Trabajo práctico 4

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

Definición de la Transformada Discreta de Fourier (DFT):

DTF directa: considerando $n = 0, \ldots, N-1$

$$G(n) = \mathcal{F}[g(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)\, e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} \tag{1}$$

DFT inversa: considerando $k = 0, \ldots, N-1$

$$g(k) = \mathcal{F}^{-1}[G(n)] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} G(n)\, e^{j2\pi\frac{nk}{N}} \tag{2}$$

Propiedades de la DFT:

1. Linealidad:
Sean $x(k)$ e $y(k)$ funciones y a y b constantes

$$\mathcal{F}[a\ x(k) + b\ y(k)] = a\ \mathcal{F}[x(k)] + b\ \mathcal{F}[y(k)] \tag{3}$$

Esta propiedad se demuestra calculando la transformada de $a\ x(k) + b\ y(k)$ usando la definición expresada en la ecuación (1).

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[a\ x(k) + b\ y(k)] &= \sum_{k=0}^{N-1}(a\ x(k) + b\ y(k))\, e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} = \\
&= a\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} + b\sum_{k=0}^{N-1} y(k)\, e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} = \\
&= a\ \mathcal{F}[x(k)] + b\ \mathcal{F}[y(k)]
\end{aligned}$$

De manera análoga es posible demostrar la linealidad para las transformadas $X(n)$ e $Y(n)$ y constantes a y b.

2. Traslación:
Traslación en el tiempo: Si $g(k)$ es desplazada una cantidad entera k_o, entonces

$$\mathcal{F}[g(k - k_o)] = G(n)\, e^{-j2\pi\frac{nk_o}{N}} \tag{4}$$

Esta propiedad se demuestra calculando la transformada inversa de $g(k - k_o)$ usando la definición expresada en la ecuación (2).

$$
\begin{aligned}
g(k-k_o) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} G(n)\, e^{j2\pi\frac{n(k-k_o)}{N}} = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[G(n)\, e^{-j2\pi\frac{nk_o}{N}}\right]\, e^{j2\pi\frac{nk}{N}} = \mathcal{F}^{-1}\left[G(n)\, e^{-j2\pi\frac{nk_o}{N}}\right]
\end{aligned}
$$

Traslación en frecuencia: Si $G(n)$ es desplazada una cantidad entera n_o, entonces

$$
\mathcal{F}^{-1}[G(n-n_o)] = g(k)\, e^{j2\pi\frac{n_o k}{N}} \tag{5}
$$

De manera similar, esta propiedad se demuestra calculando la transformada de $G(n-n_o)$ usando la definición expresada en la ecuación (1).

$$
\begin{aligned}
G(n-n_o) &= \sum_{k=0}^{N-1} g(k)\, e^{-j2\pi\frac{(n-n_o)k}{N}} = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\left[g(k)\, e^{j2\pi\frac{n_o k}{N}}\right]\, e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} = \mathcal{F}\left[g(k)\, e^{j2\pi\frac{kn_o}{N}}\right]
\end{aligned}
$$

3. Periodicidad:
La transformada discreta de Fourier es periódica, y su período es N. Es decir

$$
G(n+N) = G(n) \tag{6}
$$

Esta propiedad se demuestra calculando $G(n+N)$ mediante la definición expresada en la ecuación (1).

$$
\begin{aligned}
G(n+N) &= \sum_{k=0}^{N-1} g(k)\, e^{-j2\pi\frac{(n+N)k}{N}} = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} g(k)\, e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}\, e^{-j2\pi k} = G(n)
\end{aligned}
$$

porque $e^{-j2\pi k} = \cos(2\pi k) - j\sin(2\pi k) = 1$.

4. Simetría:

$$
\mathcal{F}[\frac{1}{N}G(k)] = g(-n) \tag{7}
$$

Para demostrar esta propiedad, expresamos $g(-k)$ mediante la definición expresada en la ecuación (2).

$$g(-k) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} G(n)\, e^{j2\pi\frac{n(-k)}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} G(n)\, e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}$$

Intercambiando los subíndices k y n resulta

$$g(-n) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G(k)\, e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} = \frac{1}{N}\mathcal{F}[G(k)]$$

5. Convolución:

Siendo $x(k)$ y $h(k)$ dos funciones de variable discreta de P y Q muestras respectivamente, definimos la convolución discreta entre ambas funciones como

$$y(k) = x(k) \otimes h(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\; h(k-l)$$

donde $N = P + Q - 1$.

Convolución en el tiempo:

$$\mathcal{F}[y(k)] = \mathcal{F}[x(k) \otimes h(k)] = X(n)\; H(n) \tag{8}$$

Para demostrar esta propiedad, calcularemos $y(k)$ expresando $x(k)$ y $h(k)$ en función de sus transformadas $X(n)$ y $H(n)$.

$$\begin{aligned} y(k) \;&=\; \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\; h(k-l) = \\ &=\; \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\, e^{j2\pi\frac{nl}{N}}\right) \left(\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} H(m)\, e^{j2\pi\frac{m(k-l)}{N}}\right) = \\ &=\; \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\; H(m)\, e^{j2\pi\frac{mk}{N}}\; \frac{1}{N}\left(\sum_{l=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{nl}{N}}\; e^{-j2\pi\frac{ml}{N}}\right) \end{aligned}$$

Es posible demostrar que

$$\sum_{l=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{(n-m)l}{N}} = \begin{cases} N & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

por lo tanto, únicamente se consideran para la suma los términos donde $m=n$. En consecuencia

$$y(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)\; H(n)\; e^{j 2\pi \frac{nk}{N}} = \mathcal{F}^{-1}[X(n)\; H(n)]$$

Convolución en frecuencia:

$$\mathcal{F}^{-1}[Y(n)] = \mathcal{F}^{-1}[X(n) \otimes H(n)] = N\; x(k)\; h(k) \tag{9}$$

Para demostrar esta propiedad, calcularemos $Y(n)$ expresando $X(n)$ y $H(n)$ en función de sus transformadas inversas $x(k)$ y $h(k)$.

$$\begin{aligned}
Y(n) &= \sum_{l=0}^{N-1} X(l)\; H(n-l) = \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\; e^{-j 2\pi \frac{kl}{N}} \right) \left(\sum_{m=0}^{N-1} h(m)\; e^{-j 2\pi \frac{m(n-l)}{N}} \right) = \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\; h(m)\; e^{-j 2\pi \frac{mn}{N}} \left(\sum_{l=0}^{N-1} e^{j 2\pi \frac{ml}{N}}\; e^{-j 2\pi \frac{kl}{N}} \right)
\end{aligned}$$

Es posible demostrar que

$$\sum_{l=0}^{N-1} e^{j 2\pi \frac{(m-k)l}{N}} = \begin{cases} N & \text{si } m = k \\ 0 & \text{si } m \neq k \end{cases}$$

por lo tanto, únicamente se consideran para la suma los términos donde $m = k$. En consecuencia

$$y(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\; h(k)\; e^{-j 2\pi \frac{nk}{N}}\; N = \mathcal{F}[N\; x(k)\; h(k)]$$