

09

디지털공학개론

| 부울 함수의 논리식 표현

09

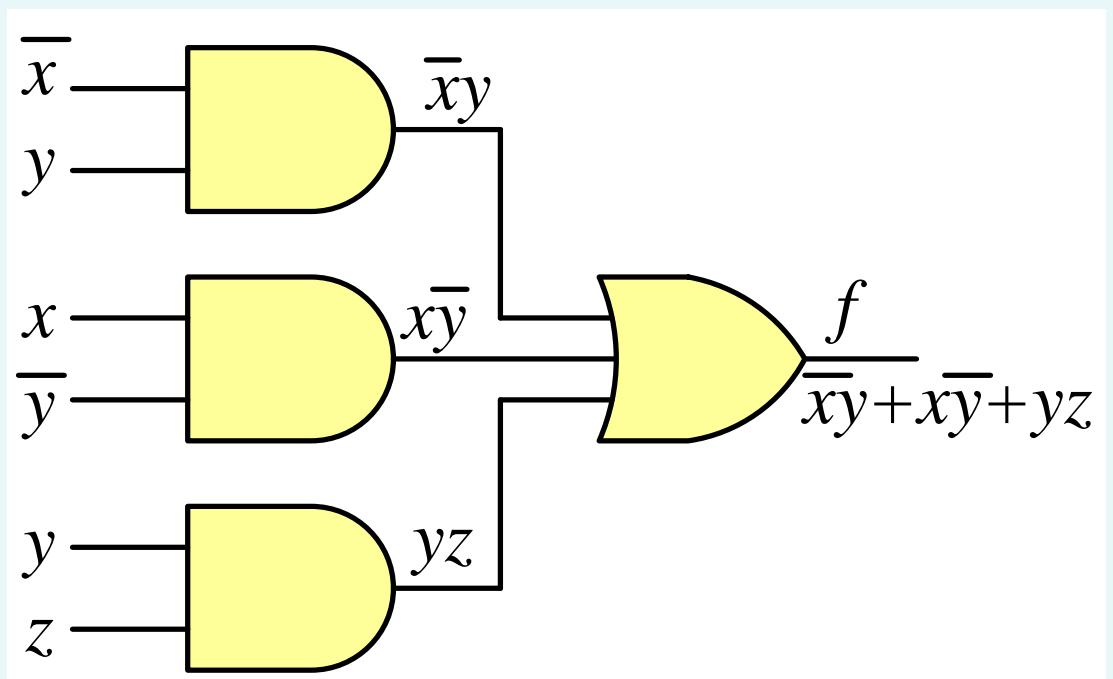
부울 함수의 논리식 표현

1. 논리식의 회로 구성

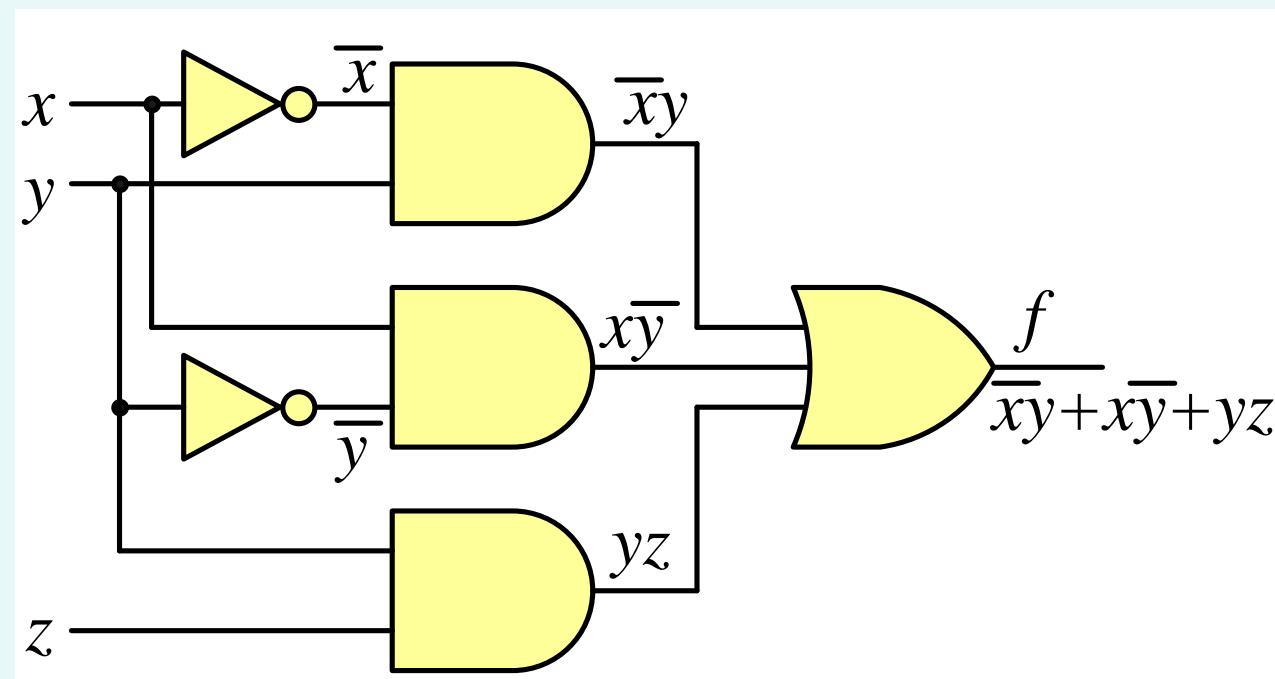
2. 부울 함수의 정규형 및 표준형

- AND, OR, NOT을 이용하여 논리식으로부터 회로를 구성.
(AND-OR로 구성된 회로)

$$f(x, y, z) = x'y + xy' + y'z$$

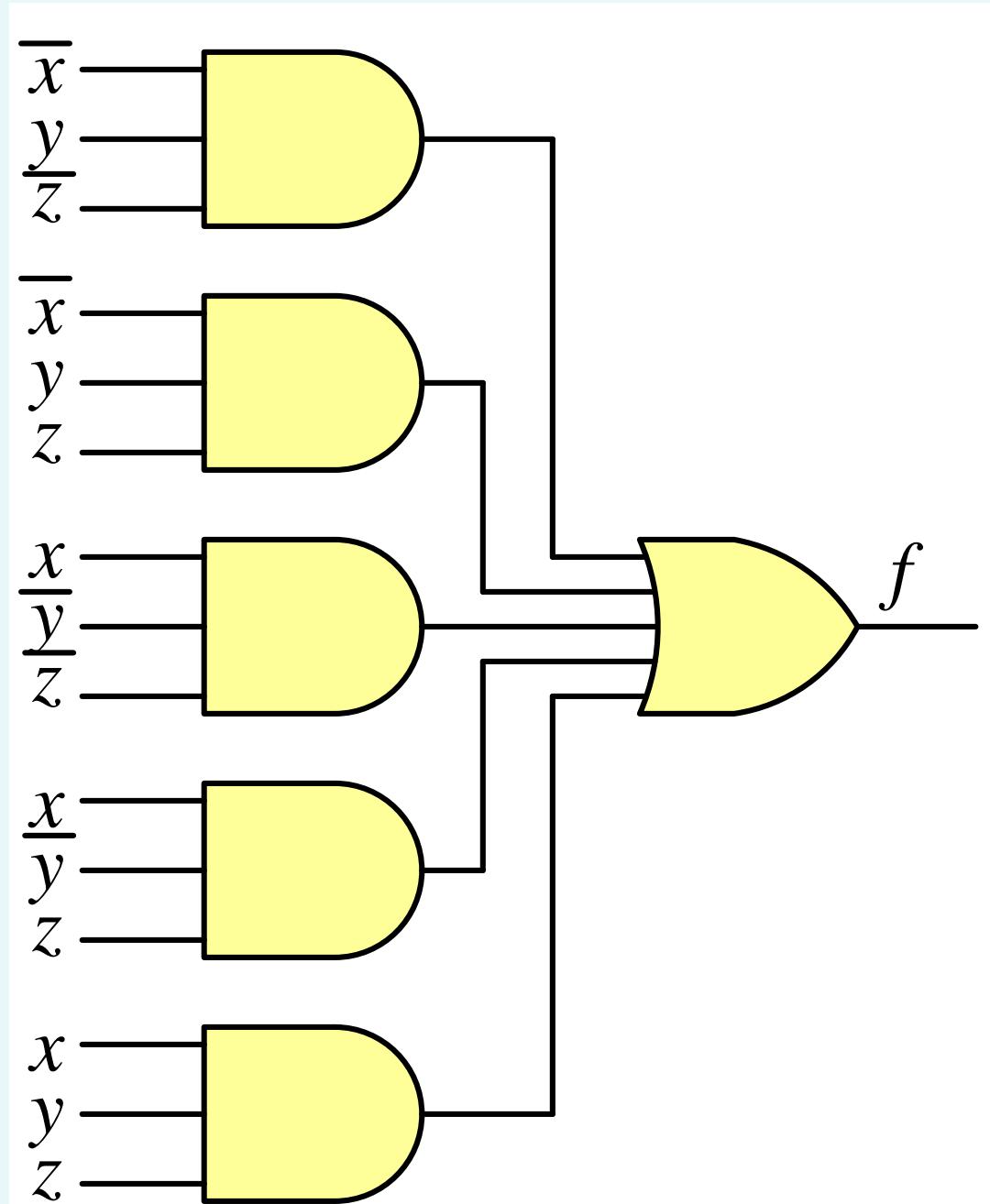


보수 입력 사용



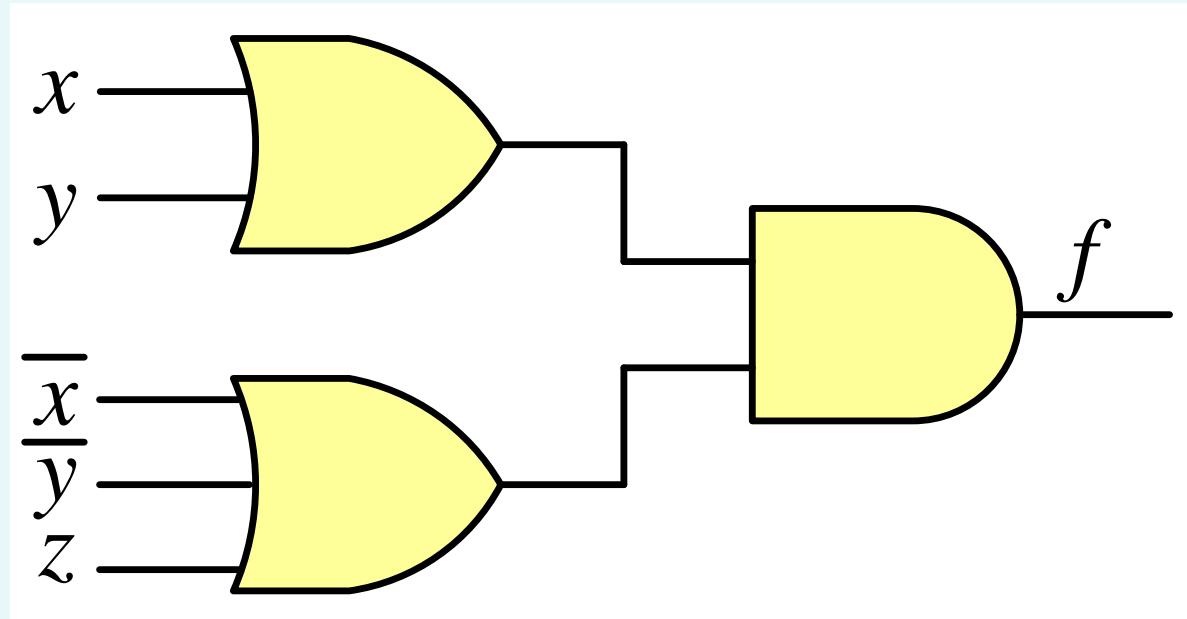
NOT 게이트 사용

- 논리식의 회로 구성의 예 1 (AND-OR)



$$f(x, y, z) = x'y'z' + x'yz + xy'z' + xy'z + xyz$$

- 논리식의 회로 구성의 예 2 (OR-AND)



$$f(x, y, z) = (x + y)(x' + y'z)$$

09

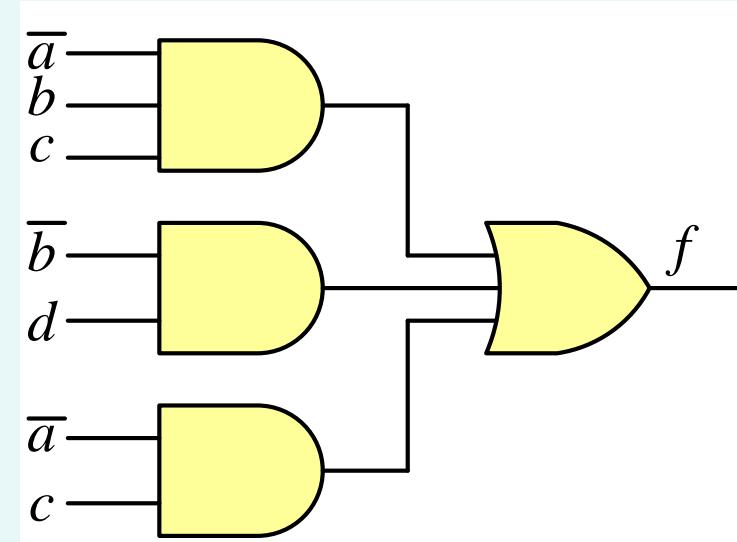
부울 함수의 논리식 표현

1. 논리식의 회로 구성
2. 부울 함수의 정규형 및 표준형

1. 곱의 합과 최소항

(1) 곱의 합(Sum of Product SOP)

- SOP의 구성은 1 단계는 AND항(곱의 항, product term)으로 구성되고, 2 단계는 OR항(합의 항, sum term)으로 만들어진 논리식.



(2) 최소항 (Minterm)

- 최소항 : 표준 곱의 항
- 표준 곱의 항이란 함수에 모든 변수를 포함하고 있음.

minterm

$\bar{W}XYZ$ $WXYZ$

Non minterm

$W\bar{X}Y$ $\bar{W}X\bar{Z}$

1. 곱의 합과 최소항

(3) 2변수 진리표로 부터 최소항 식을 표현하는 방법

입력	출력
a b	f
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

$\bar{a}b = 1$ OR $a\bar{b} = 1$ OR $ab = 1$ 일 때, $f = 10$ 이다.

$$\begin{aligned}f(a,b) &= \bar{a}b + a\bar{b} + ab \\&= m_1 + m_2 + m_3 \\&= \sum m(1, 2, 3)\end{aligned}$$

1. 곱의 합과 최소항

(4) 3변수 최소항의 표현 예 1

$x \ y \ z$	f	최소항	기호
0 0 0	1	$\overline{x} \ \overline{y} \ \overline{z}$	m_0
0 0 1	1	$\overline{x} \ y \ \overline{z}$	m_1
0 1 0	0	$\overline{x} \ y \ \overline{z}$	m_2
0 1 1	1	$\overline{x} \ y \ z$	m_3
1 0 0	0	$x \ \overline{y} \ \overline{z}$	m_4
1 0 1	1	$x \ \overline{y} \ z$	m_5
1 1 0	0	$x \ y \ \overline{z}$	m_6
1 1 1	1	$x \ y \ z$	m_7

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= \sum m(0, 1, 3, 5, 7) \\&= \overline{x} \ \overline{y} \ \overline{z} + \overline{x} \ y \ \overline{z} + \overline{x} \ y \ z + x \ \overline{y} \ \overline{z} + x \ y \ z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(x, y, z) &= \sum m(2, 4, 6) \\&= \overline{x} \ y \ \overline{z} + x \ \overline{y} \ z + x \ y \ \overline{z}\end{aligned}$$

1. 곱의 합과 최소항

(5) 3변수 최소항의 표현 예 2

a	b	c	f	\bar{f}
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

$$\begin{aligned}f(a,b,c) &= \sum m(1, 2, 3, 4, 5) \\&= \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{f}(a,b,c) &= \sum m(0, 6, 7) \\&= \bar{a}\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + abc\end{aligned}$$

1. 곱의 합과 최소항

(6) 4변수 최소항의 표현

$a b c d$	최소항	기호	$a b c d$	최소항	기호
0 0 0 0	$\bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d}$	m_0	1 0 0 0	$a \bar{b} \bar{c} \bar{d}$	m_8
0 0 0 1	$\bar{a} \bar{b} \bar{c} d$	m_1	1 0 0 1	$a \bar{b} \bar{c} d$	m_9
0 0 1 0	$\bar{a} \bar{b} c \bar{d}$	m_2	1 0 1 0	$a \bar{b} c \bar{d}$	m_{10}
0 0 1 1	$\bar{a} \bar{b} c d$	m_3	1 0 1 1	$a \bar{b} c d$	m_{11}
0 1 0 0	$\bar{a} b \bar{c} \bar{d}$	m_4	1 1 0 0	$a b \bar{c} \bar{d}$	m_{12}
0 1 0 1	$\bar{a} b \bar{c} d$	m_5	1 1 0 1	$a b \bar{c} d$	m_{13}
0 1 1 0	$\bar{a} b c \bar{d}$	m_6	1 1 1 0	$a b c \bar{d}$	m_{14}
0 1 1 1	$\bar{a} b c d$	m_7	1 1 1 1	$a b c d$	m_{15}

2. 합의 곱과 최대항

(1) 합의 곱(Product of Sum POS)

- POS의 구성은 1 단계는 OR항(합의 항, sum term)으로 구성되고, 2 단계는 AND항(곱의 항, product term)으로 만들어진 논리식.

(2) 최대항 (Maxterm)

- 모든 변수를 포함하는 OR항을 맥스텀(maxterm) 또는 최대항이라 한다.

[최대항의 예]

$$\overline{w} + x + y + \overline{z}$$

$$w + x + y + z$$

[합의 곱의 예]

$$(w + x)(w + y)$$

$$w(w + y)$$

$$\overline{w}$$

$$w + x$$

$$(\overline{w} + x + y + \overline{z})(w + x + y + z)$$

2. 합의 곱과 최대항

(3) 2변수와 3변수 최대항 표현 방법

$a\ b$	최대항	기호	$a\ b\ c$	최대항	기호
0 0	$a + b$	M_0	0 0 0	$a + b + c$	M_0
0 1	$a + \bar{b}$	M_1	0 0 1	$a + b + \bar{c}$	M_1
1 0	$\bar{a} + b$	M_2	0 1 0	$a + \bar{b} + c$	M_2
1 1	$\bar{a} + \bar{b}$	M_3	0 1 1	$a + \bar{b} + \bar{c}$	M_3
			1 0 0	$\bar{a} + b + c$	M_4
			1 0 1	$\bar{a} + b + \bar{c}$	M_5
			1 1 0	$\bar{a} + \bar{b} + c$	M_6
			1 1 1	$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$	M_7

2. 합의 곱과 최대항

(4) 4변수 최대항 표현 방법

$a b c d$	최대항	기호	$a b c d$	최대항	기호
0 0 0 0	$a + b + c + d$	M_0	1 0 0 0	$\bar{a} + b + c + d$	M_8
0 0 0 1	$a + b + c + \bar{d}$	M_1	1 0 0 1	$\bar{a} + b + c + \bar{d}$	M_9
0 0 1 0	$a + b + \bar{c} + d$	M_2	1 0 1 0	$\bar{a} + b + \bar{c} + d$	M_{10}
0 0 1 1	$a + b + \bar{c} + \bar{d}$	M_3	1 0 1 1	$\bar{a} + b + \bar{c} + \bar{d}$	M_{11}
0 1 0 0	$a + \bar{b} + c + d$	M_4	1 1 0 0	$\bar{a} + \bar{b} + c + d$	M_{12}
0 1 0 1	$a + \bar{b} + c + \bar{d}$	M_5	1 1 0 1	$\bar{a} + \bar{b} + c + \bar{d}$	M_{13}
0 1 1 0	$a + \bar{b} + \bar{c} + d$	M_6	1 1 1 0	$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + d$	M_{14}
0 1 1 1	$a + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$	M_7	1 1 1 1	$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$	M_{15}

2. 합의 곱과 최대항

(4) 2변수 최대항 표현 예

입력	출력
$a \quad b$	f
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

$$\begin{aligned}f(a, b) &= (a + b)(a + \bar{b})(\bar{a} + b) \\&= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \\&= \prod M(0, 1, 2)\end{aligned}$$

2. 합의 곱과 최대항

(4) 3변수 최대항 표현 예

x	y	z	f	최대항	기호
0	0	0	0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	0	$x + y + \bar{z}$	M_1
0	1	0	1	$\bar{x} + y + z$	M_2
0	1	1	0	$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$	M_3
1	0	0	1	$\bar{x} + y + z$	M_4
1	0	1	0	$\bar{x} + y + \bar{z}$	M_5
1	1	0	1	$\bar{x} + \bar{y} + z$	M_6
1	1	1	0	$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$	M_7

$$f(x, y, z) = \prod M(0, 1, 3, 5, 7)$$

3. 최소항과 최대항과의 관계

- 최소항은 출력이 1인 항을 SOP로 나타낸 것이고, 최대항은 출력이 0인 항을 POS로 나타낸 것이다.
- 최소항과 최대항은 반대의 성질을 가진다.

$a b c$	f	\bar{f}	최소항 기호	최대항 기호	관계
0 0 0	0	1	$\bar{a} \bar{b} \bar{c}$	$a + b + c$	$M_0 = \overline{m_0}$
0 0 1	1	0	$\bar{a} \bar{b} c$	$a + b + \bar{c}$	$M_1 = \overline{m_1}$
0 1 0	1	0	$\bar{a} b \bar{c}$	$a + \bar{b} + c$	$M_2 = \overline{m_2}$
0 1 1	1	0	$\bar{a} b c$	$a + \bar{b} + \bar{c}$	$M_3 = \overline{m_3}$
1 0 0	1	0	$a \bar{b} \bar{c}$	$\bar{a} + b + c$	$M_4 = \overline{m_4}$
1 0 1	1	0	$a \bar{b} c$	$\bar{a} + b + \bar{c}$	$M_5 = \overline{m_5}$
1 1 0	0	1	$a b \bar{c}$	$\bar{a} + \bar{b} + c$	$M_6 = \overline{m_6}$
1 1 1	0	1	$a b c$	$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$	$M_7 = m_7$

3. 최소항과 최대항과의 관계

$$\begin{aligned}f(a,b,c) &= \sum m(1,2,3,4,5) = \overline{\prod M(1,2,3,4,5)} \\&= \prod M(0,6,7) = \overline{\sum m(0,6,7)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}(a,b,c) &= \sum m(0,6,7) = \overline{\prod M(0,6,7)} \\&= \prod M(1,2,3,4,5) = \overline{\sum m(1,2,3,4,5)}\end{aligned}$$

4. 표준형(standard form)

- 정규형 부울 함수를 간략화 과정을 통해 얻어진 부울 함수의 표현식
- 각 항에는 포함되지 않은 변수들이 있다는 것이 정규형 부울 함수 표현식과의 차이점
- 정규형: $F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$
- 표준형: $F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}C$

09

부울 함수의 논리식 표현

- 학습정리

● 최소항과 최대항 표현

논리 변수			최소항	최대항	논리 함수	
A	B	C			F_1	\bar{F}_1
0	0	0	$m_0 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$M_0 = A + B + C$	0	1
0	0	1	$m_1 = \bar{A}\bar{B}C$	$M_1 = A + B + \bar{C}$	0	1
0	1	0	$m_2 = \bar{A}B\bar{C}$	$M_2 = A + \bar{B} + C$	1	0
0	1	1	$m_3 = \bar{A}BC$	$M_3 = A + \bar{B} + \bar{C}$	0	1
1	0	0	$m_4 = A\bar{B}\bar{C}$	$M_4 = \bar{A} + B + C$	0	1
1	0	1	$m_5 = \bar{A}\bar{B}C$	$M_5 = \bar{A} + B + \bar{C}$	1	0
1	1	0	$m_6 = AB\bar{C}$	$M_6 = \bar{A} + \bar{B} + C$	0	1
1	1	1	$m_7 = ABC$	$M_7 = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$	1	0