Стабилизация линейных систем.
Управление по оценке состояния

Задание

Объект управления задан системой уравнений

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx, \tag{1}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$ — вектор состояния системы, u — управление (входной сигнал), y — измерение с датчика (выходной сигнал); матрицы $A,\ b,\ c$ приведены ниже.

Требуется:

1. Исследовать систему (1) на управляемость и наблюдаемость.
2. Решить задачу модальной стабилизации системы (1), выбрав желаемый вид характеристического многочлена системы с обратной связью $u = -kx$ следующим образом:
   (a) $p_d(\lambda) = (\lambda + 1)^2$ — стандартная форма Ньютона, для нечётных вариантов,
   (b) $p_d(\lambda) = \lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1$ — форма Баттерворта, для чётных вариантов.

   Расчёт коэффициентов обратной связи произвести по формуле Аккермана. Выполнить проверку решения.
3. Решить линейно-квадратичную задачу оптимального управления объектом (1) с критериями качества:
   $$J_1 = \int_0^\infty u^2 dt \to \min, \qquad J_2 = \int_0^\infty (x^T Q x + u^2) dt \to \min\,.$$
   Исследовать устойчивость системы с оптимальными обратными связями. Матрицы весовых коэффициентов Q приведены ниже.
4. Определить значения стоимостных функционалов J_1 и J_2 для всех найденных законов управления.
5. Построить асимптотический наблюдатель для оценки вектора состояния
   $$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + bu + L(y - C\widehat{x}).$$
6. Провести компьютерное моделирование:
   (a) Процессов стабилизации системы (1) по вектору состояния $u = -kx$, для всех трёх полученных коэффициентов усиления k.
   (b) Процессов стабилизации системы (1) по оценке состояния $u = -k\widehat{x}$, где $\widehat{x}$ – оценка вектора состояния, полученная асимптотическим наблюдателем.
   В вариантах 1, 4, 7, … использовать коэффициент k, найденный при решении задачи модального управления.
   В вариантах 2, 5, 8, … использовать оптимальный коэффициент k $(J_1 \to \min)$.
   В вариантах 3, 6, 9, … использовать оптимальный коэффициент k $(J_2 \to \min)$.
   Использовать ненулевые начальные условия $x_{1,2}(0) \neq 0$, а также $\widehat{x}(0) = 0$.

Требования к решению задачи: Расчёт обратных связей (п.1, п.3 для $J_1 \to \min$) и наблюдателя производится аналитически, без использования средств компьютерной математики со всеми необходимыми промежуточными выкладками.

Задания для Сэ-12-21

1. **Грачёв Дмитрий Андреевич**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. **Коломиец Ярослав Александрович**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. **Лапташкин Григорий Владимирович**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. **Майков Дмитрий Александрович**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. **Оборин Дмитрий Андреевич**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. **Переверзев Михаил Ильич**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

7. **Ратников Матвей Александрович**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. **Семенякина Елизавета Сергеевна**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

9. **Снегирев Иван Сергеевич**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. **Толушкин Ростислав Григорьевич**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

11. **Турчанинов Никита Александрович**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

12. **Чистяков Евгений Артемович**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. **Чугреев Никита Сергеевич**, гр. Сэ-12-21

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$