10

디지털공학개론

논리식의 간략화

10

논리식의 간략화

1. 부울 대수의 법칙에 의한 간략화 방법
2. Karnaugh MAP에 의한 간략화 방법
3. NAND Gate / NOR Gate 변환

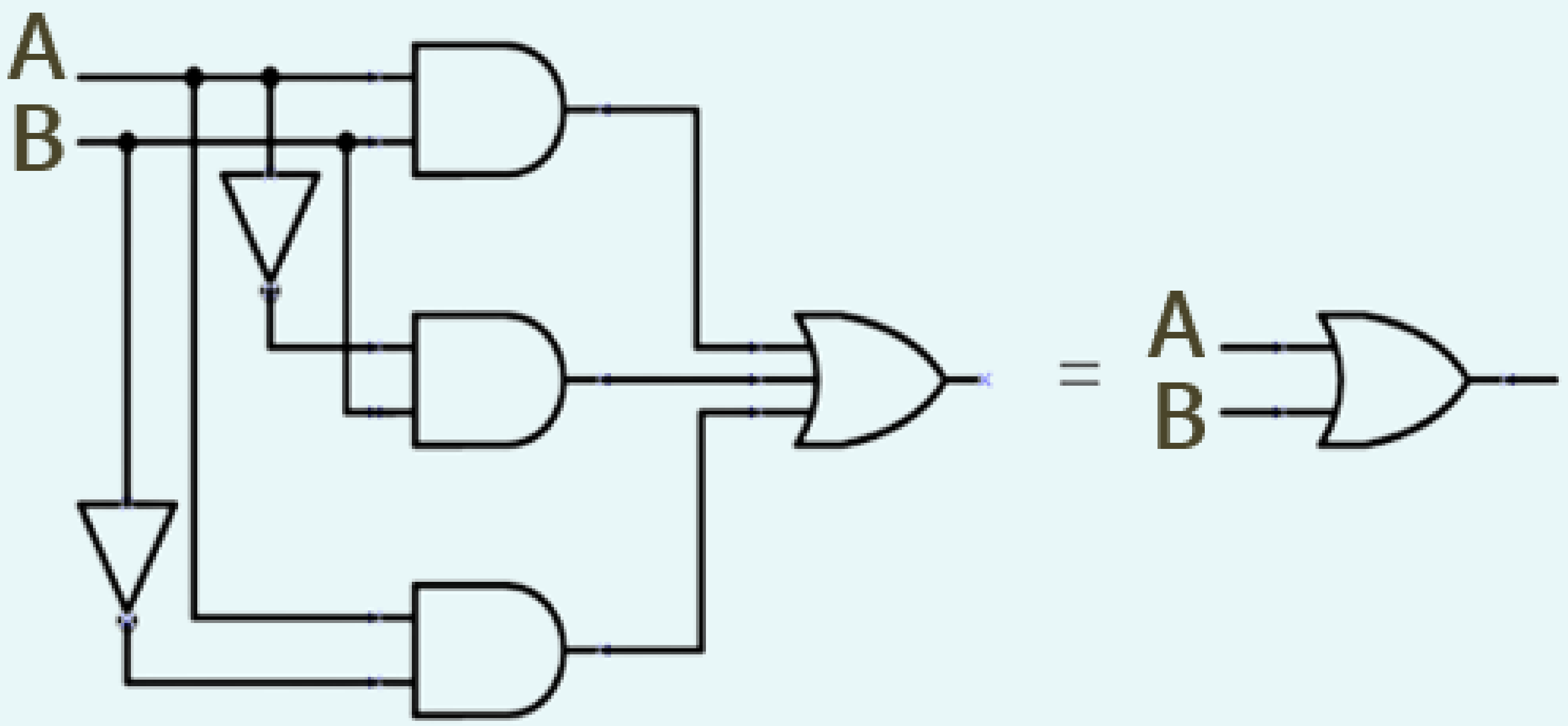
1. 부울 함수를 간략화 하는 이유

(1) 논리 회로를 구현할 때 게이트 수 감소

(2) 회로의 소비 전력 감소

(3) 전파 지연 감소 실현

(4) 간략화의 예



2. 부울 함수를 간략화 방법

(1) 부울 대수의 공리 및 법칙을 이용하는 방법

(2) Karnaugh Map을 이용하는 법 (주로 4변수 이하)

(3) Table을 이용하는 방법(5변수 이상, 컴퓨터를 이용)

(4) QM(퀸 – 맥클러스키) 간소화

3. 부울 대수의 공리 및 법칙을 이용하는 방법

(1) 항 결합법

- 각 항에서 공통된 변수를 찾아 나머지를 (+)로 묶음

$$XY + X\overline{Y} = X(Y + \overline{Y}) = X \cdot 1 = X$$

$$AB\overline{C}D + AB\overline{C}\overline{D} = AB\overline{C}(D + \overline{D}) = AB\overline{C}$$

3. 부울 대수의 공리 및 법칙을 이용하는 방법

(2) 항 제거법

- 흡수법칙과 배분법칙을 역으로 사용하여 항을 제거함

$$X + XY = X \cdot 1 + X \cdot Y = X(1 + Y) = X$$

$$\overline{A}B + \overline{A}BCD = \overline{A}B(1 + CD) = \overline{A}B$$

3. 부울 대수의 공리 및 법칙을 이용하는 방법

(3) 간략화의 예 1

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

$$= \bar{A}(\bar{B}C + B\bar{C}) + A(\bar{B}\bar{C} + BC)$$

$$= \bar{A}X + A\bar{X}$$

$$= A \oplus X$$

$$= A \oplus (B \oplus C)$$

3. 부울 대수의 공리 및 법칙을 이용하는 방법

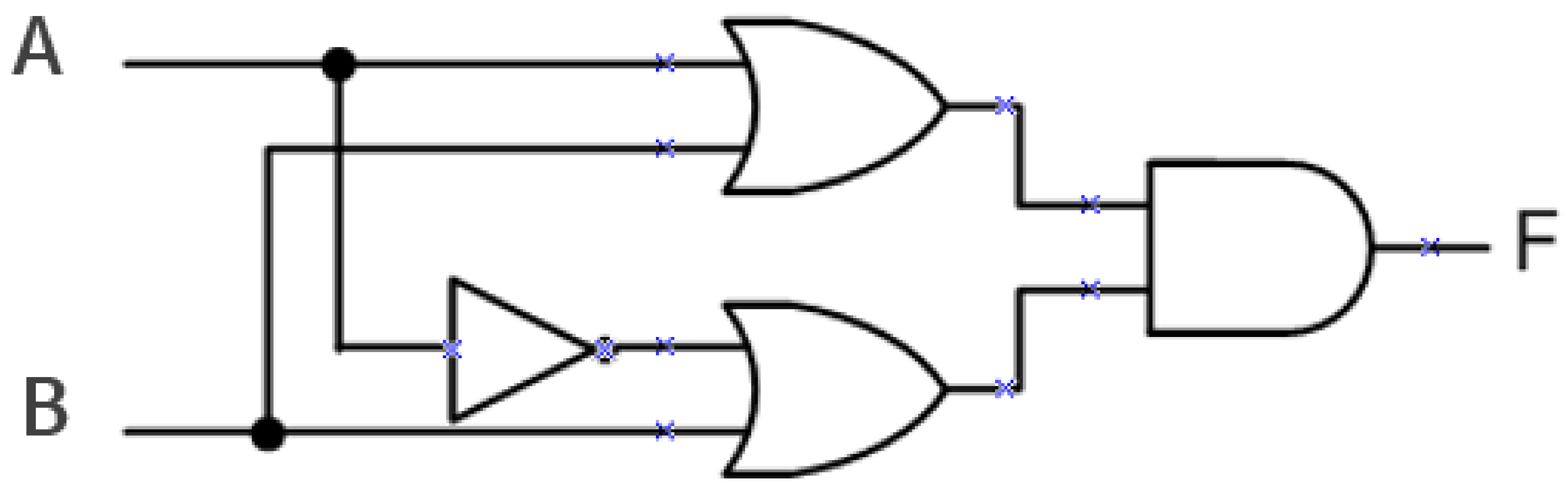
(4) 간략화의 예 2

$$
\begin{aligned}
F = A + A \cdot B + A \cdot C &= A(1 + B) + A \cdot C \\
&= A + A \cdot C \\
&= A(1 + C) = A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B} + AB &= \overline{A}(\overline{B} + B) + A(\overline{B} + B) \\
&= \overline{A} \cdot 1 + A \cdot 1 \\
&= \overline{A} + A = 1
\end{aligned}
$$

3. 부울 대수의 공리 및 법칙을 이용하는 방법

(5) 논리 회로의 간략화의 예



$$(A+B)(\bar{A}+B) = A\bar{A} + AB + \bar{A}B + BB = 0 + AB + \bar{A}B + B$$

$$= B(A + \bar{A} + 1) = B$$

10

논리식의 간략화

1.부울 대수의 법칙에 의한 간략화 방법

2.Karnaugh MAP에 의한 간략화 방법

3.NAND Gate / NOR Gate 변환

1. Karnaugh Map의 종류 및 작성 요령

(1) Karnaugh Map의 종류 및 작성 요령

- 각 변수의 수직-수평축 2진법 숫자들은 각 행과 열의 Gray code 값 순으로 배치함 (이러한 배치는 이웃한 칸들 간의 공통 변수를 찾아내기 위함)
- Karnaugh Map 상의 한 칸은 한 개의 최소항을 표시함
- 만약 변수가 2개인 경우 최소항은 2^2 = 4개이며, $m_0 = \overline{A}\overline{B}$, $m_1 = \overline{A}B$, $m_2 = A\overline{B}$, $m_3 = AB$에 해당함

1. Karnaugh Map의 종류 및 작성 요령

(2) 2변수 Karnaugh Map

$A \backslash B$	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$
A	$A\overline{B}$	AB

$A \backslash B$	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	m_0	m_1
A	m_2	m_3

$A \backslash B$	0	1
0	0	1
1	2	3

(3) 3변수 Karnaugh Map

$A \backslash BC$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	$\overline{A}B\overline{C}$
A	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$	ABC	$AB\overline{C}$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

1. Karnaugh Map의 종류 및 작성 요령

(4) 4변수 Karnaugh Map

AB \ CD	00	01	11	10
00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	$\overline{A}\overline{B}CD$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$
01	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
11	$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$ABC\overline{D}$
10	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$A\overline{B}\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

1. Karnaugh Map의 종류 및 작성 요령

(5) 일반항(최소항)과 무관항 표현

A \ B	0	1
0	1	
1		1

$$F(A,B)=\sum m(0,3)$$

A \ B	0	1
0	1	X
1		1

$$F(A,B)=\sum m(0,3)+\sum d(1)$$

- 무관항(don't care) : 입력이 결과에 영향을 미치지 않는 최소항(Minterm). 보통의 경우 X로 표시하거나 d로 표시한다

2. Karnaugh Map의 간략화 과정

① (진리표를 이용하여) 부울 함수를 SOP 형식으로 표현함(출력인 1인 최소항)

② 부울 함수 F의 각 최소항에 1을 표시

③ 부정의 항(Don't care)이 있다면 동일한 방법으로 각 최소항에 d를 표기함

④ 인접한 항 끼리 2n항(즉 2, 4, 8…)개의 항 씩 묶음, 이때 중복된 항이 존재해도 무방함

⑤ 묶여진 항에서 변수값의 변화를 관찰하여 변수값이 변화하면(0, 1 공존) 그 변수는 버림

⑥ 묶여진 항을 표준형으로 표기함

2. Karnaugh Map의 간략화 과정

(1) 2변수의 간략화

Step 1 $F(A, B) = \Sigma(1, 2, 3)$

Step 2

A \ B	0	1
0		1
1	1	1

Step 3

A \ B	0	1
0		1
1	1	1

Step 4

A \ B	0	1
0		1
1	1	1

$F = A$

A \ B	0	1
0		1
1	1	1

$F = B$

Step 5 $F = A + B$

2. Karnaugh Map의 간략화 과정

(2) 3변수의 간략화 1

Step 1 $F(A, B, C) = \Sigma(2, 3, 5, 6, 7)$

Step 2

A \ BC	00	01	11	10
0			1	1
1		1	1	1

Step 3

A \ BC	00	01	11	10
0			1	1
1		1	1	1

Step 4

A \ BC	00	01	11	10
0			1	1
1		1	1	1

$F = B$

A \ BC	00	01	11	10
0			1	1
1		1	1	1

$F = AC$

Step 5 $F = B + AC$

2. Karnaugh Map의 간략화 과정

(3) 3변수의 간략화 2

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 2, 3, 5, 6, 7)$$

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1		1	1	1

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1		1	1	1

$$F = C + B$$

2. Karnaugh Map의 간략화 과정

(4) 4변수의 간략화 1 (비정형 함수식)

Step 1 $F(A, B, C, D) = AB + \bar{A}BC$

Step 2

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01			1	1
11	1	1	1	1
10				

$\rightarrow \bar{A}BC$

$\rightarrow AB$

Step 3

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01			1	1
11	1	1	1	1
10				

Step 4

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01			1	1
11	1	1	1	1
10				

$F = AB$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01			1	1
11	1	1	1	1
10				

Step 5 $F = AB + BC = A(B + C)$

2. Karnaugh Map의 간략화 과정

(5) 4변수의 간략화 2 (Don't care 항을 포함한 간략화)

Step 1 $F(A, B, C, D) = \Sigma(1, 3, 7, 11, 15),\ d(A, B, C, D) = \Sigma(0, 2, 8)$

Step 2

AB \ CD	00	01	11	10
00	d	1	1	d
01			1	
11			1	
10	d		1	

Step 3

AB \ CD	00	01	11	10
00	d	1	1	d
01			1	
11			1	
10	d		1	

Step 4

AB \ CD	00	01	11	10
00	d	1	1	d
01			1	
11			1	
10	d		1	

$F = \overline{A}\overline{B}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	d	1	1	d
01			1	
11			1	
10	d		1	

$F = CD$

Step 5 $F = \overline{A}\overline{B} + CD$

2. Karnaugh Map의 간략화 과정

(6) 4변수의 간략화 3 (Karnaugh Map이 직접 주어지는 경우)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10	1	1		1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10	1	1		1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10	1	1		1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10	1	1		1

$$\overline{C} + BD + \overline{B}\,\overline{D}$$

10

논리식의 간략화

1.부울 대수의 법칙에 의한 간략화 방법

2.Karnaugh MAP에 의한 간략화 방법

3.NAND Gate / NOR Gate 변환

1. 부울 함수의 NAND Gate와 NOR Gate 구현

① 부울함수는 $\overline{\overline{F}}$ = F(함수의 이중 부정은 긍정)과 드 모르간 정리를 이용함

② 곱의 합(SOP)형으로 구성된 부울 함수는 NAND gate로 쉽게 실현

③ 합의 곱(POS)형으로 구성된 부울 함수는 NOR gate로 쉽게 실현

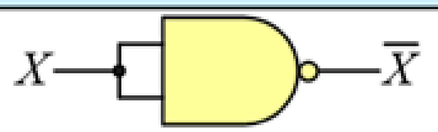
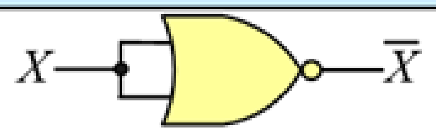
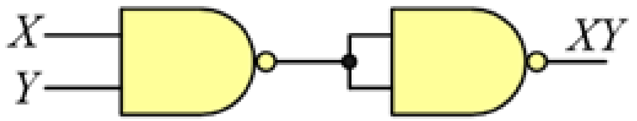
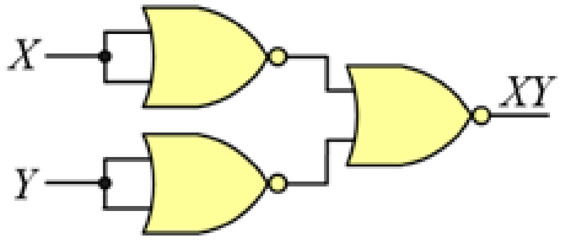
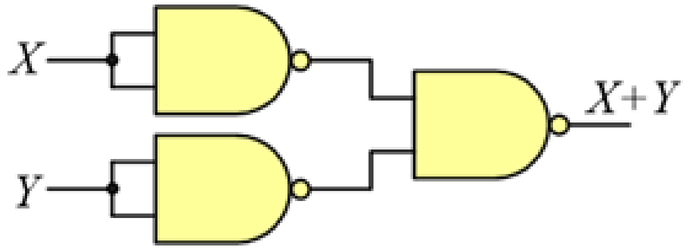
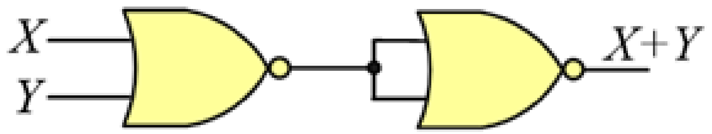
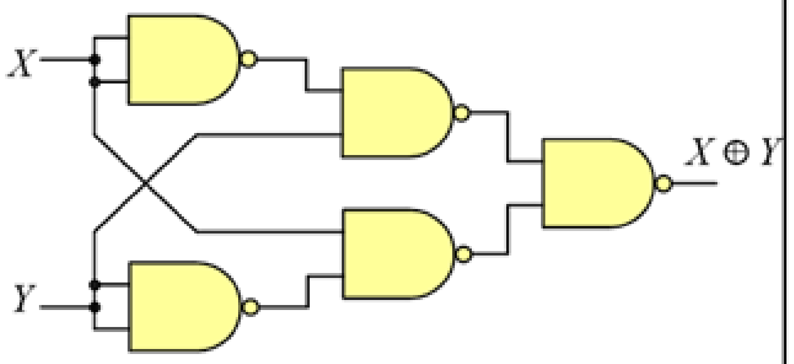
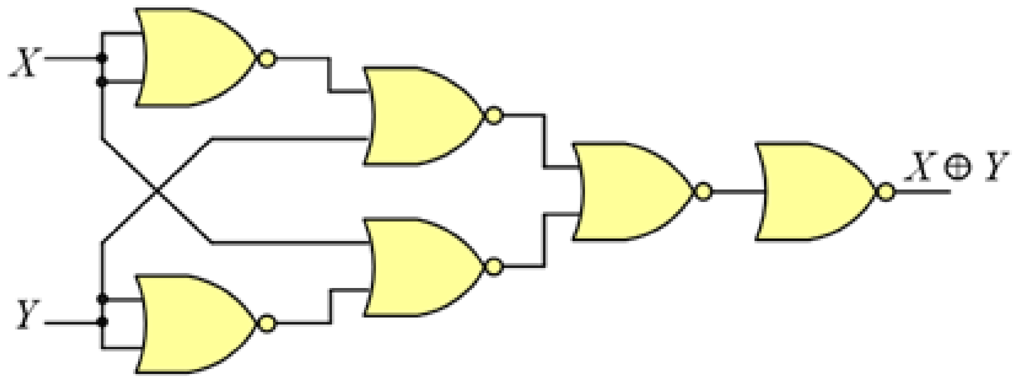
1. 부울 함수의 NAND Gate와 NOR Gate 구현

(1) 기본 게이트의 NAND, NOR식

NOT	$\overline{X} = \overline{X+X} = \overline{X}\,\overline{X}$
AND	$XY = \overline{\overline{XY}} = \overline{\overline{X}+\overline{Y}}$
OR	$X+Y = \overline{\overline{X+Y}} = \overline{\overline{X}\cdot\overline{Y}}$
NAND	$\overline{XY} = \overline{\overline{\overline{XY}}} = \overline{\overline{\overline{X}+\overline{Y}}}$
NOR	$\overline{X+Y} = \overline{\overline{\overline{X+Y}}} = \overline{\overline{\overline{X}\cdot\overline{Y}}}$
XOR	$\overline{X}Y + X\overline{Y} = \overline{\overline{\overline{X}Y + X\overline{Y}}} = \overline{\overline{\overline{X}Y}\cdot\overline{X\overline{Y}}} = \overline{(X+\overline{Y})(\overline{X}+Y)}$ $= \overline{\overline{\overline{(X+\overline{Y})}+\overline{(\overline{X}+Y)}}}$

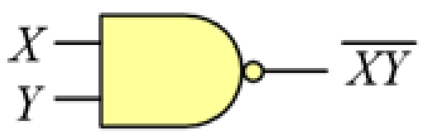
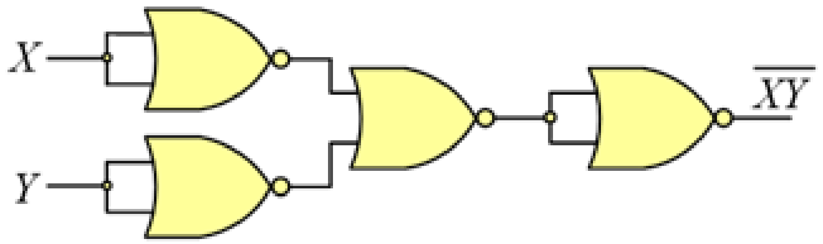
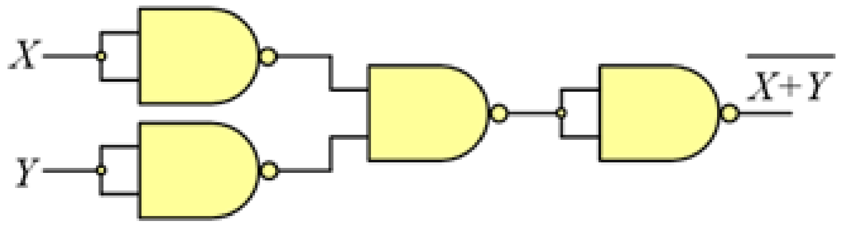
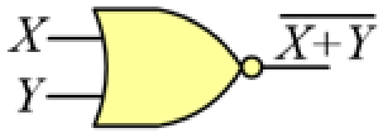
1. 부울 함수의 NAND Gate와 NOR Gate 구현

(2) 기본 게이트의 NAND, NOR로의 구현

기본 게이트	NAND 게이트로 표현	NOR 게이트로 표현
NOT		
AND		
OR		
XOR		

1. 부울 함수의 NAND Gate와 NOR Gate 구현

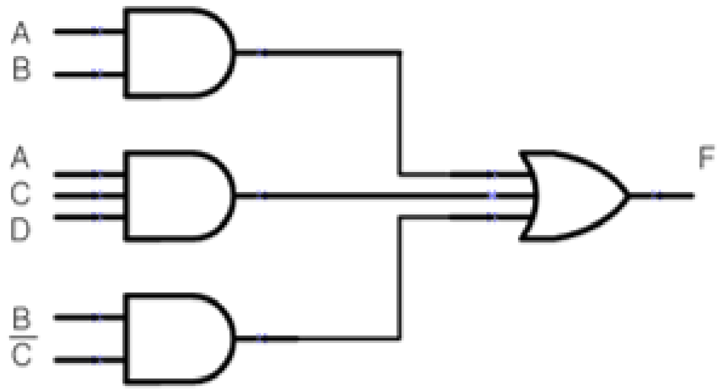
(2) 기본 게이트의 NAND, NOR로의 구현

기본 게이트	NAND 게이트로 표현	NOR 게이트로 표현
NAND		
NOR		

2. NAND Gate와 NOR Gate 만으로의 논리식 구현

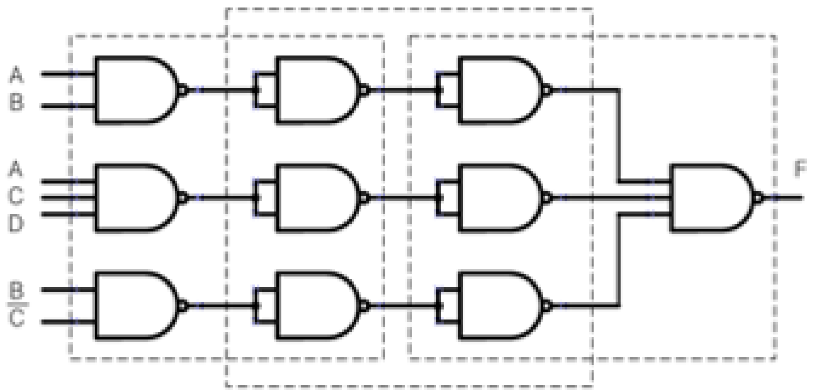
(1) 논리식을 NAND Gate 만으로 논리식 구현(1)

$F = A(B + CD) + B\overline{C}$
$= AB + ACD + B\overline{C}$ 로 전개하고
AND, OR로 표현

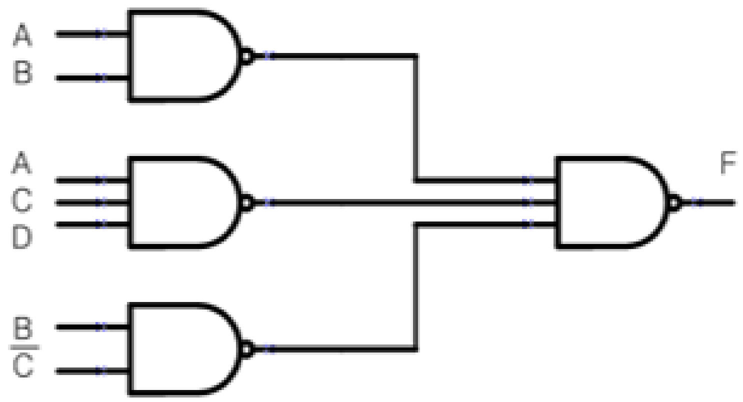


$F = A(B + CD) + B\overline{C}$

AND, OR를 등가
NAND gate로 대체



연속된 2개의
Inverter는 제거

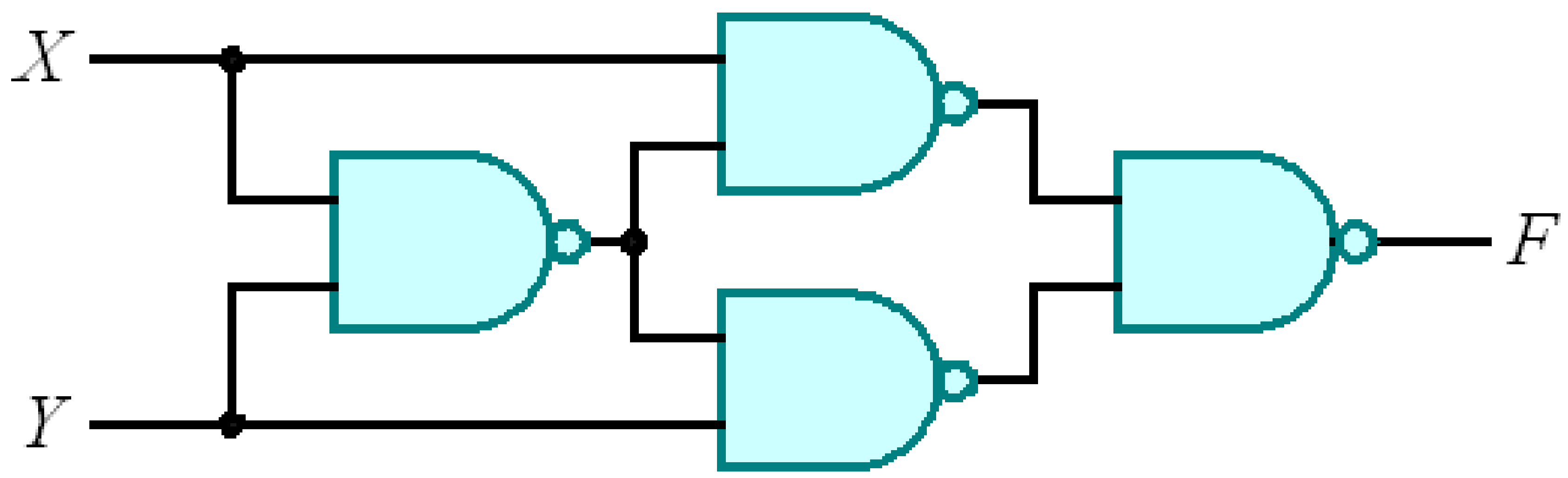


2. NAND Gate와 NOR Gate 만으로의 논리식 구현

(1) 논리식을 NAND Gate 만으로 논리식 구현(2)

$$F = \overline{XY + \overline{X}\,\overline{Y}} = (X+Y)\overline{XY} = X \cdot \overline{XY} + Y \cdot \overline{XY}$$

$$= \overline{\overline{X \cdot \overline{XY} + Y \cdot \overline{XY}}} = \overline{\overline{X \cdot \overline{XY}} \cdot \overline{Y \cdot \overline{XY}}}$$

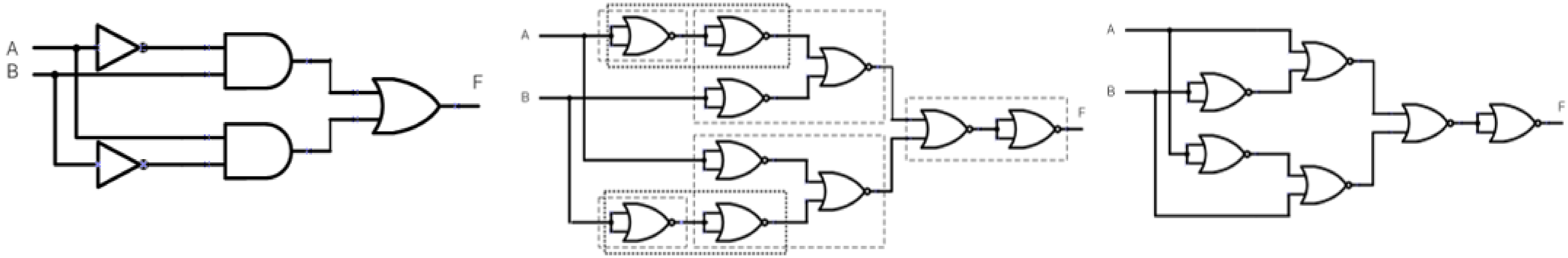


2. NAND Gate와 NOR Gate 만으로의 논리식 구현

(2) 논리식을 NOR Gate 만으로 논리식 구현

등가 NAND gate로 대체

연속된 2개의 Inverter는 제거



$F = \bar{A}B + A\bar{B}$

10

논리식의 간략화

- 학습정리

- Karnaugh MAP

  - 2변수

A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

  - 3변수

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

  - 4변수

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Karnaugh MAP에 의한 간략화 방법

① (진리표를 이용하여) 부울 함수를 SOP 형식으로 표현함(출력인 1인 최소항)

② 부울 함수 F의 각 최소항에 1을 표시

③ 부정의 항(Don't care)이 있다면 동일한 방법으로 각 최소항에 d를 표기함

④ 인접한 항 끼리 2n항(즉 2, 4, 8...)개의 항 씩 묶음, 이때 중복된 항이 존재해도 무방함

⑤ 묶여진 항에서 변수값의 변화를 관찰하여 변수값이 변화하면(0, 1 공존) 그 변수는 버림

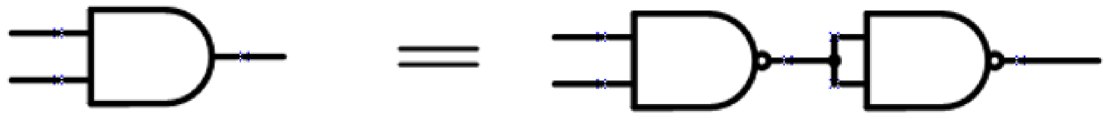
⑥ 묶여진 항을 표준형으로 표기함

- **NAND Gate / NOR Gate 변환**

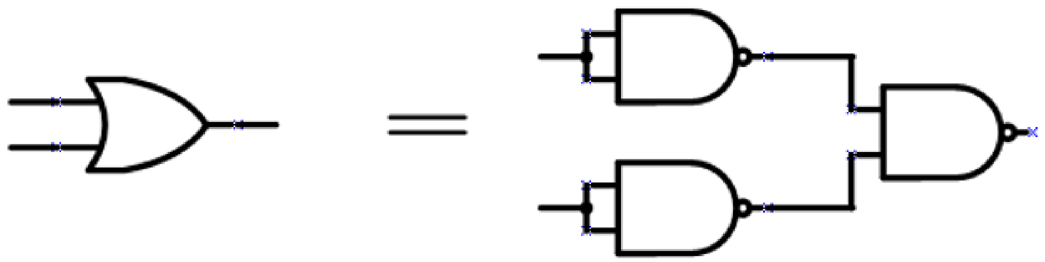
• NAND Gate로의 실현

- $F = \overline{A \cdot A} = \bar{A}$

- $F = \overline{(A \cdot B)} = A \cdot B$



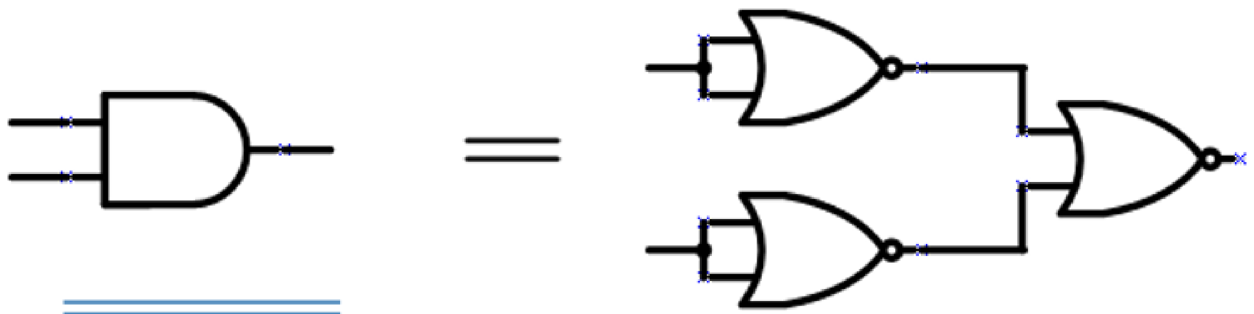
- $F = \overline{(\bar{A} \cdot \bar{B})} = \bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}} = A + B$



• NOR Gate로의 실현

- $F = \overline{(A + A)} = \bar{A}$

- $F = (\bar{A} + \bar{B}) = \bar{A} \cdot \bar{B} = A \cdot B$



- $F = \overline{\overline{(A + B)}} = A + B$