# Probabilidades

---

## Los 3 axiomas de las probabilidades (Axiomas de Kolmogorov)

- Todo evento dentro de un espacio muestral debe existir (ser mayor a 0)
- Todo evento **mutuamente excluyente** responde a su suma. Los eventos son **mutuamente excluyentes** si sólo uno de ellos puede ocurrir cuando realizamos una prueba => **P (A ∪ B) = P (A) + P(B)**
- Decimos que son **mutuamente excluyentes** cuando NO HAY ELEMENTOS EN INTERSECCIÓN
- La probabilidad de todos los eventos en un espacio muestral será de 1

**Definición (Los tres axiomas de las probabilidades)**

Consideremos un espacio muestral $\Omega$ y dos sucesos $A$ y $B$.

1. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$ cuando $A$ y $B$ son sucesos excluyentes.

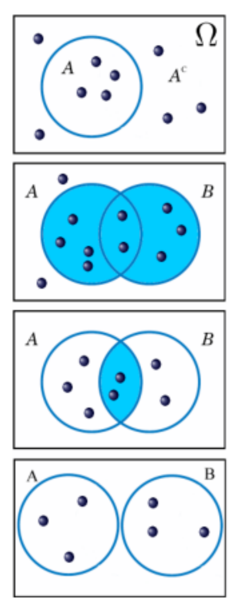
---

## Los sucesos

**Los Sucesos**

Se entenderá por experimento al proceso de obtener una observación y representa cualquier situación que tenga más de un resultado.

- Un espacio muestral ($\Omega$) es un conjunto, no vacío, de todos los posibles resultados de un experimento.
- Un suceso es un subconjunto del espacio muestral.
- El complemento de un suceso $A$ ($A^c$) es el conjunto de todos los resultados en $\Omega$ que no están incluidos en $A$.
- La unión de los sucesos $A$ y $B$ ($A \cup B$) es el conjunto de todos los resultados que están incluidos en $A$ o $B$.
- La intersección de los sucesos $A$ y $B$ ($A \cap B$) es el conjunto de todos los resultados que están incluidos tanto en $A$ como en $B$.
- Dos sucesos $A$ y $B$ son mutuamente excluyentes si no tienen resultados en común. Es decir, $A \cap B = \phi$.



## Algunos teoremas relativos a conjuntos

| | | |
|---|---|---|
| *Teorema 1-2:* | $A \cup B = B \cup A$ | Ley conmutativa de las uniones |
| *Teorema 1-3:* | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ | Ley asociativa de las uniones |
| *Teorema 1-4:* | $A \cap B = B \cap A$ | Ley conmutativa de las intersecciones |
| *Teorema 1-5:* | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ | Ley asociativa de las intersecciones |
| *Teorema 1-6:* | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | Primera ley distributiva |
| *Teorema 1-7:* | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | Segunda ley distributiva |
| *Teorema 1-8:* | $A - B = A \cap B'$ | |
| *Teorema 1-9:* | Si $A \subset B$, entonces $A' \supset B'$ ó $B' \subset A'$ | |
| *Teorema 1-10:* | $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$ | |
| *Teorema 1-11:* | $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}, \quad A \cap \mathcal{U} = A$ | |
| *Teorema 1-12a:* | $(A \cup B)' = A' \cap B'$ | Primera ley De Morgan |
| *Teorema 1-12b:* | $(A \cap B)' = A' \cup B'$ | Segunda ley De Morgan |
| *Teorema 1-13:* | $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ | Para cualquier conjunto $A$ y $B$ |

---

## Propiedades de las probabilidades

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$ La probabilidad de un suceso es equivalente a uno menos la probabilidad de su suceso contrario. Por lo tanto, la suma de la probabilidad de un suceso más la probabilidad de su suceso opuesto da como resultado 1.

**Por ejemplo**, la probabilidad de obtener el número 5 al lanzar un dado es de 0,167, pues podemos determinar la probabilidad de sacar cualquier otro número utilizando esta propiedad probabilística:

$$\mathbb{P}(5) = 0{,}167$$
$$\mathbb{P}(1,2,3,4,6) = 1 - P(5) = 0{,}833$$

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ La probabilidad de un suceso imposible es 0. Lógicamente, si un determinado resultado de un experimento aleatorio no puede suceder, su probabilidad de ocurrencia es nula.

**Por ejemplo**, no podemos obtener el resultado del número 7 en el lanzamiento de un solo dado, por lo que la probabilidad de dicho suceso es igual a cero.

$$\mathbb{P}(7) = 0$$

$A \subset B \rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ Si un suceso está incluido dentro de otro suceso, la probabilidad del primer suceso debe ser menor o igual que la probabilidad del segundo suceso. Evidentemente, si un evento está incluido dentro de un conjunto de sucesos, el evento simple no puede ser tener una probabilidad de ocurrencia mayor que todo el conjunto.

**Por ejemplo**, la probabilidad de sacar el número 4 al lanzar un dado es de 0,167. Por otro lado, la probabilidad de obtener un número par (2, 4, 6) es 0,50. Por lo tanto, se cumple esta propiedad de la teoría de la probabilidad.

$$\mathbb{P}(4) = 0{,}167$$
$$\mathbb{P}(número\ par) = \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(6) = 0{,}167 + 0{,}167 + 0{,}167 = 0{,}5$$
$$\mathbb{P}(4) < \mathbb{P}(número\ par)$$

$\boldsymbol{A \cup B}$ ***es el suceso "A ó B o ambos"***

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ La probabilidad de la unión de dos sucesos es igual a la suma de la probabilidad de ocurrencia cada suceso por separado menos la probabilidad de su intersección.
En teoría de la probabilidad, esta propiedad se conoce como la regla de la suma

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$$

Dado un conjunto de sucesos incompatibles dos a dos, su probabilidad conjunta se puede calcular sumando la probabilidad de ocurrencia de cada suceso.

**Por ejemplo**, los diferentes resultados del lanzamiento de un dado son sucesos incompatibles, porque si sacamos un número ya no podemos obtener otro. Por lo tanto, para hallar la probabilidad de obtener un número impar podemos sumar la probabilidad de ocurrencia de los diferentes números impares:

$$\mathbb{P}(número\ impar) = \mathbb{P}(1 \cup 3 \cup 5)$$
$$\mathbb{P}(número\ impar) = \mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(3) + \mathbb{P}(5) = 0{,}167 + 0{,}167 + 0{,}167 = 0{,}5$$

$\boldsymbol{A \cap B}$ ***es el suceso "tanto A como B"***

$$\mathbb{P}(A \cap B)$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) + P(A \cap B)$$

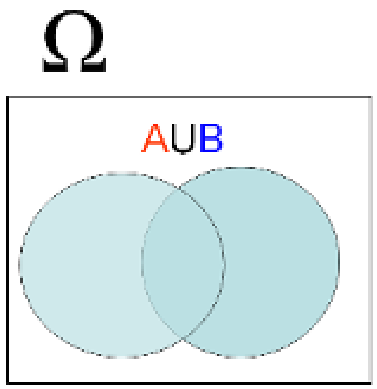
$A'$ ***es el suceso "no A"***

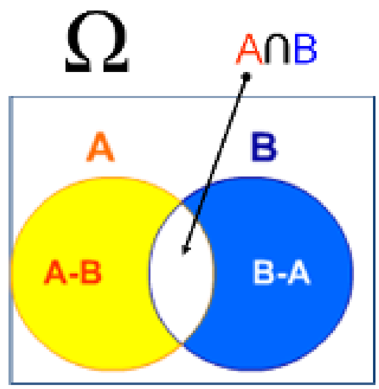
$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

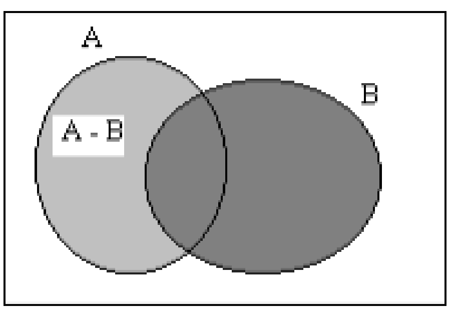
$A - B$ ***es el suceso "A pero no B"***

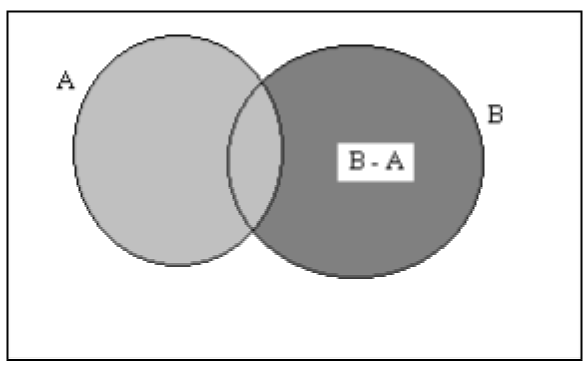
$$\mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

$$\mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$




$A'$ ***es el suceso "no A"***

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

***Probabilidad condicional: probabilidad de que suceda A dado que sucedió B***

$$\mathbb{P}(A / B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

## *Suceso independiente*

**La probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes es igual al producto de las probabilidades de suceder de cada evento por separado**.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

## *Suceso dependiente*

**Dos eventos son dependientes si la probabilidad de que suceda un evento afecta a la probabilidad de ocurrencia del otro evento.**

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B/A)$$

## *Probabilidad conjunta*

**La probabilidad de que dos sucesos ocurran al mismo tiempo. Esta fórmula solo puedes utilizarla si son dos eventos independientes, de lo contrario, debes usar la fórmula de la probabilidad condicional en el caso de que sean eventos dependientes**

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Corresponde a la intersección.

## Interpretación clásica de la probabilidad

### Interpretación clásica

Si se tienen $N$ resultados posibles de un experimento, de los cuales $N_E$ son resultados favorables al suceso $E$, entonces, la probabilidad del suceso $E$ es

$$\mathbb{P}(E) = \frac{N_E}{N}.$$

**Ejemplo**

- Si se lanza un dado (experimento), hay seis resultados posibles. Entonces el espacio muestral sería $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Estos seis resultados son mutuamente excluyentes, ya que no pueden aparecer dos o más caras simultáneamente.
- Si además suponemos que el dado está bien construido, los seis resultados son igualmente verosímiles (probable).
- Se desea conocer la probabilidad de que el resultado de una tirada sea un número par (suceso $E = \{2, 4, 6\}$). Tres de los seis resultados posibles tienen tal atributo. La probabilidad sería $\mathbb{P}(E) = 3/6 = 1/2$.

### Interpretación clásica

La aplicación de la anterior definición no siempre resulta tan inmediata como en estos casos sencillos. Examinemos cuidadosamente el sentido de mutuamente excluyentes y de igualmente verosímiles.

Supongamos que alguien deseara calcular la probabilidad de obtener dos caras lanzando una moneda dos veces.

- Podría razonarse que los resultados posibles en las dos tiradas son: dos caras (CC), dos sellos (SS), y una cara y un sello (CS).
- Como uno de estos resultados tiene el atributo que se desea, la probabilidad será 1/3. Este razonamiento es falso, porque los tres resultados no son igualmente verosímiles o probables.
- El espacio muestral correcto sería $\Omega = \{CC, SS, CS, SC\}$.
- La probabilidad de obtener dos caras lanzando una moneda dos veces sería de 1/4.

## Problemas de la interpretación clásica

- Puede existir el caso que los resultados posibles sean infinitos.
- No siempre se puede asumir la igualdad de verosimilitud. Por ejemplo, supongamos una moneda de la que sabemos que tiene un sesgo a favor de las caras.
    - Los dos resultados posibles al lanzar la moneda no son igualmente probables.
    - ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara?
    - La definición clásica nos deja sin posible respuesta.
- Tenemos dificultad cuando queremos responder a preguntas como:
    - ¿cuál es la probabilidad de que un individuo falte al trabajo?
    - ¿cuál es la probabilidad de que un cliente pague un crédito?
    - ¿cuál es la probabilidad de que un cliente sea leal con la compañía?

Estos problemas los resuelve la interpretación frecuencial de las probabilidades.

---

**Interpretación frecuencial de la probabilidad**

## Interpretación frecuencial

- Si un experimento se repite $n$ veces y el suceso $E$ ocurre en $n_E$ de ellas, la probabilidad del suceso $E$ es

$$\mathbb{P}(E) = \frac{n_E}{n}.$$

- Esta interpretación se basa en asociar una probabilidad a los sucesos según su "frecuencia relativa en el límite" y en la observación de un gran número de ensayos.
- Esta interpretación se basa en el concepto de "muestra eleatoria", por definición, se toma de tal manera que una muestra posible (de un tamaño específico) tiene la misma probabilidad de ser seleccionada que cualquier otra.

## Interpretación frecuencial

### Ejemplo

Un dado fue lanzado 300 veces, recogiéndose los resultados en la tabla siguiente:

| Resultado | Frecuencia | Proporción | Probabilidades clásicas |
|---|---|---|---|
| 1 | 51 | 0,170 | 1/6 |
| 2 | 54 | 0,180 | 1/6 |
| 3 | 48 | 0,160 | 1/6 |
| 4 | 51 | 0,170 | 1/6 |
| 5 | 49 | 0,163 | 1/6 |
| 6 | 47 | 0,157 | 1/6 |
| Total | 300 | 1,000 | 1 |

- Obsérvese cómo la frecuencia relativa de obtener un "uno" se aproxima a $1/6 = 0{,}1667$; análogamente para un "dos'", un "tres", un "cuatro", un "cinco' y un "seis".
- Según la interpretación frecuencial: La probabilidad de obtener un número par es de $(54+51+47)/300 = 0{,}507$.
- Según la interpretación clásica: La probabilidad de obtener un número par es de $3/6 = 0{,}500$.

## Ejemplo

A continuación se presentan la distribución del ingreso de 457 empleados según su género.

| | Ingresos | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sexo | Menos de 400 | Entre 400 y 800 | Más de 800 | Total |
| Mujer | 124 | 86 | 6 | 216 |
| Hombre | 19 | 174 | 48 | 241 |
| Total | 143 | 260 | 54 | 457 |

- ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo tenga un "ingreso superior a 800" ($A$)? Resp: $\mathbb{P}(A) = 54/457 = 0,118$.
- ¿Cuál es la probabilidad de tener un "ingreso superior a 800" ($A$) o "inferior a 400" ($B$)? Resp: Como los sucesos son excluyentes, $\mathbb{P}(A \cup B) = 54/457 + 143/457 = 0,431$.
- ¿Cuál es la probabilidad de tener un "ingreso superior a 800" ($A$) y "ser hombre" ($B$)? Resp: $\mathbb{P}(A \cap B) = 48/457 = 0,105$.

# Ejemplo

A continuación se presentan la distribución del ingreso de 457 empleados según su género.

| | Ingresos | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sexo | Menos de 400 | Entre 400 y 800 | Más de 800 | Total |
| Mujer | 124 | 86 | 6 | 216 |
| Hombre | 19 | 174 | 48 | 241 |
| Total | 143 | 260 | 54 | 457 |

- ¿Cuál es la probabilidad de tener un "ingreso superior a 800" ($A$) o "ser hombre" ($B$)? Resp: Como los sucesos no son excluyentes, $\mathbb{P}(A \cup B) = 54/457 + 241/457 - 48/457 = 0,540$.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo no tenga un "ingreso superior a 800" ($A$)? Resp: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - 54/457 = 0,882$.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo "sea hombre" ($A$) y no tenga un "ingreso superior a 800" ($B$)?
Resp: $\mathbb{P}(A \cap B^c) = 241/457 - 48/457 = 0,422$.

---

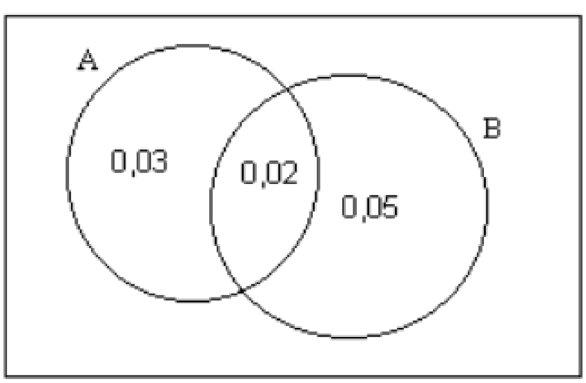
**Ejemplo 1**

2) De la producción de tornillos de cierta magnitud resulta que el 5 % de ellos no tienen el largo especificado, el 7 % no tienen el diámetro especificado y el 2 % tiene ambos defectos. Se elige un tornillo al azar de la producción de estas magnitudes. ¿Cuál es la probabilidad que:

a) tenga al menos uno de los dos defectos?.
b) tenga sólo el defecto del largo?
c) tenga sólo uno de los dos defectos?
d) no tenga defectos?

Solución

A = {tornillos con defecto del largo}
B = {tornillos con defecto del diámetro}



$$\text{a) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,05 + 0,07 - 0,02 = 0,10$$

La probabilidad de que tenga al menos uno de los dos defectos es de 0,10

$$\text{b) } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,05 - 0,02 = 0,03$$

La probabilidad de que tenga sólo el defecto del largo es de 0,03

$$\text{c) } P(A - B) + P(B - A) = (0,03) + [P(B) - P(A \cap B)] = 0,03 + 0,07 - 0,02 = 0,08$$

La probabilidad de que tenga sólo uno de los dos defectos es de 0,08

$$\text{d) } P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,10 = 0,90$$

La probabilidad de que no tenga defectos es de 0,90

---

**Ejemplo 2**

## Sucesos Compatibles - Ejemplo

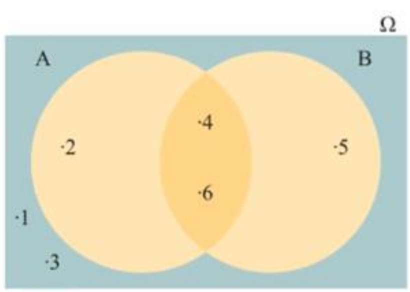
Consideremos el experimento de lanzar un dado. El espacio muestral es $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par o no menor que 4?

A : "Obtener un número par" $A = \{2; 4; 6\}$

B : "Obtener un número no menor que 4" $B = \{4; 5; 6\}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$




$$P(A) = \frac{3}{6} \qquad P(B) = \frac{3}{6} \qquad P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \Rightarrow \quad P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

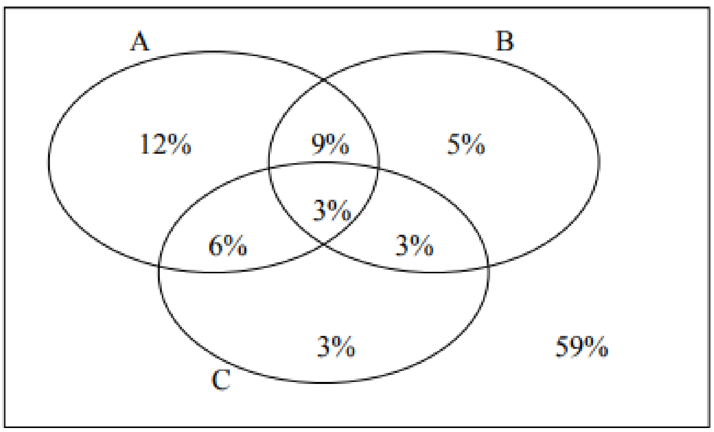
---

## Ejemplo 3

En una ciudad se publican tres periódicos A, B y C. El 30% de la población lee A, el 20% lee B, y el 15% lee C; el 12% lee A y B, el 9% lee A y C, el 6% B y C, y finalmente, el 3% lee A, B y C. Se pide:

a) Porcentaje de personas que leen al menos uno de los tres periódicos.
b) Porcentaje que leen sólo A.
c) Porcentaje que leen B ó C, pero no A.
d) ¿cuál es la probabilidad que una persona lea A, si se sabe que lee B?

Solución:




a) P(al menos uno) = P(1 o 2 o 3 periódicos) = 0,41
Corresponde a la suma de todos los sectores, que suman 41%

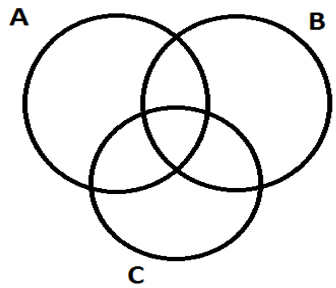
b) P(sólo leen A) = 0,12
Solo el 12% está en A sin estar en los demás.

c) P(leen B o C, pero no A) = 0,11
5% + 3% + 3% = 11% están en B o en C, sin incluir A.

d) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}20} = 0{,}6$
del total de lectores de B, el 60% también lee A.

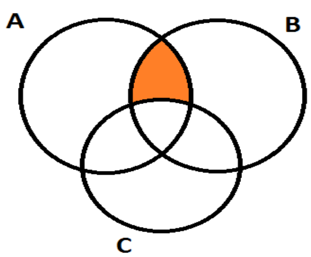
a) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
$P(A \cup B \cup C) = 0{,}30 + 0{,}20 + 0{,}15 - 0{,}12 - 0{,}09 - 0{,}06 + 0{,}03 = 0{,}41$

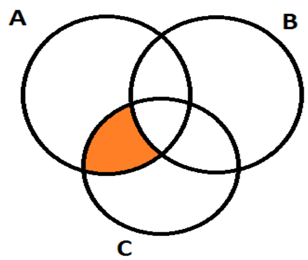
c) $P((B \cup C) - A) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
$P((B \cup C) - A) = 0{,}20 + 0{,}15 - 0{,}06 - 0{,}12 - 0{,}09 + 0{,}03 = 0{,}11$

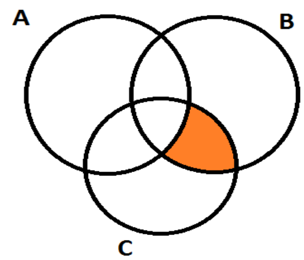



$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Cuando se suma el conjunto A, el conjunto B y el conjunto C, se está sumando dos veces las secciones de $(A \cap B)$, $(A \cap C)$ y $(B \cap C)$ :

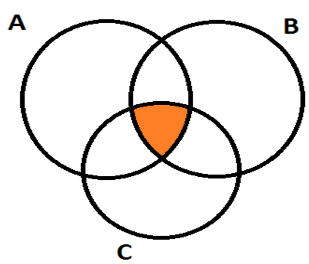






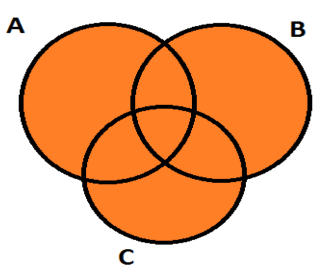

De esta manera se resta una vez cada sección para que queda solo una vez en la igualdad:

$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$




Y al realizar el paso anterior se está restando la sección $(A \cap B \cap C)$ tres veces, por lo que se debe sumar una vez:

$+ P(A \cap B \cap C)$




Así obtenemos la totalidad:

$P(A \cup B \cup C)$

## Ejemplo 4

3) De un total de 500 estudiantes, se encuentra que 210 fuman, que 258 toman bebidas alcohólicas, que 216 toman alimentos entre comidas, que 122 fuman y toman bebidas alcohólicas, que 83 toman alimentos entre comidas y también bebidas alcohólicas, que 97 fuman y toman alimentos entre comidas y que 52 practican estos tres dañinos hábitos. Si se escoge aleatoriamente a un miembro de esta generación, encuentre la probabilidad de que el estudiante :

a) fumen, pero no tome bebidas alcohólicas.
b) tome alimentos entre comidas e ingiera bebidas alcohólicas, pero no fume.
c) no fume y no tome alimentos entre comidas.

4) La probabilidad de que una industria XX se ubique en la ciudad A es de 0,7; de que se localice en la cuidad B es de 0,4 y de que se encuentre en A o en B, o en ambas es de 0,8. ¿Cuál es la probabilidad de que la industria se localice :

a) en ambas cuidades?.
b) en ninguna de ellas?.

5) En una bolsa hay 36 fichas numeradas del 1 al 36, respectivamente. Si se extrae una ficha, calcular la probabilidad de que la ficha extraída sea :

a) un número par
b) un número primo
c) un múltiplo de 5
d) un número terminado en 2
e) un número divisible por 6
f) un número impar mayor que 20.

---

3)

a) La probabilidad de que fumen, pero no tome bebidas alcohólicas es $\frac{88}{500}$

b) La probabilidad de que tome alimentos entre comidas e ingiera bebidas alcohólicas, pero no fume es $\frac{31}{500}$

c) La probabilidad de que no fume y no tome alimentos entre comidas es $\frac{171}{500}$

4)

a) La probabilidad de que la industria se localice en ambas ciudades es $0,3$

b) La probabilidad de que la industria no se localice en ninguna de ellas es $0,2$

5)

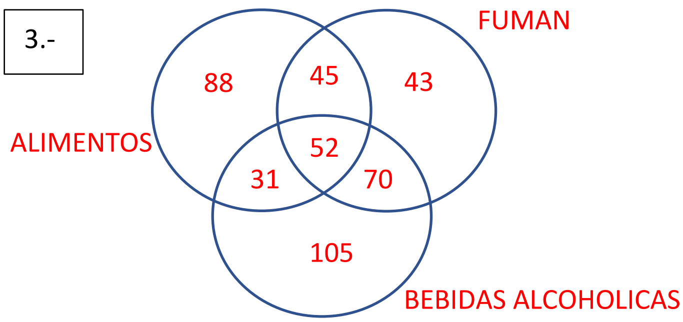
a) La probabilidad de que la ficha extraída sea un número par es $\frac{1}{2}$

b) La probabilidad de que la ficha extraída sea un número primo es $\frac{11}{36}$

c) La probabilidad de que la ficha extraída sea un múltiplo de 5 es $\frac{7}{36}$

d) La probabilidad de que la ficha extraída sea un número terminado en 2 es $\frac{1}{9}$

3.-




C) $(A^C \cap B^C) = (A \cup B)^C = 1 - (A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

## Probabilidad condicionada

La probabilidad condicional, también llamada **probabilidad condicionada**, es una medida estadística que indica la probabilidad de que ocurra un evento A si otro evento B ha sucedido. Es decir, la probabilidad condicional P(A|B) se refiere a cuánto de probable es que suceda el evento A una vez ya se ha producido el evento B.

La probabilidad condicional se escribe con una barra vertical entre los dos eventos: P(A|B), y se lee *«la probabilidad condicional del evento A dado el evento B»*.

Ten en cuenta que el valor de la probabilidad condicional es un número entre 0 y 1. Cuanto mayor sea la probabilidad condicional, más probable será de que el evento A se cumpla cuando ocurra el evento B, pero cuanto menor sea la probabilidad condicional, menos probable será que el evento A se cumpla cuando suceda el evento B.

---

## Fórmula de la probabilidad condicional

La probabilidad condicional del evento A dado el evento B es igual a la probabilidad de la intersección entre el evento A y el evento B partido por la probabilidad del evento B.

$$\mathbb{P}(A\ /\ B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

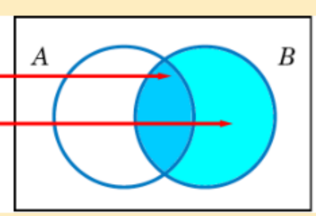
Ten en cuenta que la fórmula de la probabilidad condicional (o probabilidad condicionada) solamente se puede utilizar si la probabilidad de ocurrencia del evento no condicionado es diferente de cero, esto es, P(B)≠0. O dicho de otra forma, si es posible que ocurra el evento B. También se puede calcular la probabilidad condicional a partir de su inversa, es decir, si se conoce P(B|A) se puede determinar P(A|B). Pero para ello debes aplicar el teorema de Bayes.

---

**Definición (Probabilidad condicionada)**

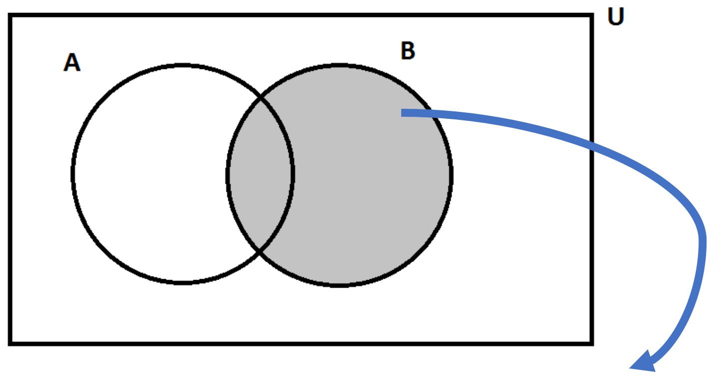
Consideremos dos sucesos $A$, $B$. Supongamos que $\mathbb{P}(B) > 0$. Definimos la *probabilidad condicionada* de $A$ dado $B$, mediante

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

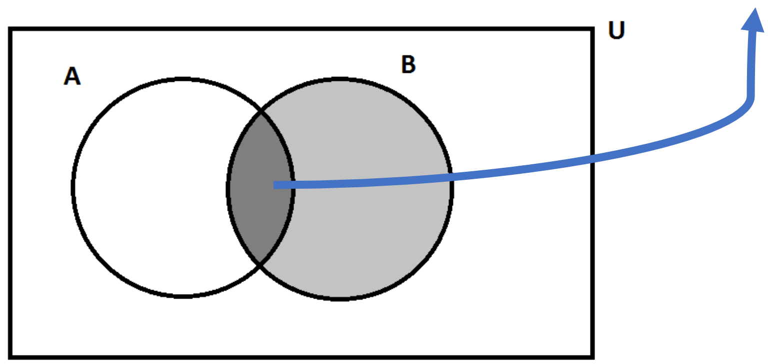



No confundir probabilidad condicional con intersección. Ambas miden, en efecto, la intersección, pero

- En $\mathbb{P}(A \cap B)$ se mide con respecto a $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- En $\mathbb{P}(A/B)$ se mide con respecto a $\mathbb{P}(B)$.




El conjunto B pasa a ser el espacio muestral. Ahora buscamos la probabilidad de que suceda A dado que sucedió B. Por lo tanto, estamos buscando los eventos que se encuentran en la intersección entre A y B.




---

## Probabilidad conjunta y probabilidad condicional

Otros dos conceptos que se suelen confundir son la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional, pero significan cosas distintas.

La **diferencia entre probabilidad conjunta y probabilidad condicional** es que en la probabilidad conjunta los dos eventos tienen que ocurrir al mismo tiempo, en cambio, la probabilidad condicional se refiere a la probabilidad de que suceda un evento si otro evento ya se ha cumplido.

| | Soleado | Nublado | |
|---|---|---|---|
| Llueve | 2 | 7 | 9 |
| No llueve | 8 | 4 | 12 |
| | 10 | 11 | |

Siguiendo con el mismo ejercicio de antes, la probabilidad conjunta de que un día esté nublado y llueva es:

$$\mathbb{P}(nublado\ y\ llueve) = \frac{7}{21} = 0{,}27$$

Pero la probabilidad condicional (o condicionada) de que un día llueva dado que un día esté nublado es:

$$\mathbb{P}(llueve/nublado) = \frac{7}{11} = 0{,}64$$

En el caso de la probabilidad condicional, se calcula la probabilidad de que llueva ya sabiendo que ese día está nublado.

---

## Ejemplo 1

Una vez hemos visto cuál es la definición y la fórmula de la probabilidad condicional, vamos a resolver paso a paso un ejemplo de este tipo de probabilidad para acabar de entender su significado.

Después de haber hecho un examen en una clase de 30 alumnos, se han recogido datos para saber cuántos alumnos han estudiado y cuántos han aprobado, los resultados se muestran en la siguiente tabla de contingencia. A partir de los datos recopilados, calcula la probabilidad condicional de aprobar un examen si has estudiado antes.

| | Aprobados | Supendidos | |
|---|---|---|---|
| Han estudiado | 19 | 4 | 23 |
| No han estudiado | 1 | 6 | 7 |
| | 20 | 10 | 30 |

$$P(aprobado \mid estudiado) = ?$$

Para sacar la probabilidad condicional debemos aplicar la fórmula que hemos visto antes:

$$\mathbb{P}(aprobado/estudiado) = \frac{\mathbb{P}(aprobado \cap estudiado)}{\mathbb{P}(estudiado)}$$

Por lo tanto, primero debemos hallar la probabilidad de que un alumno haya estudiado y de que un alumno haya estudiado y aprobado. Para encontrar la probabilidad de que un alumno haya estudiado simplemente debemos usar la regla de Laplace, es decir, dividimos el número de alumnos que han estudiado entre el número total de observaciones:

$$\mathbb{P}(estudiado) = \frac{23}{30} = 0{,}77$$

Y la probabilidad de que un alumno haya estudiado y aprobado al mismo tiempo la podemos averiguar a partir de la tabla de contingencia dividiendo el número de alumnos que han estudiado y aprobado entre el total:

$$\mathbb{P}(aprobado\ \cap estudiado) = \frac{19}{30} = 0{,}63$$

De modo que la probabilidad de que un alumno apruebe un examen si ha estudiado es:

$$\mathbb{P}(aprobado/estudiado) = \frac{\mathbb{P}(aprobado \cap estudiado)}{\mathbb{P}(estudiado)} = \frac{0{,}63}{0{,}77} = 0{,}82$$

---

## Probabilidad condicional de eventos dependientes e independientes

En este apartado veremos cuál es la relación entre la probabilidad condicional y los eventos dependientes e independientes (o sucesos dependientes e independientes). Porque, aunque son conceptos diferentes, estos dos tipos de eventos se relacionan con la probabilidad condicionada.

Dos eventos (o sucesos) son independientes cuando su probabilidad de ocurrencia no dependen entre sí. En tal caso, la intersección entre los dos eventos es equivalente al producto de la probabilidad de cada evento por separado. Y, en consecuencia, la fórmula de la probabilidad condicionada se simplifica:

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

En definitiva, **si los eventos A y B son independientes, la probabilidad condicional del evento A dado el evento B es exactamente igual a la probabilidad de ocurrencia del evento A**.

En cambio, cuando dos eventos son dependientes significa que la probabilidad de un evento depende de la probabilidad del otro evento. Por lo tanto**, cuando dos eventos A y B son dependientes la probabilidad condicional del evento A dado el evento B es diferente a la probabilidad de ocurrencia del evento A**.

$$\mathbb{P}(A/B) \neq \mathbb{P}(A)$$

---

### Ejemplo 2

Se sabe que en una bolsa llena de bolas la mitad son naranjas y la otra mitad son verdes. Además, un tercio de todas las bolas son naranjas y, al mismo tiempo, están marcadas con una señal. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola naranja, esta tenga la señal?

$$\mathbb{P}(señal/naranja) = \frac{\mathbb{P}(señal \cap naranja)}{\mathbb{P}(naranja)}$$

El enunciado del problema nos dice que la mitad de la bolsa son naranjas, por tanto, la probabilidad teórica de coger una bola naranja es del 50%.

$$\mathbb{P}(naranja) = \frac{1}{5} = 0{,}5$$

Por otro lado, sabemos que un tercio del total son bolas naranjas y tienen una señal, de manera que la probabilidad de obtener una bola naranja y con señal es:

$$\mathbb{P}(señal \ \cap naranja) = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

Finalmente, sustituimos las probabilidades calculadas en la fórmula de la probabilidad condicionada para hallar su valor:

$$\mathbb{P}(señal/naranja) = \frac{\mathbb{P}(señal \cap naranja)}{\mathbb{P}(naranja)} = \frac{0{,}33}{0{,}5} = 0{,}66$$

En resumen, la probabilidad de sacar una bola con la señal si esta es naranja es del 66%.

---

### Ejemplo 3

Si en una caja tenemos seis bolígrafos azules y tres bolígrafos negros, calcula la probabilidad de sacar un solo bolígrafo azul y la probabilidad de sacar dos bolígrafos azules consecutivamente.

Para determinar la probabilidad de coger un bolígrafo azul una vez basta con emplear la ley de Laplace:

$$\mathbb{P}(azul) = \frac{6}{6+3} = 0{,}67$$

El problema también nos pide averiguar la probabilidad de coger dos bolígrafos azules consecutivamente, es decir, la probabilidad condicionada de coger un bolígrafo azul si antes ya hemos cogido un bolígrafo azul.

Si sacamos un bolígrafo azul tenemos un caso favorable menos, pero también hay un bolígrafo menos en el total. Por lo tanto, la probabilidad condicional es:

$$\mathbb{P}(azul/azul) = \frac{5}{8} = 0{,}63$$

---

**Ejemplo 4**

¿Cuál es la probabilidad condicionada de al tirar un dado obtener el número 4 dado que en el lanzamiento de una moneda salga cara?

Para resolver este ejercicio debes tener en cuenta la teoría de la probabilidad condicional, ya que los eventos *«obtener el número 4 del lanzamiento de un dado»* y *«sacar cara al lanzar una moneda»* son independientes. Por lo tanto, no hace falta usar la fórmula de la probabilidad condicional, sino que se cumple la siguiente igualdad:

$$\mathbb{P}(número\ 4/cara) = \mathbb{P}(número\ 4)$$

Entonces, para hallar la probabilidad condicional solo tenemos que emplear la regla de Laplace:

$$\mathbb{P}(número\ 4/cara) = \mathbb{P}(número\ 4) = \frac{1}{6} = 0{,}167$$

---

**Ejemplo 5**

Suponga que un dado balanceado se tira una vez. Cual es la probabilidad de que salga un 5, dado que se obtuvo un número impar.

**A** : Obtener un 5 (esperamos que suceda)

**B** : Obtener un impar (ya sucedió)

S = { 1,2,3,4,5,6} = 6

$$\mathbb{P}(A\ /\ B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

**P(A ∩ B)** => Es la intersección (cruza de datos) entre la posibilidad de obtener un 5 y la probabilidad de obtener un impar

**P(A ∩ B) = P(5) ∩ P(1 ∪ 3 ∪ 5) = P(5)**

## Ejemplo 6

Suponga que se tiran dos dados balanceados. Cuál es la probabilidad de que salga 12 (suma de las dos caras), dado que se observó un número mayor que diez.

**A** : Obtener un 12 (esperamos que suceda)

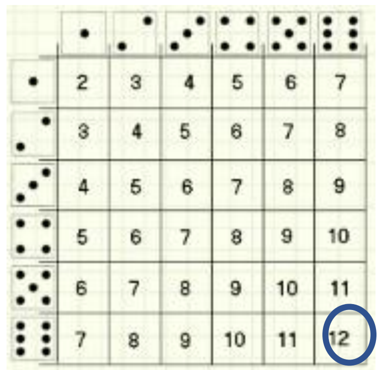
**B** : Obtener un número mayor que diez (ya sucedió)

S = 36 posibles combinaciones

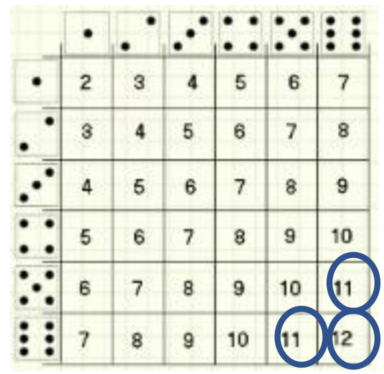
$$\mathbb{P}(A\ /\ B) = \ \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B) \qquad \Longrightarrow \qquad P(A/B)$$
$$= (1/36)/(3/36) = 1/3$$

**P(A ∩ B)** => Es la intersección (cruza de datos) entre la posibilidad de obtener un 5 y la probabilidad de obtener un impar

**P(A ∩ B) = P(12) ∩ P(11 ∪ 11 ∪ 12) = P(12)**



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

---

## Ejemplo 7

Ejemplos

1) La probabilidad de que un vuelo de programación regular despegue a tiempo es $P(D) = 0,83$ ; la que llegue a tiempo es $P(A) = 0,82$ y la que despegue y llegue a tiempo es $P(D \cap A) = 0,78$ . Encuentre la probabilidad de que el avión:

a) llegue a tiempo dado que despegó a tiempo.

b) despegue a tiempo dado que llegó a tiempo

Solución

$D = \{$ despegar a tiempo$\}$

$A = \{$ llegar a tiempo$\}$

$$\text{a) } P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,78}{0,83} = 0,94$$

La probabilidad de que el avión llegue a tiempo dado que despegó a tiempo es de 0, 94 .

b) $P(D/A) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)}$
$= \dfrac{0,78}{0,82}$
$= 0,95$

La probabilidad de que el avión despegue a tiempo dado que llegó a tiempo es de 0,95 .

---

## Ejemplo 8

2) En una oficina hay 100 máquinas calculadoras, algunas de ellas son eléctricas (E) mientras que otras son manuales (M). De ellas unas son nuevas (N) y otras usadas (U). El número de máquinas por categoría está dada en la siguiente tabla:

| | E | M | Total |
|---|---|---|---|
| N | 40 | 30 | 70 |
| U | 20 | 10 | 30 |

S = 100 máquinas calculadoras

Una persona entra a la oficina y escoge una máquina al azar, descubre que es nueva. ¿Cuál es la probabilidad que sea eléctrica?

**Evento E** : Probabilidad que la máquina calculadora sea eléctrica **P(E)**
**Evento N** : Probabilidad que la máquina calculadora sea nueva **P(N)**
**Evento E y N** : Probabilidad que la máquina calculadora sea eléctrica y nueva **P(E ∩ N)**

$$P(E/N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{70}{100}} = \frac{4}{7}$$

Recordar que la intersección siempre se mide respecto al espacio muestral

La probabilidad es de 0,57 .

---

## Ejemplo 9

3) Un grupo de 500 ejecutivos es clasificado de acuerdo a las características del peso y a la insidencia del peso en la hipertensión. Se da la siguiente tabla:

| | Sobre peso(SP) | Peso normal(PN) | Bajo peso(BP) | Total |
|---|---|---|---|---|
| Hipertenso(H) | 50 | 40 | 10 | 100 |
| No hipertenso($H^c$) | 75 | 225 | 100 | 400 |
| Total | 125 | 265 | 110 | 500 |

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hipertensa?

b) Una persona elegida al azar tiene sobrepeso. ¿Cuál es la probabilidad que también sea hipertensa?

c) Una persona elegida al azar no es hipertensa. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga peso normal?

a) $P(H) = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$

La probabilidad de que una persona sea hipertensa es de 0,20 .

b) $$P(H/SP) = \frac{P(H \cap SP)}{P(SP)} = \frac{\frac{50}{500}}{\frac{125}{500}} = \frac{2}{5}$$

La probabilidad de que una persona con sobrepeso sea también hipertensa es de 0,40 .

c) $$P(N/H^c) = \frac{P(N \cap H^c)}{P(H^c)} = \frac{\frac{225}{500}}{\frac{400}{500}} = \frac{9}{16}$$

La probabilidad de que una persona no hipertensa tenga también peso normal es de 0,5625 .

## Sucesos independientes (Eventos independientes)

**Los eventos independientes son resultados de un experimento aleatorio cuya probabilidad de ocurrencia no dependen entre sí**. Es decir, dos eventos A y B son independientes si la probabilidad de que suceda el evento A no depende de que ocurra el evento B y viceversa.

Los eventos independientes también se llaman sucesos independientes

---

## Ejemplos de eventos independientes

Vista la definición de eventos independientes (o sucesos independientes), pasamos ahora a ver varios ejemplos de este tipo de eventos para entender mejor su significado.

Por ejemplo, al lanzar una moneda dos veces, los eventos *«obtener cara en el primer lanzamiento»* y *«obtener cruz en el segundo lanzamiento»* **son independientes**, porque sacar cara o cruz en el segundo lanzamiento no depende del resultado conseguido en el primer lanzamiento.

También podemos hallar ejemplos de eventos independientes en la extracción al azar de una carta de una baraja dos (o más) veces. Independientemente de la carta extraída, si la volvemos a meter dentro del mazo, esta no infiere en las probabilidades de sacar una carta u otra en la segunda extracción.

En definitiva, **en los eventos independientes no influyen los sucesos anteriores**, ya que la probabilidad de ocurrencia es independiente entre ellos.

---

## Probabilidad de eventos independientes

**La probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes es igual al producto de las probabilidades de suceder de cada evento por separado**.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

---

### Ejemplo 1

A modo de ejemplo, vamos a calcular la probabilidad de que ocurran los eventos independientes *«sacar el número 4 en el lanzamiento de un dado»* y *«obtener cara al lanzar una moneda»*. Para hacer el cálculo primero debemos determinar la probabilidad de cada evento por separado y luego multiplicarlas.

Al tirar un dado hay seis posibles resultados, de modo que la probabilidad de sacar el número 4 al tirar un dado es:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} = 0{,}17$$

Por otro lado, al lanzar una moneda existen dos posibles eventos individuales: que salga cara o que salga cruz. Por lo que la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Como ambos eventos son independientes, la probabilidad de que sucedan los dos eventos se calcula multiplicando la probabilidad de ocurrencia de cada evento:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = 0{,}083$$

## Eventos independientes y eventos dependientes

La diferencia entre los eventos independientes y los eventos dependientes es la dependencia en la probabilidad de ocurrencia. Dos eventos son independientes si la probabilidad de que suceda uno de ellos no infiere en la probabilidad de suceder del otro evento, en cambio, dos eventos son dependientes cuando la probabilidad de un evento depende de que se cumpla o no el otro evento.

Por ejemplo, si en una bolsa metemos cinco bolas azules y tres bolas naranjas, los eventos serán o no independientes entre sí dependiendo de si al sacar una bola la volvemos a meter dentro de la bolsa o no.

Si sacamos una bola azul y la volvemos a meter dentro de la bolsa, la probabilidad de volver a sacar una bola azul no se ve afectada por el resultado anterior y, por tanto, son dos eventos independientes.

$$\mathbb{P}(sacar\ bola\ azul\ la\ segunda\ vez) = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

Por el contrario, si sacamos una bola azul pero no la volvemos a introducir en la bolsa, la probabilidad de volver a coger una bola azul disminuye porque ahora hay menos bolas azules en la bolsa. Así que en este caso se trata de dos eventos dependientes.

$$\mathbb{P}(sacar\ bola\ azul\ la\ segunda\ vez) = \frac{4}{7} = 0{,}57$$

En resumen, los eventos independientes y los eventos dependientes son dos conceptos distintos y que hay que saber diferenciar para calcular su probabilidad de ocurrencia

## Definición (Sucesos independientes)

Decimos que los sucesos $A$ y $B$ son "estadísticamente independientes" si la ocurrencia de uno no afecta para nada la ocurrencia de otro. Es decir,

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A).$$

De aquí en adelante simplemente diremos eventos *independientes* y omitiremos la palabra *estadísticamente*.

Equivalentemente, $A$ y $B$, serán independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Se dice que dos eventos $A$ y $B$ son *independientes* si se cumple cualquiera de los siguientes casos:

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

De otro modo, se dice que los eventos son *dependientes*.

Decimos que son **independientes** cuando se cumple cuando **la probabilidad de uno dado el otro, es decir, Probabilidad condicionada ➔ P(A | B)** , **es igual a la probabilidad del primero ➔ P(A)**

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(A) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

**Ejemplo 2**

## Ejemplo

A continuación se presentan la distribución del ingreso de 457 empleados según su género.

| | Ingresos | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sexo | Menos de 400 | Entre 400 y 800 | Más de 800 | Total |
| Mujer | 124 | 86 | 6 | 216 |
| Hombre | 19 | 174 | 48 | 241 |
| Total | 143 | 260 | 54 | 457 |

- Si el individuo es hombre $(B)$ ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un "ingreso superior a 800" $(A)$?
  Resp: $\mathbb{P}(A/B) = \frac{48/457}{241/457} = \frac{48}{241} = 0,199.$
- ¿Es independiente el ser hombre $(B)$ tener un "ingreso superior a 800" $(A)$? Resp: Sabemos que $\mathbb{P}(A) = 0,118$ por otro lado, cuando el individuo es hombre sabemos que $\mathbb{P}(A/B) = 0,199$.
  Entonces, al conocer que el individuo es hombre, la probabilidad de que tenga un "ingreso superior a 800" aumenta de 11,8% a 19,9%.
  Entonces estos sucesos son dependientes.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{54}{457} = 0.118$$

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\frac{48}{457}}{\frac{241}{457}} = 0.199$$

---

**Ejemplo 3**

Cien adultos fueron entrevistados en una encuesta por teléfono. De interés fue la opinión de ellos con respecto a las cargas que implican los préstamos para estudiantes universitarios y si quienes respondieron tenían un hijo actualmente en la universidad. Sus respuestas se resumen en la tabla siguiente:

| | Carga de préstamo | | | |
|---|---|---|---|---|
| Hijo en la universidad | Demasiado alta (A) | Razonable (B) | Demasiado baja (C) | *Total* |
| Sí (D) | .20 | .09 | .01 | .30 |
| No (E) | .41 | .21 | .08 | .70 |
| *Total* | .61 | .30 | .09 | 1.00 |

De los siguientes eventos, ¿Cuáles son independientes?

1. A y D
2. B y D
3. C y D

$$P(A) = 0.61$$

$$P(B) = 0.3$$

$$P(C) = 0.09$$

$$P(A \cap E) = 0.41$$

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.2}{0.3} = 0.66$$

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0.09}{0.3} = 0.3$$

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.01}{0.3} = 0.0\overline{3}$$

B y D son eventos independientes

## Sucesos dependientes (Eventos dependientes)

**Los eventos dependientes son resultados de un experimento aleatorio cuya probabilidad de ocurrencia dependen entre sí.** Es decir, dos eventos son dependientes si la probabilidad de que suceda un evento afecta a la probabilidad de ocurrencia del otro evento.

Los eventos dependientes también se conocen como sucesos dependientes.

---

## Ejemplos de eventos dependientes

Después de haber visto la definición de eventos dependientes (o sucesos dependientes), a continuación, te mostramos varios ejemplos de este tipo de eventos. La intención es que entiendas completamente el significado de eventos dependientes, por lo que si te queda cualquier duda puedes preguntarla abajo en los comentarios.

Por ejemplo, extraer dos cartas consecutivamente de una misma baraja son dos eventos dependientes, ya que la probabilidad de «sacar la carta 3 de diamantes» en la segunda extracción es más alta que en la primera extracción, pues en la baraja hay una carta menos. Por contra, la probabilidad de sacar dicha carta en la segunda extracción es nula si ya se ha sacado en la primera extracción. De modo que la probabilidad de ocurrencia del segundo evento depende del resultado del primer evento.

Otro ejemplo de eventos dependientes es el precio de unas acciones en la bolsa, que subirán o bajarán dependiendo del beneficio económico de la empresa en el último año. En principio, si la empresa presenta ganancias es más probable que el precio suba, pero si la empresa ha tenido pérdidas es más probable que el precio de las acciones baje.

En definitiva, **en los eventos dependientes influyen los sucesos anteriores**, ya que las probabilidades de ocurrencia dependen de los resultados previos.

---

## Probabilidad de eventos dependientes

La **probabilidad de ocurrencia de dos eventos dependientes** A y B es igual a la probabilidad del evento A multiplicada por la probabilidad condicionada del evento B dado el evento A.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B/A)$$

**Ejemplo 1**

A modo de ejemplo, **vamos a calcular la probabilidad de dos eventos dependientes**. **Determinaremos la probabilidad de ocurrencia de los sucesos dependientes de sacar dos bolas de color verde consecutivamente de una caja con** *seis bolas verdes* y *tres bolas amarillas*.

La probabilidad de sacar una bola verde en el segundo intento depende de si se coge una bola verde o amarilla en el primer intento, por lo que efectivamente se trata de dos eventos dependientes.

En primer lugar, calculamos la probabilidad de sacar una bola verde la primera vez utilizando la ley de Laplace:

$$\mathbb{P}(verde) = \frac{6}{9} = 0{,}67$$

Luego calculamos la probabilidad de sacar otra bola de color verde después de haber sacado ya una bola verde de la caja. Como la probabilidad de este evento depende del resultado anterior, tenemos que aplicar la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$\mathbb{P}(verde/verde) = \frac{5}{8} = 0{,}63$$

Por lo tanto, la probabilidad de suceder de los dos eventos dependientes es el producto de la probabilidad de ocurrir del primer evento por la probabilidad condicionada del segundo evento:

$$\mathbb{P}(verde \cap verde) = \mathbb{P}(verde) \cdot \mathbb{P}(verde/verde)$$

$$= \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{12} = 0{,}42$$

## Probabilidad conjunta

La probabilidad conjunta es una medida estadística que indica la **probabilidad de que dos sucesos ocurran al mismo tiempo**.

La probabilidad conjunta es un número entre 0 y 1. Cuanto más grande sea la probabilidad conjunta, más probable será de que dos eventos ocurran simultáneamente, y al contrario, cuanto menor sea la probabilidad conjunta, menos probable será que los dos eventos sucedan a la vez.

---

## Fórmula de la probabilidad conjunta

La probabilidad conjunta de dos eventos A y B es igual al producto de la probabilidad del evento A por la probabilidad del evento B.

Por lo tanto, la fórmula para calcular la probabilidad conjunta de dos sucesos diferentes es la siguiente:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

De modo que la probabilidad conjunta de dos eventos distintos es equivalente a la intersección de dichos eventos. Sin embargo, debes tener en cuenta que **esta fórmula solo puedes utilizarla si son dos eventos independientes, de lo contrario, debes usar la fórmula de la probabilidad condicional**.

Además, la probabilidad conjunta de dos sucesos siempre será menor que la probabilidad de ocurrencia de cada evento por separado.

---

## Ejemplos de probabilidad conjunta

Vista la definición de probabilidad conjunta, ahora explicaremos dos ejemplos de este tipo de probabilidad para que entiendas mejor su significado.

### Lanzar una moneda y un dado

Por ejemplo, la probabilidad de obtener cara del lanzamiento de una moneda es de 1/2 y, por otro lado, la probabilidad de obtener el número 4 al lanzar un dado es de 1/6. Por lo tanto, la probabilidad conjunta de sacar cara y el número 4 es:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

### Dos sucesos del lanzamiento de un dado

También podemos hallar la probabilidad conjunta de dos sucesos diferentes, pero de un mismo experimento aleatorio. A modo de ejemplo, vamos a calcular la probabilidad de ocurrencia conjunta de los sucesos «sacar un número impar» y «sacar un número mayor que 4» al lanzar un dado.

En un dado hay tres números impares (1, 3 y 5), así que la probabilidad de obtener un número impar será:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Por otra parte, un dado tiene dos números más grandes que cuatro (5 y 6), de modo que la probabilidad de ocurrencia del segundo evento será:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Entonces, para calcular la probabilidad conjunta de los dos sucesos simplemente tenemos que multiplicar las dos probabilidades halladas:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0{,}167$$

## Probabilidad marginal

La probabilidad marginal es una medida estadística que indica la **probabilidad de que ocurra un subconjunto del conjunto total**.

La probabilidad marginal es un número entre 0 y 1. De manera que cuanto más grande sea la probabilidad marginal de un subconjunto, más probable será de que suceda dicho subconjunto, por contra, cuanto menor sea la probabilidad marginal menos probable será de que ocurra el subconjunto.

---

### Ejemplo 1

Una vez hemos visto la definición de probabilidad marginal, vamos a ver un ejercicio resuelto de la probabilidad marginal para que entiendas acabar de entender su significado.

Para analizar una carretera problemática, durante todos los días de un mes se anota en una tabla de contingencia el tiempo del día y si se ha producido un atasco o no. A partir de los datos, calcula las probabilidades marginales de atasco y de lluvia en esta zona.

| | Sol | Lluvia | |
|---|---|---|---|
| Atasco | 6 | 8 | 14 |
| No atasco | 13 | 3 | 16 |
| | 19 | 11 | 30 |

Para calcular la probabilidad marginal de un subconjunto de datos simplemente debes aplicar la siguiente regla:

Para **calcular la probabilidad marginal** de un subconjunto simplemente tienes que sumar todas las veces que se ha producido dicho subconjunto y dividir entre el número total de datos.

Por ejemplo, en este caso, se han registrado 6 días con atasco cuando había sol y 8 días con atasco cuando había lluvia, y el número total de observaciones es 30. Por lo tanto, la probabilidad marginal de que haya un atasco es:

$$\mathbb{P}(atasco) = \frac{6+8}{30} = \frac{14}{30} = 0{,}47$$

De modo que casi la mitad de los días habrá un atasco en la carretera.

Por otro lado, para sacar la probabilidad marginal de lluvia tenemos que aplicar el mismo procedimiento, esto es, sumar todas las ocasiones en las que ha llovido y dividir entre el número total de observaciones:

$$\mathbb{P}(lluvia) = \frac{8+3}{30} = \frac{11}{30} = 0{,}37$$

---

## Probabilidad marginal y probabilidad conjunta

La diferencia entre probabilidad marginal y probabilidad conjunta es que la probabilidad marginal es la probabilidad de ocurrencia de un subconjunto del total, mientras que la probabilidad conjunta se refiere a la probabilidad de que sucedan dos o más eventos al mismo tiempo.

Siguiendo el ejemplo de antes, vamos a hallar la probabilidad conjunta de que en un día llueva y, además, se produzca un atasco.

| | Sol | Lluvia | |
|---|---|---|---|
| Atasco | 6 | 8 | 14 |
| No atasco | 13 | 3 | 16 |
| | 19 | 11 | 30 |

En total, durante el periodo se registraron 11 días de lluvia y 14 días de atasco, pero solo hubieron 8 días en los que lloviese y hubiera un atasco simultáneamente. Por lo tanto, la probabilidad conjunta de que llueva y haya un atasco será 8 entre el número total de observaciones, que es 30:

$$\mathbb{P}(lluvia\ y\ atasco) = \frac{8}{30} = 0{,}27$$

Debes tener en cuenta que la probabilidad conjunta de dos sucesos independientes se calcula de otra manera (utilizando una fórmula).

## Probabilidad total

**Definición (Probabilidad Total)**

Sean $A_1, A_2, ..., A_k$ sucesos excluyentes dos a dos, los únicos posibles y con probabilidades positivas. Sea $B$ un suceso arbitrario. Entonces

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B/A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B/A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B/A_k).$$

En teoría de la probabilidad, el **teorema de la probabilidad total** es una ley que permite calcular la probabilidad de un suceso que no forma parte de un espacio muestral a partir de las probabilidades condicionales de todos los sucesos de dicho espacio muestral.

Así pues, el teorema de la probabilidad total sirve para calcular la probabilidad de un suceso específico a partir de información parcial sobre ese suceso. A veces no podemos determinar la probabilidad de un suceso aplicando directamente la regla de Laplace, ya que no tenemos toda la información necesaria. Pero si conocemos datos de dicho suceso relativos a otros eventos, el teorema de la probabilidad total suele ser útil.

En definitiva, el teorema de la probabilidad total se usa cuando queremos calcular la probabilidad de un suceso pero solo se tiene información sobre él en ciertas condiciones. Por ejemplo, algunas aplicaciones de este teorema son en experimentos con múltiples casos, en teoría de colas y en análisis de supervivencia.

---

## Formula del teorema de la probabilidad total

Vista la definición de eventos independientes (o sucesos independientes), pasamos ahora a ver varios ejemplos de este tipo de eventos para entender mejor su significado.

El teorema de la probabilidad total dice que dado un conjunto de sucesos {A1, A2,..., An} que forman una partición sobre el espacio muestral, la probabilidad del evento B es igual al sumatorio de los productos de la probabilidad de cada suceso P(Ai) por la probabilidad condicional P(B|Ai).

Por lo tanto, la **fórmula del teorema de la probabilidad total** es la siguiente:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i) \qquad \Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n\}$$

Donde:

$\mathbb{P}(B)$ es la probabilidad de que ocurra el suceso B.
$\mathbb{P}(B|A_i)$ es la probabilidad condicional del suceso B dado el suceso Ai
$\mathbb{P}(A_i)$ es la probabilidad de que ocurra el suceso Ai

Ten en cuenta que en probabilidad una partición del espacio muestral se define como un conjunto de sucesos incompatibles entre sí cuya unión forma el espacio muestral.

## Ejemplo 1

Después de ver la definición del teorema de la probabilidad total y cuál es su fórmula, vamos a ver un ejercicio resuelto de cómo se calcula una probabilidad con el teorema de la probabilidad total para entender mejor su significado.

Una tienda de electrónica vende tres marcas de televisores: X, Y, Z. Se estima que el 20% de las ventas son televisores de la marca X, el 50% de la marca Y y el 30% de la marca Z. El 5% de los televisores de la marca X son defectuosos, el 3% de los televisores de la marca Y son defectuosos y el 4% de los televisores de la marca Z son defectuosos. **¿Cuál es la probabilidad de comprar un televisor defectuoso?**

El enunciado del problema nos da las probabilidades de que un cliente compre cada marca de televisores:

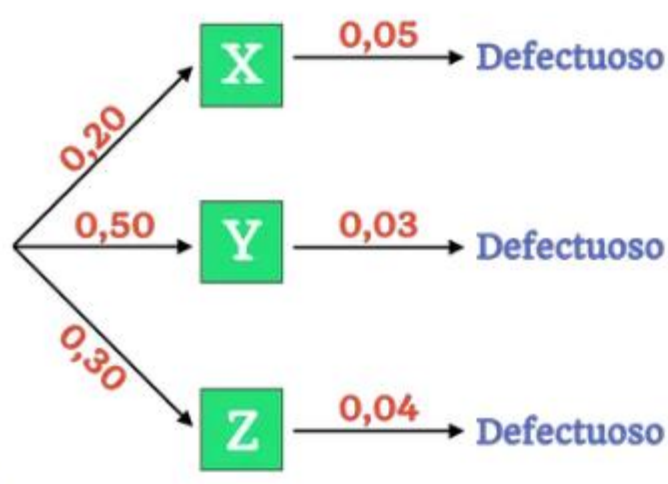
Suceso A1: Un cliente compra un televisor de la marca X → P(A1)=0,20
Suceso A2: Un cliente compra un televisor de la marca Y → P(A2)=0,50
Suceso A3: Un cliente compra un televisor de la marca Z → P(A3)=0,30

Además, el enunciado del ejercicio también nos proporciona la probabilidad que un televisor sea defectuoso de cada marca:

Suceso B: El televisor es defectuoso

B|A1: Dado un televisor de la marca X, el televisor es defectuoso → P(B|A1)=0,05
B|A2: Dado un televisor de la marca Y, el televisor es defectuoso → P(B|A2)=0,03
B|A3: Dado un televisor de la marca Z, el televisor es defectuoso → P(B|A3)=0,04

Así pues, el árbol de probabilidades del problema es el siguiente:



Entonces, para calcular la probabilidad de comprar un televisor defectuoso tenemos que utilizar la fórmula de la regla de la probabilidad total:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$$

En nuestro caso, el espacio muestral está formado por tres eventos (A1, A2 y A3), por lo tanto, la fórmula del teorema de la probabilidad total queda de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B|A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

De modo que solo nos queda sustituir las probabilidades en la expresión anterior para hallar la probabilidad de comprar un televisor defectuoso:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B|A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

$$= 0{,}05 \cdot 0{,}20 + 0{,}03 \cdot 0{,}50 + 0{,}04 \cdot 0{,}30$$

$$= 0{,}037$$

En conclusión, hay una probabilidad del 3,7% de que compremos un televisor y este sea defectuoso.

## Teorema de Bayes

**Definición (Teorema de Bayes)**

Bajo las mismas condiciones anteriores, se tiene que

$$\mathbb{P}(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)}{\mathbb{P}(B)}.$$

- Comúnmente $\mathbb{P}(A_i)$ son llamadas probabilidades a priori y
- $\mathbb{P}(A_i/B)$ son llamadas probabilidades a posteriori (reactualización de las probabilidades).

En la teoría de la probabilidad, el **teorema de Bayes** es una ley que sirve para calcular la probabilidad de un evento cuando se conoce información a priori sobre dicho suceso.

En concreto, el teorema de Bayes relaciona matemáticamente la probabilidad del evento A dado el evento B con la probabilidad de B dado A.

Por ejemplo, si se sabe de antemano la probabilidad de que una persona le duela la cabeza cuando tiene gripe, se puede determinar con el teorema de Bayes la probabilidad de que una persona tenga gripe cuando le duele la cabeza.

El teorema de Bayes tiene muchas aplicaciones, por ejemplo, se utiliza en medicina, en economía o en tecnología para calcular las probabilidades de algunos eventos que están condicionadas por otros eventos.
son en experimentos con múltiples casos, en teoría de colas y en análisis de supervivencia.

---

## Formula del teorema de bayes

El teorema de Bayes dice que dado un espacio muestral formado por un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes {A1, A2, …, Ai, … , An} cuyas probabilidades no son nulas y otro evento B, se puede relacionar matemáticamente la probabilidad condicional de Ai dado el evento B con la probabilidad condicional de B dado Ai.

Así pues, la fórmula del teorema de Bayes, también conocida como regla de Bayes, es la siguiente:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\cdot\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B|A_k)\cdot\mathbb{P}(A_k)}$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B|A_k)\cdot\mathbb{P}(A_k)$$

Donde:

$P(Ai|B)$ es la probabilidad condicional del evento Ai dado el evento B, denominada probabilidad a posteriori.
$P(B|Ai)$ es la probabilidad condicional del evento B dado el evento Ai.
$P(Ai)$ es la probabilidad de que ocurra el evento Ai, denominada probabilidad a priori.

Fíjate que el denominador de la fórmula del teorema de Bayes corresponde a la probabilidad total del evento B. son en experimentos con múltiples casos, en teoría de colas y en análisis de supervivencia.

---

## Aplicaciones del teorema de bayes

Las aplicaciones del teorema de Bayes son muchas, algunas de ellas son:

1. **Pruebas médicas**: el teorema de Bayes se usa frecuentemente en medicina para determinar la probabilidad de acierto de las pruebas diagnósticas. Por ejemplo, en el caso de una prueba de detección del VIH, se puede utilizar el teorema para calcular la probabilidad de que una persona tenga realmente el virus dado un resultado positivo en la prueba.

2. **Análisis financiero**: en finanzas se usa el teorema de Bayes para calcular la probabilidad de que ciertos eventos económicos, como un aumento o una bajada en el valor de las acciones, ocurran dado un conjunto de variables económicas.

3. **Estudio de mercado**: el teorema de Bayes permite determinar, por ejemplo, la probabilidad de que una persona compre un producto cuando ha visto un anuncio de ese producto.

4. **Pronóstico del tiempo**: los modelos meteorológicos también utilizan el teorema de Bayes para encontrar la probabilidad de que dada una predicción meteorológica en función de los datos observados esta se acabe cumpliendo. De esta forma se mejora la precisión de las previsiones climáticas.

5. **Seguridad informática**: en ciberseguridad, el teorema de Bayes puede aplicarse para determinar la probabilidad de que una actividad sospechosa sea verdaderamente un ataque al sistema informático.

---

### Ejemplo 1

Una vez hemos visto la definición del teorema de Bayes y cuál es su fórmula, vamos a ver un ejemplo resuelto de cómo se calcula una probabilidad con el teorema de Bayes para entender mejor el concepto.

Una tienda de electrónica vende tres marcas de televisores: X, Y, Z. Se estima que el 20% de las ventas son televisores de la marca X, el 50% de la marca Y y el 30% de la marca Z. El 5% de los televisores de la marca X son defectuosos, el 3% de los televisores de la marca Y son defectuosos y el 4% de los televisores de la marca Z son defectuosos. **Dado un televisor defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca de televisores Z?**

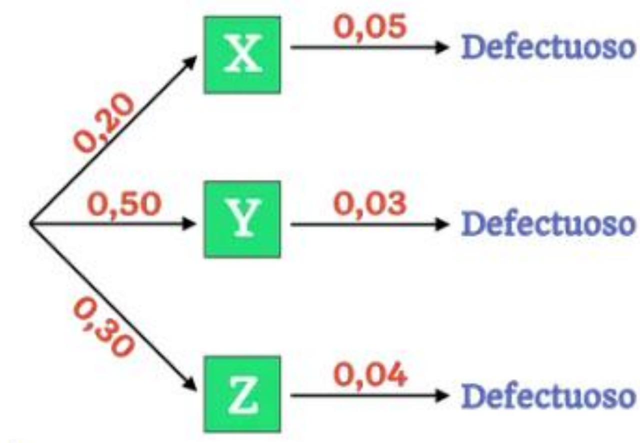
El enunciado del ejercicio nos da las probabilidades de que un cliente compre cada marca de televisores:

Evento A1: Un cliente compra un televisor de la marca X → P(A1)=0,20
Evento A2: Un cliente compra un televisor de la marca Y → P(A2)=0,50
Evento A3: Un cliente compra un televisor de la marca Z → P(A3)=0,30

Además, el enunciado también nos proporciona la probabilidad que un televisor sea defectuoso de cada marca:

Evento B: El televisor es defectuoso
B|A1: Dado un televisor de la marca X, el televisor es defectuoso → P(B|A1)=0,05
B|A2: Dado un televisor de la marca Y, el televisor es defectuoso → P(B|A2)=0,03
B|A3: Dado un televisor de la marca Z, el televisor es defectuoso → P(B|A3)=0,04

De modo que el árbol de probabilidad de todos los eventos que nos interesan es el siguiente:




Entonces, para calcular la probabilidad de que dado un televisor defectuoso este sea de la marca Z, tenemos que usar la fórmula del teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\cdot\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B|A_k)\cdot\mathbb{P}(A_k)}$$

Utilizando la terminología utilizada en este ejemplo, la fórmula de Bayes queda de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}(A_3|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_3)\cdot\mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(B|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2)\cdot\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B|A_3)\cdot\mathbb{P}(A_3)}$$

Por lo tanto, el cálculo de la probabilidad de que dado un televisor defectuoso este sea de la marca Z es el siguiente:

$$\mathbb{P}(A_3|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(B|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B|A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3)}$$

$$= \frac{0{,}04 \cdot 0{,}30}{0{,}05 \cdot 0{,}20 + 0{,}03 \cdot 0{,}50 + 0{,}04 \cdot 0{,}30}$$

$$= 0{,}32$$

En conclusión, la probabilidad de que si un televisor es defectuoso este sea de la marca Z es del 32%.

---

## Ejemplo 2

El enunciado del ejercicio nos proporciona las siguientes probabilidades:

A1: La persona tiene la enfermedad → P(A1)=0,01
A2: La persona no tiene la enfermedad → P(A2)=0,99

B: La prueba da positivo
B|A1: La prueba da positivo cuando la persona tiene la enfermedad → P(B|A1)=0,95
B|A2: La prueba da positivo cuando la persona no tiene la enfermedad → P(B|A2)=1-0,90=0,10

Entonces, para calcular la probabilidad de que una persona seleccionada aleatoriamente tenga realmente la enfermedad cuando da positivo en la prueba se debe aplicar la regla de Bayes:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k)}$$

Utilizando la terminología utilizada en este ejemplo, la fórmula de Bayes queda de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2)}$$

Así pues, sustituimos los valores en la fórmula y hacemos el cálculo de la probabilidad:

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2)\cdot\mathbb{P}(A_2)}$$

$$= \frac{0{,}95\cdot 0{,}01}{0{,}95\cdot 0{,}01 + 0{,}10\cdot 0{,}99}$$

$$= 0{,}0876$$

En definitiva, la probabilidad de que una persona escogida al azar dé positivo en la prueba y efectivamente tenga la enfermedad es del 8,76%.

---

### Ejemplo 3

**Ejemplo**

En un estudio, el 31,29% de los individuos tiene un ingreso inferior a 400, el 56,89% tiene un ingreso entre 400 y 800, por último, el 11,82% tiene un ingreso superior a los 800.

- De los que tienen un ingreso inferior a 400, el 13,29% era hombre.
- De los que tienen un ingreso entre 400 y 800, el 66,92% era hombre.
- De los que tienen un ingreso superior a 800, el 88,89% era hombre.

¿Cuál es la probabilidad de que un individuo seleccionado sea hombre?

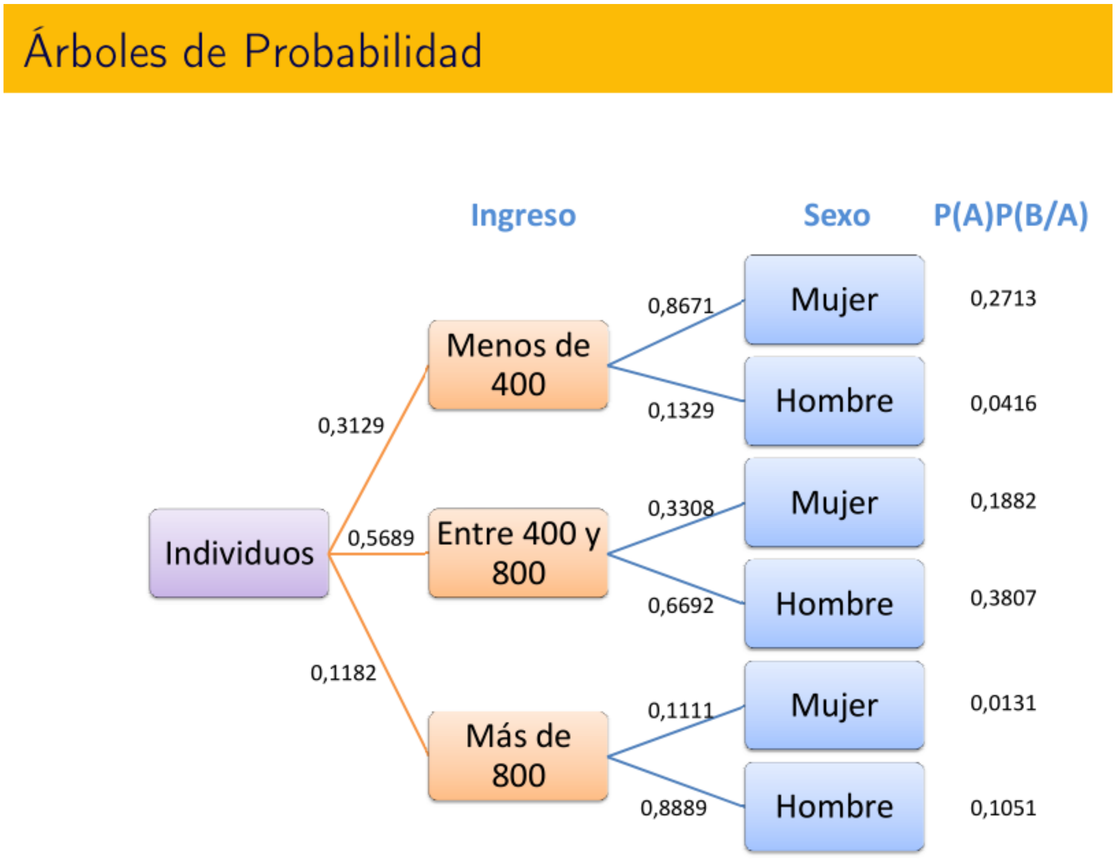
- $B =$ es hombre
- $A_1 =$ Ingreso inferior a 400, $\mathbb{P}(A_1) = 0,3129$ y $\mathbb{P}(B/A_1) = 0,1329$
- $A_2 =$ Ingreso entre 400 y 800, $\mathbb{P}(A_2) = 0,5689$ y $\mathbb{P}(B/A_2) = 0,6692$
- $A_3 =$ Ingreso superior a 800, $\mathbb{P}(A_3) = 0,1182$ y $\mathbb{P}(B/A_3) = 0,8889$

## Ejemplo

- La probabilidad de que un individuo seleccionado sea hombre es
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B/A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B/A_2) + \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(B/A_3)$.
$\mathbb{P}(B) = 0,3129 \cdot 0,1329 + 0,5689 \cdot 0,6692 + 0,1182 \cdot 0,8889 = 0,527$.
- Si el individuo seleccionado es hombre, ¿Cuál es la probabilidad de que su ingreso sea inferior a 400?
Resp: $P(A_1/B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B/A_1)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{0,3129 \cdot 0,1329}{0,527} = 0,079$.
- Si el individuo seleccionado es hombre, ¿Cuál es la probabilidad de que su ingreso esté entre 400 y 800?
Resp: $P(A_2/B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B/A_2)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{0,5689 \cdot 0,6692}{0,527} = 0,722$.
- Si el individuo seleccionado es hombre, ¿Cuál es la probabilidad de que su ingreso sea superior a 800?
Resp: $P(A_3/B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(B/A_3)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{0,1182 \cdot 0,8889}{0,527} = 0,199$.

## Árboles de Probabilidad

1. Los eventos que forman el primer conjunto de ramas deben ser excluyentes y la suma de las probabilidades marginales debe ser 1.
2. Los eventos que conforman el segundo conjunto de ramas se deben poner en la punta de cada uno de los primeros ramales. En cada ramificación se ponen las probabilidades condicionales, a menos que una independencia permita hacer uso de probabilidades no condicionada. Las ramas deben ser excluyentes y la suma de las probabilidades debe ser 1.
3. Si aún quedan conjuntos de ramas, las probabilidades deben ser condicionadas para todos los eventos precedentes. Las ramas deben ser excluyentes y exhaustivas.
4. La suma de las probabilidades de las trayectorias se debe efectuar sobre todos los trayectos que estén incluidos en el evento relevante.




---

## Ejemplo 4

Se estima que la probabilidad de que una acción en la bolsa suba en un día es del 40%, que se mantenga estable es del 10% y que baje es del 50%. Además, se sabe que cuando el mercado sube hay un 90% de probabilidades de que un analista financiero lo prediga correctamente, cuando se mantiene estable la probabilidad de que predicción sea correcta es del 75% y cuando baja la probabilidad de predicción correcta es del 85%. Si un analista predice que el mercado bajará, ¿cuál es la probabilidad de que realmente baje?

En este caso, enunciado del ejercicio nos proporciona las siguientes probabilidades:

A1: El mercado sube en un día → P(A1)=0,40
A2: El mercado se mantiene estable en un día → P(A2)=0,10
A3: El mercado sube en un día → P(A3)=0,50

B: El analista predice que el mercado bajará
B|A1: El analista predice correctamente que el mercado subirá → P(B|A1)=0,90
B|A2: El analista predice correctamente que el mercado se mantiene estable → P(B|A2)=0,75
B|A3: El analista predice correctamente que el mercado bajará → P(B|A3)=0,85

Para determinar la probabilidad de que un analista haga la predicción de que el mercado bajará y sea correcta debemos emplear la fórmula del teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k)}$$

Utilizando la terminología utilizada en este ejemplo, la fórmula de Bayes queda de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}(A_3|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(B|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B|A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3)}$$

Sustituimos los valores de las probabilidades en la fórmula de Bayes y hacemos el cálculo de la probabilidad:

$$\mathbb{P}(A_3|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(B|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B|A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3)}$$

$$= \frac{0{,}85 \cdot 0{,}50}{0{,}90 \cdot 0{,}40 + 0{,}75 \cdot 0{,}10 + 0{,}85 \cdot 0{,}50}$$

$$= 0{,}4942$$

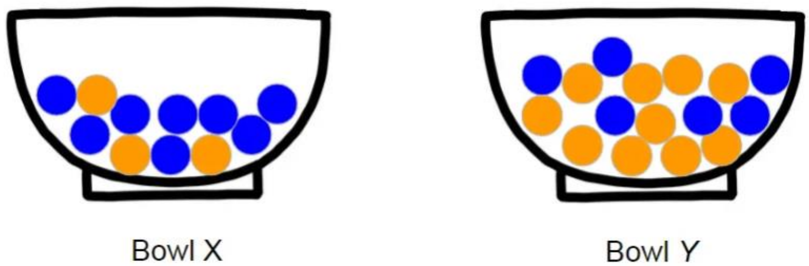
Por lo tanto, la probabilidad de que un analista acierte cuando dice que el mercado de valores bajará es del 49,42%.

**Ejemplo 5**

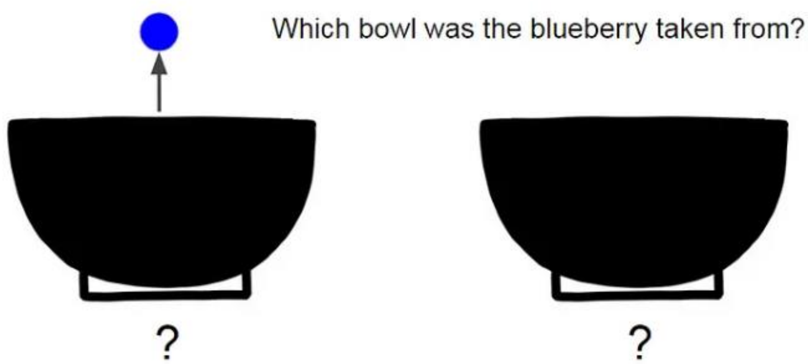
1. **Planteamiento del problema**

Cal lado dos cuencos X e Y, llenos de naranjas y arándanos. En este caso, sabes exactamente cuántas naranjas y arándanos hay en cada uno de los dos tazones.

Si te pregunto qué tan probable es que elijas una naranja del tazón X, puedes decir exactamente la probabilidad. Dado que hay 11 elementos en el tazón X y 3 de ellos son naranjas, la probabilidad de elegir una naranja sería p (naranja) = 3/11.




**Caso invertido**




Escojo a ciegas un articulo y obtengo un arándano

Pero ¿qué pasa si elijo un artículo de un tazón al azar? Y digamos que elegí un arándano. ¿Puedes saber la probabilidad de qué tazón se recogió el arándano?

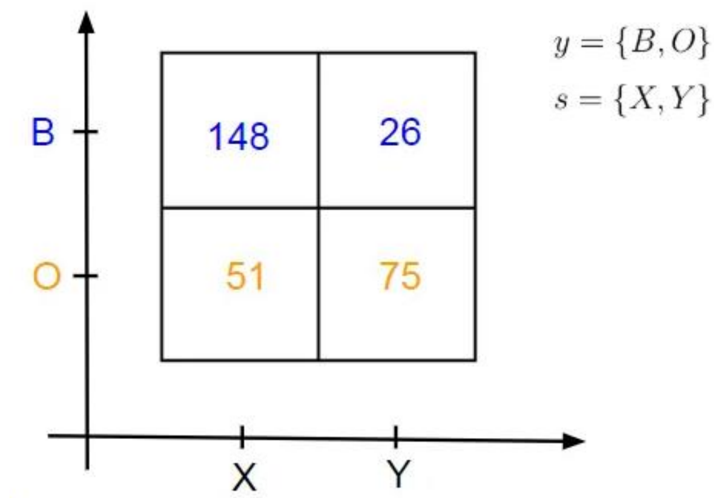
Esta es la pregunta que se puede responder usando el Teorema de Bayes.

## 2. Derivación del teorema de Bayes

Para derivar el Teorema de Bayes, vamos a simular un experimento. En este experimento, tiramos un dado. Cada vez que el dado muestre el número 4 o menos elegiremos un elemento del tazón X, para el número 5 o superior elegiremos un elemento del tazón Y. Y vamos a hacer esto N=300 veces. Y para simplificar las cosas, introducimos las siguientes abreviaturas:

**Arándano := B, Naranja := O, Tazón X := X, Tazón Y := Y**

Después de tirar los dados N = 300 veces, obtendremos algunos resultados estadísticos con respecto al número de elementos que se recogieron de los dos tazones. Un resultado hipotético del experimento se muestra en la Fig. 1. Aquí se representa el cuenco o la "fuente" de donde se recogió un artículo. y es la variable observable (arándano o naranja).




| | Bowl X | Bowl Y | |
|---|---|---|---|
| Arandanos | 148 | 26 | 174 |
| Naranjas | 51 | 75 | 126 |
| | 199 | 101 | 300 |

La figura nos dice que hemos recogido...

... 148 veces un arándano del cuenco X: n(s=X, y=B)=148
... 26 veces un arándano del tazón Y: n(s=Y, y=B)=26
... 51 veces una naranja del cuenco X: n(s=X, y=O)=51
... 75 veces una naranja del cuenco Y: n(s=Y, y=O)=75

Teniendo en cuenta estas cifras estadísticas, ahora podemos hacer algunas preguntas interesantes...

***¿Cuál es la probabilidad de elegir un objeto aleatorio del cuenco X?***

Para obtener esta probabilidad que denotamos como p(s=X) debemos dividir el número de artículos recogidos solo del cuenco X dividido por el número N=300 del total de selecciones. Aquí está n(s=X, y=B)=148 el número de arándanos recogidos de X y n(s=X, y= O)=51 el número de naranjas recogidas de X. Por lo tanto, la probabilidad de elegir cualquier elemento de X es la siguiente:

$$\mathbb{P}(bowl\ x) = \frac{148+51}{300} = \frac{2}{3} = 0{,}66$$

Ec. 1 Probabilidad de elegir un objeto del bowl X.

**Nota**: Este tipo de probabilidad se denomina "probabilidad previa". En la inferencia estadística bayesiana, la probabilidad a priori es la probabilidad de un evento antes de que se recopilen nuevos datos. En este caso, p(s=X) indica la probabilidad de elegir un artículo de X, sin saber de qué artículo se trata exactamente.

En consecuencia, la probabilidad p(s=Y) de elegir un elemento de Y es:

$$\mathbb{P}(bowl\ y) = \frac{26+75}{300} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

Ec. 1 Probabilidad de elegir un objeto del bowl Y.

---

***¿Cuál es la probabilidad de recoger una naranja/arándano?***

En esta ocasión queremos saber qué tan probable es que se recoja una naranja o un arándano sin tener en cuenta un cuenco específico. Denotamos estas probabilidades como p(y=O) y p(y=B). El cálculo se realiza de forma análoga al caso anterior. Estamos dividiendo el número de selecciones de un artículo específico por el número total de selecciones. Las probabilidades resultantes vienen dadas por la Ec. 3 y la Ec. 4:

$$\mathbb{P}(naranja) = \frac{51+75}{300} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Ec. 3 Probabilidad de recoger una naranja

$$\mathbb{P}(arándano) = \frac{148+26}{300} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

Ec. 4 Probabilidad de recoger un arandano

***¿Cuál es la probabilidad de recoger un arándano de X?***

Ahora vamos a ***calcular la probabilidad conjunta*** p(s=X, y=B) que nos dice la probabilidad de recoger un arándano de X.

**Nota**: La probabilidad conjunta es la probabilidad de que ocurra el evento Nº 1 al mismo tiempo que ocurre el evento Nº 2. En este caso, un evento está eligiendo del cuenco que resulta ser X. El otro evento es el hecho de que hemos recogido un arándano.

Para calcular la probabilidad conjunta, tenemos que dividir el número de veces que recogimos un arándano de X por el número total de picos:

*(La probabilidad conjunta es la intersección de eventos entre el número total de observaciones, en el caso de ser eventos dependientes. Si son eventos independientes es la multiplicación de ambas probabilidades)*

$$\mathbb{P}(arandano\ y\ bowl\ x) = \frac{148}{300} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ec. 5 Probablemente para recoger un arándano de X

$$\mathbb{P}(arandano\ y\ bowl\ y) = \frac{26}{300} = \frac{1}{12} = 0{,}083$$

Ec. 6 Probablemente para recoger un arándano de Y

Y la probabilidad de elegir una naranja de X es:

$$\mathbb{P}(naranja\ y\ bowl\ x) = \frac{51}{300} = \frac{1}{6} = 0{,}16$$

Ec. 7 Probablemente para recoger una naranja de X

***Dado que hemos recogido de X, ¿cuál es la probabilidad de que sea un arándano?***

Ahora la cosa se pone interesante. Calculamos la primera probabilidad condicional. En este caso, sabemos con certeza qué cuenco elegimos. En este caso, digamos que elegimos de X. Teniendo en cuenta este conocimiento, podemos calcular la probabilidad que nos indica la probabilidad de recoger un arándano.

Esta ***probabilidad condicional*** se denota como p(y=B| s=X), siendo s=X la condición para que elijamos el elemento de X. Para calcular p(y=B| s=X) tenemos que dividir el número de veces que hemos recogido arándanos de X por el número total de artículos recogidos de X:

$$\mathbb{P}(arandano|bowl\ x) = \frac{\frac{148}{300}}{\frac{199}{300}} = \frac{148}{199} = 0{,}7437$$

Ec. 8 Probabilidad para recoger un arándano, dado que elegimos de X

---

***¿Cuál es la probabilidad de recoger un arándano de X? : Probabilidad total (Regla del producto)***

Ha llegado el momento de la primera regla estadística importante. Aquí tomamos la probabilidad previamente derivada de recoger arándanos de X p(s=X, y=B) y extendemos esta ecuación multiplicándola por (n(s=X, y=B)+n(s=X, y=O)) en el denominador y el numerador. Podemos hacer esto porque el valor de la probabilidad p(s=X, y=B) no será cambiado por esta extensión.

Ahora, si observas más de cerca la ecuación, notarás que la nueva expresión para p(s=X, y=B) consiste en el producto entre otras dos probabilidades ***p(y=B|s=X)*** y ***p(s=X)*** que hemos derivado anteriormente.

$$\mathbb{P}(arandano|bowl\ x)\ \cdot\ \mathbb{P}(bowl\ x) = \frac{148}{199}\cdot\frac{2}{3} = \frac{296}{597} = 0{,}495$$

Esta relación entre probabilidades se denomina regla del producto. **La regla del producto nos permite calcular la probabilidad conjunta p(s=X, y=B) utilizando la probabilidad condicional p(y=B| s=X) y la probabilidad previa p(s =X)**.

***Regla de suma***

Ahora revisemos la probabilidad anterior p(s=X) que nos da la probabilidad de elegir cualquier elemento de X. Si se divide la ecuación en dos sumandos, como se puede ver en la segunda línea de la Ec. 10, se puede observar que estos dos sumandos no son otra cosa que dos probabilidades conjuntas que hemos derivado anteriormente.

$$\mathbb{P}(naranja\ y\ bowl\ x) = \frac{51}{300} = \frac{1}{6} = 0{,}16$$

*Probabilidad conjunta*

$$\mathbb{P}(arandano\ y\ bowl\ x) = \frac{148}{300} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

*Probabilidad conjunta*

$$\mathbb{P}(elegir\ cualquier\ elemento\ de\ bowl\ x) = \frac{148+51}{300} = \frac{199}{300} = 0{,}663$$

Esta relación se denomina regla de la suma. La regla de la suma permite calcular la probabilidad p(X) a priori haciendo la suma de probabilidades conjuntas que contienen la variable aleatoria s=X a partir de la anterior y de cualquier otra variable aleatoria y.

---

***La regla de Bayes***

Para la regla del producto, el orden de las variables aleatorias en la articulación no importa. Por lo tanto, p(s,y) y p(y,s) tienen el mismo valor.

$$\begin{aligned} p(s,y) &= p(y|s)p(s) \\ p(y,s) &= p(s|y)p(y) \\ \rightarrow p(s,y) &= p(y,s) \end{aligned}$$

Si igualamos los valores p(s, y) y p(y, s) y hacemos una reorganización obtenemos una nueva expresión matemática para p(s|y). Esta nueva expresión de p(s|y) es la regla de Bayes.

$$\begin{aligned} p(s,y) &= p(y,s) \\ p(y|s)p(s) &= p(s|y)p(y) \\ \rightarrow p(s|y) &= \frac{p(y|s)p(s)}{p(y)} \end{aligned}$$

Teorema/Regla de Bayes

***Finalmente: Dado que hemos recogido un arándano ¿Cuál es la probabilidad de que este arándano haya sido recogido del bowl X?***

El teorema de Bayes nos proporciona la fórmula para el cálculo de la probabilidad condicional p(s|y), que es la respuesta a nuestra pregunta inicial.

El hecho de que hayamos recogido un arándano se puede representar mediante la condición y=B. Para responder a la pregunta de qué tazón fue el arándano recogido, debemos calcular p(s|y=B) para s=X y s=Y. Ambos valores de p(s|y) nos indican la probabilidad de que el arándano haya sido recogido del cuenco X o del cuenco Y.

Hagamos el cálculo para s=X. Afortunadamente, todas las probabilidades que necesitamos, ya las hemos calculado en los apartados anteriores. Si insertamos estas probabilidades en p(s=X|y=B) en la Ec. 13 llegamos a la siguiente conclusión: **Dado que hemos recogido un arándano, la probabilidad de que este arándano haya sido recogido del bowl X es de aproximadamente el 86 %.** El cálculo se puede hacer de forma análoga para cualquier otro caso.

$$p(s=X|y=B) = \frac{p(y=B|s=X)p(s=X)}{p(y=B)}$$

$$= \frac{p(y=B|s=X)p(s=X)}{p(y=B,s=X)+p(y=B,s=Y)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(Arandano|Bowl\ X)\cdot\mathbb{P}(Bowl\ X)}{\mathbb{P}(arandano\ y\ bowl\ x)+\mathbb{P}(arandano\ y\ bowl\ y)}$$

$$\frac{\mathbb{P}(arandano|bowl\ x)\ \cdot\ \mathbb{P}(bowl\ x) = \frac{148}{199}\cdot\frac{2}{3} = \frac{296}{597} = 0{,}495}{\mathbb{P}(arandano\ y\ bowl\ x)+\mathbb{P}(arandano\ y\ bowl\ y)\ = \frac{1}{2}+\frac{1}{12}} \approx 86\%$$

Ec 13 Teorema de Bayes

Sin el teorema de Bayes, el cálculo de p(s|y) sería muy difícil. El teorema, sin embargo, nos permite calcular esta probabilidad utilizando probabilidades que se pueden calcular con mucho menos esfuerzo. Esta es la magia del Teorema de Bayes: una distribución de probabilidad difícil de calcular está representada por probabilidades que son muy fáciles de calcular.

El ejemplo utiliza la **Probabilidad conjunta** en el denominador, dado que, la **regla del producto** (**Probabilidad total**) nos permite calcular la **probabilidad conjunta p(s=X, y=B) utilizando la probabilidad condicional p(y=B|s=X) y la probabilidad previa p(s =X)**. Por tanto, es lo mismo, utilizar directamente la probabilidad conjunta o utilizar la probabilidad total.

**Para el mismo ejemplo, utilizamos la Probabilidad total en el denominador:**

El enunciado del ejercicio nos da las probabilidades de que se recoja un elemento aleatorio de cada bowl:

Evento A1: Se recoge un elemento del Bowl X → P(A1)=2/3
Evento A2: Se recoge un elemento del Bowl Y → P(A2)=1/3

Además, el enunciado también nos proporciona la probabilidad que se recoja un arandano dado un bowl especifico:

Evento B: Se recoge un arandano
B|A1: Dado el bowl x, el elemento recogido es un arandano → P(B|A1)=148/199
B|A2: Dado el bowl y, el elemento recogido es un arandano → P(B|A2)=26/101

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2)}$$

$$= \frac{\frac{148}{199} \cdot \frac{2}{3}}{\left(\frac{148}{199} \cdot \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{26}{101} \cdot \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{296}{597}}{\frac{296}{597} + \frac{26}{303}} = \frac{\frac{296}{597}}{\frac{11690}{20099}} = \frac{14948}{17535} \approx 86\%$$