УДК 531.36

© 2016 г. В. И. Каленова, В. М. Морозов

О НОВОМ КЛАССЕ ПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ И ЕГО СВЯЗИ С ЗАДАЧЕЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Перечисляются описанные ранее классы линейных нестационарных систем (ЛНС), приводимых к стационарным системам, и вводятся новые конструктивно приводимые системы первого и второго порядков. Для ЛНС второго порядка сформулирована и доказана теорема об эффективных необходимых и достаточных условиях приводимости. Для ЛНС нового класса первого порядка проводится сопоставление с системами уравнений, возникающими при решении задачи оптимального управления с квадратичным критерием качества.

Линейные нестационарные системы дифференциальных уравнений (ЛНС) возникают в задачах динамики космических аппаратов, гироскопических и электромеханических систем после линеаризации уравнений в окрестности некоторого программного движения.

Идея приводимости ЛНС восходит к Ляпунову, который ввел понятие приводимой однородной ЛНС в связи с исследованием задачи устойчивости [1]. Это понятие было распространено на ЛНС, содержащие управление и наблюдения [2].

1. Приводимость линейных нестационарных систем первого порядка. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{1.1}$$

где x — $(n \times 1)$-вектор состояния, $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$ — $(n \times n)$-матрица с элементами $a_{ij}(t)$, являющимися действительными непрерывными функциями при $t \in I$ $(0 \le t_0 \le t < \infty)$. Система (1.1) называется приводимой по Ляпунову, если при помощи преобразования Ляпунова $x = L(t)y$ она может быть преобразована в линейную систему с постоянной матрицей R

$$\dot{y} = Ry \tag{1.2}$$

Напомним, что линейное преобразование $x = L(t)y$, где $L(t)$ — невырожденная матрица с непрерывно дифференцируемыми элементами, называется преобразованием Ляпунова [1], если матрицы $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ ограничены и $|\det L(t)| \ge \mu > 0$ при $t \in I$.

Ляпунов указал только один класс приводимых ЛНС — системы с периодическими коэффициентами. Основы общей теории однородных приводимых систем были заложены в работах Н.П. Еругина [3, 4]. В общем случае, приводящее преобразование и матрица коэффициентов приведенной стационарной системы неизвестны. Конструктивные способы построения матрицы преобразования можно указать лишь в некоторых случаях.

С проблемой приводимости тесно связана задача нахождения решения ЛНС в замкнутой форме, которой занимались многие исследователи (см., например, [4—10]).

Напомним некоторые нетривиальные классы приводимых ЛНС.

Системы коммутативного класса. Матрица $A(t)$ относится к коммутативному классу, если существует непрерывно дифференцируемая на интервале I матрица $B(t)$, такая, что

$$\dot{B}(t) = A(t), \quad [A(t), B(t)] = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in I \tag{1.3}$$

где через $[A, B] = AB - BA$ обозначен коммутатор матриц A и B. Матрица $B(t)$ представляется в виде

$$B(t) = B_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau, \quad t \in I, \quad B_0 = \text{const} \tag{1.4}$$

Фундаментальная матрица $\Phi(t, t_0)$ системы (1.1), в которой матрица $A(t)$ относится к коммутативному классу, имеет вид [10]

$$\Phi(t, t_0) = e^{B(t)} e^{-B_0} \tag{1.5}$$

Если в представлении (1.4) $B_0 = 0$, то матрица системы (1.1) перестановочна со своим интегралом. Система такого вида впервые была рассмотрена И.А. Лаппо-Данилевским [5] (см. также [2, 6, 9–11]).

Системы специального класса [2, 7, 9]. Пусть в системе (1.1) матрица $A(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале I. Если существует постоянная $(n \times n)$-матрица C, такая, что матрица $A(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{A} = CA - AC \tag{1.6}$$

то система (1.1) при помощи невырожденного преобразования

$$x = T(t)y, \quad T(t) = e^{C(t - t_0)} \tag{1.7}$$

приводится к стационарной системе (1.2), где $R = A(t_0) - C = \text{const}$.

Фундаментальная матрица системы (1.1) в этом случае имеет вид

$$\Phi(t, t_0) = e^{C(t - t_0)} e^{R(t - t_0)} \tag{1.8}$$

Пример. Рассмотрим систему (1.1) с матрицей

$$A(t) = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 0 & 2e^{2t} & 2e^{t} \\ -2e^{-2t} & 0 & 2e^{-t} \\ e^{-t} & e^{t} & 0 \end{Vmatrix} \quad (t_0 = 0)$$

удовлетворяющей условию (1.3). Матрицы $B(t)$ и

$$B_0 = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

нильпотентные ($B^2(t) = 0$, $B_0^2 = 0$), тогда матрица $\Phi(t, t_0)$, вычисленная по формуле (1.5), имеет вид

$$\Phi(t,0) = (E + B(t))(E - B_0) = \begin{Vmatrix} \frac{3}{4}+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{4}e^{2t} & -\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{4}e^{2t} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} \\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{4}e^{-2t} & \frac{3}{4}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t} \\ 1-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{3}{4}e^{-t} & -1+\frac{3}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t} \end{Vmatrix}$$

В данном случае матрица $A(t)$, относящаяся к коммутативному классу, также относится и к специальному классу, так как удовлетворяет уравнению (1.6), где $c_{11} = -c_{22} = 1$, остальные элементы $c_{ij} = 0$. Фундаментальная матрица может быть вычислена и по формуле (1.8) при $R = A(0) - C$. Можно найти другие системы такого типа [11].

Имеются примеры механических систем, математические модели которых относятся к специальному и коммутативному классам [2, 11–16].

2. Класс приводимых линейных нестационарных систем второго порядка. Рассмотрим многомерные ЛНС второго порядка, связанные с рассмотренными в разд. 1 приводимыми системами специального класса, и имеющие широкое применение в механике

$$\ddot{x} + A(t)x = 0 \tag{2.1}$$

где матрица $A(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале I.

Теорема 1. Для того чтобы при помощи линейного преобразования $x = T(t)y$ с дважды непрерывно дифференцируемой матрицей $T(t)$ ЛНС (2.1) была приводима к стационарной системе

$$\ddot{y} + 2D\dot{y} + Ky = 0; \quad D = \mathrm{const}, \quad K = \mathrm{const} \tag{2.2}$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица $A(t)$ удовлетворяла условию (1.6).

Доказательство. Необходимость. Пусть система (2.1) приведена к системе (2.2) преобразованием $x = T(t)y$. Тогда переменная $y(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\ddot{y} + 2T^{-1}\dot{T}\dot{y} + T^{-1}(\ddot{T} + AT)y = 0$$

При этом

$$T^{-1}\dot{T} = D, \quad T^{-1}(\ddot{T} + AT) = K \tag{2.3}$$

вследствие чего $\dot{T} = TD$, $\ddot{T} = TD^2$. При $T(0) = E$, ($t_0 = 0$) матрица преобразования имеет вид $T(t) = e^{Dt}$. Из соотношений (2.3) имеем $A = T(K - D^2)T^{-1}$, $\dot{A} = DA - AD$.

Таким образом, матрица $A(t)$ удовлетворяет условию (1.6) при $C = D$.

Достаточность. Пусть выполнено условие (1.6), тогда

$$A(t) = e^{Ct}A(0)e^{-Ct}$$

При помощи преобразования (1.7) получим

$$\ddot{y} + 2C\dot{y} + (A(0) + C^2)y = 0$$

Система (2.1) приведена к стационарной системе (2.2) при

$$D = C, \quad K = A(0) + C^2$$

Теорема 1 уточняет результаты, изложенные ранее [12, 13], где рассмотрены ЛНС второго порядка специального класса и исследовано влияние сил различной природы на нестационарную потенциальную механическую систему. Это уточнение состоит в том, что система (2.1) с нестационарными потенциальными силами ($A(t) = A^T(t)$) приводима при помощи преобразования $x = T(t)y$ к стационарной системе тогда и только тогда, когда матрица $A(t)$ удовлетворяет условию (1.6), в то время как ранее [12, 13] условие (1.6) рассматривалось лишь как предположение.

Замечание. Понятие приводимой системы было введено Ляпуновым для нестационарных систем, записанных в форме Коши. Представим уравнение (2.1) в виде

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} x \\ \dot{x} \end{Vmatrix} = P(t)\begin{Vmatrix} x \\ \dot{x} \end{Vmatrix}, \quad P(t) = \begin{Vmatrix} 0 & E_n \\ -A(t) & 0 \end{Vmatrix}$$

Эта система приводима в смысле Ляпунова к стационарной системе, если существует соответствующее невырожденное преобразование

$$\begin{Vmatrix} x \\ \dot{x} \end{Vmatrix} = Q(t)\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix}, \quad Q(t) = \begin{Vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{Vmatrix}$$

причем в общем случае вид матрицы $Q(t)$ неизвестен. Переменная x связана с переменными приведенной стационарной системы y_1 и y_2 соотношением $x = Q_{11}(t)y_1 + Q_{12}(t)y_2$. Утверждение теоремы 1 о приводимости имеет место только для преобразования $x = T(t)y_1$, которое является лишь частным случаем указанного выше соотношения при $Q_{12}(t) \equiv 0$. Поэтому указанное в теореме 1 преобразование не приводит скалярное уравнение второго порядка с периодической функцией $a(t)$ к стационарному виду, хотя по теореме Ляпунова о приводимости линейных систем с периодическими коэффициентами такое преобразование существует.

Рассмотрим условия приводимости для ЛНС более общего вида

$$\ddot{x} + 2G\dot{x} + A(t)x = 0, \quad G = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

Сделав замену переменных $x = e^{-Gt}z$, получим

$$\ddot{z} + P(t)z = 0, \quad P(t) = e^{Gt}A(t)e^{-Gt} - G^2 \tag{2.5}$$

В соответствии с теоремой 1 для приводимости системы (2.5) необходимо и достаточно, чтобы матрица $P(t)$ удовлетворяла уравнению (1.6), т.е.

$$P(t) = e^{Ct}P_0e^{-Ct} \ (P(0) = P_0, t_0 = 0)$$

Тогда матрица $A(t)$ должна представляться в виде

$$A(t) = e^{-Gt}A_1(t)e^{Gt} + G^2, \quad \dot{A}_1 = CA_1 - A_1C \tag{2.6}$$

Если $G = gE$, то $A(t) = e^{Ct}P_0e^{-Ct} + G^2$
и матрица $A(t)$ удовлетворяет уравнению (1.6). В этом случае в стационарной системе (2.2)

$$D = C, \quad K = A_0 - g^2E + C^2$$

Если $GC = CG$, то $A(t) = e^{(C-G)t}K_0e^{-(C-G)t} + G^2$
Тогда матрица $A(t)$ удовлетворяет уравнению вида (1.6) при замене C на $C - G$.

По теореме 1 система (2.5) и, следовательно, (2.4) приводится к стационарной системе (2.2), где $D = C - G, K = A_0 + C^2 - G^2$.

3. Новый класс приводимых линейных нестационарных систем первого порядка. Рассмотрим ЛНС порядка $2n$ специальной структуры

$$\dot{x}(t) = \left[A + \Psi(t)\right] x(t) \tag{3.1}$$

где

$$\underset{(2n\times 1)}{x} = \begin{Vmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{Vmatrix}, \quad \underset{(2n\times 2n)}{A} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}, \quad \underset{(n\times n)}{A_{ij}} = \text{const}, \quad \underset{(2n\times 2n)}{\Psi}(t) = \text{diag}\left(-F(t), F(t)\right)$$

$F(t)$ – $(n \times n)$-матрица с непрерывно дифференцируемыми элементами при $t \in I$.

Заметим, что любая линейная гамильтонова система имеет вид

$$\dot{x} = G(t)x, \quad \underset{(2n\times 2n)}{G} = \begin{Vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & -G_{11} \end{Vmatrix}$$

Если матрицы $G_{12}, G_{21} = \text{const}$, а матрица $G_{11} = A_{11} - F(t)$, где $A_{11} = \text{const}$, $A_{22} = -A_{11}$, то эта система частный случай системы (3.1).

Теорема 2. Если для системы (3.1) выполняются условия

$$1)\ \det A_{12} \neq 0, \quad A_{12}F(t) = F(t)A_{12} \tag{3.2}$$

2) матрица $F(t)$ удовлетворяет матричному уравнению Риккати с постоянными коэффициентами

$$\dot{F} = F^2 - FA_{11} + D_1F + D_2 \tag{3.3}$$

где $D_1 = A_{12}A_{22}A_{12}^{-1}$, D_2 – произвольная постоянная $(n \times n)$-матрица, то при помощи линейного преобразования

$$x = T(t)y, \quad T(t) = \begin{Vmatrix} E_n & O_n \\ A_{12}^{-1}F(t) & E_n \end{Vmatrix}, \quad T^{-1}(t) = \begin{Vmatrix} E_n & O_n \\ -A_{12}^{-1}F(t) & E_n \end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

она приводится к стационарной системе

$$\dot{y} = Ry, \quad R = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ R_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}, \quad R_{21} = A_{21} - A_{12}^{-1}D_2 \tag{3.5}$$

Доказательство. Применив преобразование (3.4) к системе (3.1), получим

$$\dot{y} = R(t)y$$

$$R(t) = T^{-1}(t)\left[\left(A + \Psi(t)\right)T(t) - \dot{T}(t)\right] =$$

$$= \begin{Vmatrix} E_n & O_n \\ -A_{12}^{-1}F & E_n \end{Vmatrix} \cdot \left[\begin{Vmatrix} A_{11} - F & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} + F \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} E_n & O_n \\ A_{12}^{-1}F & E_n \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} O_n & O_n \\ A_{12}^{-1}\dot{F} & O_n \end{Vmatrix}\right] = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ R_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}$$

и при учете условий (3.2) и (3.3) имеем

$$R_{21}(t) = A_{12}^{-1}[-\dot{F} + F^2 + D_1F - FA_{11} + A_{12}A_{21}] = A_{21} - A_{12}^{-1}D_2 = \text{const}$$

В частности, если $A_{12} = E_n$, то условия (3.2) выполнены, и $D_1 = A_{22}$. Если $A_{11} = 0$, $A_{22} = 0$, уравнение (3.3) принимает вид

$$\dot{F} = F^2 + D_2 \tag{3.6}$$

Следует подчеркнуть, что система (3.1) с матрицей коэффициентов, удовлетворяющей условиям (3.2) и (3.3), не входит в описанные выше классы приводимых ЛНС первого порядка.

Особенностью нового класса приводимых систем является то, что в условиях (3.3) ((3.6)), которым должны удовлетворять элементы матрицы системы (3.1), содержится произвольная матрица D_2, которая существенно влияет на возможный вид матрицы $F(t)$ и, следовательно, на тип матриц $A(t)$, относящихся к этому классу приводимых ЛНС.

Рассмотрим уравнение Риккати (3.3). Ему соответствует [17] следующая матричная стационарная линейная система размерности $2n$:

$$\dot{W} = -WD_1 - V, \quad \dot{V} = WD_2 - VA_{11} \tag{3.7}$$

где W, V – $(n \times n)$-матрицы.

Решение уравнения (3.3) тогда представляется в виде

$$F(t) = W^{-1}(t)V(t) \tag{3.8}$$

Обозначив $F(t_0) = F_0$, примем $W(t_0) = E_n$, $V(t_0) = F_0$.

Из системы (3.7) получим матричное уравнение второго порядка относительно матрицы $W(t)$

$$\ddot{W} + \dot{W}(D_1 + A_{11}) + W(D_2 + D_1A_{11}) = 0 \tag{3.9}$$

Если получено решение $W(t)$ уравнения (3.9), то матрица $V(t)$ определяется из соотношения

$$V(t) = -\dot{W}(t) - W(t)D_1$$

Далее для простоты изложения рассмотрим случай, когда $A_{11} = A_{22} = 0$. Тогда уравнение (3.9) примет вид

$$\ddot{W} + WD_2 = 0 \tag{3.10}$$

Для решения уравнения (3.10) введем вектор размерности $n^2 \times 1$, составленный из последовательных строк матрицы $W(t)$:

$$w(t) = \left\| w^{(1)T} \ \ldots \ w^{(n)T} \right\|^T; \quad w^{(j)}(t) = \left\| w_{j1} \ \ldots \ w_{jn} \right\|^T, \quad j = 1, \ldots, n$$

Матричное уравнение (3.10) можно представить в виде векторного уравнения

$$\ddot{w} + Dw = 0; \quad D = E_n \otimes D_2^T, \quad \underset{(n^2\times n^2)}{D} = \mathrm{diag}(D_2^T, \ldots, D_2^T) \tag{3.11}$$

Знак $\otimes$ означает кронекеровское произведение матриц [18].

Уравнение (3.11) представим в виде следующей системы векторных уравнений второго порядка:

$$\ddot{w}^{(j)} + D_2^T w^{(j)} = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Характер решений этих систем зависит от произвольной постоянной матрицы D_2, введенной в условии (3.5). В частном случае, когда $D_2 = 0$, получим решение уравнения (3.6), сделав замену $F^{-1} = H$ $(\dot{H} = -E)$, в виде

$$F(t) = H^{-1} = \left(E - F_0(t - t_0)\right)^{-1} F_0, \quad F_0 = F(t_0)$$

Были указаны [17] некоторые способы решения уравнений (3.5) и (3.6).

Частный случай. В случае $n = 1$ система (3.1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = \left[A + \Psi(t)\right] x(t) \tag{3.12}$$

$$A = \|a_{ij}\| = \text{const}, \quad i, j = 1, 2, \quad \Psi(t) = \text{diag}\left(-a(t), a(t)\right)$$

Пусть функция $a(t)$, в соответствии с теоремой 2, удовлетворяет уравнению Риккати с постоянными коэффициентами

$$\dot{a} = a^2 + \delta a + \beta; \quad \delta = a_{22} - a_{11} \tag{3.13}$$

где β – произвольная постоянная. При условии (3.13) переменная $x_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_1 + C_1\dot{x}_1 + C_2 x_1 = 0; \quad C_1 = -\delta, \quad C_2 = \beta + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Переменная $x_2(t)$ определяется из соотношения

$$x_2(t) = \frac{1}{a_{12}}\left[\dot{x}_1(t) - \left(a_{11} - a(t)\right) x_1(t)\right], \quad a_{12} \neq 0$$

Преобразование

$$x = T(t)y, \quad T(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{a(t)}{a_{12}} & 1 \end{Vmatrix}$$

приводит систему (3.12) к системе с постоянными коэффициентами

$$\dot{y}(t) = Ry(t); \quad R = \text{const}, \quad R = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ r_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}, \quad r_{21} = \frac{a_{12}a_{21} - \beta}{a_{12}}$$

Таким образом, решение исходной системы (3.12) можно представить в виде

$$x(t) = T(t)e^{Rt}T^{-1}(0)x(0)$$

Рассмотрим типы функций, удовлетворяющих уравнению (3.13). Заменой $b(t) = a(t) + \delta/2$ оно сводится к уравнению

$$\dot{b} = b^2 + \gamma, \quad \gamma = \beta - \delta^2/4 \tag{3.14}$$

В зависимости от величины γ могут представиться разные случаи:

1) если $\gamma = 0$, то

$$b(t) = b_0/(1 - b_0 t), \quad b_0 = b(0) \neq 0 \tag{3.15}$$

(при $t > 0$ есть еще очевидное решение $b(t) = -1/t$);

2) если $\gamma = \omega^2 > 0$, то

$$b(t) = \omega \operatorname{tg}(\omega t + C), \quad C = \operatorname{arctg}\frac{b_0}{\omega} \tag{3.16}$$

3) если $\gamma = -\omega^2 < 0$, то

$$b(t) = \begin{cases} \omega \operatorname{th}(\omega t + C), & C = \operatorname{arcth}\dfrac{b_0}{\omega} \quad \text{при } |b(t)| < \omega \\ \omega \operatorname{cth}(\omega t + C), & C = \operatorname{arccth}\dfrac{b_0}{\omega} \quad \text{при } |b(t)| > \omega \end{cases} \tag{3.17}$$

Таким образом, класс систем вида (3.12), допускающих приведение к системам с постоянными коэффициентами, определяется функциями $b(t)$ вида (3.15)–(3.17).

4. Приводимые линейные нестационарные системы и задача оптимального управления. Рассмотрим связь полученных в разд. 3 результатов с задачей оптимального управления с квадратичным критерием качества

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad J = \frac{1}{2}\int_0^{t_k}(x^TQx + u^TNu)dt + \frac{1}{2}x^T(t_k)Lx(t_k) \tag{4.1}$$

Здесь x — $(n\times 1)$-вектор состояния и u — $(r\times 1)$-вектор управления, $B = \text{const}$, Q и N — постоянные положительно определенные матрицы размерностью $n\times r$, $n\times n$ и $r\times r$ соответственно, L — постоянная неотрицательно определенная $(n\times n)$-матрица.

Как известно [19], оптимальное управление в задаче (4.1) представляется в виде

$$u(t) = -N^{-1}B^Tp(t) \tag{4.2}$$

где p — $(n\times 1)$-вектор вспомогательных переменных. Тогда система для переменных p и x имеет вид [19]

$$\left\|\begin{matrix}\dot{p}\\ \dot{x}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}-A^T(t) & -Q\\ -S & A(t)\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}p\\ x\end{matrix}\right\|; \quad S = BN^{-1}B^T \tag{4.3}$$

Если матрица $A(t)$ симметрична, то система (4.3) совпадает с системой (3.1) при

$$A_{11} = A_{22} = 0, \quad F(t) = A(t), \quad A_{12} = -Q, \quad A_{21} = -S$$

В соответствии с теоремой 2 система (4.3) приводима, если выполняются условия (3.2) и (3.5), а именно,

$$\det Q \neq 0, \quad QA(t) = A(t)Q, \quad \dot{A} = A^2 + D_2 \tag{4.4}$$

Преобразование вида (3.2)

$$\left\|\begin{matrix}p(t)\\ x(t)\end{matrix}\right\| = T(t)y, \quad T(t) = \left\|\begin{matrix}E_n & O_n\\ -Q^{-1}A(t) & E_n\end{matrix}\right\| \tag{4.5}$$

приводит систему (4.3) к стационарной системе вида (3.3)

$$y = \left\|\begin{matrix}y^{(1)}\\ y^{(2)}\end{matrix}\right\|, \quad \dot{y} = Ry, \quad R = \left\|\begin{matrix}O_n & -Q\\ R_{21} & O_n\end{matrix}\right\|, \quad R_{21} = -S + Q^{-1}D_2 \tag{4.6}$$

Как правило, в теории оптимального управления вектор $p(t)$ из выражения (4.2) представляют в форме

$$p(t) = K(t)x(t)$$

где $K(t)$ – $(n \times n)$-матрица, подлежащая определению. Симметричная матрица $K(t)$ удовлетворяет нелинейному матричному дифференциальному уравнению Риккати [19]

$$\dot{K} = -KA(t) - A^T(t)K + KSK - Q, \quad K(t_k) = L \tag{4.7}$$

Дифференциальное уравнение, определяющее оптимальный закон движения системы (4.1), имеет вид

$$\dot{x} = \left[A(t) - SK(t)\right] x \tag{4.8}$$

Нетрудно показать, что в этом случае оптимальное управление, определяемое выражением (4.2), и решение $x(t)$ оптимальной задачи (4.8) согласно преобразованию (4.5) имеют вид

$$u(t) = -N^{-1}B^T y^{(1)}(t), \quad x(t) = -Q^{-1}[\dot{y}^{(1)}(t) + A(t)\, y^{(1)}(t)]$$

Вектор $y^{(1)}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{y}^{(1)} + QR_{21}y^{(1)} = 0 \tag{4.9}$$

Как известно [19], матрица $K(t)$ связана с фундаментальной матрицей $\Phi(t)$ системы (4.3) порядка $2n$. Введем в рассмотрение $(2n \times 2n)$-матрицу в блочной форме

$$\Omega(t_k, t) = \Phi(t_k)\Phi^{-1}(t) = \begin{Vmatrix} \Omega_{11}(t_k, t) & \Omega_{12}(t_k, t) \\ \Omega_{21}(t_k, t) & \Omega_{22}(t_k, t) \end{Vmatrix}$$

Тогда решение уравнения (4.7) можно представить в виде

$$K(t) = \left[\Omega_{11}(t_k, t) - L\Omega_{21}(t_k, t)\right]^{-1} \left[L\Omega_{22}(t_k, t) - \Omega_{12}(t_k, t)\right] \tag{4.10}$$

С другой стороны, в силу соотношения (4.5) имеет место равенство

$$\Omega(t_k, t) = T(t_k)Y(t_k, t) \tag{4.11}$$

где $Y(t_k, t) = e^{R(t-t_0)}$ – фундаментальная матрица решений стационарной системы (4.6). Представив выражение (4.11) в блочном виде и подставив его в выражение (4.10), получим явное аналитическое представление решения матричного нелинейного уравнения Риккати при условии, что матрица $A(t)$ удовлетворят уравнению (4.4).

Частный случай. При $n = 1$ оптимальным управлением для уравнения

$$\dot{x} = a(t)x + u$$

при квадратичном критерии качества

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_k}(x^2 + \rho u^2)dt + \frac{1}{2}qx^2(t_k), \quad \rho, q = \text{const}>0$$

будет управление

$$u(t) = -\rho^{-1}p(t)$$

где $p(t)$ – вспомогательная переменная. Система уравнений для переменных x, p имеет вид

$$\dot{p} = -a(t)p - x, \quad \dot{x} = -\rho^{-1}p + a(t)x \tag{4.12}$$

и совпадает с системой (3.12) при

$$a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12} = -1, \quad a_{21} = -\rho^{-1}$$

Для приводимости системы (4.12) необходимо, чтобы функция $a(t)$ удовлетворяла уравнению (3.14), так как $\delta = 0$. Тогда функция $p(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\ddot{p} + C_2 p = 0; \quad C_2 = \beta - \rho^{-1}$$

Матрица преобразования системы (4.12) к стационарной системе

$$\dot{y} = Ry, \quad R = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ C_2 & 0 \end{Vmatrix} \tag{4.13}$$

в этом случае имеет вид

$$T(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -a(t) & 1 \end{Vmatrix}$$

Решение нестационарной системы (4.12) представляется в виде

$$p(t) = y_1(t), \quad x(t) = -a(t)y_1(t) + y_2(t)$$

где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – решения стационарной системы (4.13).

Начальное состояние $x(0) = x_0$ считается известным, а граничное условие для $p(t)$ определяется из условия трансверсальности $p(t_k) = qx(t_k)$.

Представим функцию $p(t)$ в виде $p(t) = K(t)x(t)$, функция $K(t)$ определяется из уравнения

$$\dot{K} + 2a(t)K - \rho^{-1}K^2 + 1 = 0, \quad K(t_k) = q \tag{4.14}$$

Тогда решение уравнения (4.14) имеет вид

$$K(t) = \frac{p(t)}{x(t)} = \frac{y_1(t)}{y_2(t) - a(t)y_1(t)}$$

Таким образом, получено в явном виде решение уравнения Риккати с переменными коэффициентами (4.14), причем вид функции $a(t)$ определяется одним из выражений (3.15)–(3.17) ($a(t) = b(t)$).

В частности, при $C_2 = 0$ ($\beta = \rho^{-1} > 0$) получим

$$y_1(t) = C_3 t + C_4, \quad y_2(t) = -C_3; \quad K(t) = -\frac{C_4 + C_3 t}{C_3 + a(t)\left(C_4 + C_3 t\right)}$$

Значения постоянных величин C_3 и C_4 определяются значениями x_0 и q. Функция $a(t)$ определяется соотношением (3.16), так как $\gamma = \beta > 0$. Если $a_0 = 0$, то $a(t) = \omega \operatorname{tg} \omega t$.

Таким образом, линейная нестационарная система размерности $2n$, возникающая при решении задачи оптимального управления с квадратичным критерием качества, при определенных условиях оказывается принадлежащей описанному в разд. 3 новому классу приводимых систем. Это означает, что указанная оптимальная задача в данном случае допускает аналитическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
2. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010. 206 с.
3. *Еругин Н.П.* Приводимые системы // Тр. Матем. ин-та им. Стеклова. Т. 13. М.: Изд-во АН СССР, 1946. 96 с.
4. *Еругин Н.П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск: Изд-во АН БССР, 1963. 272 с.
5. *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1957. 456 с.
6. *Богданов Ю.С., Чеботарев Г.Н.* О матрицах, коммутирующих со своей производной // Изв. вузов. Математика. 1959. № 4. С. 27–37.
7. *Wu M.-Y.* Some new results in linear time-varying systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. AC-20. № 1. P. 159–161.
8. *Wu M.-Y., Sherif A.* On the commutative class of linear time-varying systems // Int. J. Control. 1976. V. 23. № 3. P. 433–444.
9. *Wu M.-Y.* Transformation of a linear time-varying systems into a linear time-invariant system // Int. J. Control. 1978. V. 27. № 4. P. 589–603.
10. *Lukes D.L.* Differential Equations: Classical to Controlled Mathematics in Science and Engineering. V. 163. N.Y.: Academic Press, 1983. 322 p.
11. *Каленова В.И., Морозов В.М., Соболевский П.М.* К вопросу об исследовании линейных нестационарных систем // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. мех. 2009. № 1. С. 51–61.
12. *Каленова В.И., Морозов В.М.* О приводимости линейных однородных нестационарных систем второго порядка // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 6. С. 923–929.
13. *Каленова В.И., Морозов В.М.* О влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость одного класса линейных нестационарных систем // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 386–397.
14. *Каленова В.И., Морозов В.М., Соболевский П.М.* Об устойчивости механических систем определенного класса // ПММ. 2008. Т. 73. Вып. 3. С. 251–259.
15. *Каленова В.И., Морозов В.М.* О применении методов теории приводимости к некоторым задачам динамики гироскопических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 8–14.
16. *Морозов В.М., Каленова В.И.* О некоторых линейных нестационарных системах в задачах общей механики // Проблемы современной механики. М.: Изд-во МГУ, Изд-во Омега-Л, 2008. С. 332–346.
17. *Егоров А.И.* Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
18. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis. N.Y.: McGraw Hill, 1960 = *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
19. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552 с.

НИИ механики МГУ, Москва
e-mail: kalen@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
20.V.2015