

# Projet de OS01 – A2018

## CONSIGNES

Ce projet en binôme consiste à implémenter en C++ un algorithme pour le problème de l'arbre de longueur minimale et à résoudre un problème de production avec GUSEK (2 modèles à faire). Il faut m'envoyer la composition de votre binôme par mail à [christian.prins@utt.fr](mailto:christian.prins@utt.fr) pour le 31/10 au plus tard. Votre travail est à rendre par mail avant l'examen final, sous forme d'archive compressée avec vos noms (nom1-nom2.zip). L'archive doit contenir un rapport en Word ou PDF, le fichier-source (.cpp) de l'algorithme, et les fichiers sources en GUSEK (.mod) des deux modèles.

Pour le problème de l'arbre, le rapport doit expliquer les structures de données utilisées pour les calculs (tableaux par exemple), donner un algorithme détaillé en français avec ces structures, et fournir un exemple de résolution (fichier de données et arbre obtenu). Pour le problème de production, expliquer brièvement les notations, donner les deux modèles sous forme mathématique générique et les solutions détaillées (coût total et valeurs des variables en français pour les non-spécialistes, c'est-à-dire pas de phrases comme "L'optimum est  $x_1 = 17$ ").

Pour tous les problèmes, inutile de recopier les énoncés. Ne pas mettre les sources C++ et GUSEK dans le rapport puisqu'ils sont fournis sous forme de fichiers séparés. Les équations doivent être tapés proprement en style mathématique avec l'éditeur d'équations de Word (Alt =). Enfin, vous pouvez discuter entre vous en cas de difficultés mais votre travail final et le rapport doivent être personnels : vos fichiers seront analysés par un logiciel anti-plagiat et un problème plagié sera considéré comme nul.

## PROBLÈME 1. CALCUL D'UN ARBRE DE LONGUEUR MINIMALE – 10 POINTS

Problème 5 des TD. Soit par exemple  $n$  points du plan, modélisant une centrale électrique (point 1) et  $n - 1$  maisons qui doivent recevoir l'électricité. Chaque point  $i$  est donné par ses coordonnées  $(x_i, y_i)$  sous forme de réels en km. Le but est de relier la centrale et les maisons par des lignes électriques. Chaque ligne connecte deux points en ligne droite et le réseau doit être un arbre, c'est-à-dire qu'il doit y avoir un seul chemin de la centrale à chaque maison. L'objectif est de calculer un arbre de longueur totale minimale puisque le coût de construction est proportionnel à la longueur des lignes.

Ce problème classique est appelé problème de l'arbre recouvrant de coût minimal (*minimum spanning tree*). Il peut être résolu optimalement par un algorithme très simple proposé par l'américain Prim. On commence avec un arbre réduit au nœud 1 (la centrale). Puis, à chaque itération, on ajoute à l'arbre le plus petit segment (ligne électrique) entre un point dans l'arbre et un point non encore connecté. Noter qu'il faut  $n - 1$  itérations pour relier tous les points. Pour bien comprendre l'algorithme, appliquez-le à la main sur un petit exemple, par exemple des points sur une feuille à petits carreaux.

Analyser, programmer et tester cet algorithme en C++ (8 points). Pour créer des jeux d'essai, ne pas faire de fichiers de données : tirer au sort les coordonnées de chaque point dans un carré de 10 km de côté, l'origine correspondant au coin inférieur gauche. Puis calculer une matrice  $D$   $n \times n$  des distances euclidiennes (lignes électriques possibles) entre les nœuds.

Quelle est la complexité de l'algorithme (= l'effort de calcul est proportionnel à quoi) ? Est-il possible de la diminuer et comment? (2 points, on ne demande pas de programmer une version améliorée).

## PROBLÈME 2 – FABRICATION D'HUILES – 10 POINTS

Une entreprise fabrique une huile pour friture en raffinant des huiles brutes et en les mélangeant. Les huiles brutes incluent deux huiles végétales V1 et V2, et trois huiles hydrogénées H1, H2 et H3. Nous sommes au début du mois de janvier. Les prix actuels pour janvier et les prix estimés pour chaque mois de février à juin sont donnés par le tableau suivant, en euros/tonne. On peut commander des huiles au début de chaque mois. De plus, les délais de livraison étant très courts, on peut utiliser les huiles commandées le même mois.

	V1	V2	H1	H2	H3
Janvier	110	120	130	110	115
Février	130	130	110	90	115
Mars	110	140	130	100	95
Avril	120	110	120	120	125
Mai	100	120	150	110	105
Juin	90	100	140	80	135

Le produit final est vendu 150 €/t. Il peut contenir de 1 à 5 huiles brutes, en proportions libres. Cependant, diverses contraintes doivent être respectées. Les huiles végétales et hydrogénées nécessitent deux lignes de production séparées pour le raffinage. Chaque mois, on ne peut pas raffiner plus de 200 tonnes d'huiles végétales et plus de 250 tonnes d'huiles hydrogénées. Il n'y a pas de perte de matière dans les processus et le coût de raffinage peut être ignoré.

Il est possible de stocker jusqu'à 1000 tonnes de chaque huile brute pour l'utiliser les mois suivants. Le coût de stockage des huiles brutes est de 5 euros par tonne et par mois. Ce coût est appliqué pour les stocks constatés en fin de mois. Par contre, les huiles raffinées et le produit final ne peuvent pas être stockés. L'entreprise a un stock initial de 500 tonnes pour chaque huile brute. Elle souhaite avoir le même niveau de stock fin juin.

Enfin, le produit final doit respecter un indice de viscosité entre 3 et 6. On suppose que les viscosités se combinent linéairement : 5 litres de viscosité 4 et 10 litres de viscosité 6 donnent 15 litres de viscosité  $(5 \times 4 + 10 \times 6) / 15 \approx 5.33$ . Les indices pour V1 et V2 sont 8.8 et 6.1, tandis que pour H1, H2, H3 ils valent respectivement 2.0, 4.2 et 5.0.

Question a). Déterminer le plan d'achat et de production pour maximiser le profit de l'entreprise (5 points).

On souhaite maintenant respecter les contraintes supplémentaires suivantes :

- l'huile de friture fabriquée dans un mois ne doit pas utiliser plus de trois composants (cependant, ces composants peuvent changer d'un mois à l'autre).
- Si on décide d'utiliser un composant, il faut en utiliser au moins 20 tonnes.
- Les huiles V1 et V2 sont plutôt acides mais le goût peut être corrigé par l'huile H3 qui est légèrement basique. Donc, si le mélange contient V1 et/ou V2, il faut aussi utiliser H3.

Question b). Recalculer une solution optimale avec ces nouvelles contraintes (5 points).