Pruebas de hipótesis

Prueba de hipótesis

En estadística, una prueba de hipótesis es un método que se usa para rechazar o aceptar una hipótesis. Es decir, una prueba de hipótesis sirve para determinar si se rechaza o se acepta una hipótesis que se tiene acerca del valor de un parámetro estadístico de una población.

En una prueba de hipótesis se analiza una muestra de datos y, a partir de los resultados obtenidos, se decide rechazar o aceptar una hipótesis de un parámetro poblacional que se había establecido previamente.

Una de las características de las pruebas de hipótesis es que nunca se puede saber con total certeza si la decisión de rechazar o aceptar una hipótesis es la correcta. Así pues, en las pruebas de hipótesis se rechaza o no una hipótesis según qué es más probable de que sea verdad pero, aunque existe evidencia estadística para rechazar o aceptar la hipótesis, siempre se puede estar cometiendo un error. Más abajo entraremos en detalle en los errores que se pueden hacer al realizar una prueba de hipótesis.

Prueba de hipótesis para la media

La prueba de hipótesis para la media es un método estadístico que se usa para rechazar o no la hipótesis nula de una media poblacional.

En concreto, la prueba de hipótesis para la media consiste en calcular el estadístico de la prueba y compararlo con el valor crítico para rechazar o no rechazar la hipótesis nula.

Cabe destacar que las pruebas de hipótesis se llaman de maneras diferentes, en estadística también se conocen como contrastes de hipótesis, test de hipótesis o pruebas de significación.

A continuación vamos a ver cómo se calcula el estadístico de la prueba de hipótesis para la media. No obstante, la fórmula varia ligeramente según si se conoce la varianza o no, por lo que primero veremos cómo se hace cuando la varianza es conocida y luego cuando la varianza es desconocida.

Con varianza conocida

La fórmula de la prueba de hipótesis para la media con varianza conocida es la siguiente:

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Donde:

$\boldsymbol{Z}$: el estadístico de la prueba de hipótesis para la media.
$\overline{\boldsymbol{x}}$: es la media de la muestra.
$\boldsymbol{\mu}$: es el valor de la media propuesto.
$\boldsymbol{\sigma}$: la desviación estándar de la población.
$\boldsymbol{n}$: es el tamaño de la muestra.

Una vez se ha calculado el estadístico de la prueba de hipótesis para la media, se debe interpretar el resultado para rechazar o no la hipótesis nula:

- Si la prueba de hipótesis para la media es de dos colas, se rechaza la hipótesis nula si el valor absoluto del estadístico es mayor que el valor crítico $\boldsymbol{Z_{\alpha/2}}$.

- Si la prueba de hipótesis para la media corresponde a la cola derecha, se rechaza la hipótesis nula si el estadístico es mayor que el valor crítico $\boldsymbol{Z_{\alpha}}$.

- Si la prueba de hipótesis para la media corresponde a la cola izquierda, se rechaza la hipótesis nula si el estadístico es menor que el valor crítico $-\boldsymbol{Z_{\alpha}}$.

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \longrightarrow \text{Si } |Z| > Z_{\alpha/2} \text{ se rechaza } H_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 \longrightarrow \text{Si } Z > Z_{\alpha} \text{ se rechaza } H_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \longrightarrow \text{Si } Z < -Z_{\alpha} \text{ se rechaza } H_0$$

En este caso, los valores críticos se obtienen de la tabla de la distribución normal estandarizada.

Con varianza desconocida

La **fórmula de la prueba de hipótesis para la media con varianza desconocida** es la siguiente:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Donde:

$\boldsymbol{t}$: es el estadístico de la prueba de hipótesis para la media, el cual está definido por una distribución t student.

$\boldsymbol{\overline{x}}$ **:** es la media de la muestra.

$\boldsymbol{\mu}$ **:** es el valor de la media propuesto.

$\boldsymbol{s}$: la desviación estándar de la muestra.

$\boldsymbol{n}$: es el tamaño de la muestra.

Igual que antes, se debe interpretar el resultado calculado del estadístico de la prueba con el valor crítico para rechazar o no la hipótesis nula:

Si la prueba de hipótesis para la media es de dos colas, se rechaza la hipótesis nula si el valor absoluto del estadístico es mayor que el valor crítico $\boldsymbol{t_{a/2|n-1}}$.

Si la prueba de hipótesis para la media corresponde a la cola derecha, se rechaza la hipótesis nula si el estadístico es mayor que el valor crítico $\boldsymbol{t_{a|n-1}}$.

Si la prueba de hipótesis para la media corresponde a la cola izquierda, se rechaza la hipótesis nula si el estadístico es menor que el valor crítico $\boldsymbol{-t_{a|n-1}}$.

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \longrightarrow \text{Si } |t| > t_{\alpha/2|n-1} \text{ se rechaza } H_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 \longrightarrow \text{Si } t > t_{\alpha|n-1} \text{ se rechaza } H_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \longrightarrow \text{Si } t < -t_{\alpha|n-1} \text{ se rechaza } H_0$$

Cuando la varianza es desconocida, los valores críticos de la prueba se obtienen de la tabla de la distribución t Student.

Ejemplo resuelto de la prueba de hipótesis para la media

Para acabar de entender el concepto de la prueba de hipótesis para la media poblacional, a continuación, puedes ver un ejemplo resuelto de este tipo de pruebas de hipótesis.

Una empresa tecnológica afirma que la batería del ordenador portátil que vende tiene una duración de 6 horas. Se procede a comprobar si es falsa esta hipótesis realizando una prueba de hipótesis con un nivel de significación α=0,05. Para ello, se decide comprar 20 unidades y observar cuánto dura la batería de cada ordenador (los valores están expresados en horas):

5,2 5,9 7,1 4,2 6,5
8,5 4,6 6,8 6,9 5,8
5,1 6,5 7,0 5,3 6,2
5,7 6,6 7,5 5,1 6,1

En este caso, la hipótesis nula y alternativa de la prueba de hipótesis para la media son las siguientes:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 6 \\ \\ H_1 : \mu \neq 6 \end{cases}$$

Para poder determinar el estadístico de la prueba, primero tenemos que calcular la media de la muestra y la desviación típica de la muestra:

$$\overline{x} = 6,13 \qquad s = 1,05$$

Como no conocemos la varianza de la población, para sacar el estadístico de la prueba tenemos que aplicar la fórmula de la prueba de hipótesis para la media con la varianza desconocida:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$t = \frac{6,13 - 6}{\frac{1,05}{\sqrt{20}}}$$

$$t = 0,68$$

Ahora tenemos que encontrar el valor crítico de la prueba de hipótesis, así que buscamos en la tabla de la distribución t Student el valor correspondiente. Los grados de libertad de la t de Student son uno menos que el tamaño muestral (20-1=19) y, por otro lado, la probabilidad correspondiente es la mitad del nivel de significación (0,05/2=0,025) ya que es una prueba de hipótesis bilateral.

$$\alpha = 0,05 \longrightarrow \alpha/2 = 0,025$$

$$t_{\alpha/2|n-1} = ?$$

$$t_{0,025|19} = 2,093$$

En conclusión, como es una prueba de hipótesis bilateral y el valor absoluto del estadístico de la prueba es menor que el valor crítico, no se rechaza la hipótesis nula, sino que se rechaza la hipótesis alternativa.

$$0,68 < 2,093 \longrightarrow \text{Se rechaza } H_1$$

Prueba de hipótesis para la diferencia de medias

La **prueba de hipótesis para la diferencia de medias** se usa para rechazar o aceptar la hipótesis nula de que las medias de dos poblaciones son iguales.

De modo que la hipótesis nula de una prueba de hipótesis para la diferencia de dos medias siempre es la siguiente:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

Mientras que la hipótesis alternativa puede ser cualquiera de las siguientes tres:

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

Entonces, la **fórmula para calcular el estadístico de la prueba de hipótesis para la diferencia de medias cuando la varianza es conocida** es la siguiente:

$$Z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Donde:

- Zes el estadístico de la prueba de hipótesis para la diferencia de dos medias con varianza conocida, que sigue una distribución normal estándar.
- $\overline{x_1}$es la media de la muestra 1.
- $\overline{x_2}$es la media de la muestra 2.
- σ_1^2es la varianza de la población 1.
- σ_2^2es la varianza de la población 2.
- $n_1$es el tamaño de la muestra 1.
- $n_2$es el tamaño de la muestra 2.

Por otro lado, la **fórmula para calcular el estadístico de la prueba de hipótesis para la diferencia de medias cuando la varianza es desconocida** es la siguiente:

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Donde:

- $t$es el estadístico de la prueba de hipótesis para la diferencia de dos medias con varianza desconocida, que sigue una distribución t Student.
- $\overline{x_1}$es la media de la muestra 1.
- $\overline{x_2}$es la media de la muestra 2.
- s_1^2es la varianza de la muestra 1.
- s_2^2es la varianza de la muestra 2.
- $n_1$es el tamaño de la muestra 1.
- $n_2$es el tamaño de la muestra 2.

Hipótesis nula e hipótesis alternativa

Una prueba de hipótesis siempre tiene una hipótesis nula y una hipótesis alternativa, que se definen de la siguiente manera:

- **Hipótesis nula (H0)**: es la hipótesis que sostiene que la suposición inicial que se tiene respecto a un parámetro poblacional es falsa. Por lo tanto, la hipótesis nula es aquella hipótesis que se pretende rechazar. En general, la hipótesis nula incluye un «no» o un «diferente a» en su enunciado, ya que supone que la hipótesis de la investigación es falsa.

- **Hipótesis alternativa (H1)**: es la hipótesis de la investigación que se pretende probar que es cierta. Es decir, la hipótesis alternativa es una suposición previa que tiene el investigador y para intentar demostrar que es verdadera llevará a cabo la prueba de hipótesis. En la práctica, la hipótesis alternativa se formula antes que la hipótesis nula, ya que es la suposición que se pretende corroborar analizando estadísticamente una muestra de datos. La hipótesis nula se formula simplemente contradiciendo la hipótesis alternativa.

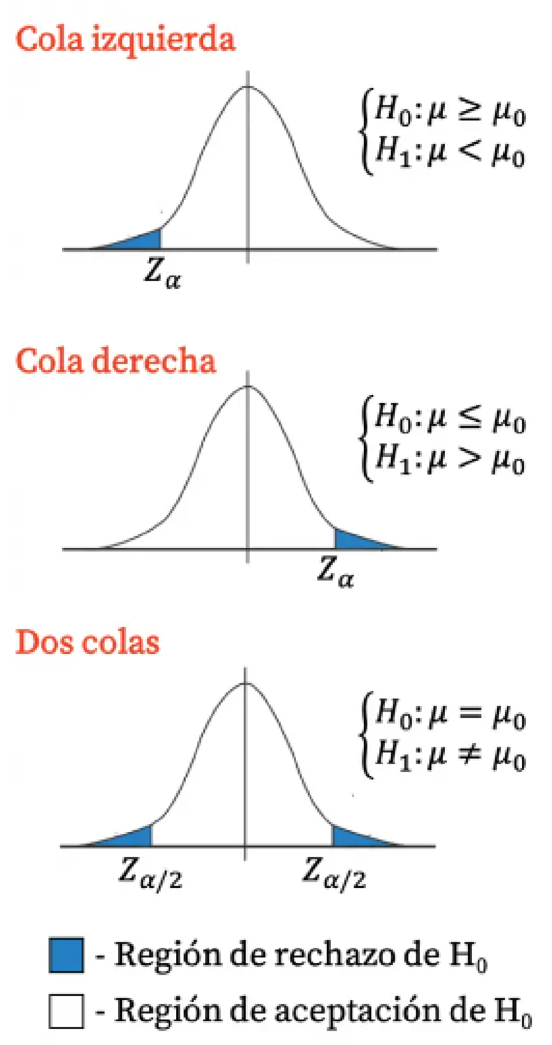
Región de rechazo y región de aceptación de una prueba de hipótesis

Como veremos detalladamente más abajo, la prueba de hipótesis consiste en calcular un valor característico de cada tipo de prueba de hipótesis, dicho valor se llama estadístico de la prueba de hipótesis. Así pues, una vez se ha calculado el estadístico de la prueba, se debe observar en cuál de las siguientes dos regiones cae para llegar a una conclusión:

- **Región de rechazo (o región crítica)**: es la zona de la gráfica de la distribución de referencia de la prueba de hipótesis que implica rechazar la hipótesis nula (y aceptar la hipótesis alternativa).

- **Región de aceptación**: es la zona de la gráfica de la distribución de referencia de la prueba de hipótesis que implica aceptar la hipótesis nula (y rechazar la hipótesis alternativa).

En definitiva, si el estadístico de la prueba cae en la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa. Por el contrario, si el estadístico de la prueba cae en la región de aceptación, se acepta la hipótesis nula y se rechaza la hipótesis alternativa.



Los valores que establecen los límites de la región de rechazo y de la región de aceptación se llaman **valores críticos**, asimismo, el intervalo de valores que define la región de rechazo se llama **intervalo de confianza**. Y ambos valores dependen del nivel de significación escogido.

Por otro lado, la decisión de rechazar o aceptar la hipótesis nula también se puede realizar comparando el **p-valor** (o valor p) obtenido de la prueba de hipótesis con el nivel de significación elegido.

Ejemplos de Hipótesis nulas y alternativas

Ahora que ya sabemos la definición de la hipótesis nula y de la hipótesis alternativa, vamos a ver varios ejemplos de estos dos tipos de hipótesis para acabar de entender la diferencia de su significado.

1. Por ejemplo, si se sospecha que se ha desviado una máquina que teóricamente fabrica una pieza que mide 7 cm, la hipótesis alternativa será que la longitud media de las piezas fabricadas es diferente a 7 cm y, por otro lado, la hipótesis nula será que la longitud media de las piezas fabricadas es igual a 7 cm.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 7 \text{ cm} \\ H_1 : \mu \neq 7 \text{ cm} \end{cases}$$

2. Otro ejemplo, si pensamos que la proporción de la población que ha votado a un determinado partido político es inferior al porcentaje de votos que obtuvo dicho partido en las últimas elecciones (25%), las hipótesis nula y alternativa serían:

$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0,25 \\ H_1 : p < 0,25 \end{cases}$$

3. Como último ejemplo, si un profesor tiene la sospecha de que ha aumentado la media de las notas de la clase respecto al año pasado (que era de 6,1) al implementar un nuevo sistema educativo, la hipótesis nula y la hipótesis alternativa de su estudio estadístico serían:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 6,1 \\ H_1 : \mu > 6,1 \end{cases}$$

Hipótesis nula, hipótesis alternativa y valor p

Al realizar una prueba de hipótesis, se debe decidir si se rechaza la hipótesis nula o la hipótesis alternativa. Así pues, el resultado de una prueba de hipótesis se obtiene al comparar el **valor p** con el **nivel de significación (α)** escogido:

- Si el **valor p es menor que el nivel de significación**, se rechaza la hipótesis nula (se acepta la hipótesis alternativa).

- Si el **valor p es mayor que el nivel de significación**, se rechaza la hipótesis alternativa (se acepta la hipótesis nula).

Cómo hacer una prueba de hipótesis

Para hacer una prueba de hipótesis se deben seguir los siguientes pasos:

1. Plantear la hipótesis nula y la hipótesis alternativa de la prueba de hipótesis.
2. Establecer el nivel de significación alfa (α) deseado.
3. Calcular el estadístico de la prueba de hipótesis.
4. Determinar los valores críticos de la prueba de hipótesis para averiguar la región de rechazo y la región de aceptación de la prueba de hipótesis.
5. Observar si el estadístico de la prueba de hipótesis cae en la región de rechazo o en la región de aceptación.
6. Si el estadístico cae en la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula (y se acepta la hipótesis alternativa). Pero si el estadístico cae en la región de aceptación, se acepta la hipótesis nula (y se rechaza la hipótesis alternativa).

Valor p

En estadística, el **valor p** (o **p-valor**) es la probabilidad de haber obtenido un estadístico de prueba suponiendo que la hipótesis nula es cierta. Es decir, el valor p es un valor entre 0 y 1 que se usa en el contraste de hipótesis para rechazar o aceptar la hipótesis nula.

Concretamente, la hipótesis nula se rechaza si el valor p es menor que el nivel de significación. Por otro lado, si el valor p es mayor que el nivel de significación, se acepta la hipótesis nula y se rechaza la hipótesis alternativa. Más abajo entraremos en detalle en la interpretación del valor p.

En definitiva, el valor p sirve para aceptar o rechazar la hipótesis de una investigación, pues ayuda a diferenciar un resultado que es debido a la casualidad de un resultado que es estadísticamente significativo.

En ocasiones, el valor p también se llama **p-value**, ya que es un término que proviene del inglés y muchos estudios estadísticos están publicados en inglés.

Interpretación del valor p

Ahora que ya hemos visto la definición del valor p, vamos a ver cómo interpretar correctamente el valor p en una prueba estadística.

Básicamente, el valor p se interpreta de la siguiente manera:

- **Si el valor p es menor que el nivel de significación**, se rechaza la hipótesis nula (se acepta la hipótesis alternativa).

- **Si el valor p es mayor que el nivel de significación**, se rechaza la hipótesis alternativa (se acepta la hipótesis nula).

Por lo tanto, **la interpretación del valor p depende del nivel de significación elegido**. En general, se establece el nivel de significación en 0,05 o 0,01, pero es un valor arbitrario que decide el investigador.

Ten en cuenta que el valor del p-valor no implica que una hipótesis sea obligatoriamente cierta, sino que simplemente se rechaza una hipótesis o no se rechaza una hipótesis porque gracias al p-valor hay evidencia estadística para hacerlo. No obstante, se puede cometer un error y rechazar la hipótesis nula cuando es cierta, o al revés, no rechazar la hipótesis nula cuando es falsa. Aunque la probabilidad de cometer un error es muy baja, cabe la posibilidad de haberse equivocado.

En definitiva, decimos que el valor p es significativo cuando es inferior al nivel de significación (normalmente $\alpha=0,05$), porque si el valor p es menor que el nivel de significación quiere decir que existe evidencia significativa para rechazar la hipótesis nula.

Ejemplo del valor p

Para que puedas entender mejor el significado del valor p en estadística, a continuación, puedes ver un ejemplo en el que se resuelve una prueba de hipótesis calculando el valor p.

- Para fabricar un juguete una empresa compra una de las piezas del juguete a una empresa externa y luego la ensambla con el resto de las piezas. En teoría, la pieza que compra debe tener una longitud de 5 cm, sin embargo, últimamente se están produciendo muchos defectos en el ensamblaje y la empresa sospecha que la longitud media de las piezas compradas es diferente. Para asegurarse, pide a la empresa externa una muestra de 10000 unidades, mide una pieza aleatoria y mide 5,25 cm. Así pues, para aceptar o rechazar su hipótesis inicial decide llevar a cabo un contraste de hipótesis.

  En este caso, la hipótesis nula y la hipótesis alternativa del contraste de hipótesis son las siguientes:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 5,00 \text{ cm} \\ H_1 : \mu \neq 5,00 \text{ cm} \end{cases}$$

  Para resolver este problema tomaremos un nivel de significación del 5% (0.05).

$$\alpha = 0,05$$

  El valor que hemos cogido aleatoriamente (5,25 cm) está desviado 0,25 cm respecto a la media teórica (5,00 cm). Así pues, para calcular el p valor de este contraste de hipótesis, tenemos que determinar cuántos valores se han desviado 0,25 cm o más. Tras analizar la muestra de 10000 unidades, hemos visto que 183 unidades están por debajo de 4,75 cm y, por otro lado, 209 unidades están por encima de 5,25 cm.

  Piezas que miden 4,75 cm o menos: 183
  Piezas que miden 5,25 cm o más: 209

  Así pues, para calcular el valor p de este contraste de hipótesis tenemos que dividir las piezas encontradas con una desviación de 0,25 cm o más entre el tamaño de la muestra.

$$p = \frac{183 + 209}{10000} = 0,0392$$

Entonces, el p-valor calculado es menor que el nivel de significación escogido previamente:

$$p < \alpha \longrightarrow \text{Se rechaza } H_0$$

En consecuencia, rechazamos la hipótesis nula y, por lo tanto, tenemos evidencia estadística significativa de que las piezas que compramos tienen de media una longitud diferente a la pactada inicialmente.

Como has podido ver en este ejemplo, se puede determinar el valor p de un contraste de hipótesis sin conocer la distribución de referencia, aunque no es habitual.

Conclusiones del valor p

Para terminar, te dejamos las conclusiones más importantes del valor p a modo de resumen.

- El valor p no representa la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, sino que simplemente se supone que la hipótesis nula es cierta y bajo esta suposición se calcula el valor p que nos permitirá rechazar o no la hipótesis nula.

- El valor p sirve para rechazar o no rechazar una hipótesis de un contraste de hipótesis. Si el valor p es menor que el nivel de significación significa que es poco probable que la hipótesis nula sea cierta y por tanto se rechaza. En cambio, si el valor p es mayor que el nivel de significación, quiere decir que es muy probable que la hipótesis nula sea cierta y por tanto no se rechaza.

- Aunque el valor p indique si la hipótesis nula es muy probable o poco probable de que sea cierta, el valor p no proporciona la certeza de que la hipótesis nula sea cierta o falsa. Siempre cabe la posibilidad de cometer un error.

- El valor p está relacionado con la fiabilidad de la investigación, de manera que cuanto menor sea el valor p más fiable es el resultado obtenido del análisis estadístico.

- El nivel de significación es arbitrario y lo decide el investigador, de modo que la importancia del valor p también la establece el investigador.

Intervalo de confianza

En estadística, el intervalo de confianza es un intervalo que da una aproximación de los valores entre los cuales se encuentra el valor de un parámetro poblacional con un determinado nivel de confianza. Los intervalos de confianza más habituales tienen un nivel de confianza del 95% o del 99%.

Por ejemplo, si el intervalo de confianza para la media de una población con un nivel de confianza del 95% es (3,7), significa que la media de la población estudiada estará entre 3 y 7 con una probabilidad del 95%.

Por lo tanto, el intervalo de confianza sirve para estimar dos valores entre los cuales se encuentra un parámetro de la población. Generalmente, los valores de los parámetros poblaciones se desconocen, así que se calcula un intervalo de confianza a partir de los datos de una muestra para tener una estimación de los parámetros poblacionales.

Factores que influyen en el intervalo de confianza

Una vez hemos visto la definición de intervalo de confianza, vamos a ver cuáles son los factores de los que dependen los intervalos de confianza para entender mejor el concepto.

- **Tamaño muestral**: el número de observaciones estudiadas influye en la precisión del intervalo de confianza, ya que cuantos más datos se tengan mejor se puede estimar un valor. En general, cuanto más grande sea el tamaño de la muestra, menor será la amplitud del intervalo de confianza.

- **Margen de error**: cuanto mayor sea el error permitido, más grande será el intervalo de confianza y, por tanto, más probable es de que el valor real del parámetro esté dentro del intervalo de confianza. No obstante, el margen de error disminuye la precisión del intervalo de confianza.

- **Nivel de confianza**: es la probabilidad de que la estimación del parámetro estadístico de la población se encuentre dentro del intervalo de confianza. Normalmente, el nivel de confianza de un intervalo se indica por $1-\alpha$ y se expresa en forma de porcentaje. Un nivel de confianza alto aumenta la probabilidad de que el valor real se encuentre entre los límites del intervalo, pero también aumenta la amplitud del intervalo.

- **El parámetro estimado**: el intervalo de confianza depende del parámetro que se quiera aproximar. De hecho, la fórmula que se debe utilizar para calcular el intervalo de confianza depende del parámetro aproximado.

Cómo calcular el intervalo de confianza

A continuación, se muestra la fórmula que se debe aplicar para calcular cada tipo de intervalo de confianza, ya que según si se quiere determinar el intervalo de confianza para la media, la varianza o la proporción, la fórmula que se debe emplear es diferente.

Intervalo de confianza para la media

El **intervalo de confianza para la media** es un intervalo que proporciona un rango de valores admisibles para la media de una población. Es decir, el intervalo de confianza para la media nos da un valor máximo y un valor mínimo entre los cuales se encuentra el valor de la media de una población con un margen de error.

Por ejemplo, si el intervalo de confianza del 95% para la media de una población es (6,10), significa que el 95% de veces la media poblacional estará entre 6 y 10.

Por lo tanto, el intervalo de confianza para la media se usa para estimar dos valores entre los cuales se encuentra la media de una población. Así pues, el intervalo de confianza para la media resulta muy útil para aproximar el promedio de una población cuando se desconocen todos sus valores.

Partiendo de que el proceso de tipificación de una variable se hace de la siguiente manera:

$$Z = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

El intervalo de confianza para la media se calcula sumando y restando a la media muestral el valor de $Z_{\alpha/2}$ multiplicado por la desviación típica (σ) y dividido por la raíz cuadrada del tamaño de la muestra (n). Por lo tanto, la fórmula para calcular el intervalo de confianza para la media es la siguiente:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;,\; \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

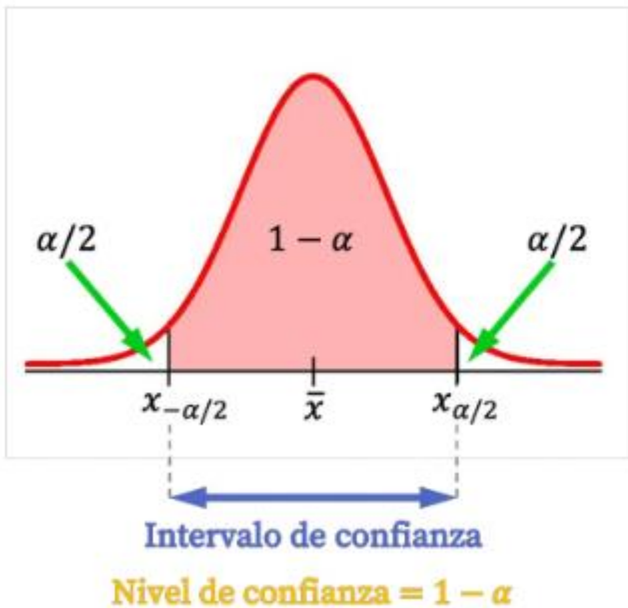
Para tamaños muestrales grandes y un nivel de confianza del 95% el valor crítico es $Z_{\alpha/2} = 1.96$ y para un nivel de confianza del 99% el valor crítico es $Z_{\alpha/2} = 2.576$.

La fórmula anterior se utiliza cuando la varianza de la población es conocida. No obstante, si la varianza de la población es desconocida, que es el caso más frecuente, **el intervalo de confianza para la media se calcula con la siguiente fórmula**:

$$\left(\overline{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \ , \ \overline{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde:

$\boldsymbol{\overline{x}}$: es la media de la muestra.
$\boldsymbol{t_{\alpha/2}}$: es el valor de la distribución t de Student de n-1 grados de libertad con una probabilidad de **α/2**.
$\boldsymbol{s}$: la desviación típica de la muestra.
$\boldsymbol{n}$: es el tamaño de la muestra.



Ejemplo del cálculo de un intervalo de confianza para la media

Para que puedas ver cómo se calcula el intervalo de confianza para la media de una población, a continuación, te dejamos con un ejemplo resuelto paso a paso.

- Tenemos una muestra de 8 observaciones con los valores mostrados a continuación. ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 95%?

206 203 201 212
194 176 208 201

Tal y como hemos visto en el apartado anterior, la fórmula que nos permite sacar el intervalo de confianza para una media poblacional cuando no conocemos la desviación típica de la población es la siguiente:

$$\left(\overline{x}-t_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x}+t_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Entonces, para poder determinar el intervalo de confianza de la media, primero tenemos que calcular la media y la desviación típica de la muestra.

$$\mu=200,13$$

$$s=11,13$$

Como queremos hallar el intervalo de confianza con un nivel de confianza de $1-\alpha=95\%$ y el tamaño muestral es 8, tenemos que ir a la tabla de la distribución t de Student y ver qué valor corresponde a $t_{0,025|7}$.

$$1-\alpha=0,95\ \longrightarrow\ \alpha=0,05\ \longrightarrow\ \alpha/2=0,025$$

$$t_{\alpha/2|n-1}=?$$

$$t_{0,025|7}=2,365$$

De modo que aplicamos la fórmula del intervalo de confianza para la media y hacemos los cálculos para encontrar los valores límites del intervalo:

$$\left(\overline{x}-t_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x}+t_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(200,13-2,365\cdot\frac{11,13}{\sqrt{8}}\ ,\ 200,13+2,365\cdot\frac{11,13}{\sqrt{8}}\right)$$

$$(190,82\ ,\ 209,43)$$

En conclusión, el intervalo de confianza calculado nos indica que con un nivel de confianza del 95% la media de la población estará entre 190,82 y 209,43.

Intervalo de confianza para la varianza

El **intervalo de confianza para la varianza** es un intervalo que da una aproximación de los valores entre los cuales se encuentra la varianza de una población. Es decir, el intervalo de confianza para la varianza indica el valor máximo y el valor mínimo de la varianza poblacional para un nivel de confianza.

Por ejemplo, si el intervalo de confianza del 95% para la varianza de una población es (55,75), significa que la varianza poblacional estará entre 55 y 75 con una probabilidad del 95%.

Por lo tanto, el intervalo de confianza para la varianza sirve para estimar dos valores entre los cuales está la varianza de la población. La varianza muestral se puede calcular pero la varianza poblacional generalmente se desconoce, así que el intervalo de confianza para la varianza permite hacer una aproximación de su valor.

Para calcular el intervalo de confianza para la varianza de una población se utiliza **la distribución chi-cuadrada**. En concreto, la fórmula para calcular el intervalo de confianza para la varianza es la siguiente:

$$\left((n-1)\frac{s^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}}\ ,\ (n-1)\frac{s^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}}\right)$$

Donde:

$\boldsymbol{x_{n-1\,;\,\alpha/2}}$ **:** es el valor de la distribución chi-cuadrado con n-1 grados de libertad para una probabilidad inferior a **α/2**.

$\boldsymbol{x_{n-1\,;\,1-\alpha/2}}$ **:** es el valor de la distribución chi-cuadrado con n-1 grados de libertad para una probabilidad superior a **1 - α/2**.

$\boldsymbol{s}$**:** la desviación típica de la muestra.

$\boldsymbol{n}$**:** es el tamaño de la muestra.

Ejemplo del cálculo del intervalo de confianza para la varianza

Para que puedas entender mejor el concepto, en este apartado te dejamos con un ejemplo resuelto de cómo se calcula el intervalo de confianza para la varianza.

- Tenemos una muestra con 8 observaciones con los valores mostrados a continuación. ¿Cuál es el intervalo de confianza para la varianza de la población con un nivel de confianza del 1-α=95%?

206	203	201	212
194	176	208	201

Tal y como se ha explicado más arriba, la fórmula que nos permite determinar el intervalo de confianza para la varianza poblacional es la siguiente:

$$\left((n-1)\frac{s^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}}\ ,\ (n-1)\frac{s^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}}\right)$$

Así pues, para hallar el intervalo de confianza primero debemos calcular la desviación típica de la muestra:

$$s = 11,13$$

En segundo lugar, miramos en la tabla de la distribución chi-cuadrado cuáles son sus valores correspondientes que necesitamos:

$$\chi_{n-1;\alpha/2} = ?$$

$$\chi_{7;0,025} = 16,013$$

$$\chi_{n-1;1-\alpha/2} = ?$$

$$\chi_{7;0,975} = 1,690$$

De modo que sustituimos los valores en la fórmula del intervalo de confianza para la varianza y hacemos los cálculos:

$$\left((n-1)\frac{s^2}{\chi_{n-1;\alpha/2}}\ ,\ (n-1)\frac{s^2}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}}\right)$$

$$\left((8-1)\frac{11,13^2}{16,013}\ ,\ (8-1)\frac{11,13^2}{1,690}\right)$$

$$(54,15\ ,\ 513,10)$$

En conclusión, la varianza de la población estudiada se encuentra entre 54,15 y 513,10 con un nivel de confianza del 95%.

Intervalo de confianza para la proporción

El intervalo de confianza para la proporción es un intervalo que proporciona un rango de valores admisibles para la proporción de una población. Es decir, el intervalo de confianza para la proporción indica un valor máximo y un valor mínimo entre los cuáles se encuentra la proporción poblacional con un margen de error.

Por ejemplo, si el intervalo de confianza para la proporción de una población con un nivel de confianza del 95% es (0,73 , 0,81), significa la proporción de una población está entre el 73% y el 81% con una probabilidad del 95%.

Por lo tanto, el intervalo de confianza para la proporción se usa para hacer una estimación del valor de la proporción de una población que cumplen con unas características.

Tal y como veremos en el siguiente apartado, el intervalo de confianza para la proporción depende de la proporción muestral y del número de observaciones de la muestra.

El intervalo de confianza para la proporción se calcula sumando y restando a la proporción de la muestra el valor de $Z_{\alpha/2}$ multiplicado por la raíz cuadrada de la proporción muestral (p) multiplicado por 1-p y divido por el tamaño de la muestra (n). Por lo tanto, la **fórmula para calcular el intervalo de confianza para la proporción** es la siguiente:

$$\left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ,\ p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

Donde:

$\boldsymbol{z_{\alpha/2}}$ **:** es el cuantil de la distribución normal estándar correspondiente a una probabilidad de α/2. Para tamaños muestrales grandes y un nivel de confianza del 95% se suele aproximar a 1,96 y para una confianza del 99% se suele aproximar a 2,576.

$\boldsymbol{p}$**:** la proporción de la muestra.

$\boldsymbol{n}$**:** es el tamaño de la muestra.

Ejemplo del cálculo de un intervalo de confianza para la proporción

Para que puedas ver cómo se calcula un intervalo de confianza para la proporción, a continuación, te dejamos con un ejemplo resuelto paso a paso.

- Una compañía de seguros quiere hacer un estudio de mercado y determinar cuánta gente de un país tiene un seguro de vida. Para ello, se analiza una muestra aleatoria de 700 personas y se llega a la conclusión de que un 40% de la muestra dispone de un seguro de vida. ¿Cuál es el intervalo de confianza a un nivel de confianza del 95% para la proporción de la población del país?

Para determinar el intervalo de confianza para la proporción poblacional tenemos que utilizar la fórmula que hemos visto más arriba:

$$\left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ,\ p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

En este caso, queremos que el nivel de confianza del intervalo de confianza sea del 95%, por lo que el valor de $Z\alpha/2$ que debemos tomar es 1,96.

$$1-\alpha = 0,95 \longrightarrow \alpha = 0,05 \longrightarrow \alpha/2 = 0,025$$

$$Z_{\alpha/2} = ?$$

$$Z_{0,025} = 1,96$$

El enunciado del problema ya nos dice que el tamaño muestral es n=700 y la proporción observada en la muestra es p=0,40, por lo que sustituimos los datos en la fórmula del intervalo de confianza para la proporción y calculamos los límites del intervalo:

$$\left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ,\ p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

$$\left(0,40 - 1,96\cdot\sqrt{\frac{0,40\cdot(1-0,40)}{700}}\ ,\ 0,40 + 1,96\cdot\sqrt{\frac{0,40\cdot(1-0,40)}{700}}\right)$$

$$(0,36\ ,\ 0,44)$$

En conclusión, la proporción de la población estudiada se encuentra entre el 36% y el 44% con un nivel de confianza del 95%.

Nivel de confianza y significación

En estadística, el **nivel de confianza** es la probabilidad de que la estimación de un parámetro estadístico de una población se encuentre dentro del intervalo de confianza. Generalmente, el nivel de confianza se indica por 1-α y se expresa en porcentaje.

Por ejemplo, si el nivel de confianza de un intervalo de confianza para una media es del 95%, significa que la probabilidad de que la media de la población esté dentro de los límites del intervalo de confianza es del 95%.

Los niveles de confianza más utilizados son 90%, 95% y 99%. Aunque el nivel de confianza más frecuente es del 95%.

El **nivel de significación** es la probabilidad de que la estimación de un parámetro estadístico de una población se encuentre fuera del intervalo de confianza. Es decir, el nivel de significación es la probabilidad de rechazar una hipótesis que en realidad es verdadera.

En estadística, el nivel de significación se representa con el símbolo griego α (alfa). Por eso también se conoce como **nivel alfa**.

Por ejemplo, si el nivel de significación es α=0,05, significa que la probabilidad de rechazar una hipótesis cuando es cierta es del 5%. En otras palabras, la probabilidad de hacer la estimación de un parámetro estadístico y equivocarnos con un error mayor al margen de error es del 5%.

Por lo tanto, el nivel de significación marca el límite para determinar si un resultado es estadísticamente significativo o no, de manera que si el p-valor es menor que el nivel de significación, el resultado se considera estadísticamente significativo. Más abajo veremos la relación entre el nivel de significación y el p-valor.

Tabla de niveles de significación y niveles de confianza

Una vez hemos visto la definición de nivel de confianza y significación, a continuación, se muestra una tabla con los valores de los niveles de confianza y significación más habituales.

Nivel de confianza (1-α)	Nivel de significación (α)	Valor crítico ($Z_{\alpha/2}$)
0,80	0,20	1,282
0,85	0,15	1,440
0,90	0,10	1,645
0,95	0,05	1,960
0,99	0,01	2,576
0,995	0,005	2,807
0,999	0,001	3,291

Esta tabla te resultará muy útil para calcular los límites de un intervalo de confianza.

Como puedes apreciar en la tabla, al aumentar el nivel de confianza se disminuye el nivel de significación, lo que provoca un riesgo menor en cometer un error al aceptar una hipótesis y, por otro lado, una menor precisión en la estimación de un parámetro estadístico. En general, se suele utilizar un nivel de significación del 5% (α=0,05)

Nivel de confianza del 0% y del 100%

En este apartado veremos qué significa un nivel de confianza del 0% y un nivel de confianza del 100%, ya que son dos niveles de confianza que en principio no deberían darse en estadística.

Un **nivel de confianza del 0%** significa que no se tiene ninguna convicción en obtener los mismos resultados si se vuelen a tomar los datos de la muestra. De hecho, los resultados que se consiguen con un nivel de confianza del 0% nunca se llegarían a publicar ya que no se tendría la confianza de que los resultados fuesen precisos, antes se volvería a repetir el estudio estadístico.

Por otro lado, un **nivel de confianza del 100%** significa que no hay ninguna duda de que si se vuelve a repetir el estudio, se obtendrán exactamente los mismos resultados. En realidad, un nivel de confianza del 100% no existe en estadística, a menos que se haya estudiado a toda una población, e incluso en tal caso no se puede estar 100% seguro de que no se haya producido ningún error o sesgo durante la investigación.

Nivel de significación del 0% y del 100%

El valor del nivel de significación puede ir desde el 0% (α=0,00) hasta el 100% (α=1). No obstante, estos dos valores extremos no deberían ocurrir nunca en estadística ya que son dos valores irreales, a continuación, veremos por qué.

Un **nivel de significación del 0%** significa que no hay ninguna duda de que la hipótesis aceptada es realmente verdadera. Sin embargo, un nivel de significación del 0% no existe en estadística, a menos que se haya analizado a toda una población, e incluso en tal caso no se puede estar totalmente seguro de que no se haya producido ningún error o sesgo durante la investigación.

Por otro lado, un **nivel de significación del 100%** quiere decir que la hipótesis rechazada es verdadera sin lugar a duda. Pero, lógicamente, si unos resultados se consiguen con un nivel de significación del 100% nunca se llegarían a publicar ya que no se tendría la confianza de que los resultados fuesen precisos, antes se volvería a repetir el estudio estadístico.

Diferencia entre nivel de significación y nivel de confianza

Dos conceptos estrechamente relacionados en estadística y que se deben tener claros son el nivel de significación y el nivel de confianza. Por eso en este apartado veremos cuál es la diferencia entre el nivel de significación y el nivel de confianza.

La **diferencia entre el nivel de significación y el nivel de confianza** es la probabilidad que definen. El **nivel de confianza** es la probabilidad de aceptar una hipótesis y que realmente sea verdadera, en cambio, el **nivel de significación** es la probabilidad de rechazar una hipótesis pero que en realidad sea verdadera.

Además, el nivel de significación más el nivel de confianza siempre dan como resultado la unidad. De modo que si el nivel de confianza de un intervalo de confianza es del 1-α, el nivel de significación de ese mismo intervalo es α.

$$\text{Nivel de significación} = \alpha$$

$$\text{Nivel de confianza} = 1 - \alpha$$

Por ejemplo, si el nivel de confianza de un intervalo de confianza es del 95%, su nivel de significación es del 5%. Esto significa que, si repetimos 100 veces el estudio estadístico, 95 veces obtendremos un resultado que coincide con el de la población real, mientras que 5 veces obtendremos un resultado erróneo.

Nivel de significación y p-valor

Para terminar, veremos cuál es la relación entre el nivel de significación y el p-valor, pues son dos conceptos muy utilizados en el contraste de hipótesis.

El **p-valor**, también llamado **valor p**, es un valor entre 0 y 1 que indica la probabilidad de que la diferencia observada sea casualidad. De modo que el p-valor indica la importancia de un resultado y se usa para determinar si una hipótesis es cierta o falsa.

Así pues, en el contraste de hipótesis, si el p-valor es mayor que el nivel de significación se toma la hipótesis nula como verdadera. Por otro lado, si el p-valor es menor que el nivel de significación se rechaza la hipótesis nula y se toma la hipótesis alternativa como verdadera.