3.2

$B = O(A)$

NNYYN

NNYYN

NNNNN

YYNNN

YNYNY

YNYNY

4.5-4

不能

$a = 4,\ b = 2, f(n) = n^2 \lg n$

猜测，

$$T(n) \le cn^2 \lg^2 n$$

证明，

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(n/2) + n^2 \lg n \\ &\le 4c(n/2)^2 \lg^2(n/2) + n^2 \lg \\ &= cn^2 \lg(n/2) \lg n - cn^2 \lg(n/2) \lg 2 + n^2 \lg n \\ &= cn^2 \lg^2 n - cn^2 \lg n \lg 2 - cn^2 \lg(n/2) \lg 2 + n^2 \lg n \\ &= cn^2 \lg^2 n + (1 - c\lg 2) n^2 \lg n - cn^2 \lg(n/2) \lg 2 \quad (c \ge 1/\lg 2) \\ &\le cn^2 \lg^2 n - cn^2 \lg(n/2) \lg 2 \\ &\le cn^2 \lg^2 n \end{aligned}$$

$T(n) = \Theta(n^2 \lg^2 n)$

4.3

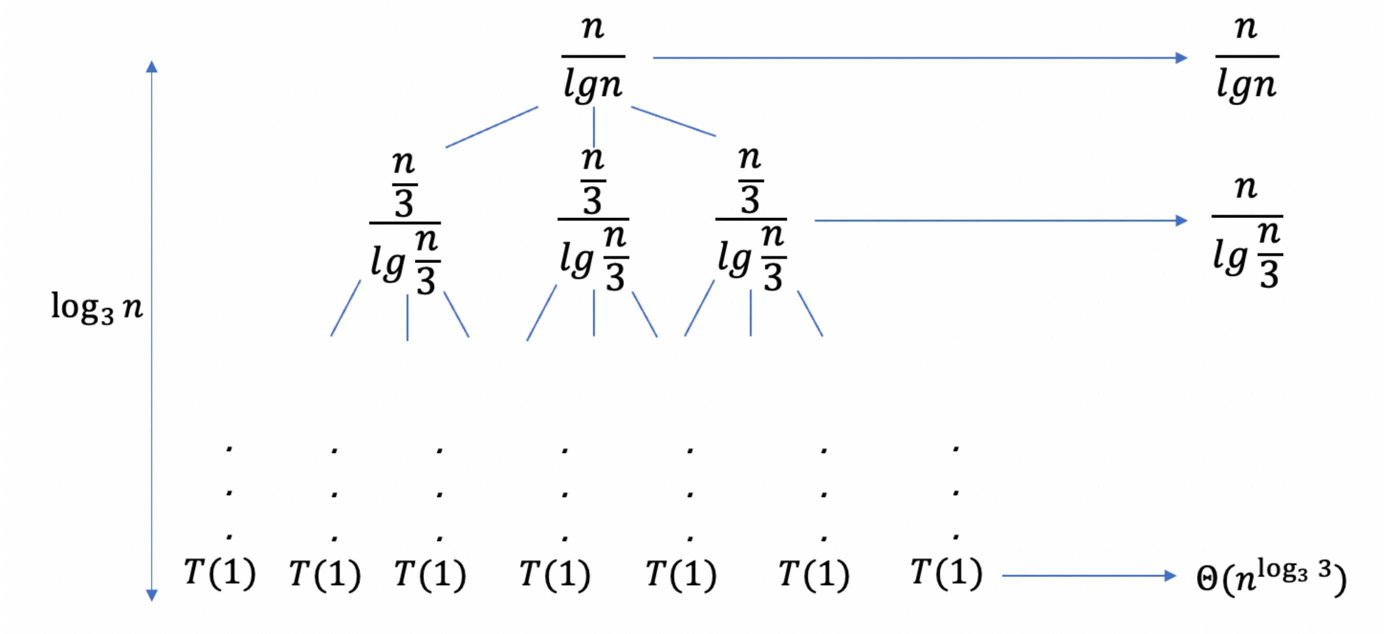
a. $T(n) = 4T(n/3) + nlgn$

$a = 4, b = 3, f(n) = n \lg n$, 由主定理

$$T(n) = \Theta(n^{\log_3 4})$$

b. $T(n) = 3T(n/3) + n/lgn$

方法1



深度为i的结点对应规模为$n/3^i = 1$时，即$i = log_3n$时，字问题规模变为1，对应于叶结点$T(1)$。

每层结点数是上一层的3倍，因此深度为i的结点数为3^i。并且深度为i的结点对应的字问题规模为$n/3^i$，故深度为i的每个结点的代价为$c(n/3^i)/\lg(n/3^i)$。因此，除叶结点外，深度为i i的所有结点的代价之和为$3^i \cdot (c(n/3^i)/\lg(n/3^i)) = cn/(\lg n - i \cdot \lg 3)$。又由于深度为$i$的结点数为$3^i$，并且叶结点深度为$\log_3 n$，故叶结点一共有$3^{\log_3 n} = n$个，于是所有叶结点的代价和为$\Theta(n)$。

每一层代价加起来，得

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\log_3 n-1} \frac{cn}{\lg n - i \cdot \lg 3} + \Theta(n) \\
&= cn \cdot \sum_{i=0}^{\log_3 n-1} \frac{1/\lg 3}{\lg n/\lg 3 - i} + \Theta(n) \\
&= \frac{cn}{\lg 3} \cdot \sum_{i=0}^{\log_3 n-1} \frac{1}{\log_3 n - i} + \Theta(n) \\
&= \frac{cn}{\lg 3} \cdot (\frac{1}{\log_3 n} + \frac{1}{\log_3 n - 1} + \cdots + 1) + \Theta(n) \\
&= \frac{cn}{\lg 3} \cdot \sum_{i=1}^{\log_3 n} \frac{1}{i} + \Theta(n) \\
&= \frac{cn}{\lg 3} \cdot (\ln(\log_3 n) + O(1)) + \Theta(n) \\
&= \Theta(n \lg\lg n)
\end{aligned}
$$

方法2

猜测

$$T(n)=\Theta(n\log_3\log_3 n)$$

下面将这个猜测代入原递归式进行验证。我们要证明的是：存在正常数c_1和c_2，使得$c_2 n\log_3\log_3 n\le T(n)\le c_1 n\log_3\log_3 n$对足够大的$n$都成立。

（1） 证明存在正常数c_1，使得$T(n)\le c_1 n\log_3\log_3 n$

首先假定此上界对所有正数$m<n$都成立，特别是对于$m=\frac{n}{3}$，有$T(\frac{n}{3})\le c_1\frac{n}{3}\log_3\log_3\frac{n}{3}$

将其代入递归式得到

$$\begin{aligned}T(n)&\le 3(c_1\frac{n}{3}\log_3\log_3\frac{n}{3})+\frac{n}{\lg n}\\&=c_1 n\log_3\log_3\frac{n}{3}+\frac{n}{\lg n}\end{aligned}$$

现要选取合适的c_1，使得不等式$c_1 n\log_3\log_3\frac{n}{3}+\frac{n}{\lg n}\le c_1 n\log_3\log_3 n$成立。将不等式做一下变换，等价于

$$\frac{c_1 n(\log_3\log_3 n-\log_3\log_3\frac{n}{3})}{\frac{n}{\lg n}}\ge 1$$

令

$$f(x)=\log_3 x$$

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}$$

由拉格朗日中值定理，$\exists\eta\in(\log_3 n-1,\log_3 n)$,

$$\log_3\log_3 n-\log_3\log_3\frac{n}{3}=\frac{f(\log_3 n)-f(\log_3 n-1)}{\log_3 n-(\log_3 n-1)}=f'(\eta)$$

则，

$$\begin{aligned}\frac{c_1 n(\log_3\log_3 n-\log_3\log_3\frac{n}{3})}{\frac{n}{\lg n}}&\ge\frac{c_1\frac{1}{(\log_3 n)\ln 3}}{\frac{1}{\lg n}}\\&=c_1\frac{\lg n}{(\log_3 n)\ln 3}\\&=\frac{c_1\lg 3}{\ln 3}\frac{\log_3 n}{\log_3 n}\\&=\frac{c_1\lg 3}{\ln 3}\end{aligned}$$

显然，只要取$c_1\ge\frac{ln3}{lg3}$，不等式成立，此时$T(n)\ge c_1 n\log_3\log_3 n$成立

（2） 证明存在正常数c_2，使得$T(n)\ge c_2 n\log_3\log_3 n$对足够大的$n$都成立

证明与上文类似，最终得到只要取$c_2\le\frac{ln3}{lg3}$，就能使不等式$T(n)\ge c_2 n\log_3\log_3 n$成立

c. $T(n) = 4T(n/2) + n^2\sqrt{n}$

根据主定理

$$T(n) = \Theta(n^{2.5})$$

d. $T(n) = 3T(n/3-2) + n/2$

n足够大时，原式转化为

$$T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + \frac{n}{2}$$

根据主定理

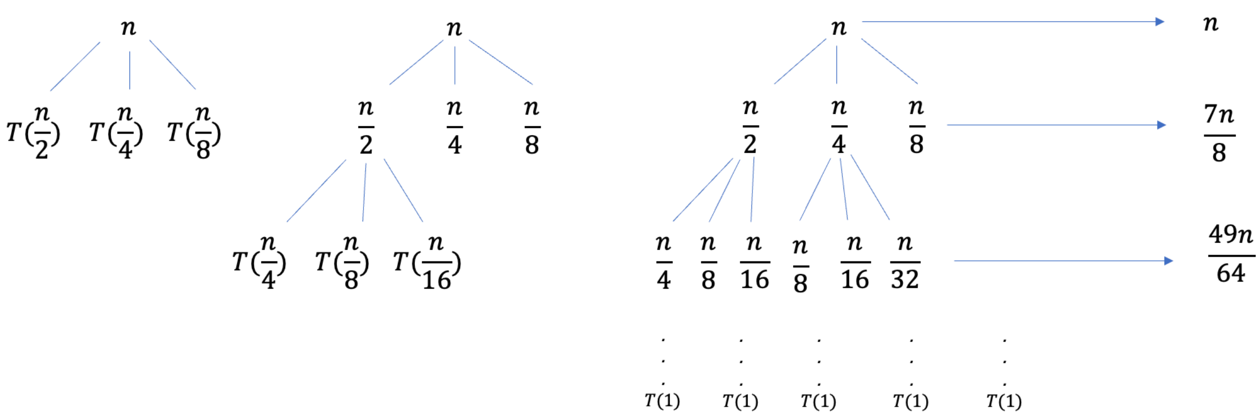
$$T(n) = \Theta(n \lg n)$$

e. $T(n) = 2T(n/2) + n/lgn$

与b同理，$T(n) = \Theta(n \lg\lg n)$

f. $T(n) = T(n/2) + T(n/4) + T(n/8) + n$

方法1



$$\begin{aligned}
T(n) &= n(\frac{7}{8} + \frac{49}{64} + \cdots + (\frac{7}{8})^k) \\
&= n \cdot (7 - (\frac{7}{8})^n) \\
&= \Theta(n)
\end{aligned}$$

方法2

猜测：

$$T(n) \le cn$$

证明

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + T(\frac{n}{8}) + n \\
&\le \frac{cn}{2} + \frac{cn}{4} + \frac{cn}{8} + n \\
&= (\frac{8}{7}c + 1)n
\end{aligned}
$$

当$c \ge 8$时,

$$T(n) \le (\frac{7}{8}c + 1)n \le cn$$

同理证明下界,

$$T(n) \ge cn$$

g. $T(n) = T(n-1) + 1/n$

$$T(n) = T(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

研究调和级数的前n项和为:

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

定义如下函数:

$$h(x) = \frac{1}{i+1}, \ \ i < x \le i+1$$

可以找到$h(x)$的上下界函数

$$\overline{h} = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\underline{h} = \frac{1}{1+x}$$

则,

$$H_n = \int_0^n h(x)dx$$

且

$$\int_0^n \underline{h}(x)dx \le H_n \le \int_0^n \overline{h}(x)dx$$

即

$$\ln{(n+1)} \le H_n \le 1 + \ln{(n)}$$

因此

$$T(n) = \Theta(lgn)$$

h. $T(n) = T(n-1) + lgn$

$$T(n) = T(0) + \sum_{i=1}^{n} lgi$$

研究对数数列的前 n 项和：

$$log(n!) = log(1) + log(2) + \cdots + log(n)$$

定义如下函数：

$$a(x) = log(i+1),\ \ i < x \leq i+1$$

可以找到$a(x)$的上下界为：

$$\underline{a}(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ log(x) & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\overline{a} = log(x+1)$$

则，

$$A_n = \int_0^n a(x)dx$$

且，

$$\int_0^n \underline{a}(x)dx \leq A_n \leq \int_0^n \overline{a}(x)dx$$

积分可得，

$$nlog(n) - n \leq A_n \leq (n+1)log(n+1) - n$$

因此

$$T(n) = \Theta(nlgn)$$

i. $T(n) = T(n-2) + 1/lgn$

与前两题同理，研究对数积分$li(x)$，当$x \to \infty$时，函数有如下渐近表现：

$$li(x) = O(\frac{x}{ln(x)})$$

(其完整的渐近展开式为$li(x) = \frac{x}{lnx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(lnx)^k}$)

不难验证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lg i} \geq \frac{n}{\lg n}$$

因此

$$T(n)=\Theta(\frac{n}{lgn})$$

j. $T(n)=\sqrt{n}T(\sqrt{n})+n$

方法1

$$\frac{T(n)}{n}=\frac{\sqrt{n}}{n}T(\sqrt{n})+1=\frac{T(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}+1$$

设$Y(k)=\frac{T(n)}{n}$，得

$$Y(k)=Y(\sqrt{k})+1$$

令$m=\lg k, k=2^m$，得

$$Y(2^m)=T(2^{\frac{m}{2}})+1$$

重命名$S(m)=Y(2^m)$，得

$$S(m)=S(\frac{m}{2})+1$$

根据主方法 case2，

$$a=1,\ b=2,\ f(m)=1$$
$$n^{\log_b a}=n^{\log_2 1}=1$$

$f(n)$在多项式意义上等于$n^{\log_b a}$

因此，$T(n)=\Theta(\lg m)=\Theta(\lg\lg k)=\Theta(n\lg\lg n)$

方法2

猜测，

$$T(n)=\Theta(n\lg\lg n)$$

证明，

$$\begin{aligned}T(n)&\le\sqrt{n}c\sqrt{n}\lg\lg\sqrt{n}+n\\&=cn\lg\lg\sqrt{n}+n\\&=cn\lg\lg n-cn\lg 2+n\\&=cn\lg\lg n+(1-c\lg 2)n\\&\le cn\lg\lg n\end{aligned}$$

只要取$c\ge\frac{1}{\lg 2}$，不等式成立

同理可证下界

4.5

a.

与好芯片数量等同的坏芯片可以对好芯片报告坏，对坏芯片报告好，这样好坏最终无法分辨。

b.

步骤1:

（若n为奇，则从中拿出一个芯片A）随机两两配对测试

步骤2:

仅当互报为好时，任留其中一块，其余情况都扔

【讨论原先为奇数的情况】

（1）当剩余总数是偶数时，把A放回。此时要么好的芯片数和坏的芯片数一样，A是好的芯片；要么好的芯片比坏芯片多偶数个，此时不论A是好是坏，把它加入集合也能保证好的芯片数大于坏的芯片数。

（2）当总数是奇数时，就不放回了，因为好的芯片数必然大于坏的芯片数。

步骤3:

重复执行直到只剩1个

c.

$$T(n) \leq T(\lceil n/2 \rceil) + \lfloor n/2 \rfloor$$

根据主方法，

$$T(n) = O(n)$$

7.1-1

$\langle 13,19,9,5,12,8,7,4,21,2,6,11 \rangle$

$\langle 13,19,9,5,12,8,7,4,21,2,6,11 \rangle$

$\langle 13,19,9,5,12,8,7,4,21,2,6,11 \rangle$

$\langle 9,19,13,5,12,8,7,4,21,2,6,11 \rangle$

$\langle 9,5,13,19,12,8,7,4,21,2,6,11 \rangle$

$\langle 9,5,13,19,12,8,7,4,21,2,6,11 \rangle$

$\langle 9,5,8,19,12,13,7,4,21,2,6,11 \rangle$

$\langle 9,5,8,7,12,13,19,4,21,2,6,11 \rangle$

$\langle 9,5,8,7,4,13,19,12,21,2,6,11 \rangle$

$\langle 9,5,8,7,4,13,19,12,21,2,6,11 \rangle$

$\langle 9,5,8,7,4,2,19,12,21,13,6,11 \rangle$

$\langle 9,5,8,7,4,2,6,12,21,13,19,11 \rangle$

⟨9,5,8,7,4,2,6,11,21,13,19,12⟩

References：

对数积分：

https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%B9%E6%95%B0%E7%A7%AF%E5%88%86/10413446#4

https://en.m.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_integral_function