb els executable de cada arxiu. Hi ha dos arxius auxiliars que son **UnionFind.cc** on es troba el codi del UnionFind per a l'apartat **b**. A més en aquest mateix tar.xz hi ha una carpeta amb els resultat en arxius .txt de l'apartat **d**.

# Bibliografia

---

## Apartat A.

### **Union find 2x2:**

<https://algs4.cs.princeton.edu/lectures/15UnionFind-2x2.pdf>

---

## Apartat B.

### **Definició de graf graella:**

<http://mathworld.wolfram.com/GridGraph.html>

### **Percolation threshold:**

<http://mathworld.wolfram.com/PercolationThreshold.html>

### **Union find amb path compression:**

<https://www.geeksforgeeks.org/union-find-algorithm-set-2-union-by-rank/>

### **Implementació similar a la de l'apartat b:**

<https://codereview.stackexchange.com/questions/149546/percolation-using-quick-union-connectivity-algorithm>

### **Implementació amb Java:**

[https://github.com/svoit/Princeton\\_Algorithms\\_1/blob/master/assignment\\_1/Percolation.java](https://github.com/svoit/Princeton_Algorithms_1/blob/master/assignment_1/Percolation.java)

---

## Apartat C.

### **Model d'Erdős-Rényi:**

[https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo\\_Erd%C3%B6s%E2%80%93R%C3%A9nyi](https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_Erd%C3%B6s%E2%80%93R%C3%A9nyi)

### **Riesgo sistemático. Una aplicación de los grafos aleatorios:**

<http://probayestadistica.cimat.mx/sites/default/files/PDFs/TE334CanoMoo.pdf>

### **El Grafo aleatorio:**

<http://mate.dm.uba.ar/~aldoc9/Publicaciones/Notas/grafaleatorio.pdf>

### **Grafos regulares y aleatorios:**

<http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/11749/fichero/Volumen+I%252FP1-5-GRAFOS+REGULARES+Y+ALEATORIOS.pdf>

### **Grafo aleatorio:**

[https://es.wikipedia.org/wiki/Grafo\\_aleatorio](https://es.wikipedia.org/wiki/Grafo_aleatorio)

### **Modelo Barabasi-Albert:**

[https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo\\_Barab%C3%A1si%E2%80%93Albert](https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_Barab%C3%A1si%E2%80%93Albert)

### **Introducción a los grafos aleatorios:**

<https://www.docdroid.net/II5MmFR/grafos-es.pdf>

**Redes aleatorias de pequeño mundo y libres escala:**

<https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/86297/SOLARES%20-%20Redes%20aleatorias%2C%20de%20peque%C3%B1o%20mundo%20y%20libres%20de%20escala.pdf?sequence=1>

**Análisis avanzada. Transiciones de fase:**

<https://elisa.dyndns-web.com/teaching/aa/pdf/clase2011.pdf>

**The phase transition in random graphs and random graph processes:**

<https://edoc.hu-berlin.de/bitstream/handle/18452/16311/seierstad.pdf?sequence=1>

**The phase transition in the Erdős-Rényi random graph model:**

<https://esc.fnwi.uva.nl/thesis/centraal/files/f1835699425.pdf>

---

**Apartat D.**

**Percolation (pg. 613):**

<http://math.sjtu.edu.cn/faculty/xiaodong/course/Networks%20An%20introduction.pdf>

**Connectivity:**

[https://en.wikipedia.org/wiki/Connectivity\\_\(graph\\_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Connectivity_(graph_theory))

**Percolation threshold:**

[https://en.wikipedia.org/wiki/Percolation\\_threshold](https://en.wikipedia.org/wiki/Percolation_threshold)

**Phase transition:**

<https://www.hindawi.com/journals/tswj/2013/172393/>

