Laboratorio – Triedro de Frenet

Michaelle Perez

Julio, 2021

Contents

1 Longitud de Arco y Re-parametrización.

1.1 Re-parametrización.

Dada una curva (función vectorial) $\gamma(t)$, una reparametrización es otra curva $\lambda(t)$ tal que existe un $u : I \to I'$ con $u'(t) > 0$ y $\lambda(t) = \gamma(u(t))$. Esencialmente la reparametrización es una curva que recorre los mismos puntos; pero posiblemente con una rapidez distinta.

- Ver Ejemplo.

1.1.1 Ejercicio 1:

Construya una reparametrización de la recta:

$$L(t) = (t, 2t, 2t)$$

de forma que se recorra con una rápidez constante de 2.

1.2 Re-parametrización respecto longitud de arco.

Dada una curva es posible reparametrizarla de muchas formas, no todas tienen una interpretación "natural". Una de las que es natural y que nos permite dar una forma "canónica" de una curva, explícitamente para los puntos que recorre y en que orden, es re parametrizar usando la longitud de arco. Recordemos que:

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{v}\| \; dt,$$

siempre que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. De forma que podemos buscar $t = t(s)$ invirtiendo la relación anterior y haciendo:

$$\Gamma(s) = \gamma(t(s)).$$

- Ver Ejemplo.

1.2.1 Ejercicio 2

Considere la curva:

$$\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3 \qquad \gamma(t) = (2t, \cos 2t, \sin 2t).$$

Re parametrice respecto de la longitud de arco.

2 Triedro de Frenet-Serret

Las fórmulas básicas de Frenet-Serret son:

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N \quad \frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B \quad \frac{dB}{ds} = -\tau N$$

Cuando no tenemos parametrización respecto de la lóngitud de arco tenemos las siguientes definiciones:

- Tangente unitario: $T = \frac{1}{\|v\|} v$.
- Normal: $N = \frac{1}{|v|} \frac{dT}{dt}$.
- Curvatura: $\kappa = \frac{1}{|v|} \left\| \frac{dT}{dt} \right\|$.
- Bi-normal: $B = T \times N$.
- Torsión: $\tau = \frac{1}{\|v|} \left\| \frac{dB}{dt} \right\|$.

2.0.1 Ejercicio 3

- Ver Ejemplo

Demuestre que para una curva $\gamma(t)$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ efectivamente:

$$\hat{\mathbf{N}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{dt} = 0.$$

2.0.2 Ejercicio 4

- Ver Ejemplo.

Considere la curva:

$$\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t)$$

Encuentre $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{N}}$, y $\hat{\mathbf{B}}$.

2.0.3 Ejercicio 5

Utilice un sistema computacional para dibujar:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t).$$

- Explique porque $\hat{\mathbf{B}}$ es constante.
- Utilice un sistema computacional para verificar lo anterior.
- Verifique que $\gamma(t)$ está sobre el plano $z - y - x = 0$.

2.0.4 Ejercicio 6

Considere una partícula que se mueve siguiendo una hélice:

$$\gamma(t) = (at, b\cos t, b\sin t),$$

donde $a, b > 0$ son constantes.

- Pruebe que la partícula se mueve con una rapidez constante.
- Encuentre las componente tangencial y normal de la aceleración de la partícula.