Test paramétrique et de l'estimation de la loi géométrique et de Cauchy

TRAN Quoc Nhat Han - Andrien Wartelle

30 septembre 2018

Sommaire

Résumé

Ce rapport est à montrer l'application de certaines tests statistiques pour la loi géométrique et la loi de Cauchy. Chaque section consiste de trois étapes séparées :

1. *Estimer les paramètres inconnus*
2. *Test de l'estimation*
3. *Test d'adéquation*

1 Loi de Cauchy

1.1 Rappel

Soit f_X la fonction de densité de Cauchy de deux paramètres x_0 et a ($a > 0$), définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi a \left(1 + \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{\pi} \frac{a}{(x - x_0)^2 + a} \tag{1.1}$$

a est dite l'échelle de la fonction, et x_0 est son médian.
La loi de Cauchy n'admet ni espérance ni écart type.
La fonction de répartition :

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + \frac{1}{2} \tag{1.2}$$

1.2 Estimer les paramètres inconnus

Calcul théorique

Soient n réalisations $x_1, x_2, ..., x_n$. Assumons que ces données suivent la loi de Cauchy (1.1).

Nous allons utiliser la méthode de maximum de rapport de vraisemblance.

En l'absence d'information de la distribution, nous assumons que ces mesures sont indépendants. Posons une variable aléatoire X_i correspondante à chaque réalisation x_i pour $i = \overline{1, n}$.

On écrit la loi conjointe de ces n variables :

$$\begin{aligned} L(X) = L(X_1, X_2, ..., X_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_X(X_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi} \frac{a}{(x_i - x_0)^2 + a} \\ &= \pi^{-n} \prod_{i=1}^{n} \frac{a}{(x_i - x_0)^2 + a} \end{aligned}$$

On cherche l'optimum maximale.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_0}(X) &= \pi^{-n}\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{a\left(2x_j-2x_0\right)}{\left[\left(x_0-x_j\right)^2+a\right]^2}\prod_{i=1;i\neq j}^{n}\frac{a}{\left(x_i-x_0\right)^2+a}\right)\\
&= \pi^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a}{\left(x_i-x_0\right)^2+a}\right)\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{2x_0-2x_j}{\left(x_0-x_j\right)^2+a}\right)\\
\frac{\partial L}{\partial x_0}(X) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\frac{x_0-x_j}{\left(x_0-x_j\right)^2+a} = 0 : \text{insolvable par la main}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a}(X) &= \pi^{-n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\left(x_j-x_0\right)^2+a-a}{\left(x_j-x_0\right)^2+a}\prod_{i=1;i\neq j}^{n}\frac{a}{\left(x_i-x_0\right)^2+a}\right)\\
&= \pi^{-n}a^{n-1}\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(x_0-x_j\right)^2}{\prod_{i=1}^{n}\left(\left(x_i-x_0\right)^2+a\right)} > 0\forall a>0
\end{aligned}
$$

Résolution par R

On génère une échantillon avec a et x_0 au choix. Puis, utiliser la fonction *mle* (Maximum Likelihood Estimator) de librairie *stats4* avec 2 valeurs initiales $\hat{a}$ et $\hat{x_0}$ pour estimer a et x_0.