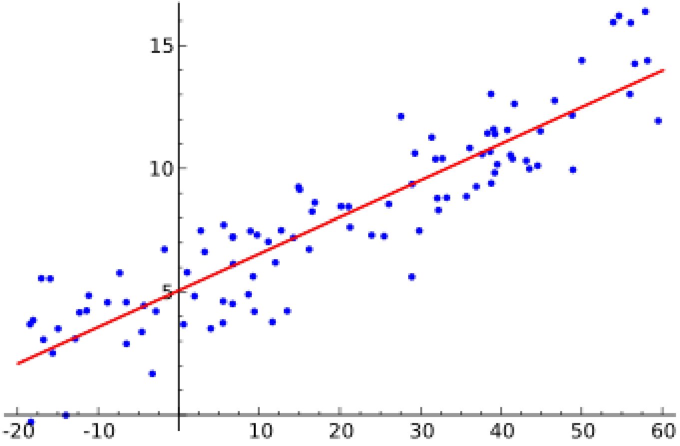
Universidad Andrés Bello
Facultad De Ingeniería
Ingeniería Civil Industrial
Ingeniería Industrial

Gestión de la Producción



Unidad 3: Pronósticos de demanda

Parte 2: Regresión Lineal

Profesor: Germán Paredes(german.paredes@unab.cl)
Centro de Logística y Transporte (http://cli.unab.cl/)

Métodos Causales: Regresión Lineal

- Estudia relaciones causa-efecto.

- Modelos utilizados cuando se dispone de datos históricos y la relación entre el factor que se intenta pronosticar y otros factores internos o externos puede identificarse.

- Modelos más sofisticados e ideales para realizar pronósticos a largo plazo.

- Veremos el método de **Regresión Lineal**.

Métodos Causales: Regresión Lineal

Ventajas

- Posee instrumentos más refinados de pronósticos.
- Excelente para prever puntos de inflexión de la demanda.
- Útil para pronósticos de mediano o largo plazo.

Regresión lineal consiste en que una variable dependiente se relaciona con una o más variables independiente por medio de una expresión algebraica.

Ejemplo:

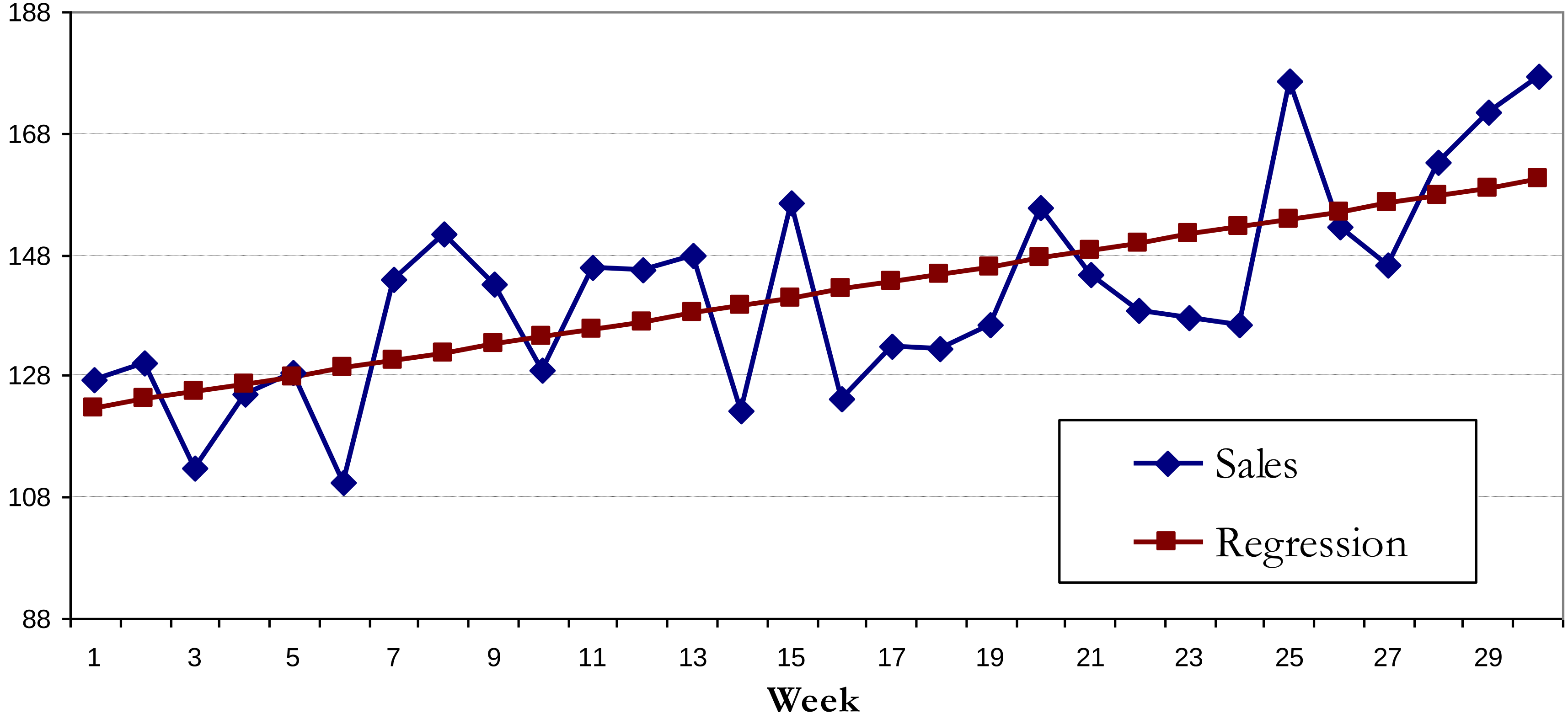
Variable dependiente: se quiere pronosticar la demanda de personas que utilizan UBER en la región de Valparaíso.

Variable independiente: publicidad implícita en TV, Competencia, 'Insatisfacción' con otros servicios similares etc.

Otro ejemplo: ¿Chalecos reflectantes?

Modelo de mayor sencillez: $y = a + bx$

Regresión Lineal



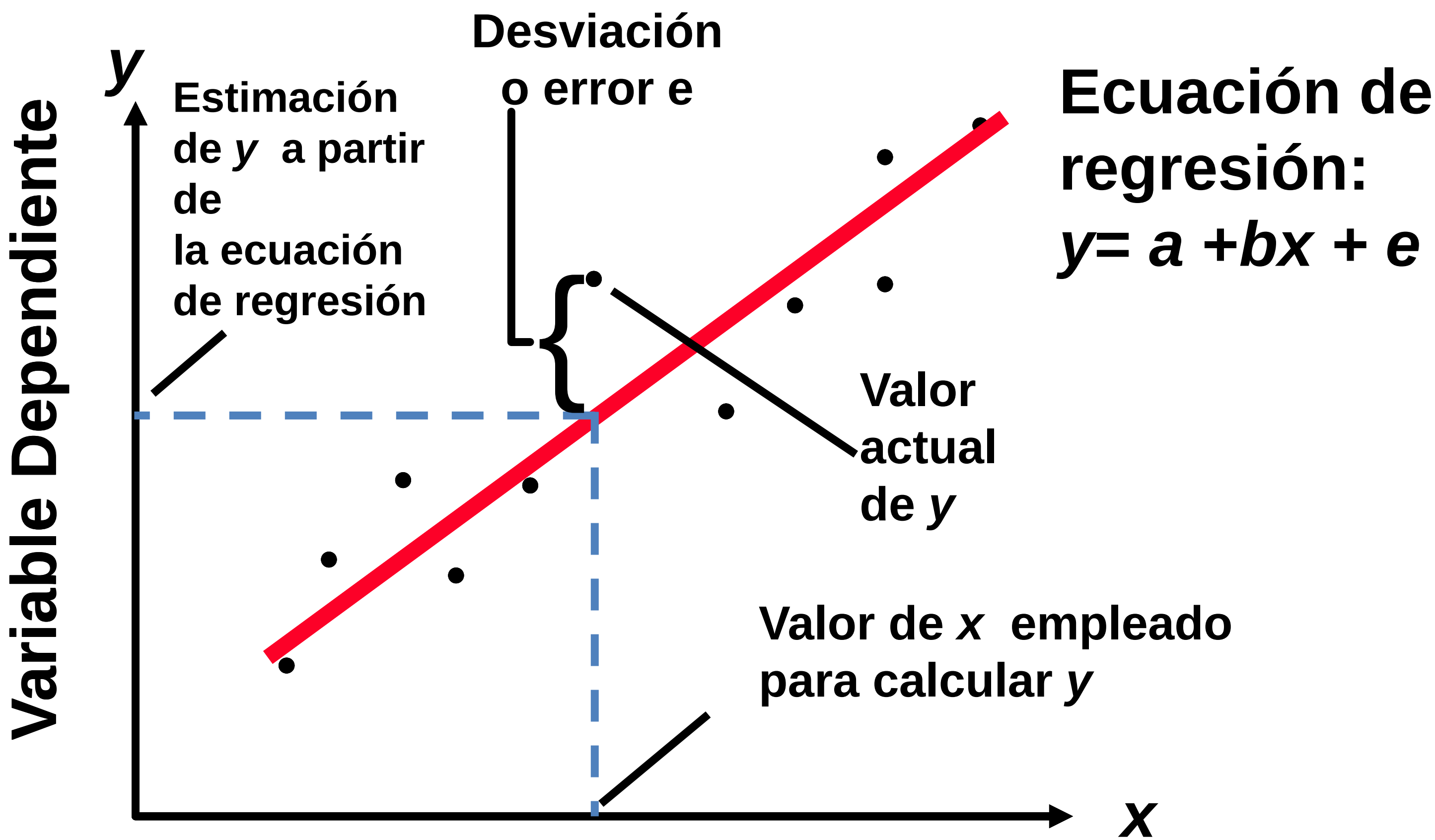
Regresión Lineal

- La recta de regresión tiene la forma ***y = a + bx +e***, donde ***y*** es la variable dependiente (observada) y ***x*** es la variable independiente (predictora, regresora), ***a*** es la secante en *y*, ***b*** es la pendiente de la recta y ***e*** es el error aleatorio (diferencia entre valor observado y línea de regresión).

- ***Otros ejemplos causalidad***: demanda-precio; ventas-publicidad, ingresos-monto de seguros, ventas-temperatura, horas estudio-nota.

- Interpretación de b: Cada vez que la variable ***x*** aumente en 1 unidad, la variable ***y*** aumentará (disminuirá) en ***b*** unidades.

Regresión Lineal



Regresión Lineal

- **Objetivo del análisis de regresión lineal:** Encontrar los valores de **a** y **b** que minimicen la suma de las desviaciones **(errores)** al cuadrado de los puntos reales de la gráfica.

Regresión Lineal

- Medidas de uso común para evaluar la precisión del pronóstico:

  – Coeficiente de correlación ***r***: mide la dirección, fuerza de la relación entre *x* e *y*. Varía entre -1 y 1. Si $|r|>0.75$ se puede decir que existe relación lineal entre las variables.

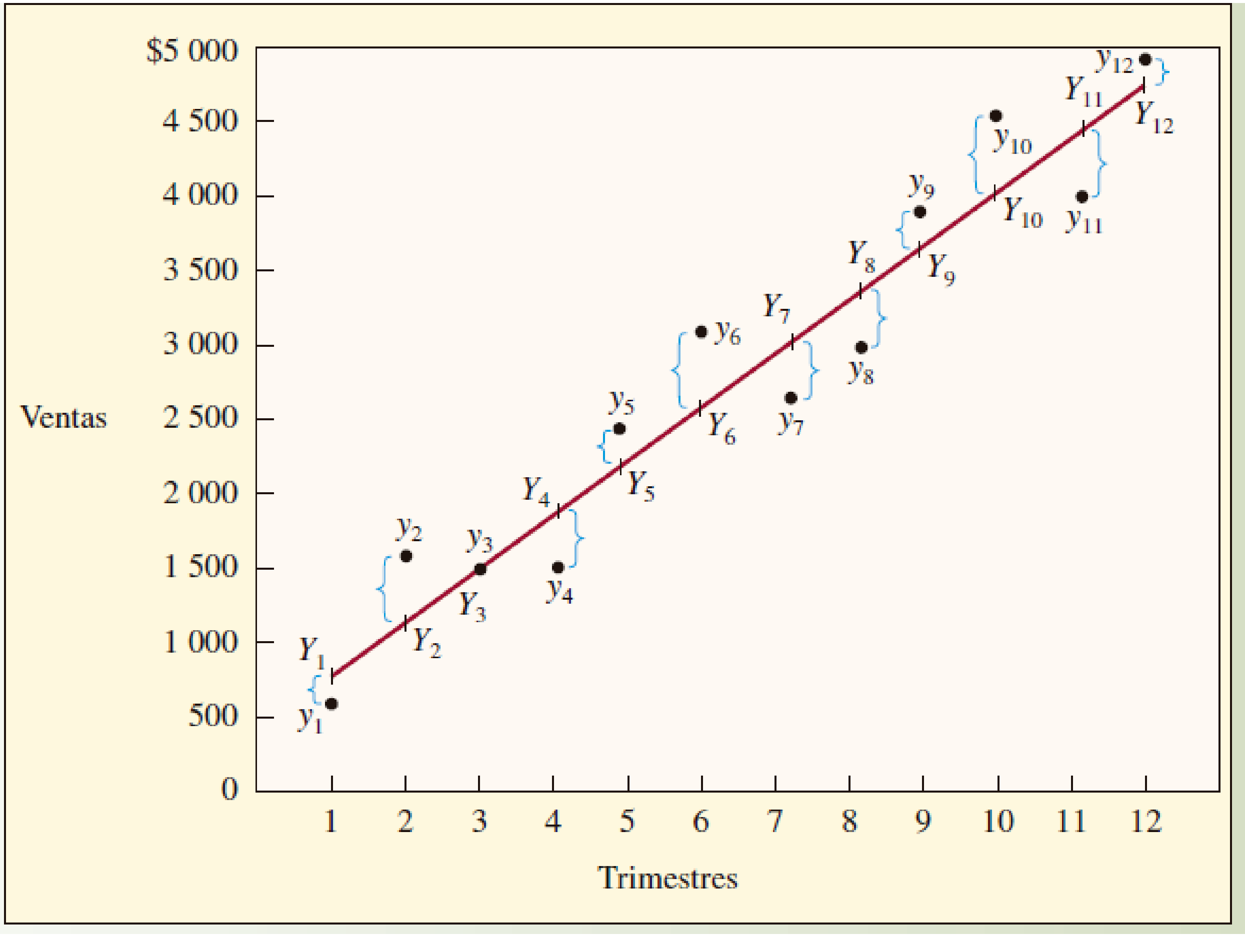
  – Coeficiente de determinación r^2: mide que proporción de la variación que presenta la variable *y* es explicada por la variable *x* del modelo. Varía entre 0 y 1.

  – Error estándar promedio. Mide la proximidad con que los datos de *y* se agrupan en la línea de regresión.

Regresión Lineal: mínimos cuadrados

- El método de mínimos cuadrados ajusta los datos que reducen al mínimo la suma de los cuadrados de la distancia vertical entre cada punto de datos y el punto correspondiente en la recta.

Trimestre	Ventas
1	600
2	1550
3	1500
4	1500
5	2400
6	3100
7	2600
8	2900
9	3800
10	4500
11	4000
12	4900



Regresión Lineal: mínimos cuadrados

Determinación de la Recta:

$$y = a + bx$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum xy - n\bar{x} \times \bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

Error estándar del estimado:

$$CME = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (E_i)^2}{n-2}}$$

Desviación media absoluta

$$MAD = \sum_i \frac{|E_i|}{n} \qquad E_i = y_i - Y_i$$

Error Cuadrático Medio Insesgado

$$S_{yx} = \sum_i \frac{E_i^2}{n}$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (E_i - \bar{E})^2}{n-1}}; \quad \bar{E} = \sum_i E_i \Big/ n$$

Regresión Lineal: mínimos cuadrados

- Coeficiente de Correlación

$$r = \frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 * \sum_i \left(y_i - \bar{y}\right)^2}}$$

Regresión Lineal: ejemplo

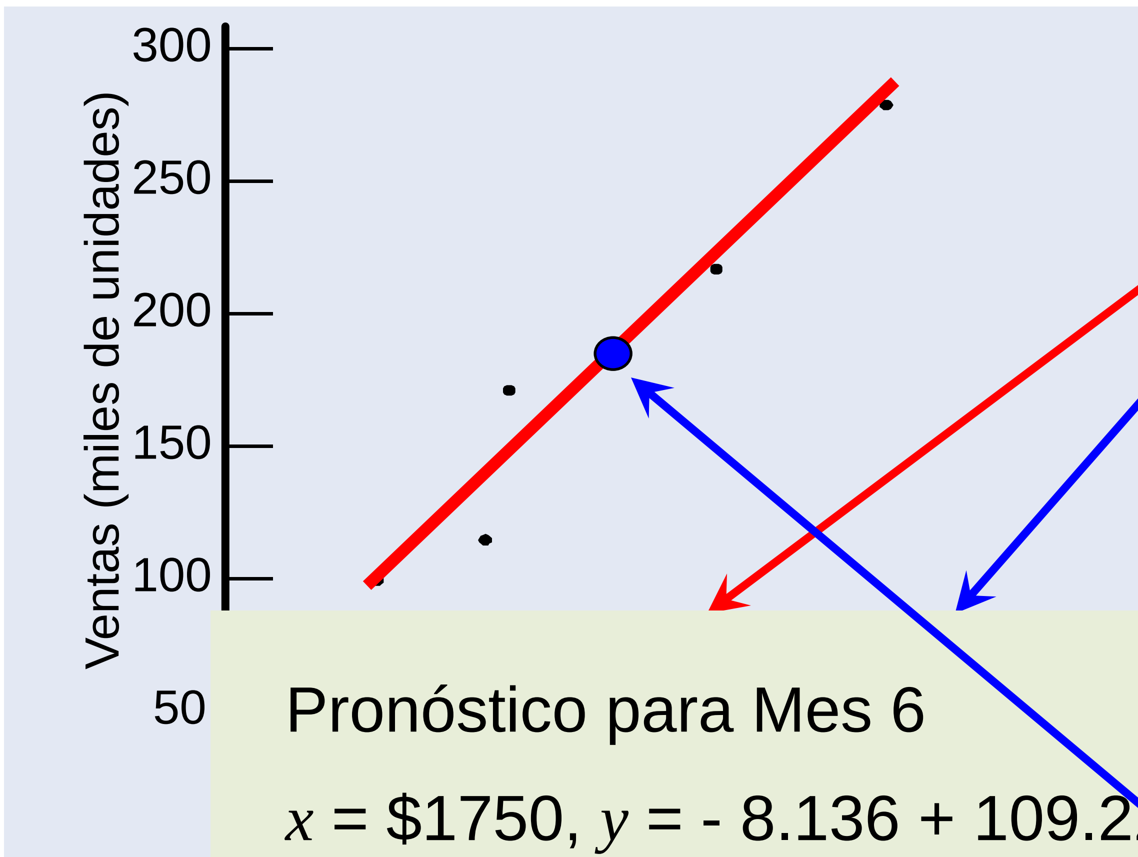
Mes	Ventas (miles de unidades)	Publicidad (miles de $)
1	264	2.5
2	116	1.3
3	165	1.4
4	101	1.0
5	209	2.0

a = - 8.136
b = 109.229
r = 0.98
r^2 = 0.96
s_{yx} = 15.61

Gasto en publicidad para el mes 6 es de $ 1.750

Antecedentes cuantitativos obtenidos a través de la calculadora

Regresión Lineal: ejemplo

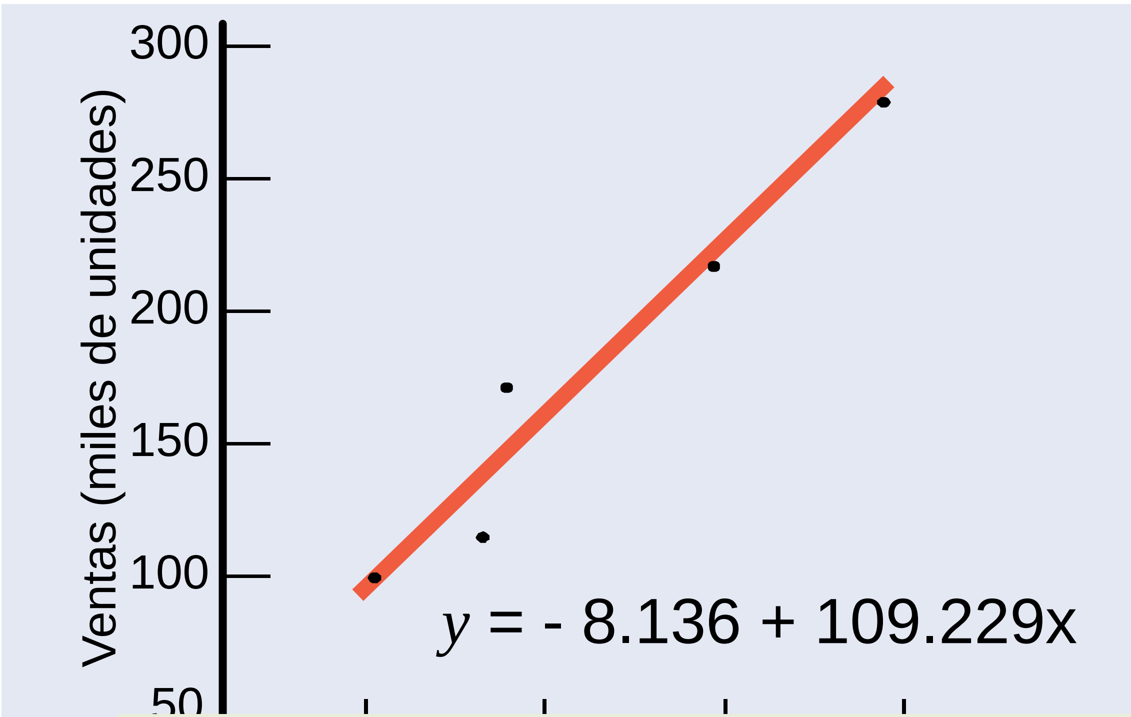


a = - 8.136
b = 109.229
r = 0.98
r^2 = 0.96
s_{yx} = 15.61

Pronóstico para Mes 6

x = \$1750, y = - 8.136 + 109.229(1.75)

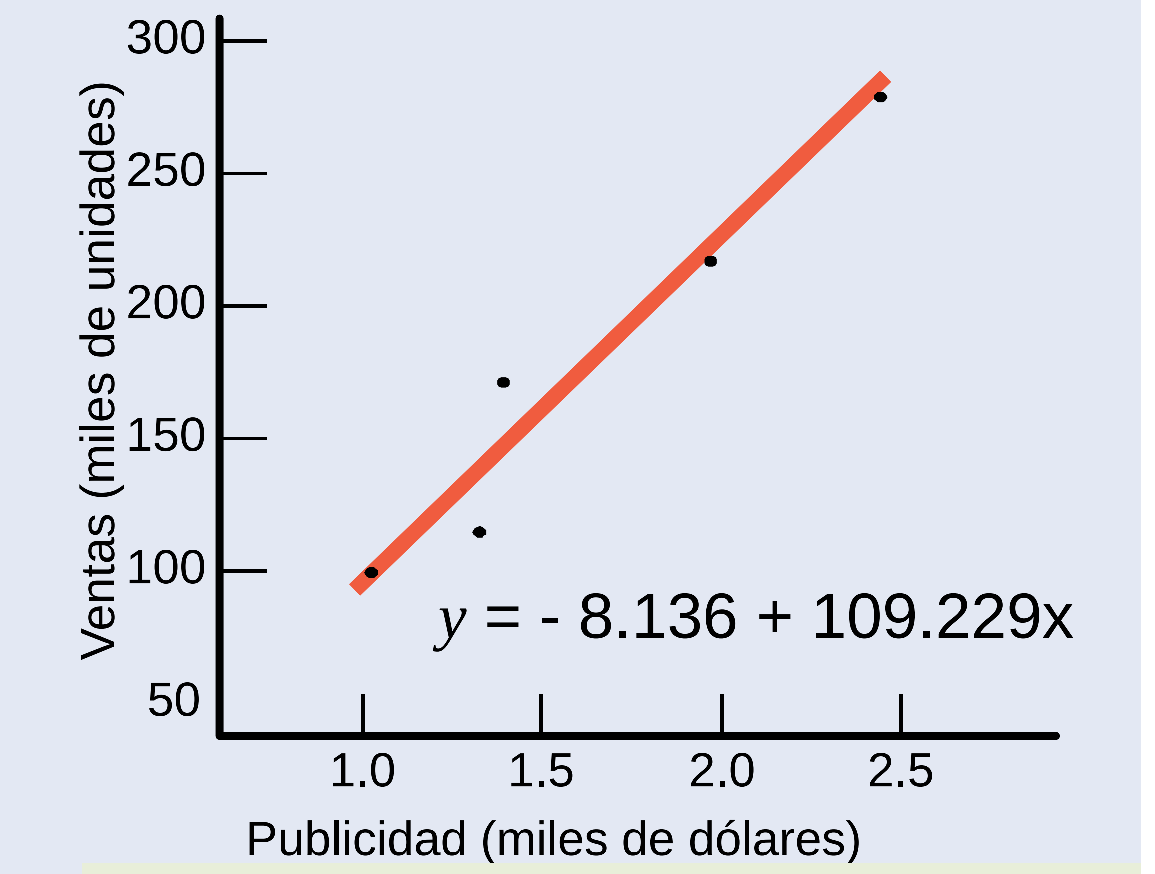
Regresión Lineal: ejemplo



a = - 8.136
b = 109.229
r = 0.98
r^2 = 0.96
s_{yx} = 15.61

El ingeniero a cargo de producción puede utilizar este pronóstico para saber las unidades que necesitará en el mes 6. Si suponemos que se tiene en inventario 62.500 unidades, ¿Cuánto deberá planificar como producción?.

Regresión Lineal: ejemplo



$a = -8.136$
$b = 109.229$
$r = 0.98$
$r^2 = 0.96$
$s_{yx} = 15.61$

Se tiene en inventario = 62,500 unidades,

Producción = 183,015 - 62,500 = 120,015 unidades

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	Ventas (000 unidades)	Publicidad (000 $)
1	264	2.5
2	116	1.3
3	165	1.4
4	101	1.0
5	209	2.0

$$a = ?$$
$$b = ?$$
$$r = ?$$
$$r^2 = ?$$

Si no se tiene calculadora o bien se pide su demostración.

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	Ventas (miles unidades)	Publicidad (miles $)
1	264	2.5
2	116	1.3
3	165	1.4
4	101	1.0
5	209	2.0

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

$$b = \frac{\sum xy - n\overline{x}\overline{y}}{\sum x^2 - n\overline{x}^2}$$

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	Ventas, *y* (miles unidades)	Publicidad, *x* (miles $)	*xy*	x^2	y^2
1	264	2.5	660.0	6.25	69,696
2	116	1.3	150.8	1.69	13,456
3	165	1.4	231.0	1.96	27,225
4	101	1.0	101.0	1.00	10,201
5	209	2.0	418.0	4.00	43,681

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

$$b = \frac{\sum xy - n\overline{x}\overline{y}}{\sum x^2 - n\overline{x}^2}$$

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	Ventas, y (miles unidades)	Publicidad, x (miles $)	xy	x^2	y^2
1	264	2.5	660.0	6.25	69,696
2	116	1.3	150.8	1.69	13,456
3	165	1.4	231.0	1.96	27,225
4	101	1.0	101.0	1.00	10,201
5	209	2.0	418.0	4.00	43,681
Total	855	8.2	1560.8	14.90	164,259
	$\bar{y} = 171$	$\bar{x} = 1.64$			

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	Ventas, y (miles unidades)	Publicidad, x (miles \$)	xy	x^2	y^2
1	264	2.5	660.0	6.25	69,696
2	116	1.3	150.8	1.69	13,456
3	165	1.4	231.0	1.96	27,225
4	101	1.0	101.0	1.00	10,201
5	209	2.0	418.0	4.00	43,681
Total	855	8.2	1560.8	14.90	164,259
	$\bar{y} = 171$	$\bar{x} = 1.64$			

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{1560.8 - 5(1.64)(171)}{14.90 - 5(1.64)^2}$$

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	Ventas, y (miles unidades)	Publicidad, x (miles $)	xy	x^2	y^2
1	264	2.5	660.0	6.25	69,696
2	116	1.3	150.8	1.69	13,456
3	165	1.4	231.0	1.96	27,225
4	101	1.0	101.0	1.00	10,201
5	209	2.0	418.0	4.00	43,681
Total	855	8.2	1560.8	14.90	164,259
	$\bar{y} = 171$	$\bar{x} = 1.64$			

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad b = 109.229$$

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	Ventas, *y* (miles unidades)	Publicidad, *x* (miles $)	*xy*	x^2	y^2
1	264	2.5	660.0	6.25	69,696
2	116	1.3	150.8	1.69	13,456
3	165	1.4	231.0	1.96	27,225
4	101	1.0	101.0	1.00	10,201
5	209	2.0	418.0	4.00	43,681
Total	855	8.2	1560.8	14.90	164,259
	$\bar{y} = 171$	$\bar{x} = 1.64$			

$a = 171 - 109.229(1.64)$ $\quad b = 109.229$

FORMAR

TRANSFORMAR

UNIVERSIDAD ANDRES BELLO

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	Ventas, y (miles unidades)	Publicidad, x (miles $)	xy	x^2	y^2
1	264	2.5	660.0	6.25	69,696
2	116	1.3	150.8	1.69	13,456
3	165	1.4	231.0	1.96	27,225
4	101	1.0	101.0	1.00	10,201
5	209	2.0	418.0	4.00	43,681
Total	855	8.2	1560.8	14.90	164,259
	$\bar{y} = 171$	$\bar{x} = 1.64$			

$a = -8.136$ $\qquad$ $b = 109.229$

Regresión Lineal: ejemplo

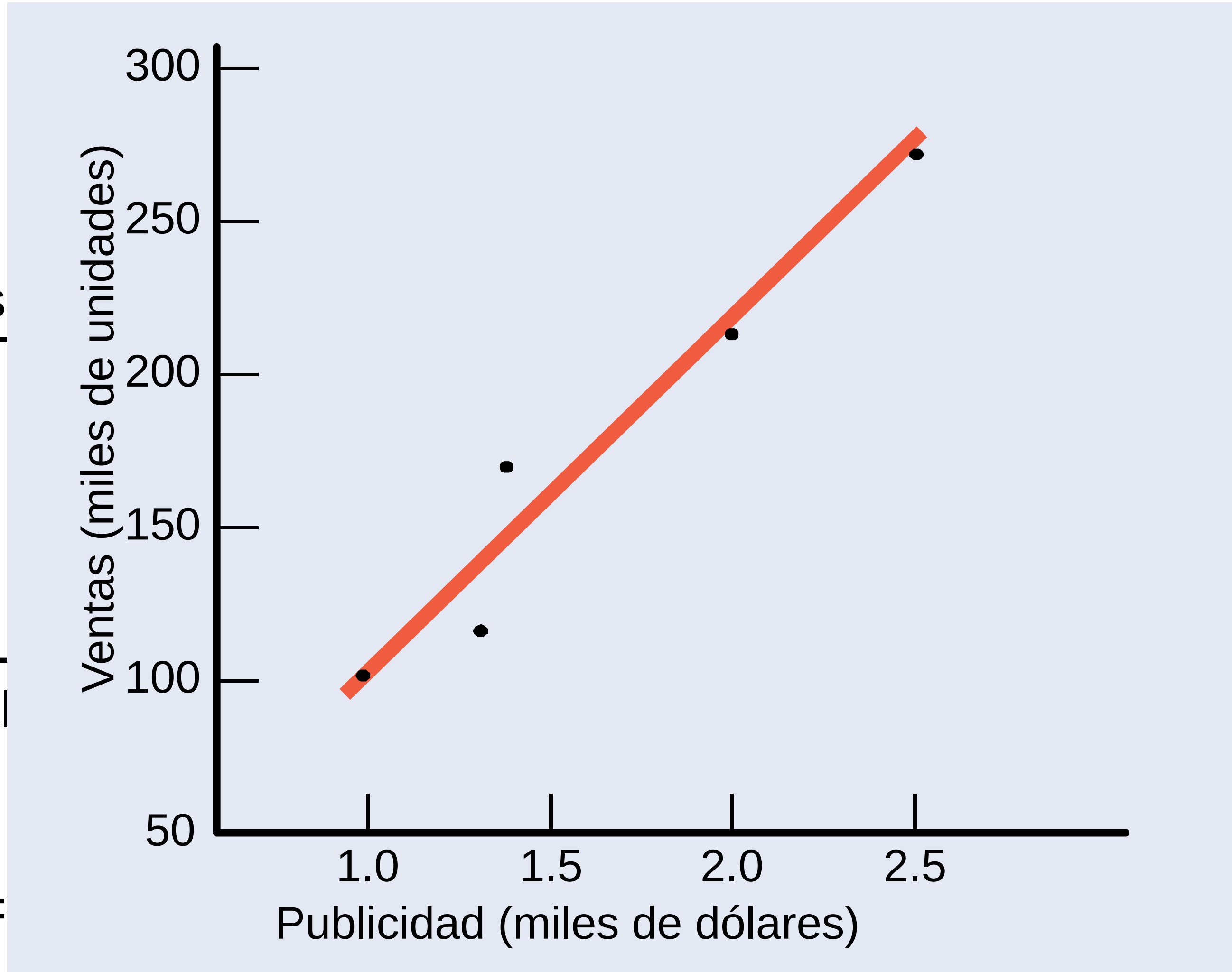
$$y = -8.136 + 109.229(x)$$

Mes	Ventas, y (miles unidades)	Publicidad, x (miles \$)	xy	x^2	y^2
1	264	2.5	660.0	6.25	69,696
2	116	1.3	150.8	1.69	13,456
3	165	1.4	231.0	1.96	27,225
4	101	1.0	101.0	1.00	10,201
5	209	2.0	418.0	4.00	43,681
Total	855	8.2	1560.8	14.90	164,259
	$\bar{y} = 171$	$\bar{x} = 1.64$			

$a = -8.136$ $\qquad$ $b = 109.229$

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	
1	96
2	56
3	25
4	01
5	81
Total	259



$a =$

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	Ventas, y (miles unidades)	Publicidad, x (miles $)	xy	x^2	y^2
1	264	2.5	660.0	6.25	69,696
2	116	1.3	150.8	1.69	13,456
3	165	1.4	231.0	1.96	27,225
4	101	1.0	101.0	1.00	10,201
5	209	2.0	418.0	4.00	43,681
Total	855	8.2	1560.8	14.90	164,259
	$\bar{y} = 171$	$\bar{x} = 1.64$			

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	Ventas, y (miles unidades)	Publicidad, x (miles $)	xy	x^2	y^2
1	264	2.5	660.0	6.25	69,696
2	116	1.3	150.8	1.69	13,456
3	165	1.4	231.0	1.96	27,225
4	101	1.0	101.0	1.00	10,201
5	209	2.0	418.0	4.00	43,681
Total	855	8.2	1560.8	14.90	164,259
	$\bar{y} = 171$	$\bar{x} = 1.64$			

$$r = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{\sqrt{[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2][n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]}}$$

Coeficiente de correlación de la muestra

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	Ventas, y (miles unidades)	Publicidad, x (miles $)	xy	x^2	y^2
1	264	2.5	660.0	6.25	69,696
2	116	1.3	150.8	1.69	13,456
3	165	1.4	231.0	1.96	27,225
4	101	1.0	101.0	1.00	10,201
5	209	2.0	418.0	4.00	43,681
Total	855	8.2	1560.8	14.90	164,259
	$\bar{y} = 171$	$\bar{x} = 1.64$			

$r = 0.98$

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	Ventas, y (miles unidades)	Publicidad, x (miles \$)	xy	x^2	y^2
1	264	2.5	660.0	6.25	69,696
2	116	1.3	150.8	1.69	13,456
3	165	1.4	231.0	1.96	27,225
4	101	1.0	101.0	1.00	10,201
5	209	2.0	418.0	4.00	43,681
Total	855	8.2	1560.8	14.90	164,259
	$\bar{y} = 171$	$\bar{x} = 1.64$			

$r = 0.98$ $\quad$ $\underbrace{r^2 = 0.96}_{\text{Coeficiente de}}$ $\quad$ $\underbrace{\sigma_{YX}}_{\text{Desviación}} = 15.61$

Regresión Lineal: ejemplo

Mes	y^2
1	9,696
2	3,456
3	7,225
4	0,201
5	3,681
Tota	54,259

Pronóstico para Mes 6:

Gasto de publicidad = $1750

y = 183.015 o 183,015 bisagras

$r = 0.98$ $r^2 = 0.96$ $\sigma_{YX} = 15.61$

Modelos Intrínsecamente Lineales

- En ocasiones el modelo a ajustar no es lineal:

$$y_i = ae^{-bx_i} \qquad \frac{1}{y_i} = a + b\frac{1}{x_i} \qquad y_i = ax_i^{\,b}$$

- ¿Qué hacer para poder utilizar las expresiones determinadas en la sección anterior?

$$y_i = a + bx_i$$

Regresión lineal: actividad en clases

- Un vendedor de helados señala que sus ventas (unidades) dependen de la temperatura promedio (°F).

Ventas	Temperatura
110	72
127	79
140	85
151	90
89	66
187	95
205	100
190	98
136	82
165	91

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(E_i - \bar{E}\right)^2}{n-1}}; \quad \bar{E} = \sum_i E_i \Big/ n$$

$$r = \frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 * \sum_i \left(y_i - \bar{y}\right)^2}}$$

$$y = a + bx$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum xy - n\bar{x} \times \bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

- Determine si la causalidad es correcta
- Determine la ecuación de pronóstico.
- Determine el error estándar
- Determine e interprete el coeficiente de determinación r^2
- Determine el número de helados vendidos si la temperatura es de 95.