

09

디지털공학개론

■ 부울 함수의 논리식 표현

09

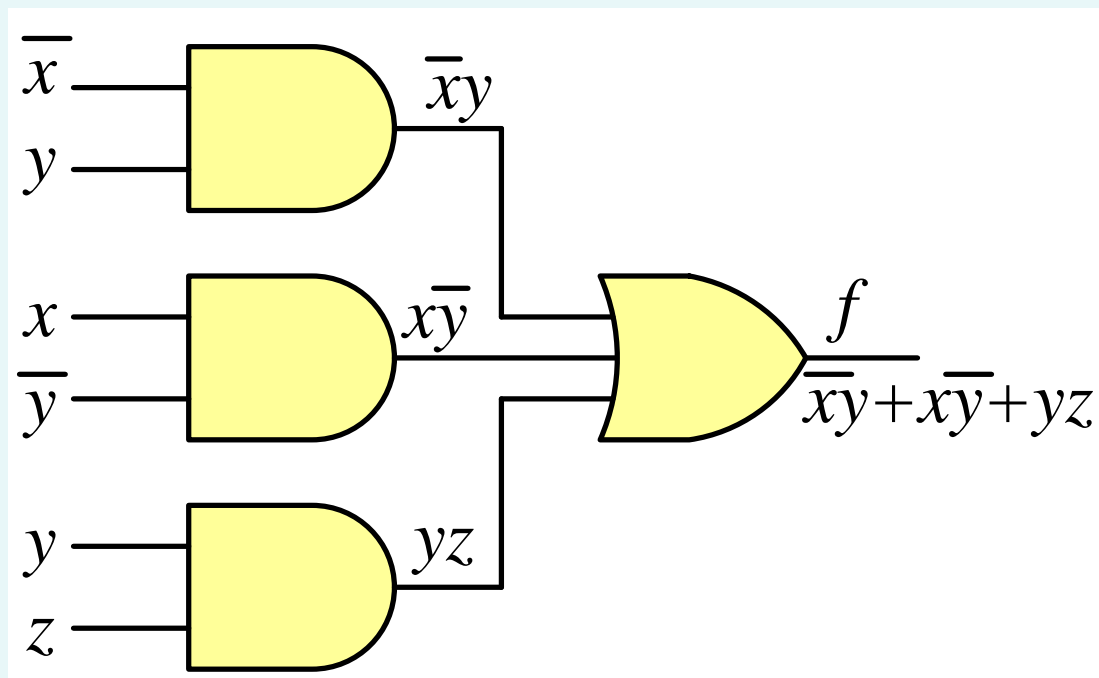
부울 함수의 논리식 표현

1. 논리식의 회로 구성

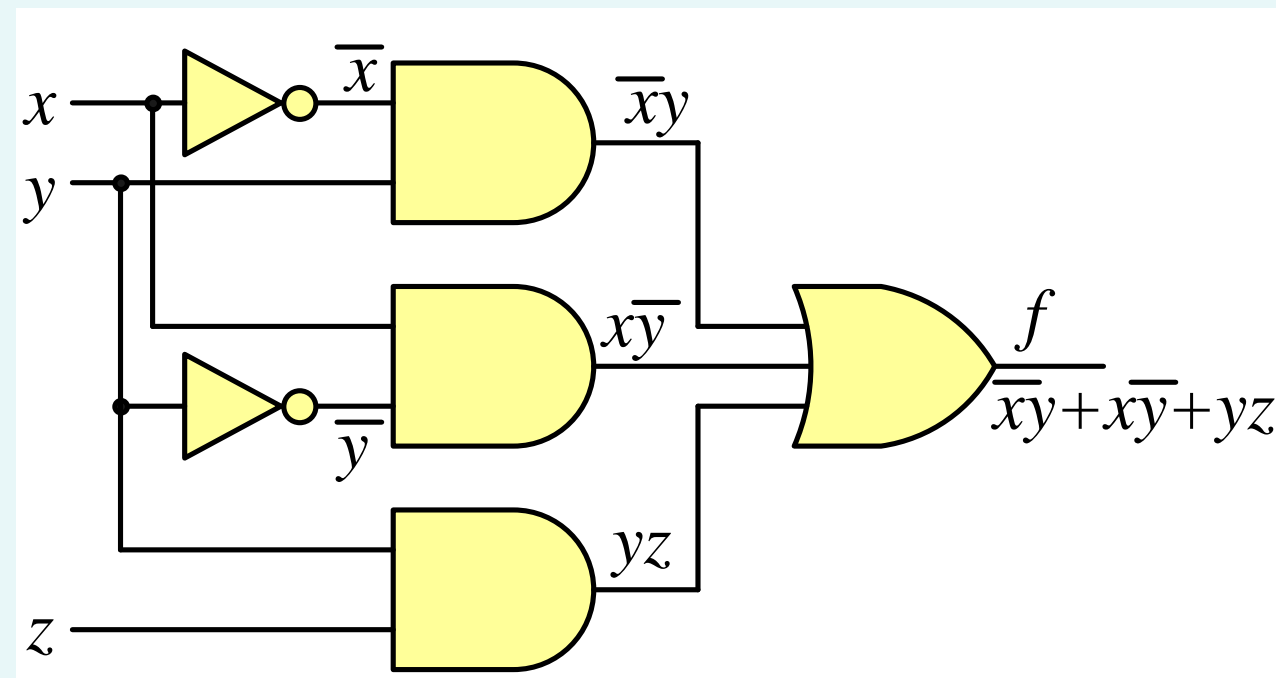
2. 부울 함수의 정규형 및 표준형

- AND, OR, NOT을 이용하여 논리식으로부터 회로를 구성.
(AND-OR로 구성된 회로)

$$f(x, y, z) = x'y + xy' + y'z$$

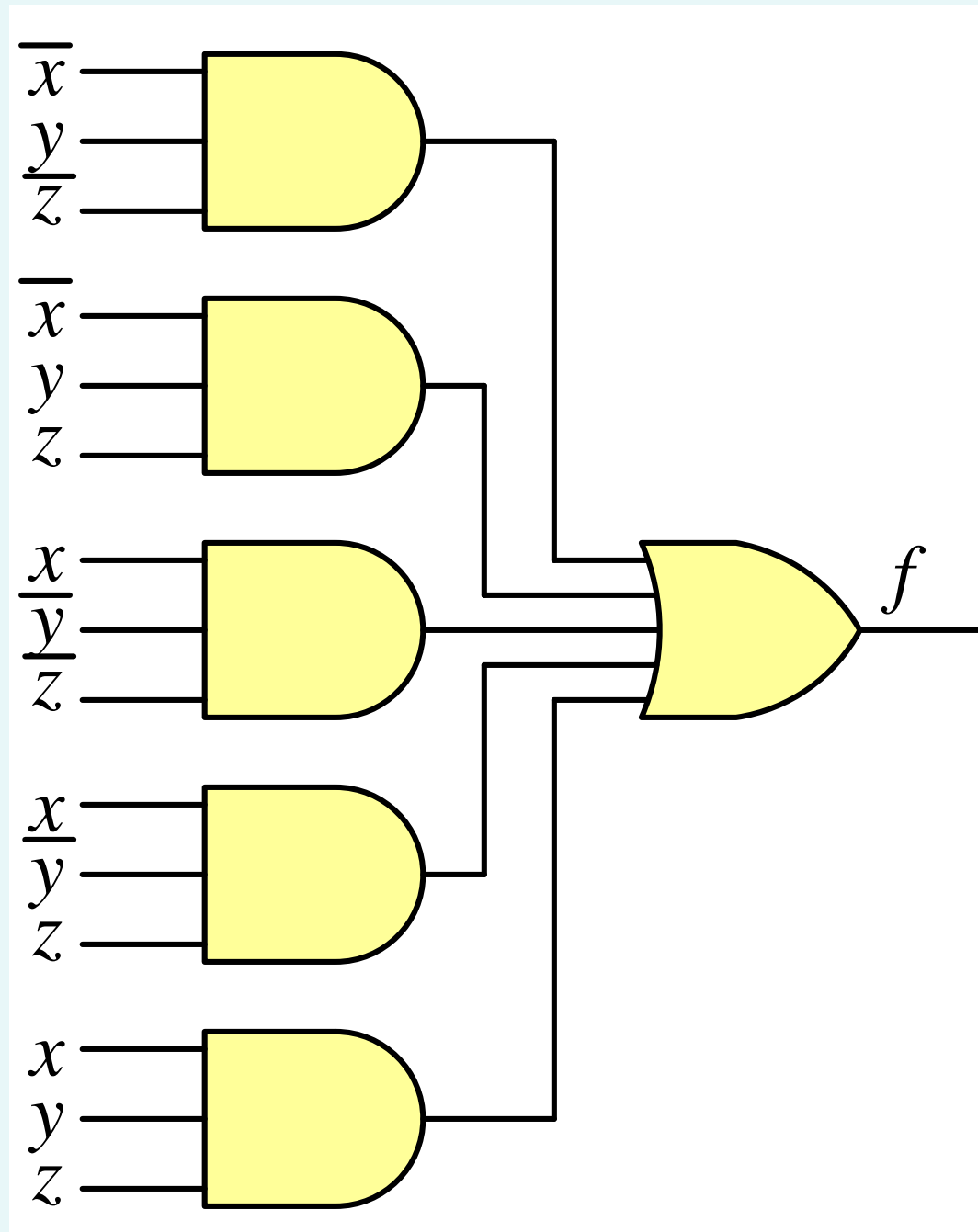


보수 입력 사용



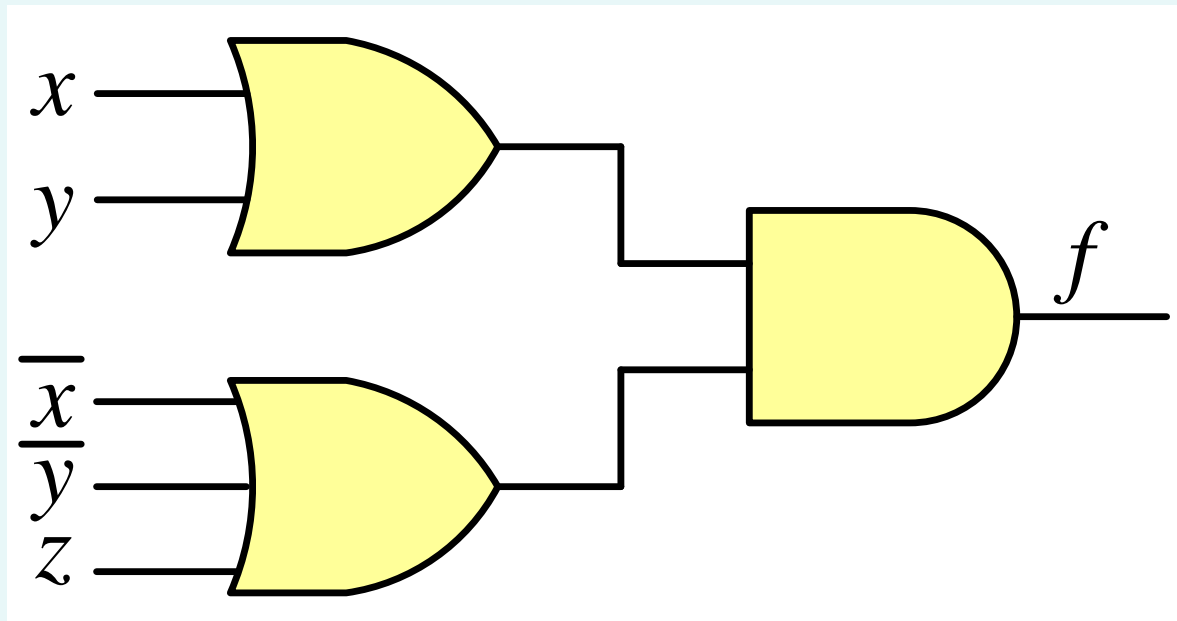
NOT 게이트 사용

• 논리식의 회로 구성의 예 1 (AND-OR)



$$f(x, y, z) = x'yz' + x'yz + xy'z' + xy'z + xyz$$

• 논리식의 회로 구성의 예 2 (OR-AND)



$$f(x, y, z) = (x + y)(x' + y'z)$$

09

부울 함수의 논리식 표현

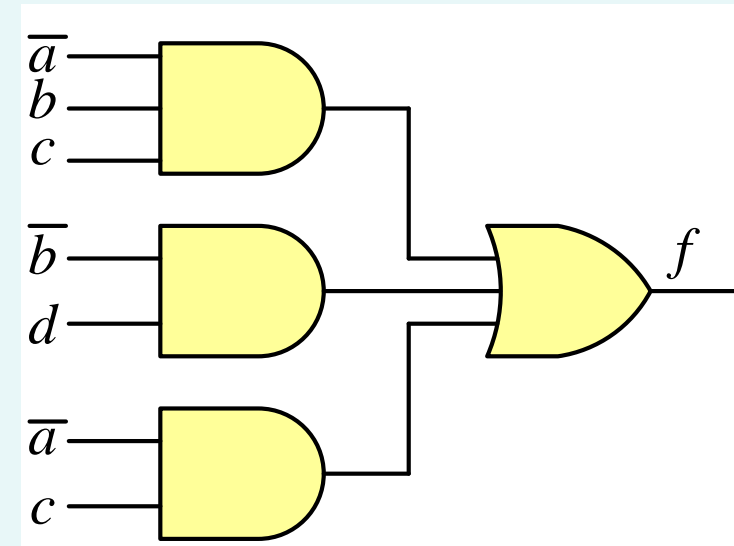
1. 논리식의 회로 구성

2. 부울 함수의 정규형 및 표준형

1. 곱의 합과 최소항

(1) 곱의 합(Sum of Product SOP)

- SOP의 구성은 1 단계는 AND항(곱의 항, product term)으로 구성되고, 2 단계는 OR항(합의 항, sum term)으로 만들어진 논리식.



(2) 최소항 (Minterm)

- 최소항 : 표준 곱의 항
- 표준 곱의 항이란 함수에 모든 변수를 포함하고 있음.

minterm

$\bar{W}XY\bar{Z}$ $WXYZ$

Non minterm

$W\bar{X}Y$ $\bar{W}X\bar{Z}$

1. 곱의 합과 최소항

(3) 2변수 진리표로 부터 최소항 식을 표현하는 방법

입력		출력
a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\bar{a}b = 1$ OR $a\bar{b} = 1$ OR $ab = 1$ 일 때, $f = 1$ 이다.

$$\begin{aligned}
 f(a,b) &= \bar{a}b + a\bar{b} + ab \\
 &= m_1 + m_2 + m_3 \\
 &= \sum m(1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

1. 곱의 합과 최소항

(4) 3변수 최소항의 표현 예 1

$x y z$	f	최소항	기호
0 0 0	1	$\overline{x} \overline{y} \overline{z}$	m_0
0 0 1	1	$\overline{x} \overline{y} z$	m_1
0 1 0	0	$\overline{x} y \overline{z}$	m_2
0 1 1	1	$\overline{x} y z$	m_3
1 0 0	0	$x \overline{y} \overline{z}$	m_4
1 0 1	1	$x \overline{y} z$	m_5
1 1 0	0	$x y \overline{z}$	m_6
1 1 1	1	$x y z$	m_7

$$f(x, y, z) = \sum m(0, 1, 3, 5, 7)$$

$$= \overline{x} \overline{y} \overline{z} + \overline{x} \overline{y} z + \overline{x} y \overline{z} + \overline{x} y z + x y z$$

$$\overline{f}(x, y, z) = \sum m(2, 4, 6)$$

$$= \overline{x} y \overline{z} + x \overline{y} \overline{z} + x y \overline{z}$$

1. 곱의 합과 최소항

(5) 3변수 최소항의 표현 예 2

a b c	f	\bar{f}
0 0 0	0	1
0 0 1	1	0
0 1 0	1	0
0 1 1	1	0
1 0 0	1	0
1 0 1	1	0
1 1 0	0	1
1 1 1	0	1

$$f(a,b,c) = \sum m(1, 2, 3, 4, 5)$$

$$= \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c$$

$$\bar{f}(a,b,c) = \sum m(0, 6, 7)$$

$$= \bar{a}\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + abc$$

1. 곱의 합과 최소항

(6) 4변수 최소항의 표현

$a\ b\ c\ d$	최소항	기호	$a\ b\ c\ d$	최소항	기호
0 0 0 0	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	m_0	1 0 0 0	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	m_8
0 0 0 1	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$	m_1	1 0 0 1	$a\bar{b}\bar{c}d$	m_9
0 0 1 0	$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$	m_2	1 0 1 0	$a\bar{b}c\bar{d}$	m_{10}
0 0 1 1	$\bar{a}\bar{b}cd$	m_3	1 0 1 1	$a\bar{b}cd$	m_{11}
0 1 0 0	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	m_4	1 1 0 0	$ab\bar{c}\bar{d}$	m_{12}
0 1 0 1	$\bar{a}b\bar{c}d$	m_5	1 1 0 1	$ab\bar{c}d$	m_{13}
0 1 1 0	$\bar{a}bcd\bar{d}$	m_6	1 1 1 0	$abc\bar{d}$	m_{14}
0 1 1 1	$\bar{a}bcd$	m_7	1 1 1 1	$abcd$	m_{15}

2. 합의 곱과 최대항

(1) 합의 곱(Product of Sum POS)

- POS의 구성은 1 단계는 OR항(합의 항, sum term)으로 구성되고, 2 단계는 AND항(곱의 항, product term)으로 만들어진 논리식.

(2) 최대항 (Maxterm)

- 모든 변수를 포함하는 OR항을 맥스텀(maxterm) 또는 최대항이라 한다.

[최대항의 예]

$$\overline{w} + x + y + \overline{z}$$
$$w + x + y + z$$

[합의 곱의 예]

$$(w + x)(w + y)$$
$$w(w + y)$$
$$w$$
$$w + x$$
$$(\overline{w} + x + y + \overline{z})(w + x + y + z)$$

2. 합의 곱과 최대항

(3) 2변수와 3변수 최대항 표현 방법

$a \ b$	최대항	기호
0 0	$a + b$	M_0
0 1	$a + \bar{b}$	M_1
1 0	$\bar{a} + b$	M_2
1 1	$\bar{a} + \bar{b}$	M_3

$a \ b \ c$	최대항	기호
0 0 0	$a + b + c$	M_0
0 0 1	$a + b + \bar{c}$	M_1
0 1 0	$a + \bar{b} + c$	M_2
0 1 1	$a + \bar{b} + \bar{c}$	M_3
1 0 0	$\bar{a} + b + c$	M_4
1 0 1	$\bar{a} + b + \bar{c}$	M_5
1 1 0	$\bar{a} + \bar{b} + c$	M_6
1 1 1	$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$	M_7

2. 합의 곱과 최대항

(4) 4변수 최대항 표현 방법

$a\ b\ c\ d$	최대항	기호	$a\ b\ c\ d$	최대항	기호
0 0 0 0	$a + b + c + d$	M_0	1 0 0 0	$\bar{a} + b + c + d$	M_8
0 0 0 1	$a + b + c + \bar{d}$	M_1	1 0 0 1	$\bar{a} + b + c + \bar{d}$	M_9
0 0 1 0	$a + b + \bar{c} + d$	M_2	1 0 1 0	$\bar{a} + b + \bar{c} + d$	M_{10}
0 0 1 1	$a + b + \bar{c} + \bar{d}$	M_3	1 0 1 1	$\bar{a} + b + \bar{c} + \bar{d}$	M_{11}
0 1 0 0	$a + \bar{b} + c + d$	M_4	1 1 0 0	$\bar{a} + \bar{b} + c + d$	M_{12}
0 1 0 1	$a + \bar{b} + c + \bar{d}$	M_5	1 1 0 1	$\bar{a} + \bar{b} + c + \bar{d}$	M_{13}
0 1 1 0	$a + \bar{b} + \bar{c} + d$	M_6	1 1 1 0	$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + d$	M_{14}
0 1 1 1	$a + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$	M_7	1 1 1 1	$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$	M_{15}

2. 합의 곱과 최대항

(4) 2변수 최대항 표현 예

입력		출력
a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned}
 f(a,b) &= (a+b)(a+\bar{b})(\bar{a}+b) \\
 &= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \\
 &= \prod M(0,1,2)
 \end{aligned}$$

2. 합의 곱과 최대항

(4) 3변수 최대항 표현 예

$x y z$	f	최대항	기호
0 0 0	0	$x + y + z$	M_0
0 0 1	0	$x + y + \bar{z}$	M_1
0 1 0	1	$x + \bar{y} + z$	M_2
0 1 1	0	$x + \bar{y} + \bar{z}$	M_3
1 0 0	1	$\bar{x} + y + z$	M_4
1 0 1	0	$\bar{x} + y + \bar{z}$	M_5
1 1 0	1	$\bar{x} + \bar{y} + z$	M_6
1 1 1	0	$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$	M_7

$$f(x, y, z) = \prod M(0, 1, 3, 5, 7)$$

3. 최소항과 최대항과의 관계

- 최소항은 출력이 1인 항을 SOP로 나타낸 것이고, 최대항은 출력이 0인 항을 POS로 나타낸 것이다.
- 최소항과 최대항은 반대의 성질을 가진다.

$a\ b\ c$	f	\bar{f}	<u>최소항</u>	기호	<u>최대항</u>	기호	관 계
0 0 0	0	1	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	m_0	$a+b+c$	M_0	$M_0 = \bar{m}_0$
0 0 1	1	0	$\bar{a}\bar{b}c$	m_1	$a+b+\bar{c}$	M_1	$M_1 = \bar{m}_1$
0 1 0	1	0	$\bar{a}b\bar{c}$	m_2	$a+\bar{b}+c$	M_2	$M_2 = \bar{m}_2$
0 1 1	1	0	$\bar{a}bc$	m_3	$a+\bar{b}+\bar{c}$	M_3	$M_3 = \bar{m}_3$
1 0 0	1	0	$a\bar{b}\bar{c}$	m_4	$\bar{a}+b+c$	M_4	$M_4 = \bar{m}_4$
1 0 1	1	0	$a\bar{b}c$	m_5	$\bar{a}+b+\bar{c}$	M_5	$M_5 = \bar{m}_5$
1 1 0	0	1	$ab\bar{c}$	m_6	$\bar{a}+\bar{b}+c$	M_6	$M_6 = \bar{m}_6$
1 1 1	0	1	abc	m_7	$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$	M_7	$M_7 = \bar{m}_7$

3. 최소항과 최대항과의 관계

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= \sum m(1, 2, 3, 4, 5) = \overline{\prod M(1, 2, 3, 4, 5)} \\ &= \prod M(0, 6, 7) = \overline{\sum m(0, 6, 7)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{f}(a,b,c) &= \sum m(0, 6, 7) = \overline{\prod M(0, 6, 7)} \\ &= \prod M(1, 2, 3, 4, 5) = \overline{\sum m(1, 2, 3, 4, 5)} \end{aligned}$$

4. 표준형(standard form)

- 정규형 부울 함수를 간략화 과정을 통해 얻어진 부울 함수의 표현식
- 각 항에는 포함되지 않은 변수들이 있다는 것이 정규형 부울 함수 표현식과의 차이점
- 정규형: $F(A, B, C) = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C$
- 표준형: $F(A, B, C) = \bar{A}B\bar{C} + \bar{B}C$

09

부울 함수의 논리식 표현

- 학습정리

● 최소항과 최대항 표현

논리 변수			최소항	최대항	논리 함수	
A	B	C			F_1	\bar{F}_1
0	0	0	$m_0 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$M_0 = A + B + C$	0	1
0	0	1	$m_1 = \bar{A}\bar{B}C$	$M_1 = A + B + \bar{C}$	0	1
0	1	0	$m_2 = \bar{A}B\bar{C}$	$M_2 = A + \bar{B} + C$	1	0
0	1	1	$m_3 = \bar{A}BC$	$M_3 = A + \bar{B} + \bar{C}$	0	1
1	0	0	$m_4 = A\bar{B}\bar{C}$	$M_4 = \bar{A} + B + C$	0	1
1	0	1	$m_5 = A\bar{B}C$	$M_5 = \bar{A} + B + \bar{C}$	1	0
1	1	0	$m_6 = AB\bar{C}$	$M_6 = \bar{A} + \bar{B} + C$	0	1
1	1	1	$m_7 = ABC$	$M_7 = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$	1	0