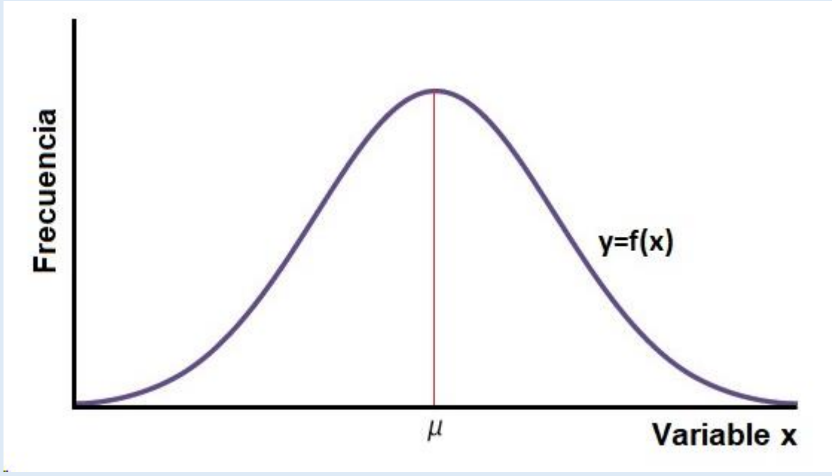
Distribuciones

Distribución normal

La distribución normal es un modelo de distribución muy utilizado para variables continuas, que se ajusta a un gran número de variables de nuestro entorno. También es conocida como **distribución de Gauss**.

Si representamos los datos de una determinada muestra en una tabla de frecuencias, donde en el eje x representamos la variable en cuestión y en el eje «y» su frecuencia, vemos que la curva de distribución normal tiene forma de campana:



Esta curva tiene una serie de características, que vamos a ver a continuación.

La gráfica recibe el nombre de **curva o campana de Gauss**, ya que tiene forma de campana.

Los parámetros de una distribución normal son la **media μ** y la **desviación típica σ** y se designa por **N(μ,σ)**. En el caso que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ se tiene entonces la distribución normal estándar o distribución normal típica:

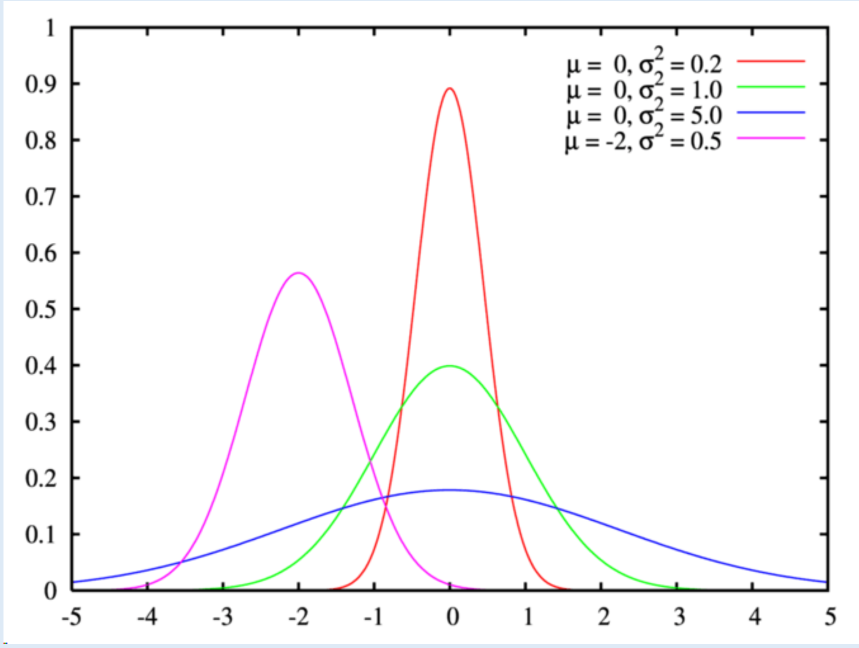
$$N(x;\ \mu = 0,\ \sigma = 1)$$

Como ves en la gráfica, la **media μ está justo en el centro** y es el valor que más se repite, por lo que también es la moda. En una distribución gaussiana la media, la mediana y la moda coinciden.

La curva es simétrica con respecto a la media, es decir, tiene la misma forma a la derecha que a la izquierda de la media.

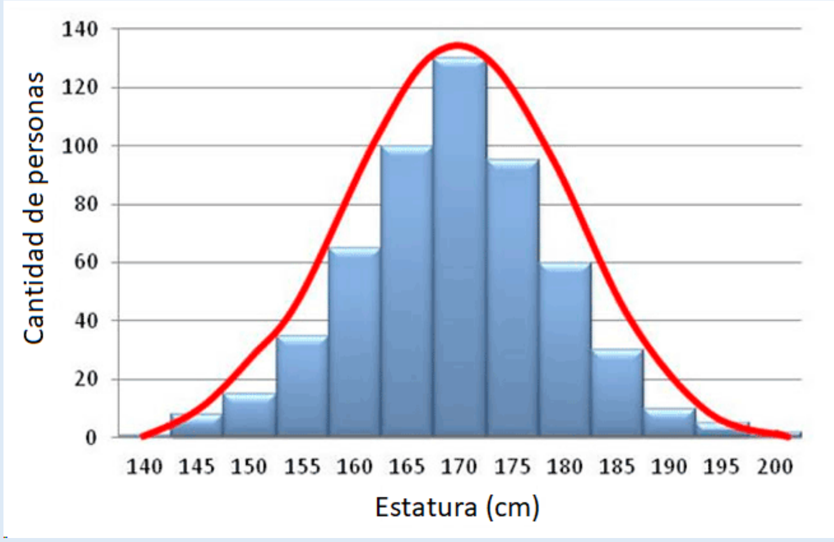
La desviación típica σ nos marca la homogeneidad de los valores, es decir, lo cerca o lejos que están todos los valores de la media. Si los valores están muy concentrados con respecto a la media, **la desviación típica tendrá un valor muy bajo y la curva tendrá una forma más afilada**. Si los valores estás más repartidos y se alejan mucho de la media, **la desviación típica tendrá un valor muy alto y la curva tendrá una forma más achatada**.

Por ejemplo, en esta imagen tenemos varias curvas de distribución normal con distinta desviación típica. Observa como cuanto mayor es la desviación típica, la curva es más achatada:



Entre las variables que se distribuyen con una **distribución normal** podemos encontrar las que se refieren a aspectos físicos, psicológicos, sociológicos, como pesos, diámetros, alturas, cociente intelectual, puntuación de un examen, etc.

Por ejemplo, las estaturas de una determinada población siguen una distribución normal. Si medimos las estaturas de la población y la **representamos en una tabla de frecuencias**, donde en el eje x se representa la estatura y en el eje «y» la cantidad de personas, nos queda algo así:



Podemos observar que la mayoría de la población se concentra en el centro, es decir, mide entre 160 y 180 cm y el valor que más se repite es 170, que es la media. Muy pocas personas miden 190 y muy pocas personas miden 145. La gráfica tiene forma de campana.

Existen muchas variables continuas en las que la representación gráfica de una muestra tiene forma de campana, siguiendo este modelo de distribución normal.

Función de densidad

La curva de la distribución normal viene determinada por una función llamada función de densidad, cuya fórmula es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Por tanto, según Gauss, si conocemos los valores de la media μ y la desviación típica σ y representamos la función, obtenemos la curva de una distribución normal en forma de campana.

Por supuesto que esta fórmula no es necesario aprendérsela. Solamente la indicamos para saber de dónde sale la curva de la distribución normal y cómo se comporta para poder trabajar con ella posteriormente.

Propiedades de la función densidad de la distribución normal

Conocer las propiedades de la función densidad f(x) de una distribución normal N(μ,σ), cuya gráfica sabemos que tiene forma de campana, hará que comprendamos mejor dicha distribución, así como su aplicación.

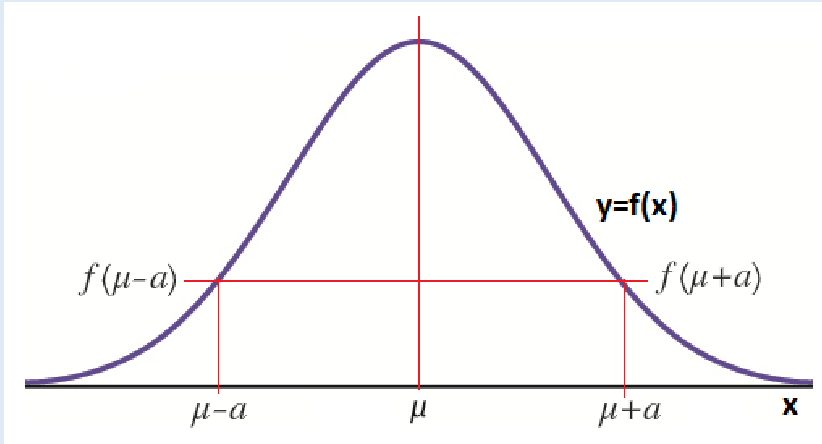
Las principales propiedades son las siguientes:

Dominio

El dominio es todo R, es decir, (-∞,∞). Para valores superiores a 4 o inferiores a -4, los valores que toma la función son poco significativos.

Simetrías

La función es simétrica con respecto de la recta vertical x=μ, ya que se cumple que para cualquier número real «a», f(μ+a)=f(μ-a):



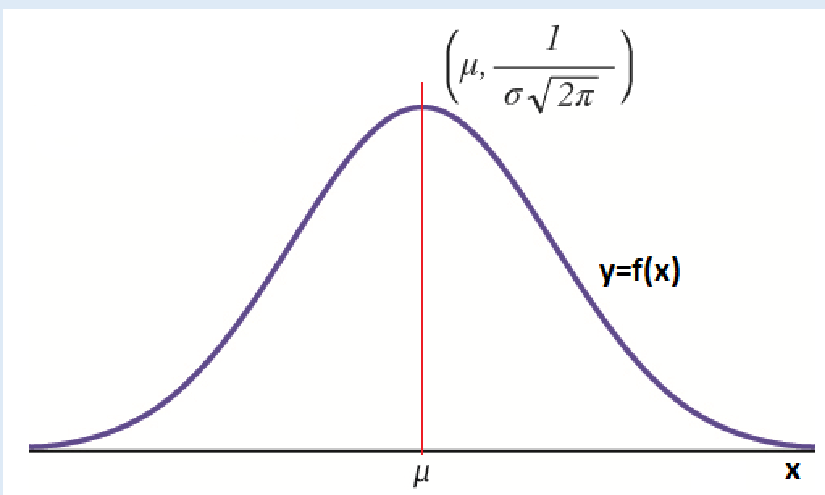
Cortes con los ejes

La curva de la distribución normal no corta al eje de abcisas o el eje x. Corta al eje de ordenadas o eje «y» en el siguiente punto:

$$x=0,\quad y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$$

Extremos

La función no tiene mínimos. Tiene un máximo en el punto x=μ

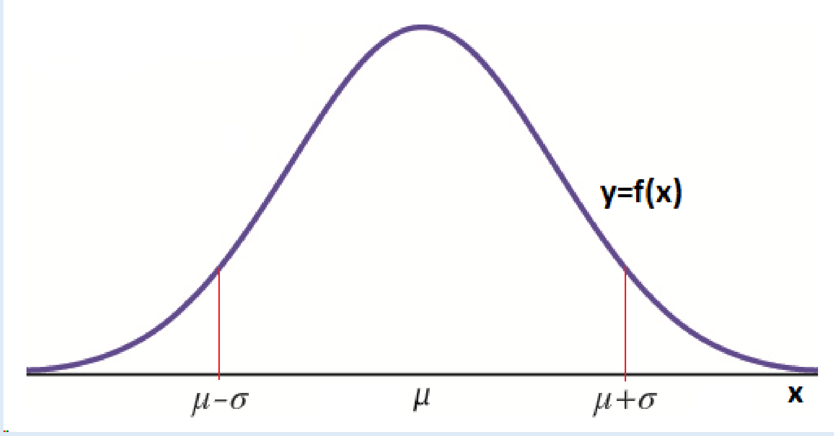


Monotonía

La función es creciente hasta la recta vertical $x=\mu$ y a partir de ese punto es decreciente.

Puntos de inflexión

La curva tiene dos puntos de inflexión en los valores de abcisas: $x=\mu-\sigma$ y $x=\mu+\sigma$:

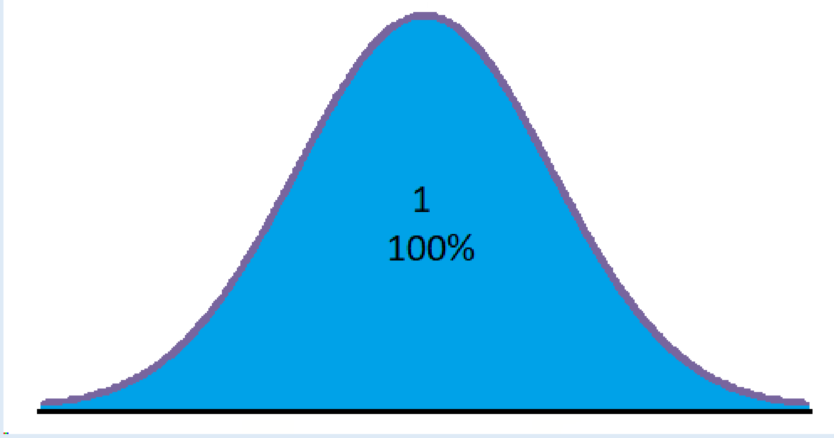


Área encerrada bajo la curva

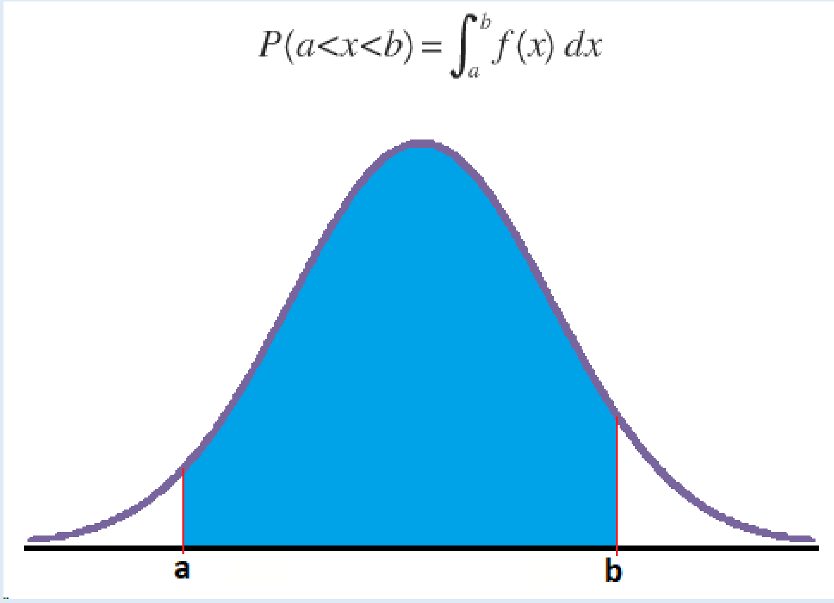
El **área comprendida entre la curva y el eje x es igual a 1**. Si calculamos el área mediante la integral entre menos infinito e infinito de la función, su resultado es igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Es decir, representa la probabilidad del suceso seguro. Si la expresamos en porcentaje, este valor sería del **100%**.



Si elegimos dos valores a y b, el área encerrada entre la curva, el eje x y las ordenadas en los puntos a y b es **la probabilidad de obtener un valor x entre a y b**:

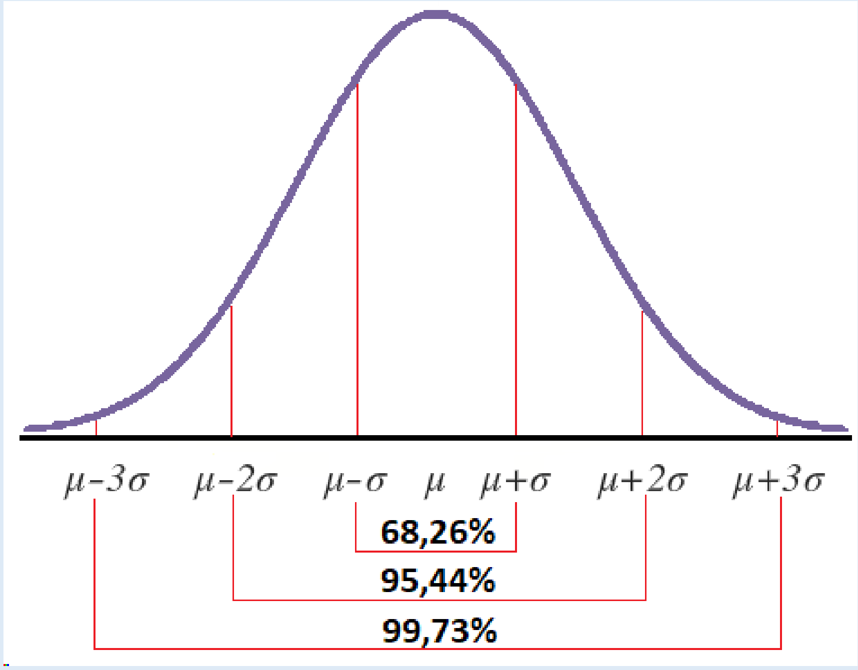


El área encerrada entre la curva, el eje x y dos valores cualesquiera, las podemos traducir en porcentaje de la muestra o en probabilidad.

Áreas en ciertos intervalos (Intervalos de confianza)

En la distribución normal N(μ,σ) se cumple que:

- En el intervalo (μ-σ, μ+σ) se encuentra el 68,26% del área total
- En el intervalo (μ-2σ, μ+2σ) se encuentra el 95,44% del área total
- En el intervalo (μ-3σ, μ+3σ) se encuentra el 99,73% del área total



- Si una variable aleatoria x sigue una distribución **N(x; μ,σ)**, entonces la variable

  z = (x – μ) / σ sigue la distribución normal estándar **N(z; 0, 1)**.

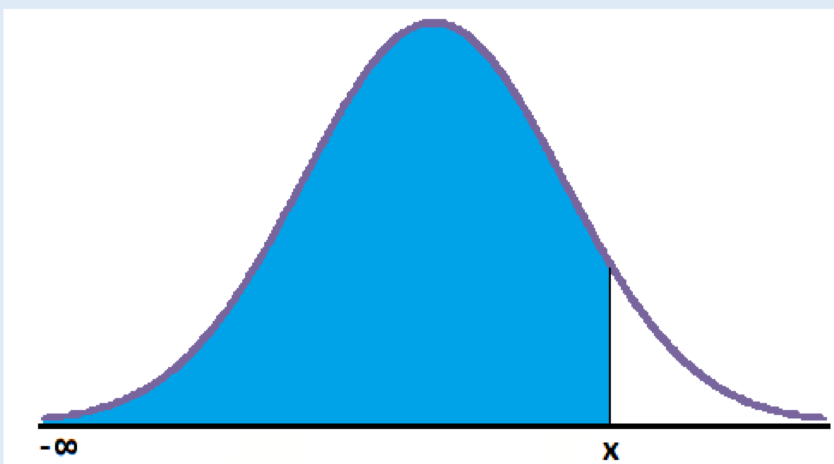
  El cambio de la variable x a la z recibe el nombre de **estandarización** o **tipificación** y es de gran utilidad a al momento de aplicar las tablas de la distribución estándar a los datos que siguen una distribución normal no-estándar.

Función de distribución

Para una variable continua X que se ajusta a una distribución normal N(μ,σ), la función de distribución viene dada por la siguiente expresión:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

donde F(x) representa el área encerrada bajo la curva de la función desde -∞ hasta x, es decir, el tanto por ciento de valores que están distribuidos entre -∞ y x:



Distribución de Bernoulli

La distribución de Bernoulli es una distribución de probabilidad discreta que abre el camino a la distribución binomial, la distribución geométrica y la distribución binomial negativa. Lleva ese nombre por Jakob Bernoulli, un gran matemático y científico suizo.

Introducción

Vamos a partir de un ensayo de Bernoulli, es decir, de un experimento que tiene solo 2 resultados posibles, a uno de ellos lo llamaremos éxito y al otro fracaso.

Por ejemplo, voy a realizar un experimento bien facilito que consiste en preguntar a un suscriptor de este canal seleccionado al azar si le gusta la pizza. Si me dice que si, lo considero un éxito, si me que no, lo considero un fracaso. Otro ensayo de Bernoulli sería lanzar mi moneda que de un lado tiene gato y del otro lado tiene perro. Si defino perro como éxito, obtener un gato será un fracaso.

Se denomina ensayo de Bernoulli a todo experimento aleatorio que tiene solo dos resultados posibles mutuamente excluyentes, generalmente llamados éxito y fracaso.

En un ensayo de Bernoulli vamos a definir la variable aleatoria X de la siguiente manera:

- si obtenemos un éxito, la variable aleatoria X vale 1.
- caso contrario, si el ensayo termina en fracaso, la variable aleatoria X vale 0.

De manera sencilla podemos decir que X cuenta el número de éxitos. Si sale fracaso, el número de éxitos sería 0, no hay ningún éxito. Si el experimento termina en éxito, hay 1 éxito.

A continuación, vamos a elaborar una tabla muy sencilla con los valores de X en un ensayo de Bernoulli:

	Fracaso	Éxito
x	0	1

La probabilidad de éxito se denota por p, por ello, la probabilidad de fracaso será 1-p. Agregamos esta información a la tabla:

	Fracaso	Éxito
x	0	1
$f(x)$	$1-p$	p

Y listo, ya tenemos la distribución de probabilidad de Bernoulli representada mediante una tabla. Si queremos la función de probabilidad (una fórmula), sería la siguiente:

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

$$\text{Éxito} \longrightarrow P[X=1]=p$$

$$\text{Fracaso} \longrightarrow P[X=0]=q=1-p$$

$$f(x)=P(X=x)=\begin{cases} 1-p; & x=0 \\ p; & x=1 \end{cases}$$

Una prueba de Bernoulli es uno de los experimentos más simples que puede realizar. Es un experimento en el que puedes tener uno de dos resultados posibles. Por ejemplo, «Sí» y «No» o «Cara» y «Cruz». Algunos ejemplos:

- **Lanzamientos de monedas** : registre cuántas monedas caen cara y cuántas caen cruz.
- **Nacimientos** : cuántos niños nacen y cuántas niñas nacen cada día.
- **Rolling Dice** : la probabilidad de que una tirada de dos dados resulte en un doble seis.

El lanzamiento de monedas como un juego de probabilidad y azar ha existido desde la época romana.

Los juicios de Bernoulli generalmente se expresan en términos de éxito y fracaso . El éxito no significa éxito de la manera habitual, simplemente se refiere a un resultado del que desea realizar un seguimiento. Por ejemplo, es posible que desee averiguar cuántos niños nacen cada día, por lo que llama al nacimiento de un niño un «éxito» y al nacimiento de una niña un «fracaso». En el ejemplo de lanzamiento de dados, una tirada de dado doble seis sería su «éxito» y todo lo demás tirado se consideraría un «fracaso».

Distribución de Bernoulli

Una variable aleatoria discreta X tiene una distribución de Bernoulli si su función de probabilidad está dada por:

$$\boxed{f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1 - p; & x = 0 \\ p; & x = 1 \end{cases}}$$

De forma resumida, se puede colocar de la siguiente manera:

$$\boxed{f(x) = P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}\,; \quad con\; x = 0;\; 1}$$

Para indicar que la variable aleatoria X sigue una distribución de Bernoulli de parámetro p usamos la siguiente notación:

$$\boxed{X \sim Be(p)}$$

Ejemplos

1. Para ganar un juego, un jugador necesita lanzar un dado y sacar un 2, en caso contrario, otro jugador ganará la partida y, por tanto, se perderá el juego. Calcula la probabilidad de éxito y de fracaso.

   Un dado tiene seis posibles resultados (1, 2, 3, 4, 5, 6), por lo tanto, en este caso el espacio muestral del experimento es:

   $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

   En nuestro caso, el único caso de éxito es obtener el número dos, de modo que la probabilidad de éxito aplicando la regla de Laplace es igual a uno partido por el número total de posibles resultados (6):

   $$p = \frac{1}{6} = 0,1667$$

Por otro lado, si sale cualquier otro número al lanzar el dado, el resultado del experimento se considerará como un fracaso, ya que el jugador perderá la partida. Así pues, dicha probabilidad es equivalente a uno menos la probabilidad calculada anteriormente:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0,8333$$

En definitiva, la distribución de Bernoulli de este experimento queda definida por la siguiente expresión:

$$P[X = x] = \begin{cases} \frac{5}{6} & \text{si } x = 0 \\ \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Como puedes comprobar a continuación, las probabilidades de la distribución de Bernoulli también se pueden hallar aplicando la fórmula vista más arriba:

$$P[X = x] = p^x \cdot (1 - p)^{1-x}$$

$$P[X = 0] = \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{1-0} = \frac{5}{6}$$

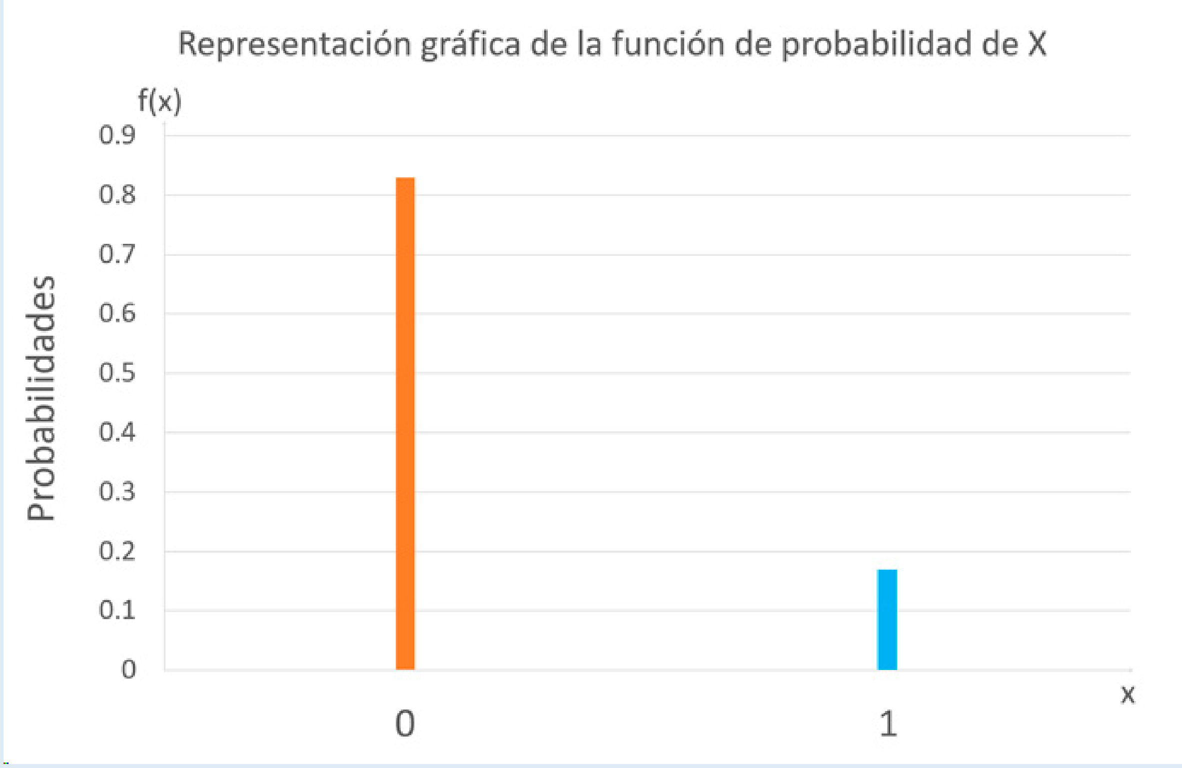
$$P[X = 1] = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{1-1} = \frac{1}{6}$$

Como vemos, la función de probabilidad de X tiene la forma de una función de probabilidad de Bernoulli con probabilidad de éxito p de 1/6. Por lo tanto:

Esa sería la respuesta, **la variable aleatoria X sigue una distribución de Bernoulli con una probabilidad de éxito de 1/6**.

$$X \sim Be\left(\frac{1}{6}\right)$$

El problema no lo pide, pero, también lo podemos hacer mediante un diagrama de barras. Colocamos un eje horizontal para los valores de X y otro vertical para las probabilidades f(x).



Características de la Distribución de Bernoulli

A continuación, se muestran las características más importantes de la distribución de Bernoulli.

- La distribución de Bernoulli solo puede tomar el valor de 1 (éxito) o de 0 (fracaso).

$$\boxed{x = \{0\ ;1\}}$$

- La media de la distribución de Bernoulli es equivalente a la probabilidad de ocurrencia del resultado «éxito».

$$\boxed{E[X] = p}$$

- La varianza de una distribución de Bernoulli se puede calcular multiplicando las probabilidades de ocurrencia del resultado de «éxito» y de «fracaso». O, equivalentemente, la varianza es igual a p por

$$\boxed{Var(X) = p \cdot q = p \cdot (1 - p)}$$

- El valor de la moda de una distribución de Bernoulli depende de las probabilidades de «éxito» y de «fracaso». Así pues, la moda de este tipo de distribución queda definida por la siguiente expresión:

$$Mo = \begin{cases} 0 & \text{si } q > p \\ 0\,;1 & \text{si } q = p \\ 1 & \text{si } q < p \end{cases}$$

- La fórmula de la función de probabilidad de una distribución de Bernoulli es la siguiente:

$$P[X = x] = \begin{cases} 1 - p & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Por otro lado, la función de probabilidad acumulada de la distribución de Bernoulli queda definida mediante la siguiente expresión:

$$P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- El coeficiente de asimetría de una distribución de Bernoulli se calcula con la siguiente expresión:

$$A = \frac{q - p}{\sqrt{p \cdot q}}$$

- Asimismo, la curtosis de una distribución de Bernoulli depende del valor del parámetro p y se puede hallar aplicando la siguiente fórmula:

$$C = \frac{3p^2 - 3p + 1}{p(1 - p)}$$

Distribución de Bernoulli y Distribución Binomial

En este apartado veremos cuál es la diferencia entre la distribución de Bernoulli y la distribución binomial, ya que son dos tipos de distribuciones de probabilidad que están relacionadas.

La **distribución binomial** cuenta el número de resultados con «éxito» obtenidos de un conjunto de ensayos de Bernoulli. Estos experimentos de Bernoulli deben ser independientes, pero deben tener la misma probabilidad de éxito.

Por lo tanto, **la distribución binomial es la suma de un conjunto de variables que siguen una distribución de Bernoulli**, todas ellas definidas por el mismo parámetro p.

$$\boxed{\begin{gathered} X_i \sim \text{Bernoulli}(p) \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Bin}(n, p) \end{gathered}}$$

Así pues, **en la distribución de Bernoulli solo hay un único experimento de Bernoulli, mientras que en la distribución binomial hay una secuencia de experimentos de Bernoulli**.

Distribución Binomial

La distribución de probabilidad binomial es una distribución discreta que tiene muchísimas aplicaciones. Se asocia con un experimento de múltiples pasos que se llama experimento binomial. La palabra binomial viene de otra palabra que significa "dos nombres" y esto nos hará recordar que en cada ensayo que veremos en este tema siempre habrá dos resultados: éxito y fracaso. Si es que respondes una pregunta de alternativas al azar, la respuesta es correcta o incorrecta. Si es que realizas un control de calidad a un producto, este será defectuoso o no defectuoso. Si es que lanzas una moneda, sale cara o sale cruz.

Experimento binomial

Un experimento binomial es un experimento que cumple las siguientes condiciones:

I. El experimento consta de una secuencia de n ensayos idénticos.
II. En cada ensayo hay dos resultados posibles. A uno de ellos se le llama éxito y al otro, fracaso.
III. La probabilidad de éxito es constante de un ensayo a otro, nunca cambia y se denota por p. Por ello, la probabilidad de fracaso será 1 – p. Esto se debe a que la probabilidad de éxito más la probabilidad de fracaso suman 1.
IV. Los ensayos son independientes, de modo que el resultado de cualquiera de ellos no influye en el resultado de cualquier otro ensayo.

Antes de resolver un ejercicio aplicando la fórmula de probabilidad binomial, tenemos que verificar siempre que se cumplen estas cuatro condiciones, pues esta fórmula solo funciona para experimentos binomiales.

Ejemplo 1

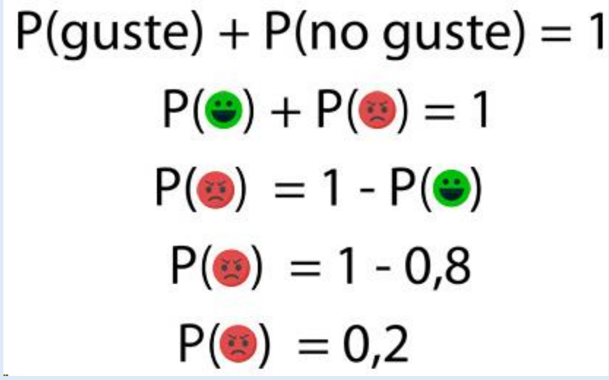
Últimamente con las clases de matemática no me va muy bien, por eso, he puesto mi cafetería. Preparo unas cosas riquísimas, pasteles, pizza, agua helada, pero lo más vendido son las mate hamburguesas, las únicas hamburguesas que se venden con papas y leche chocolatada.

La probabilidad de que a un cliente nuevo le guste la mate hamburguesa es de 0,8. Si vienen 3 nuevos clientes a mí cafetería ¿cuál será la probabilidad de que solo a dos de ellos les guste la hamburguesa?

Si al cliente le gusta la hamburguesa tendrá carita feliz y si no le gusta, tendrá carita molesta. Por ejemplo, si a los dos primeros les gusta y al tercero no, colocaré esta gráfica:

Pero no es la única opción, en total son tres opciones. Que a los dos primeros les guste y al tercero no. Que al primero y al tercero les guste, y al segundo no. O que les guste al segundo y tercero y al primero no. Graficamos estas tres opciones:

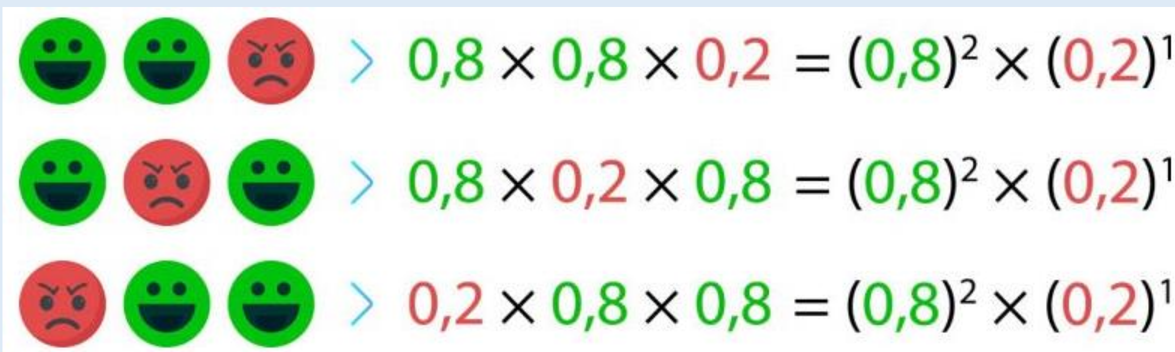
Si la probabilidad de que a un cliente le guste la matehamburguesas es de 0,8, entonces, la probabilidad de que no le gusten será:



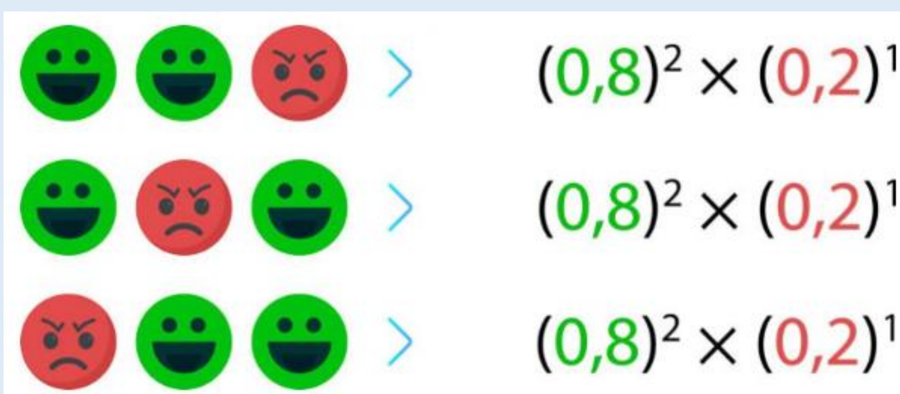
Ahora calcularemos la probabilidad de que ocurra cada evento. Por ejemplo, en la primera línea, calcularemos la probabilidad de que al primer y al segundo cliente les guste la hamburguesa y que al tercero no. Aplicaremos la regla de la multiplicación de probabilidades para eventos independientes.

Coloco ahora todas las opciones.

Esas mismas probabilidades, las colocaré en forma de potencias:



Me quedaré solo con las potencias, eliminando el resto.



A continuación, calculamos la probabilidad total de que solo a 2 de los 3 clientes les guste mi hamburguesa empleando la regla de la suma de probabilidades para eventos mutuamente excluyentes.

Si esta multiplicación la metemos a la calculadora, nos quedaría **0,384**.

¿Es un poco largo este cálculo? Pues sí, está larguísimo. Imagínate que ahora llegan 10 clientes nuevos a mi cafetería y queremos calcular la probabilidad de que a 4 de ellos les guste la matehamburguesa. Me tardaría horas, por eso es mejor usar la fórmula de la función de probabilidad binomial. Esta fórmula permite encontrar la probabilidad para cada posible valor de x (número de éxitos). Veamos los detalles:

Función de probabilidad binomial (fórmula)

Para un experimento binomial, sea p la probabilidad de "éxito" y 1-p la probabilidad de un "fracaso" en un solo ensayo; entonces la probabilidad de obtener x éxitos en n ensayos, está dada por la función de probabilidad f(x):

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} (p)^x (1-p)^{n-x}, para\ x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Siendo el coeficiente binomial o número combinatorio:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

Por eso, en algunos libros encontrarás la función de probabilidad binomial f(x) con el coeficiente binomial ya incorporado y presentada de la siguiente manera:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} (p)^x (1-p)^{n-x}, para\ x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

La función de probabilidad binomial se aplica a cualquier experimento binomial. Si una situación demuestra las propiedades de un experimento binomial y se conocen los valores de n y p, se puede usar la ecuación de arriba para calcular la probabilidad de x éxitos en n ensayos. Recuerda, antes de usar la fórmula de probabilidad binomial, siempre verifica que te encuentres ante un experimento binomial.

Media, varianza y desviación estándar de la distribución binomial

La media, la varianza y la desviación estándar se pueden encontrar con estas fórmulas:

Media:

$$\boxed{\mu = np}$$

Varianza:

$$\boxed{\sigma^2 = np(1 - \mathrm{p})}$$

Desviación estándar:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{np(1 - p)}}$$

Ejemplo 2

La probabilidad de que a un cliente nuevo le guste la mate hamburguesa de Jorge es de 0,8. Si llegan 5 clientes nuevos a la cafetería, ¿cuál es la probabilidad de que solo a 3 de ellos les guste la mate hamburguesa?

Solución:

Antes de aplicar la fórmula, verificamos que se trate de un experimento binomial. Para ello, tiene que cumplir con las 4 condiciones que mencionamos arriba. Efectivamente, se trata de un experimento binomial.

En este caso, vamos a centrarnos en los clientes a los que les gusta esta hamburguesa, por ello diremos que:

X = número de clientes nuevos de 5 a los que les gusta la matehamburguesa

Entonces consideramos un éxito si al cliente le gusta esta hamburguesa.

Aplicaremos la fórmula binomial:

$$\boxed{f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} (p)^x (1 - p)^{n-x}}$$

Ahora colocamos los valores de n, k y p. Recuerda que n es el número de ensayos, k el número de éxitos y p la probabilidad de éxito.

$$\boxed{n = 5 \quad \wedge \quad x = 3 \quad \wedge \quad p = 0{,}8}$$

Reemplazamos estos valores en la fórmula:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x}(p)^x(1-p)^{n-x}$$

$$f(3) = P(X = 3) = \binom{5}{3}(0{,}8)^3(1-0{,}8)^{5-3}$$

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}(0{,}8)^3(0{,}2)^2$$

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}2!}(0{,}8)^3(0{,}2)^2$$

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{20}{2 \times 1}(0{,}512)(0{,}04)$$

$$f(3) = P(X = 3) = 10(0{,}512)(0{,}04)$$

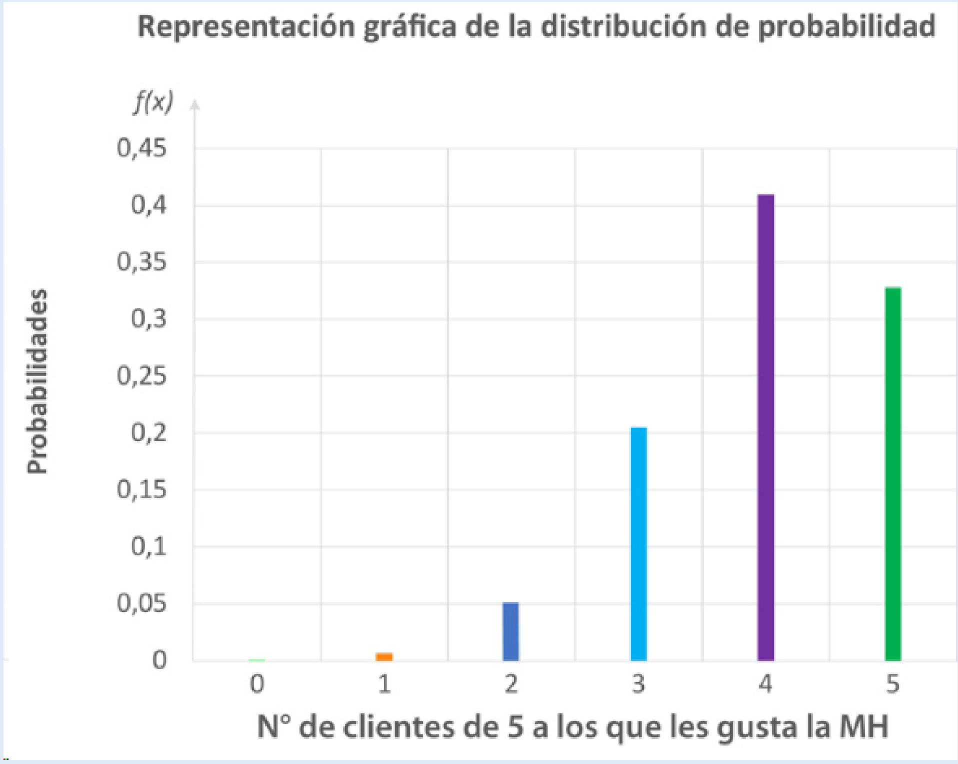
$$f(3) = P(X = 3) = \mathbf{0{,}2048}$$

La respuesta sería **0,2048**.

Recuerda que X, nuestra variable aleatoria, es el número de clientes nuevos de 5 a los que les gustan las hamburguesas de Jorge. Aunque el problema no lo pide, vamos a elaborar la tablita de distribución de probabilidad. Para calcular todas las probabilidades, usaré la misma fórmula de arriba.

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0,0003	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,3277

Vamos a elaborar una gráfica para representar esta distribución de probabilidad, empleando un diagrama de barras.



Algunos usan los histogramas, también es válido.

Ejemplo 3

De todas las flores plantadas por una empresa de jardinería, el 90% sobrevive. Si se plantan 10 flores ¿cuál es la probabilidad de que 9 o más sobrevivan?

Solución:

Antes de aplicar la fórmula, verificamos que se trate de un experimento binomial. Para ello, tiene que cumplir con las 4 condiciones que mencionamos arriba. Efectivamente, se trata de un experimento binomial.

En este caso, vamos a centrarnos en las flores que sobreviven, por ello diremos que:

X = número de flores de 10 que sobreviven

Entonces consideramos un éxito si la flor sobrevive. A las que flores que se mueren, las consideramos como un fracaso.

Aplicaremos la fórmula binomial:

$$\boxed{f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x}(p)^x(1-p)^{n-x}}$$

Nos piden calcular la probabilidad de 9 o más sobrevivan.

$$\boxed{P(X \geq 9)}$$

Este problema tiene trampa, porque dado que se plantaron 10 flores, la máxima cantidad de flores que pueden sobrevivir es 10, por lo tanto:

$$\boxed{P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)}$$

Ahora colocamos los valores de n, k y p. Recuerda que n es el número de ensayos, k el número de éxitos y p la probabilidad de éxito. En este caso:

$$\boxed{n = 10 \quad \wedge \quad p = 0{,}9}$$

Regresamos con la fórmula de arriba:

$$\boxed{P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)}$$

Vamos a calcular cada probabilidad por separado, empezando con P(X = 9):

$$P(X = 9) = \binom{10}{9}(0{,}9)^9(1-0{,}9)^{10-9}$$

$$P(X = 9) = \frac{10!}{9!\,(10-9)!}(0{,}9)^9(1-0{,}9)^{10-9}$$

$$P(X = 9) = \frac{10 \times \cancel{9!}}{\cancel{9!}\,1!}(0{,}9)^9(0{,}1)^1$$

$$P(X = 9) = 10(0{,}9)^9(0{,}1)^1$$

$$P(X = 9) = 0{,}3874$$

Continuamos con P(X = 10).

$$P(X = 10) = \binom{10}{10}(0{,}9)^{10}(1 - 0{,}9)^{10-10}$$

$$P(X = 10) = \frac{10!}{10!\,(10 - 10)!}(0{,}9)^{10}(0{,}1)^{0}$$

$$P(X = 10) = \frac{10!}{10!\,0!}(0{,}9)^{10}(1)$$

$$P(X = 10) = \frac{\cancel{10!}}{\cancel{10!}\,1}(0{,}9)^{10}(1)$$

$$P(X = 10) = 1(0{,}9)^{9}$$

$$P(X = 10) = 0{,}3487$$

Regresamos con esta fórmula:

$$\boxed{P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)}$$

Y reemplazamos lo calculado:

$$P(X \geq 9) = 0{,}3874 + 0{,}3487$$

$$P(X \geq 9) = 0{,}7361$$

Ejemplo 4

Considere un experimento binomial con dos ensayos y p=0,4.

a) Calcular la probabilidad de no obtener ningún éxito.
b) Calcular la probabilidad de obtener al menos 1 éxito.

Solución:

Iniciamos definiendo la variable aleatoria de interés en nuestro experimento binomial:

X = número de éxitos en n ensayos.

x = 0; 1; 2.

El enunciado nos dice que: n = 2 y que p = 0,4; con ello podemos definir la función de probabilidad de X.

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{2-x}$$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{2}{x} 0{,}4^x (1-0{,}4)^{2-x}$$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{2}{x} 0{,}4^x (0{,}6)^{2-x}$$

a) Calcular la probabilidad de no obtener ningún éxito: P(X = 0).

$$f(x) = P(X = 0) = \binom{2}{0} 0{,}4^0 (0{,}6)^{2-0}$$

$$f(x) = P(X = 0) = (1)(1)(0{,}6)^2$$

$$f(x) = (X = 0) = \mathbf{0{,}36}$$

b) Calcular la probabilidad de obtener al menos 1 éxito.

Aquí nos piden calcular:

$$\boxed{P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2)}$$

Pero:

$$f(1) = P(X = 1) = \binom{2}{1} 0{,}4^1 (0{,}6)^{2-1}$$

$$f(1) = P(X = 1) = 0{,}48$$

Además:

$$f(2) = P(X = 2) = \binom{2}{2} 0{,}4^2 (0{,}6)^{2-2}$$

$$f(2) = P(X = 2) = 0{,}16$$

Reemplazamos:

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \geq 1) = 0{,}48 + 0{,}16$$

$$P(X \geq 1) = \mathbf{0{,}64}$$

Esa sería la respuesta: **0,64**.

Una forma alternativa de desarrollar el apartado b, sería usando la siguiente

"La suma de las probabilidades para todos los resultados del experimento debe ser igual a 1".

$$\sum P(x) = 1$$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$$

$$P(X = 1) + P(X = 2) = 1 - P(X = 0)$$

Pero recuerda que P(X=0) ya lo calculamos en el apartado a, y es igual a 0,36.

$$P(X = 1) + P(X = 2) = 1 - 0{,}36$$

$$P(X = 1) + P(X = 2) = \mathbf{0{,}64}$$

Ejemplo 5

Lanzamos un total de 10 veces una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener 6 veces cara?

La variable de este problema sigue una distribución binomial porque todos los lanzamientos son independientes entre sí y, además, tienen la misma probabilidad de éxito.

En concreto, la probabilidad de éxito es del 50%, ya que solo uno de los dos posibles resultados se considera como éxito.

$$p = \frac{1}{2} = 0,5$$

Por lo tanto, la distribución de este ejercicio es una binomial con un total de 10 experimentos y una probabilidad de 0,5.

$$X \sim \mathrm{Bin}(10; 0,5)$$

Entonces, para determinar la probabilidad de obtener seis veces cara, debemos aplicar la fórmula de la distribución binomial.

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P[X = 6] = \binom{10}{6} 0,5^6 (1-0,5)^{10-6}$$

$$P[X = 6] = 0,2051$$

Así que la probabilidad de obtener exactamente seis veces cara al lanzar diez veces una moneda es del 20,51%.

Ejemplo 6

Imaginemos que un 80% de personas en el mundo ha visto el partido de la final del último mundial de fútbol. Tras el evento, 4 amigos se reúnen a conversar, ¿Cuál es la probabilidad de que 3 de ellos hayan visto el partido?

Definamos las variables del experimento:

n = 4 (es el total de la muestra que tenemos)

x = número de éxitos, que en este caso es igual a 3, dado que buscamos la probabilidad de que 3 de los 4 amigos lo hayan visto.

p = probabilidad de éxito (0,8)

q = probabilidad de fracaso (0,2). Este resultado se obtiene al restar 1-p.

Tras definir todas nuestras variables, simplemente sustituimos en la formula.

$$P_{(3)} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} 0{,}8^3 0{,}2^{4-3}$$

El numerador del factorial se obtendría de multiplicar 4*3*2*1 = 24 y en el denominador tendríamos 3*2*1*1 = 6. Por lo tanto, el resultado del factorial sería 24/6=4.

Fuera del corchete tenemos dos números. El primero sería 0,8^3=0,512 y el segundo 0,2 (dado que 4-3 = 1 y cualquier número elevado a 1 es el mismo).

Por tanto, nuestro resultado final sería: 4*0,512*0,2 = 0,4096. Si multiplicamos por 100 tenemos que hay una probabilidad del 40,96% de que 3 de los 4 amigos haya visto el partido de la final del mundial.

Ejemplo 7

Un estudio determinó que 40% de los alumnos de una universidad comen en alguna de las cafeterías de tu campus. Si una tarde se escogen al azar 8 estudiantes de dicho campus, determina la probabilidad de que hayan comido en alguna de las cafeterías de tu campus…:

Recuerda la fórmula:

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Recuerda también que la probabilidad ***p*** de que los alumnos entren a comer en alguna de las cafeterías del campus es del 40%, o sea de 0.4.

- ***… exactamente dos de ellos***

Como nos piden exactamente dos de ellos, se sustituye el valor de ***k*** por un 2:

$$P\{X = 2\} = \binom{8}{2} 0.4^2 (1-0.4)^{8-2}$$

$$P\{X = 2\} = \binom{8}{2} 0.4^2 (0.6)^6$$

La probabilidad de que exactamente 2 personas hayan comido en alguna cafetería de tu campus es de 0.20

- ***… por lo menos dos de ellos***

Para este caso, lo único que se hizo fue restar a la unidad la probabilidad cuando uno y ninguno de los estudiantes desayunan en alguna de las cafeterías. Porque en vez de sacar la probabilidad cuando dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho estudiantes comen en alguna de las cafeterías, sería más trabajo, así que es más fácil restar a la unidad la cantidad de una y cero personas que comen en las cafeterías, mira:

$$1 - \text{un estudiante desayuna} - \text{ningún estudiante desayuna} =$$

$$1 - \binom{8}{1} 0.4^1 (0.6)^7 - \binom{8}{0} 0.4^0 (0.6)^8 =$$

$$1 - 0.8957952 - 0.01679616 = 0.89362432$$

Por lo tanto, la probabilidad de que por lo menos dos estudiantes hayan desayunado en alguna cafetería del campus es del 0.89

- ***… ninguno de ellos***

Como piden que ninguno de los estudiantes haya desayunado en algunas de las cafeterías, fácilmente se hace un cálculo:

$$P\{X=0\} = \binom{8}{0} 0.4^0 (0.6)^8 = 0.01679616$$

La probabilidad de que ninguno de los estudiantes haya desayunado en alguna de las cafeterías es del 0.016

- ***… no más de tres de ellos***

Para este inciso lo único que se hizo fue sumar las probabilidades cuando X = 0,1,2,3 observa:

$$\binom{8}{0} 0.4^0 (0.6)^8 + \binom{8}{1} 0.4^1 (0.6)^7 + \binom{8}{2} 0.4^2 (0.6)^6 + \binom{8}{3} 0.4^3 (0.6)^5 =$$

$$0.01679616 + 0.08957952 + 0.20901888 + 0.27869184 = 0.5940864$$

La probabilidad de que no más de tres estudiantes hayan desayunado en alguna de las cafeterías del campus es de 0.59

Ejemplo 8

Imaginemos una escuela primaria donde los alumnos llegan tarde a menudo. Cinco alumnos están en el jardín de niños. La directora lleva tiempo estudiando el problema, habiendo llegado a la conclusión de que hay una probabilidad de 0.4 de que un alumno llegue tarde y de que los alumnos lleguen independientemente uno de otro. ¿Cómo trazamos una distribución binomial de probabilidad que ilustre las probabilidades de que 0,1,2,3,4 ó 5 estudiantes lleguen tarde simultáneamente? Para hacerlo necesitaremos utilizar la fórmula binomial donde:

P = 0.4
Q = (1 - P) = 0.6
N = 5

Realicemos el cálculo de cada valor de X:

Aplicaremos la fórmula binomial:

$$\boxed{f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} (p)^x (1-p)^{n-x}}$$

Para **X = 0**:

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{5!}{0!\,(5-0)!}(0{,}4)^0(0{,}6)^5 = \mathbf{0,07776}$$

Para **X = 1:**

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{5!}{1!\,(5-1)!}(0{,}4)^1(0{,}6)^4 = \mathbf{0,2592}$$

Para **X = 2:**

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{5!}{2!\,(5-2)!}(0{,}4)^2(0{,}6)^3 = \mathbf{0,3456}$$

Para **X = 3:**

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}(0{,}4)^3(0{,}6)^2 = \mathbf{0,2304}$$

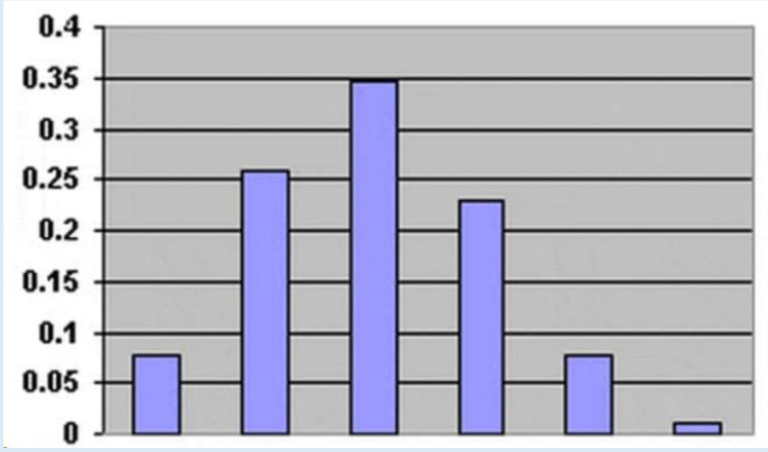
Para **X = 4:**

$$f(4) = P(X = 4) = \frac{5!}{4!\,(5-4)!}(0{,}4)^4(0{,}6)^1 = \mathbf{0,0768}$$

Para **X = 5:**

$$f(5) = P(X = 5) = \frac{5!}{5!\,(5-5)!}(0{,}4)^5(0{,}6)^0 = \mathbf{0,01024}$$

Presentando estos resultados en una gráfica:



Ejemplo 9

Tomemos un evento sencillo, que puede ser obtener 2 caras 5 al lanzar un dado honesto 3 veces. ¿Qué probabilidades hay de que en 3 lanzamientos se obtengan 2 caras de 5?

Hay varias formas de lograrlo, por ejemplo, que:

– Los dos primeros lanzamientos sean 5 y el último no.
– El primero y el último sean 5 pero no el del medio.
– Los dos últimos lanzamientos resulten 5 y el primero no.

Tomemos como ejemplo la primera secuencia descrita y calculemos su probabilidad de ocurrencia. La probabilidad de obtener una cara 5 en el primer lanzamiento es 1/6, y también en el segundo, pues son eventos independientes.

La probabilidad de obtener otra cara distinta de 5 en el último lanzamiento es 1 – 1/6 = 5/6. Por lo tanto, la probabilidad de que salga esta secuencia es el producto de las probabilidades:

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216} = \mathbf{0,023}$$

¿Qué hay de las otras dos secuencias? Tienen idéntica probabilidad: **0.023**.

Y como tenemos un total de 3 secuencias exitosas, la probabilidad total será:

P (2 caras 5 en 3 lanzamientos) = Número de secuencias posibles **x** probabilidad de una secuencia particular = **3 x 0.023** = **0.069**.

Ahora probemos con la binomial, en la cual se hace:

x = 2 (obtener 2 caras de 5 en 3 lanzamientos es el éxito)
n= 3
p = 1/6
q = 5/6

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!.x!} p^x . q^{n-x}$$

$$P(2) = \frac{3!}{(3-2)!.2!} . \left(\frac{1}{6}\right)^2 . \left(\frac{5}{6}\right)^{3-2} = 0.0694$$

Ejemplo 10

Una pareja tiene hijos con una probabilidad de 0,25 de tener sangre del tipo O. La pareja tiene en total 5 hijos.

Responder:

a) ¿Se ajusta esta situación a una distribución binomial?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 de ellos sean del tipo O?

Solución

a) La distribución binomial se ajusta, ya que cumple con las condiciones establecidas en apartados anteriores. Hay dos opciones: tener sangre tipo O es "éxito", mientras que no tenerla es "fracaso", y todas las observaciones son independientes.

b) Se tiene la distribución binomial:

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!.x!}p^x.q^{n-x}$$

En la cual se sustituyen los siguientes valores:

x = 2 (obtener 2 hijos con sangre tipo O)
n= 5
p = 0.25
q = 0.75

$$P(2) = \frac{5!}{(5-2)!.2!}0.25^2.0.75^{5-2} = \frac{5!}{3!.2!} \times 0.0625 \times 0.421875 = =0.2637$$

Ejemplo 11

Una universidad afirma que el 80% de los estudiantes que pertenecen al equipo de baloncesto universitario se gradúan. Una investigación examina el registro académico de 20 estudiantes pertenecientes a dicho equipo de baloncesto que se matricularon en la universidad tiempo atrás.

De estos 20 estudiantes, 11 finalizaron la carrera y 9 abandonaron los estudios.

Si la afirmación de la universidad es cierta, el número de estudiantes que juegan baloncesto y que logran graduarse, de entre 20, debería tener una distribución binomial con n = 20 y p = 0,8. **¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 11 de los 20 jugadores se gradúen?**

Se tiene la distribución binomial:

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!.x!}p^x.q^{n-x}$$

En la cual se sustituyen los siguientes valores:

x = 11
n= 20
p = 0.8
q = 0.2

$$P(11) = \frac{20!}{(20-11)!.11!}0.8^{11}.0.2^{20-11} = \frac{20!}{9!.11!} \times 0.0859 \times 0.000000512 = \\ =0.00739$$

Ejemplo 12

Los investigadores realizaron un estudio para determinar si hubo diferencias significativas en las tasas de graduación entre los estudiantes de medicina admitidos a través de programas especiales y estudiantes de medicina admitidos a través de los criterios de admisión regulares.

Se encontró que la tasa de graduación fue del 94% para los médicos estudiantes admitidos a través de programas especiales (basados en datos del Journal of the American Medical Association).

a) Si 10 de los estudiantes de los programas especiales son seleccionados al azar, encuentre la probabilidad que al menos 9 de ellos se graduaron.

b) ¿Sería inusual seleccionar al azar a 10 estudiantes de los programas especiales y obtener que solo 7 de ellos se han graduado?

Solución

La probabilidad de que un estudiante admitido a través de un programa especial se gradúe es 94/100 = 0.94. Se escogen n =10 estudiantes de los programas especiales y se quiere averiguar la probabilidad de que al menos 9 de ellos se gradúen.

Enseguida se sustituyen los siguientes valores en la distribución binomial:

x = 9
n = 10
p = 0.94
q = 0.06

a)

$$P(9) = \frac{10!}{(10-9)!.9!}0.94^9.0.06^1 = \frac{10!}{1!.9!} \times 0.573 \times 0.06 = 0.3439$$

Esta es la probabilidad de que se gradúen exactamente 9, pero también pudieran graduarse exactamente los 10:

$$P(10) = \frac{10!}{(10-10)!.10!}0.94^{10}.0.06^0 = \frac{10!}{0!.10!} \times 0.5386 \times 1 = 0.5386$$

P (al menos 9 se gradúen) = **P (9) + P (10)** = 0.3439 + 0.5386 = **0.8825**

b) Sí es inusual, ya que la probabilidad obtenida es bastante pequeña.

$$P(7) = \frac{10!}{(10-7)!.7!}0.94^7.0.06^3 = \frac{10!}{3!.7!} \times 0.6485 \times 0.000216 = 0.017$$

Distribución logarítmica normal