

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 000

# **Praćenje gibajućih objekata pomoću filtra gustoće vjerojatnosti hipoteza**

Marko Peroš

Zagreb, svibanj 2024.

# SADRŽAJ

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Kalmanov filter</b>	<b>2</b>
2.1. Jednadžbe predikcije . . . . .	3
2.1.1. Jednadžba ekstrapolacije stanja . . . . .	3
2.1.2. Jednadžbe ekstrapolacije kovarijance nesigurnosti . . . . .	4
2.2. Jednadžbe estimacije . . . . .	4
2.2.1. Jednadžba mjerenja . . . . .	4
2.2.2. Jednadžba ažuriranja stanja . . . . .	5
2.2.3. Jednadžba ažuriranja matrice kovarijance . . . . .	5
2.2.4. Kalmanov dobitak . . . . .	5
<b>3. pristupi praćenju gibajućih objekata</b>	<b>7</b>
3.1. Algoritam združenog integriranog vjerojatnosnog pridruživanja po- dataka . . . . .	7
3.2. Algoritam praćenja pomoću višestrukih hipoteza . . . . .	8
3.3. Algoritmi temeljeni na slučajnim konačnim skupovi . . . . .	8
<b>4. Filter gustoće vjerojatnosti hipoteza</b>	<b>10</b>
4.1. Slučajni konačni skupovi kod praćenja više objekata . . . . .	10
4.2. Filter gustoće vjerojatnosti hipoteza Gaussovih mješavina . . . . .	13
4.3. Implementacija GMPHD Filtra . . . . .	18
<b>5. Rezultati</b>	<b>21</b>
<b>6. Zaključak</b>	<b>28</b>
<b>Literatura</b>	<b>29</b>

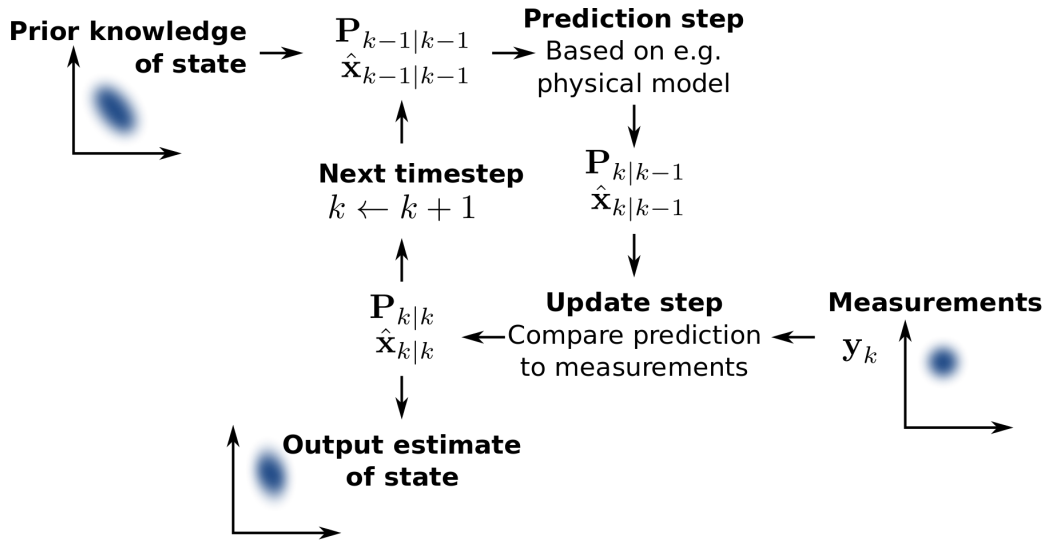
# 1. Uvod

Više objektno praćenje odnosi se na problem praćenja objekata i njihovih putanja na temelju mjerenja dobivenih od strane mjernih instrumenata. Neki od izazova koji se pojavljuju s ovim problemom su procjena broja objekata zbog prisutnosti šuma unutar mjerenja, nestajanja starih objekata i pojavljivanja novih te estimacija stanja pojedinih objekata. Stoga, trebaju nam rješenja koja će moći estimirati i stabilno pratiti broj objekata kroz vrijeme. Više objektno praćenje pronašlo je primjenu u raznim područjima kao što su praćenje zračnog prometa, nadzor, izrada autonomnih vozila, robotika, računalni vid i drugo [4].

Drugo poglavlje opisuje linearni diskretni Kalmanov filter koji je podijeljen na jednadžbe predikcije i estimacije. U trećem poglavlju ukratko se predstavljaju različiti pristupi praćenja gibajućih objekata. Četvrto poglavlje opisuje slučajne konačne skupove pomoću kojih se modelira praćenje više gibajućih objekata i predstavlja filter gustoće vjerojatnosti hipoteza Gaussovih mješavina koji prati klasu linearnih Gaussovih više objektnih modela. U posljednjem poglavlju prikazani su rezultati triju simulacija filtra gustoće vjerojatnosti hipoteza Gaussovih mješavina.

## 2. Kalmanov filter

Kalmanov filter dobio je ime 1960-te godine po Rudolf. E. Kalmanu koji je iste godine objavio poznati znanstveni rad [2]. Kalmanov filter je algoritam za estimaciju i predikciju stanja sustava prilikom prisutnosti nesigurnosti. Algoritam koristi niz mjerenja dobivenih kroz vrijeme, uključujući statistički šum i ostale nesigurnosti koje pridonose preciznosti estimacije stanja. Danas se koristi u raznim područjima kao što su vođenje i navigacija vozila, planiranje kretanja robota, stabiliziranje mjerenja dubine i praćenje objekata u području računalnog vida. Kalmanov filter često se konceptualno prikazuje u dvije različite faze: faza predikcije i faza ažuriranja. Faza predviđanja koristi estimirano stanje prethodnog vremenskog trenutka kako bi predviđjela stanje sustava u sadašnjem trenutku ali bez ikakve informacije opservacije sadašnjeg trenutka. Zbog toga ovu fazu još nazivamo i a priori fazom. U fazi ažuriranja koriste se informacije iz faze predikcije i informacije opservacije sadašnjeg trenutka koje uz pomoć Kalmanovog dobitka i prethodnog estimiranog stanja zajedno daju estimaciju stanja sadašnjeg trenutka koju još nazivamo a posteriori estimacija stanja. Postoji više vrsta Kalmanovog filtra kao što su diskretni Kalman filter, kontinuirani Kalman filter, prošireni Kalman filter i drugi.



Slika 2.1: Shematski prikaz Kalmanovog filtra[6]

## 2.1. Jednadžbe predikcije

### 2.1.1. Jednadžba ekstrapolacije stanja

Pomoću jednadžbu ekstrapolacije stanja možemo predvidjeti sljedeće stanje sustava na temelju trenutnog stanja sustava. Jednadžba ekstrapolira vektor stanja iz sadašnjosti (trenutak  $k$ ) na budućnost (trenutak  $k + 1$ ).

Jednadžba ekstrapolacije stanja opisuje model dinamičkog sustava. Ponekad ju još nazivamo i dinamičkim modelom, jednadžbom tranzicije, modelom stanja prostora. Neka je  $\mathbf{w}_k$  procesni šum, nemjerljiva slučajna varijabla čija je funkcija gustoće normalna:

$$\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k) \quad (1)$$

$\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k}$  pretpostavljeni vektor koji opisuje stanja sustava u trenutku  $k + 1$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{k,k}$  vektor estimiranog stanja sustava u trenutku  $k$ ,  $\mathbf{u}_k$  kontrolni ili ulazni vektor, mjerljiva ulazna vrijednost sustava,  $\mathbf{F}$  matrica prijelaza stanja i  $\mathbf{G}$  kontrolna matrica ili matrica ulaza koja mapira vrijednosti kontrolnog vektora na vektor stanja. Onda općeniti matrični oblik jednadžbe ekstrapolacije stanja [2] glasi:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k,k} + \mathbf{G}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (2)$$

Matrica prijelaza stanja  $\mathbf{F}$  opisuje ponašanje sustava bez ikakvih vanjskih utjecaja i ovisi o sustavu kojeg opisujemo.

### 2.1.2. Jednadžbe ekstrapolacije kovarijance nesigurnosti

Jednadžba ekstrapolacije kovarijance nesigurnosti omogućava nam predikciju kovarijance nesigurnosti koja je povezana s pretpostavljenim stanjem sustava, odnosno a priori stanjem. Matrica kovarijance je kvadratna matrica gdje je broj redaka, odnosno stupaca jednak broju značajki koje se nalaze u vektoru stanja i čije ćelije predstavljaju kovarijancu između pojedinih značajki. Neka je  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} \in \mathbb{R}^n$  pretpostavljeno stanje sustava u trenutku  $k + 1$  i neka je  $\hat{\mathbf{x}}_{k,k} \in \mathbb{R}^n$  estimirano stanje sustava u trenutku  $k$ . Vektor pogreške između pretpostavljenog i stvarnog stanja definiramo kao

$$\mathbf{e}_{k+1,k} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} - \mathbf{x}_k \quad (3)$$

odnosno između estimiranog i stvarnog stanja

$$\mathbf{e}_{k,k} = \hat{\mathbf{x}}_{k,k} - \mathbf{x}_k \quad (4)$$

izrazi matrice kovarijance nesigurnosti predikcije i estimacije onda redom glase:

$$\mathbf{P}_{k+1,k} = \mathbf{E}(\mathbf{e}_{k+1,k} \mathbf{e}_{k+1,k}^T) \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_{k,k} = \mathbf{E}(\mathbf{e}_{k,k} \mathbf{e}_{k,k}^T) \quad (6)$$

Neka je  $\mathbf{P}_{k+1,k}$  pretpostavljena matrica kovarijance nesigurnosti sljedećeg stanja,  $\mathbf{F}$  matrica prijelaza stanja,  $\mathbf{P}_{k,k}$  matrica kovarijance nesigurnosti trenutnog stanja i  $\mathbf{Q}$  matrica procesnog šuma, jednadžbu ekstrapolacije kovarijance nesigurnosti možemo zapisati formulom [2]:

$$\mathbf{P}_{k+1,k} = \mathbf{F} \mathbf{P}_{k,k} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \quad (7)$$

## 2.2. Jednadžbe estimacije

### 2.2.1. Jednadžba mjerenja

Jednadžba mjerenja uključuje nova mjerenja dobivena od strane mjernih instrumenata. Često ne možemo direktno mjeriti stanje sustava ili možemo mjeriti samo određene stavke sustava, stoga nam treba opservacijska matrica  $\mathbf{H}$  čija je uloga povezivanje stvarnog stanja sustava kojeg ćemo označiti s  $\mathbf{x}_k$  s vrijednostima dobivenim od strane mjernih instrumenata. Vektor mjerenja  $\mathbf{z}_k$  predstavlja

pravo stanje sustava ukoliko nije prisutan vektor šuma mjerenja  $\mathbf{v}_k$ . Vektor šuma mjerenja slučajna je varijabla čija je funkcija gustoće normalna:

$$\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k) \quad (8)$$

Sada jednačba mjerenja [2] glasi:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (9)$$

### 2.2.2. Jednačba ažuriranja stanja

Jednačba ažuriranja stanja uključuje nova mjerenja  $\mathbf{z}_k$  kako bi ažurirali estimaciju stanja sustava. Aposteriorna estimacija sustava ažurira se na temelju razlike između novog mjerenja  $\mathbf{z}_k$  i predikcije stanja sustava  $\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}$  pomnoženog s matricom opservacije  $\mathbf{H}$ . Navedeni izraz još nazivamo i inovacijom ili mjernim rezidualom koji onda otežamo s matricom  $\mathbf{K}_k$  odnosno Kalmanovim dobitkom čemu još dodamo predikciju stanja sustava. Jednačba ažuriranja dana je formulom [2]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,k} = \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}) \quad (10)$$

### 2.2.3. Jednačba ažuriranja matrice kovarijance

Jednačba ažuriranja kovarijance [2] ažurira pretpostavljenu matricu kovarijance nesigurnosti stanja predviđenu u prethodnom trenutku  $\mathbf{P}_{k,k-1}$  na temelju Kalmanovog dobitka  $\mathbf{K}_k$  i matrice kovarijance šuma procesa  $\mathbf{R}_k$  uz pomoć opservacijske matrice  $\mathbf{H}$ .

$$\mathbf{P}_{k,k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{P}_{k,k-1}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})^T + \mathbf{K}_k\mathbf{R}_k\mathbf{K}_k^T \quad (11)$$

### 2.2.4. Kalmanov dobitak

Kalmanov dobitak određuje težinu koja se pridaje mjernom rezidualu u procesu ažuriranja stanja. Kalmanov dobitak nastoji minimizirati pogrešku estimacije i postepeno prilagoditi estimaciju stanja na temelju preciznosti mjerenja. Uzima u obzir i matricu kovarijance predviđenog stanja  $\mathbf{P}_{k,k-1}$  i matricu kovarijance šuma procesa  $\mathbf{R}_k$ . Jednačba Kalmanovog dobitka [2] dana je u nastavku:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k,k-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_{k,k-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (12)$$

Gledajući gore napisanu formulu možemo zaključiti kako se približavanjem vrijednosti matrice kovarijance nesigurnosti  $\mathbf{R}_k$  prema nuli vrijednost matrice Kalmanovog dobitka  $\mathbf{K}_k$  raste i ukazuje na visoku pouzdanost u vrijednost dobivenu mjernim instrumentom  $\mathbf{z}_k$ , odnosno prilikom estimacije dati će veći udio inovaciji. Ukoliko se vrijednost matrice kovarijance nesigurnosti predviđenog stanja približava prema nuli tada će i vrijednost Kalmanovog dobitka padati prema nuli što će rezultirati pridjeljivanju male težine inovaciji i veću ulogu u estimaciji stanja sustava imat će predikcija. Naravno, to ima smisla jer ukoliko vrijednost  $\mathbf{P}_{k,k-1}$  pada to znači da je predikcija stanja sustava dobra te se manje oslanjamo na mjerni instrument.



## 3. pristupi praćenju gibajućih objekata

Praćenje više objekata (eng. Multitarget tracking, MTT) odnosi se na problem združene estimacije broja objekata i njihovih trajektorija na osnovu mjerenja dobivenih od strane senzora [4]. Mnoštvo algoritama za praćenje više objekata se danas koristi, neki od poznatijih su algoritam združenog integriranog vjerojatnosnog pridruživanja podataka, algoritam praćenja pomoću višestrukih hipoteza i algoritmi temeljeni na slučajnim konačnim skupovima.

### 3.1. Algoritam združenog integriranog vjerojatnosnog pridruživanja podataka

Algoritam vjerojatnosnog pridruživanja podataka (eng. Probabilistic data association, PDA) pretpostavlja da se samo jedan objekt uzima u obzir i da je broj neželjenih vrijednosti detektiran i razriješen u određenom trenutku u blizini pretpostavljene pozicije objekta koji se prati. Također, pretpostavlja se da se neželjene vrijednosti javljaju neovisno u vremenu i prostoru i da se ne mogu napraviti zaključci o lokaciji i broju vrijednosti na osnovu prijašnjih mjerenja. Svakom mjerenju koje se nalazi u susjedstvu pretpostavljene pozicije objekta pridijeljena je vrijednost koja odgovara a posteriori vjerojatnosti da mjerenje potiče od objekta.

Algoritam združenog integriranog vjerojatnosnog pridruživanja podataka (eng. Joint integrated probabilistic data association, JIPDA) je proširenje PDA algoritma za praćenje više objekata. Algoritam JIPDA je rekurzivni filter koji formira zajedničke događaje tako da kreira sve moguće kombinacije izmjerenih vrijednosti koje su pridijeljene objektima te računa vjerojatnosti za sve događaje. Na temelju tih vrijednosti, izračuna se posteriorna vjerojatnost da pojedino mjerenje pripada pojedinom objektu. Kinematičko stanje objekta se onda ažurira na temelju ote-

žane srednje vrijednosti svih mjerenja, gdje se kao koeficijent otežavanja koriste izračunate vjerojatnosti.

### **3.2. Algoritam praćenja pomoću višestrukih hipoteza**

Algoritam praćenja pomoću višestrukih hipoteza (eng. Multiple hypothesis tracking, MHT) funkcionira na način tako da svaku razriješenu estimiranu putanju objekta u trenutku  $k - 1$  zapišemo kao skup koji nazivamo globalnom hipotezom, a sva nova mjerenja trenutka  $k$  pridružujemo pretpostavljenim putanjama objekata koji se nalaze u skupu globalnih hipoteza. Prilikom pridruživanja mjerenja koristimo proces koji definira volumen u prostoru mjerenja kako bi odredili pripada li pojedino mjerenje odgovarajućoj pretpostavljenoj putanji trenutka  $k$  iz skupa globalnih putanja trenutka  $k - 1$ . Ukoliko pojedina mjerenja upadaju unutar volumena u prostoru mjerenja, ta mjerenja možemo pridružiti odgovarajućim elementima iz skupa globalnih putanja. Svako pridruženo mjerenje odgovara jednoj hipotezi pridruživanja, a sva ne pridružena mjerenja pripadaju propuštenoj detekciji.

Postoje dvije vrste MHT algoritama: hipotezama orijentirano praćenje pomoću višestrukih hipoteza (eng. Hypothesis-oriented multiple hypothesis tracking, HOMHT) i estimiranim putanjama objekata orijentirano praćenje pomoću višestrukih hipoteza (eng. track-oriented multiple hypothesis tracking, TOMHT).

### **3.3. Algoritmi temeljeni na slučajnim konačnim skupovi**

Algoritmi temeljeni na slučajnim konačnim skupovima (eng. Random Finite Sets, RFS) koriste skup sa slučajnim brojem elemenata pri čemu su i elementi tog skupa slučajni. Slučajni konačni skupovi korišteni su pri praćenju gibajućih objekata zato što nije poznat broj objekata koji pratimo, a ni gdje se ti objekti nalaze. Pristup pomoću slučajnih konačnih skupova izbjegava eksplicitnu asocijaciju između mjerenja i objekata. Višeobjektno stanje modeliramo kao RFS spontanijih rođenja objekata, RFS izrođenih objekata i RFS preživjelih objekata dok višeobjektno mjerenje modeliramo kao RFS krivih mjerenja i RFS mjere-

nja generiranih od strane objekata. Algoritam gustoće vjerojatnosti hipoteza i više objektni Bayesov algoritam primjeri su algoritama temeljenih na slučajnim konačnim skupovima.

## 4. Filtar gustoće vjerojatnosti hipoteza

### 4.1. Slučajni konačni skupovi kod praćenja više objekata

Slučajni konačni skup (eng. Random Finite States, RFS) je skup s konačnim brojem elemenata pri čemu je broj elemenata slučajan kao i sami elementi. Koncept RFS-a koristan je pri modeliranju problema praćenja više objekata zato što ne znamo koliko ima objekata i koja su njihova stanja, odnosno gdje se nalaze. Neka su  $\mathbf{x}_{k-1,1}, \mathbf{x}_{k-1,2}, \dots, \mathbf{x}_{k-1,M(k-1)} \in \chi$  skup vektora koji predstavljaju stanja objekata i  $M(k-1)$  broj objekata u trenutku  $k-1$  a  $\chi$  predstavlja prostor stanja  $\chi \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ . U sljedećem,  $k$ -tom trenutku dio objekata može nestati, preživjeli objekti mogu poprimiti novo stanje te se mogu pojaviti novi objekti. Nova stanja objekata trenutka  $k$  prikazat ćemo kao  $\mathbf{x}_{k,1}, \mathbf{x}_{k,2}, \dots, \mathbf{x}_{k,M(k)}$  gdje  $M(k)$  predstavlja broj objekata trenutka  $k$ . Senzor u trenutku  $k$  prima  $N(k)$  mjerenja koja ćemo prikazivati kao  $\mathbf{z}_{k,1}, \mathbf{z}_{k,2}, \dots, \mathbf{z}_{k,N(k)}$ , od kojih dio proizlazi od strane objekata, a dio zbog prisutnosti šuma mjerenja. Također, ne znamo koje mjerenje dolazi od kojeg objekta, a ni koja mjerenja su prouzročena od strane šuma pa poredak elemenata unutar skupa nema nikakvo značenje.

S obzirom da ne postoji poredak unutar gore navedenih skupina stanja i mjerenja možemo ih prikazati kao konačne skupove [3]:

$$X_k = \{\mathbf{x}_{k,1}, \dots, \mathbf{x}_{k,M(k)}\} \in \mathcal{F}(\chi) \quad (13)$$

$$Z_k = \{\mathbf{z}_{k,1}, \dots, \mathbf{z}_{k,N(k)}\} \in \mathcal{F}(\mathcal{Z}) \quad (14)$$

gdje  $\mathcal{F}(\mathcal{X})$  i  $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$  predstavljaju kolekcije svih konačnih podskupova od  $\chi$  i  $\mathcal{Z}$ .

Sada problem praćenja objekata možemo prikazati kao problem filtriranja na više objektnom prostoru stanja  $\mathcal{F}(\mathcal{X})$  i mjerenja  $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$ .

Nesigurnost kod više objektnog sustava prikazujemo tako da više objektna stanja  $X_k$  i više objektna mjerenja  $Z_k$  prikazujemo kao slučajni konačni skup. Sada se  $X_k$  i  $Z_k$  ponašaju kao slučajne varijable čiji broj elemenata, odnosno kardinalnost skupa možemo opisati s diskretnom funkcijom gustoće i s obzirom na kardinalnost koristimo odgovarajuću funkciju gustoće kako bi opisali združenu distribuciju elemenata skupova.

Kako bi predstavili kretanje više objekata kroz vrijeme pomoću RFS-a trebamo uključiti sve moguće događaje, odnosno rođenje novih objekata te kretanje i umiranje objekata. Svakom objektu  $\mathbf{x}_{k-1} \in X_{k-1}$  u trenutku  $k - 1$  pridjeljujemo vjerojatnost  $p_{s,k}(\mathbf{x}_{k-1})$  koja odgovara vjerojatnosti da će taj objekt nastaviti živjeti u trenutku  $k$ , a vjerojatnost da će taj objekt umrijeti u trenutku  $k - 1$  jednaka je  $1 - p_{s,k}(\mathbf{x}_{k-1})$ . Pretpostavit ćemo da se stanje objekta ponaša kao Markovljev proces. Markovljev proces je stohastički model koji opisuje moguće događaje u kojima vjerojatnost svakog događaja ovisi samo o stanju u prethodnom koraku [7]. Važno je napomenuti da su ovakve predikcije jednako dobre kao i one koje bismo mogli napraviti ukoliko znamo cijelu povijest procesa. Sada možemo pomoću prijelazne funkcije gustoće opisati prijelaz između stanja objekta u trenutku  $k - 1$  i  $k$ :

$$f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k,k-1}) \quad (15)$$

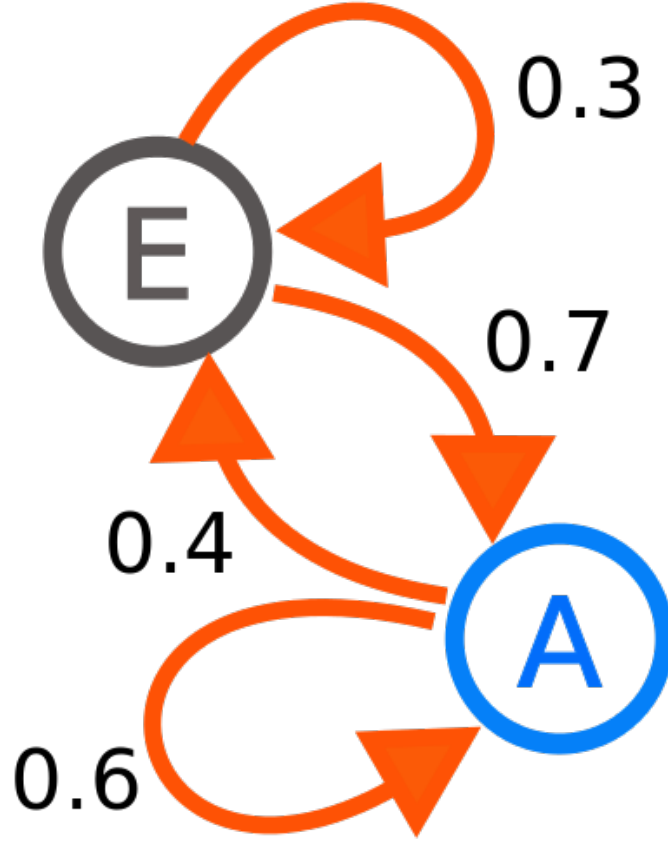
Kod slučaja s više objekata stanje pojedinog objekta  $\mathbf{x}_{k-1} \in X_{k-1}$  u trenutku  $k - 1$  i njegovo stanje u trenutku  $k$  opisujemo kao RFS pomoću:

$$S_{k|k-1}(\mathbf{x}_{k|k-1}) \quad (16)$$

koja može poprimiti vrijednosti  $\{\mathbf{x}_k\}$  ili  $\emptyset$  ovisno je li objekt preživio ili ne.  $\Gamma_k$  predstavljat će RFS rođenja novih objekata, a  $B_{k|k-1}(\mathbf{x}_{k-1})$  označavat će RFS objekata koji su potekli od objekta  $x_{k-1}$ . Sada RFS objekata  $X_k$  u trenutku  $k$  možemo prikazati kao [3]:

$$X_k = \left[ \bigcup_{\mathbf{x}_{k-1} \in X_{k-1}} S_{k|k-1}(\mathbf{x}_{k|k-1}) \right] \cup \left[ \bigcup_{\mathbf{x}_{k-1} \in X_{k-1}} B_{k|k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) \right] \cup \Gamma_k \quad (17)$$

Mjerenja u trenutku  $k$  također se tretiraju kao RFS. Mjerenja ćemo podijeliti na mjerenja prouzrokovana šumom  $\Theta_k$  i mjerenja koja su potekla od strane objekata  $K_k$  koji se nalaze u RFS  $X_k$ . S obzirom na nesavršenost mjernog instrumenta



**Slika 4.1:** Primjer Markovljeva procesa s dva stanja[7]

uvodi se vjerojatnost detekcije pojedinog objekta  $p_{D,k}(\mathbf{x}_k)$ , odnosno vjerojatnost da objekt nije detektiran  $1 - p_{D,k}(\mathbf{x}_k)$  za sve objekte koji se nalaze u RFS  $X_k$ . Gustoća vjerojatnosti da mjerenje  $\mathbf{z}_k$  potječe od objekta  $\mathbf{x}_k$  zapisat ćemo kao:

$$f(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k) \quad (18)$$

Svaki objekt  $\mathbf{x}_k \in X_k$  u trenutku  $k$  generira RFS:

$$\Theta_k(\mathbf{x}_k) \quad (19)$$

gdje RFS može poprimiti vrijednosti  $\{\mathbf{z}_k\}$  ukoliko je objekt detektiran ili  $\emptyset$  ukoliko nije.

Formula koja opisuje mjerenja koja je senzor snimio u trenutku  $k$  predstavljena su formulom [3]:

$$Z_k = K_k \cup [\bigcup_{x_k} \Theta_k(\mathbf{x}_k)] \quad (20)$$

Pretpostavlja se da su RFS koji sačinjavaju (17) i (20) su međusobno nezavisni.

## 4.2. Filtar gustoće vjerojatnosti hipoteza Gaussovih mješavina

Razmotrimo prvo slučaj praćenja jednog objekta i pretpostavimo da njegovo stanje prati Markovljev proces na prostoru stanja  $\chi \in \mathbb{R}^{n_x}$  s funkcijom gustoće tranzicije (15) koja nam govori kolika je vjerojatnost gustoće tranzicije iz stanja  $\mathbf{x}_{k-1}$  trenutka  $k-1$  u stanje  $\mathbf{x}_k$  u trenutku  $k$ . Neka su mjerenja  $\mathbf{z}_k$  koja mogu doći od objekta  $\mathbf{x}_k$  u trenutku  $k$  te neka funkcija izglednosti (15) opisuje gustoću vjerojatnosti da mjerenje  $\mathbf{z}_k$  potiče od objekta  $\mathbf{x}_k$  i neka je

$$p_k(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) \quad (21)$$

funkcija posteriorne gustoće vjerojatnosti koja pridaje vjerojatnost svakom mogućem stanju objekta na osnovu snimljenih podataka  $\mathbf{z}_{1:k} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k)$  od trenutka 1 do  $k$ .

Ukoliko imamo početnu gustoću  $p_0$  koja sadrži informacije o početnom stanju objekta prije prvog mjerenja, onda pomoću Bayesova filtra možemo izračunati posteriornu gustoću. S obzirom da je ovo rekurzivan algoritam, onda dijelimo na korak predikcije i korak ažuriranja. Korak predikcije [3]:

$$p_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}) p_{k-1}(\mathbf{x} | \mathbf{z}_{1:k-1}) dx \quad (22)$$

gdje je pretpostavljena gustoća vjerojatnosti objekta  $\mathbf{x}_k$  u stanju  $k$  na osnovu mjerenja  $\mathbf{z}_{1:k-1}$  jednaka integralu umnoška funkcije gustoće tranzicije (15) i posteriorne funkcije gustoće prethodnog trenutka (21). Korak ažuriranja računamo pomoću Bayesovog teorema [3]

$$p_k(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{\int g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}) p_{k|k-1}(\mathbf{x} | \mathbf{z}_{1:k-1}) dx} \quad (23)$$

gdje je funkcija posteriorne gustoće trenutka  $k$  jednaka umnošku funkcija izglednosti i pretpostavljenoj funkciji posteriorne gustoće koji su podijeljeni s integralom umnoška funkcije izglednosti o pretpostavljene posteriorne gustoće. Nazivnik u (23) još možemo pokazati kao [5]:

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int g_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}) p_{k|k-1}(\mathbf{x} | \mathbf{z}_{1:k-1}) dx \quad (24)$$

te možemo primijetiti da je nazivnik konstantan u odnosu na  $x$ . Često se u praksi nazivnik ignorira.

Bayesov filtar možemo proširiti i na slučaj s više objekata. Koristeći RFS objekata  $X_k$  (17) i RFS mjerenja  $Z_k$  (20) Bayesov filter možemo napisati na sličan način kao i kod slučaja praćenja jednog objekta uz promjene da će nam (15) sada označavati funkciju gustoće tranzicije više objekata  $f(X_k|X_{k-1})$ , (18) funkciju izglednosti više objekata  $g(Z_k|X_k)$ . Sada Bayesov filtar za više objekata [3] glasi:

$$p_{k|k-1}(X_k|Z_{1:k-1}) = \int f_{k|k-1}(X_k|X)p_{k-1}(X|Z_{1:k-1})dx \quad (25)$$

$$p_k(X_k|Z_{1:k}) = \frac{g_k(Z_k|X_k)p_{k|k-1}(X_k|Z_{1:k-1})}{\int g_k(Z_k|X)p_{k|k-1}(X|Z_{1:k-1})dx} \quad (26)$$

Filtar gustoće vjerojatnosti hipoteza (eng. Probability Hypothesis Density Filter, PHD Filter) je više objektni filtar koji rekursivno estimira broj objekata i stanje objekata unutar skupa s obzirom na dobiveni skup mjerenja. Filtar gustoće vjerojatnosti hipoteza funkcionira na način da propagira posteriorni intenzitet, odnosno gustoću vjerojatnosti hipoteza što je prvi moment ili očekivanje funkcije gustoće stanja više objekata.

Ukoliko RFS objekata zapišemo kao  $X$  s gustoćom vjerojatnosti  $P$ , funkciju intenziteta kao  $v$ , onda integral intenziteta na području  $S$  daje očekivani broj elemenata skupa  $X$  koji se nalaze u tom području [3]

$$\int |X \cap S| P(dX) = \int_S v(x)dx \quad (27)$$

Lokalni maksimumi intenziteta  $v$  su ustvari točke na prostoru  $\chi$  s najvišom koncentracijom očekivanog broja elemenata.

Klasa RFS-a koju u potpunosti određuje intenzitet je Poissonova klasa RFS-a. Za neki RFS kažemo da je Poissonov ako se kardinalnost RFS-a ponaša po Poissonovoj distribuciji. Svi elementi Poissonovog RFS-a su nezavisni i jednoliko distribuirani.

Posebna klasa PHD Filtera koja ima zatvoreno rješenje za problem PHD rekurzije naziva se filtar gustoće vjerojatnosti hipoteza Gaussovih mješavina (eng. Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density Filter, GMPHD Filter) uz pretpostavke da su modeli gibanja objekata linearni (konstantna brzina, akceleracija) i funkcije gustoće koje se propagiraju kroz vrijeme normalne. Pretpostavke GMPHD filtra su:

1. Svaki objekt kreće se i generira opservacije neovisno o drugim objektima



2. Šum mjerenja je Poissonova slučajna varijabla neovisna o mjerenjima koja potiču od objekata
3. Pretpostavljen više objektni RFS određen s  $p_{k|k-1}$  je Poissonov RFS
4. Svaki objekt prati linearni dinamički Gaussov model i senzor ima linearni Gaussov model mjerenja

$$f_{k|k-1}(x|\zeta) = \mathcal{N}(x; F_{k-1}\zeta, Q_{k-1}) \quad (28)$$

$$g_{k|k-1}(z|x) = \mathcal{N}(z; H_k x, R_k) \quad (29)$$

5. Vjerojatnosti preživljavanja i detekcije objekata neovisne su o stanjima pojedinih objekata

$$p_{S,k}(x) = p_{S,k} \quad (30)$$

$$p_{D,k}(x) = p_{D,k} \quad (31)$$

6. Intenziteti rođenja i proizlazećih objekata RFS-a su Gaussove mješavine oblika:

$$\gamma_k(x) = \sum_{i=1}^{J_{\gamma,k}} w_{\gamma,k}^{(i)} \mathcal{N}(x; m_{\gamma,k}^{(i)}, P_{\gamma,k}^{(i)}) \quad (32)$$

$$\beta_{k|k-1}(x|\zeta) = \sum_{j=1}^{J_{\beta,k}} w_{\beta,k}^{(j)} \mathcal{N}(x; F\zeta + d_{\beta,k-1}^{(j)}, Q_{\beta,k-1}^{(j)}) \quad (33)$$

gdje  $J_{\gamma,k}$  predstavljaju ukupan broj rođenih objekata, težine  $w_{\gamma,k}^{(j)}$  predstavljaju očekivan broj rođenih objekata čije je središte  $m_{\gamma,k}^{(i)}$  predstavlja točku gdje se nalazi lokalni maksimum intenziteta i matrica kovarijance  $P_{\gamma,k}^{(i)}$ . Na isti način su definirani i parametri za proizlazeće objekte RFS-a.

Kako bi prikazali egzaktno zatvoreno rješenje PHD rekurzije, treba uvesti dvije propozicije koje omogućuju propagiranje intenziteta pomoću formula:

**Propozicija 1.** [3] *Uz uvjet da vrijede pretpostavke 4, 5, 6 i da je posteriorni intenzitet u trenutku  $k-1$  Gaussova mješavina oblika*

$$v_{k-1}(x) = \sum_{i=1}^{J_{k-1}} w_{k-1}^{(i)} \mathcal{N}(x; m_{k-1}^{(i)}, P_{k-1}^{(i)}) \quad (34)$$

*onda je pretpostavljeni intenzitet u trenutku  $k$  isto Gaussova mješavina oblika:*

$$v_{k|k-1}(x) = v_{S,k|k-1}(x) + v_{\beta,k|k-1}(x) + \gamma_k(x) \quad (35)$$

Formula pretpostavljenog intenziteta (35) jednaka je zbroju intenziteta preživjelih objekata, objekata koji proizlaze iz prethodnih stanja i rođenih objekata. Intenzitet preživjelih objekata  $v_{S,k|k-1}(x)$  glasi:

$$v_{S,k|k-1}(x) = p_{S,k} \sum_{j=1}^{J_{k-1}} w_{k-1}^{(j)} \mathcal{N}(x; m_{S,k|k-1}^{(j)}, P_{S,k|k-1}^{(j)}) \quad (36)$$

gdje je srednja vrijednost Gaussove slučajne varijable jednaka

$$m_{S,k|k-1}^{(j)} = F_{k-1} m_{k-1}^{(j)} \quad (37)$$

a matrica kovarijance

$$P_{S,k|k-1}^{(j)} = F_{k-1} P_{k-1} F_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (38)$$

Intenzitet rođenja definiran je pod pretpostavkom 6 i još nam samo preostaje definirati intenzitet svih proizlazećih objekata kako bi prikazali formulu pretpostavljenog intenziteta trenutka  $k$  (35). Intenzitet svih proizlazećih objekata jednak je sumi intenziteta RFS-a pojedinog objekta:

$$v_{\beta,k|k-1} = \sum_{j=1}^{J_{k-1}} \sum_{l=1}^{J_{\beta,k}} w_{k-1}^{(j)} w_{\beta,k}^{(i,j)} \mathcal{N}(x; m_{\beta,k|k-1}^{(i,j)}, P_{\beta,k|k-1}^{(i,j)}) \quad (39)$$

sa srednjom vrijednosti

$$m_{\beta,k|k-1}^{(j,l)} = F_{\beta,k-1}^{(j)} m_{k-1}^{(j)} + d_{\beta,k-1}^{(l)} \quad (40)$$

i matricom kovarijance

$$P_{\beta,k|k-1}^{(l)} = F_{\beta,k-1}^{(l)} P_{\beta,k-1}^{(j)} (F_{\beta,k-1}^{(l)})^T + Q_{\beta,k-1}^{(l)} \quad (41)$$

Možemo primijetiti kako su jednadžbe koje opisuju srednju vrijednost slučajnih normalnih varijabli ustvari jednadžba ekstrapolacije stanja sustava (2), a jednadžbe kovarijance jednake jednadžbi ekstrapolacije kovarijance nesigurnosti (7) prikazane u poglavlju 2.1.

**Propozicija 2.** [3] *Ukoliko vrijede pretpostavke 4, 5, 6 i ako je pretpostavljeni intenzitet trenutka  $k - 1$  Gaussova mješavina oblika*

$$v_{k|k-1}(x) = \sum_{i=1}^{J_{k|k-1}} w_{k|k-1} \mathcal{N}(x; m_{k|k-1}^{(i)}, P_{k|k-1}^{(i)}) \quad (42)$$

onda je posteriorni intenzitet u trenutku  $k$  jednak Gaussovoj mješavini sljedećeg izraza

$$v_k(x) = (1 - p_{D,k})v_{k|k-1}(x) + \sum_{z \in Z_k} v_{D,k}(x; z) \quad (43)$$

gdje je

$$v_{D,k}(x; z) = \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}} w_k^{(j)}(z) \mathcal{N}(x; m_{k|k-1}^{(j)}(z), P_{k|k-1}^{(j)}) \quad (44)$$

$$w_k^{(j)}(z) = \frac{p_{D,k} w_{k|k-1}^{(j)} q_k^{(j)}(z)}{\kappa_k(z) + p_{D,k} \sum_{l=1}^{J_{k|k-1}} w_{k|k-1}^{(l)} q_k^{(l)}(z)} \quad (45)$$

$$m_{k|k}^{(j)}(z) = m_{k|k-1}^{(j)} + K_k^{(j)}(z - H_k m_{k|k-1}^{(j)}) \quad (46)$$

$$P_{k|k}^{(j)} = [I - K_k^{(j)} H_k] P_{k|k-1}^{(j)} \quad (47)$$

$$K_k^{(j)} = P_{k|k-1}^{(j)} H_k^T (H_k P_{k|k-1}^{(j)} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (48)$$

Vidimo da jednadžbe (46), (47), (48) odgovaraju jednadžbama ažuriranja stanja (10), ažuriranja matrice kovarijance (11) i Kalmanovog dobitka (12) predstavljene u poglavlju 2.2.

Propozicija 1 predstavlja korak predikcije, a propozicija 2 korak ažuriranja stanja objekata. Ukoliko je početni intenzitet Gaussova mješavina propozicija 1 predstavlja analitičko rješenje računanja srednje vrijednosti, matrice kovarijance i težina povezanih s predviđenim intenzitetom trenutka  $k$  na osnov estimiranog intenziteta trenutka  $k - 1$ . Propozicija 2 predstavlja analitičko rješenje za računanje srednje vrijednosti, matrice kovarijance i težina ažuriranog, odnosno estimiranog intenziteta trenutka  $k$  na osnov pretpostavljenog intenziteta trenutka  $k$ .

### 4.3. Implementacija GMPHD Filtra

U ovom poglavlju bit će predstavljen algoritam GMPHD filtra u obliku programskog pseudokoda. Važno je napomenuti da predstavljeni algoritam neće uključivati proizlaženje novih objekata na osnov stanja prethodnog trenutka s obzirom da ni u implementaciji nije modelirano isto.

---

**Algoritam 1** pseudokod algoritma GMPHD filtra [3]

---

**ulazni podatci:**  $\{w_{k-1}^{(i)}, m_{k-1}^{(i)}, P_{k-1}^{(i)}\}_{i=1}^{J_{k-1}}$  i  $Z_k$

**korak 1:** predikcija rođenih objekata

$i = 0$

**for**  $j = 1, \dots, J_{\gamma,k}$  **do**

$i := i + 1$

$w_{k|k-1} = w_{\gamma,k}^{(j)}, m_{k|k-1}^{(i)} = m_{\gamma,k}^{(j)}, P_{k|k-1}^{(i)} = P_{\gamma,k}^{(j)}$

**end for**

**korak 2:** predikcija za postojeće objekte

**for**  $j = 1, \dots, J_{k-1}$  **do**

$i := i + 1$

$w_{k|k-1}^{(i)} = p_{S,k} w_{k-1}^{(j)}, m_{k|k-1}^{(i)} = F_{k-1} m_{k-1}^{(j)}, P_{k|k-1}^{(i)} = F_{k-1} P_{k-1}^{(j)} F_{k-1}^T + Q_{k-1}$

**end for**

$J_{k|k-1} = i$

**korak 3:** konstrukcija PHD komponenti za korak ažuriranja

**for**  $j = 1, \dots, J_{k|k-1}$  **do**

$\eta_{k|k-1}^{(j)} = H_k m_{k|k-1}^{(j)}, S_k^{(j)} = H_k P_{k|k-1}^{(j)} H_k^T + R_k$

$K_k^{(j)} = P_{k|k-1}^{(j)} H_k^T [S_k^{(j)}]^{-1}, P_{k|k}^{(j)} = [I - K_k^{(j)} H_k] P_{k|k-1}^{(j)}$

**end for**

**korak 4:** ažuriranje

**for**  $j = 1, \dots, J_{k|k-1}$  **do**

$w_k^{(j)} = (1 - p_{D,k}) w_{k|k-1}^{(j)}, m_k^{(j)} = m_{k|k-1}^{(j)}, P_k^{(j)} = P_{k|k-1}^{(j)}$

**end for**

**for each**  $z \in Z_k$  **do**

$l := l + 1$

**for**  $j = 1, \dots, J_{k|k-1}$  **do**

---

---



---

```


$$w_k^{(lJ_{k|k-1}+j)} = p_{D,k} w_{k|k-1}^{(j)} \mathcal{N}(z; \eta_{k|k-1}^{(j)}, S_k^{(j)})$$


$$m_k^{(lJ_{k|k-1}+j)} = m_{k|k-1}^{(j)} + H_k^{(j)}(z - \eta_{k|k-1}^{(j)})$$


$$P_k^{(lJ_{k|k-1}+j)} = P_{k|k}^{(j)}$$

end for
 $l := 0$ 
for  $j = 1, \dots, J_{k|k-1}$  do

$$w_k^{(lJ_{k|k-1}+j)} := \frac{w_k^{(lJ_{k|k-1}+j)}}{\kappa_k(z) + \sum_{i=1}^{J_{k|k-1}} w_k^{(lJ_{k|k-1}+i)}}$$

end for
end for
 $J_k = lJ_{k|k-1} + J_{k|k-1}$  izlaz:  $\{w_k^{(i)}, m_k^{(i)}, P_k^{(i)}\}_{i=1}^{J_k}$ 

```

---

Algoritam kroz vrijeme propagira težine, položaje i matrice kovarijance objekata, odnosno komponente Gaussove mješavine. Možemo primijetiti da će kod koraka ažuriranja kada dobijemo skup mjerenja  $Z_k$  broj komponenti Gaussove mješavine eksplodirati zbog toga što se za svako izmjereno stanje objekta i svako pretpostavljeno stanje računaju vrijednosti komponenti Gaussove mješavine. Tri metode koje su predložene za rješavanje tog problema su:

- Podrezivanje - odabiremo samo težine koje su veće od granice podrezivanja  $T$
- Spajanje, stapanje - dvije komponente Gaussove mješavine u trenutku  $k$  sa srednjim vrijednostima  $m_k^{(1)}, m_k^{(2)}$  i kovarijancama  $P_k^{(1)}, P_k^{(2)}$  stapamo ukoliko je  $(m_k^{(1)} - m_k^{(2)})^T (P_k^{(1)})^{(-1)} (m_k^{(1)} - m_k^{(2)}) \leq U$  gdje  $U$  predstavlja granicu stapanja dviju komponenti
- Ograničavanje broja komponenti - uvodi se granica za najveći dopušten broj komponenti Gaussove mješavine  $J_{max}$

U nastavku predstavljen je algoritam koji uključuje sve tri predložene metode rješavanja problema prevelikog broja komponenti Gaussovih mješavina.

---

**Algoritam 2** pseudokod algoritma podrezivanja GMPHD filtra [3]

---

**Uz dane podatke:**  $\{w_k^{(i)}, m_k^{(i)}, P_k^{(i)}\}_{i=1}^{J_k}$ , granica podrezivanja  $T$ , granica stapanja  $U$ , najveći dopušten broj komponenti Gaussove mješavine  $J_{max}$ .

```

 $l = 0$  i  $I = \{i = 1, \dots, J_k | w_k^{(i)} > T\}$ 
while  $I \neq \emptyset$  do
 $l := l + 1$ 

```

---

---



---

```

 $j := \arg \max_{i \in I} w_k^{(i)}$ 
 $L := \{i \in I | (m_k^{(i)} - m_k^{(j)})^T (P_k^{(i)})^{(-1)} (m_k^{(i)} - m_k^{(j)}) \leq U\}$ 
 $\tilde{w}_k^{(l)} = \sum_{i \in L} w_k^{(i)}$ 
 $\tilde{m}_k^{(l)} = \frac{1}{\tilde{w}_k^{(l)}} \sum_{i \in L} w_k^{(i)} x_k^{(i)}$ 
 $\tilde{P}_k^{(l)} = \frac{1}{\tilde{w}_k^{(l)}} \sum_{i \in L} w_k^{(i)} (P_k^{(i)} + (m_k^{(i)} - m_k^{(j)})(m_k^{(i)} - m_k^{(j)})^T)$ 
 $I := I \setminus L$ 
end while
if  $l > J_{max}$  then
    zamijeni komponente Gaussove mješavine  $\left\{ \tilde{w}_k^{(l)}, \tilde{m}_k^{(l)}, \tilde{P}_k^{(l)} \right\}_{i=1}^l$ 
    s  $J_{max}$  komponenti Gaussove mješavine s najvećim težinama
end if
Izlaz:  $\left\{ \tilde{w}_k^{(l)}, \tilde{m}_k^{(l)}, \tilde{P}_k^{(l)} \right\}_{i=1}^l$ 

```

---

S obzirom da srednje vrijednosti normalnih funkcija gustoće koje sačinjavaju funkciju intenziteta su ujedno i lokalni maksimumi intenziteta onda se zapravo problem ekstrakcije stanja više objekata svodi na odabir najvećih težina koje prelaze određenu zadanu granicu.

---

**Algoritam 3** pseudokod ekstrakcije više objektnog stanja [3]

---

```

Ulaz:  $\{w_k^{(i)}, m_k^{(i)}, P_k^{(i)}\}_{i=1}^{J_k}$ 
 $\hat{X}_k = \emptyset$ 
for  $i = 1, \dots, J_k$  do
    if  $w_k^{(i)} > 0.5$  then
        for  $j = 1, \dots, \text{round}(w_k^{(i)})$  do
            ažuriraj  $\hat{X}_k := [\hat{X}_k, m_k^{(i)}]$ 
        end for
    end if
end for
Izlaz: više objektna estimacija stanja  $\hat{X}_k$ 

```

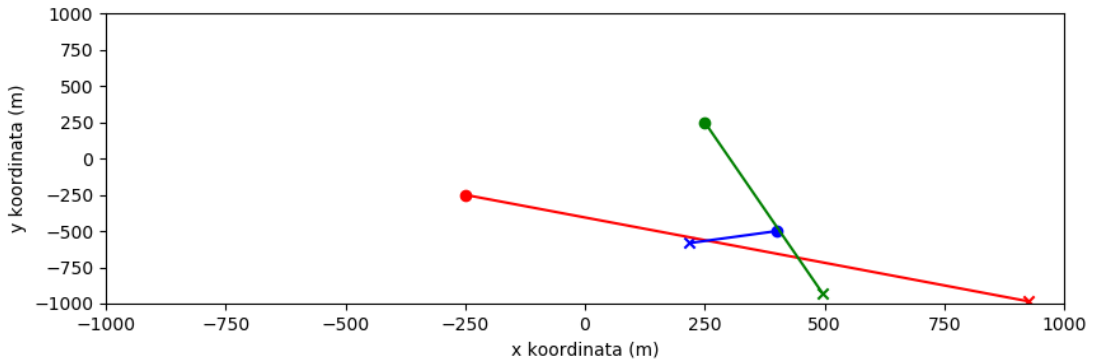
---

## 5. Rezultati

Testiranje algoritma provodimo na tri različite simulacije. Simulacije uključuju gibanje konstantnim brzinama. Područje promatranja objekata seže od -1000 do 1000 u smjeru obje koordinate u metrima pa je područje promatranja  $V = 4 * 10^6 m^2$ . Vjerojatnost preživljavanja objekta jednaka je  $p_{S,k} = 0.99$ , a vjerojatnost detekcije  $p_{D,k} = 0.98$ . Ukupno trajanje simulacija jednako je 100s, a vrijeme uzorkovanja  $\Delta = 1s$ . Parametri u koraku podrezivanja su  $T = 10^{-5}$ ,  $U = 4$ ,  $J_{max} = 100$ . Matrica prijelaza, matrica šuma procesa, opservacijska matrica i matrica pogreške mjerenja su oblika

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_k = \sigma_v^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta^4}{4} & 0 & \frac{\Delta^3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta^4}{4} & 0 & \frac{\Delta^3}{2} \\ \frac{\Delta^3}{2} & 0 & \Delta^2 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta^3}{2} & 0 & \Delta^2 \end{bmatrix} \quad H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_k = \sigma_\epsilon^2 I_2$$

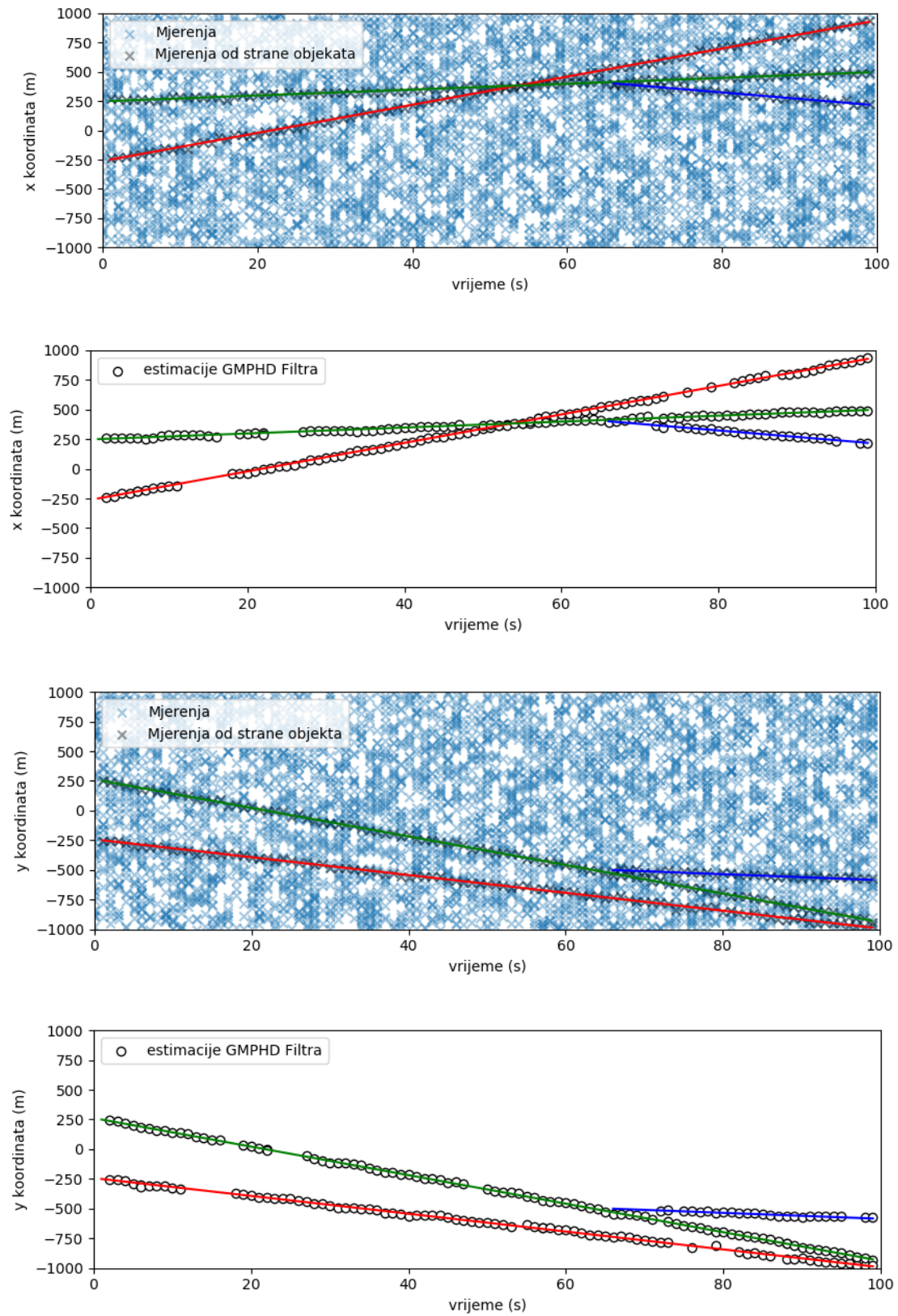
Započnimo sa simulacijom koja je rađena na temelju prve simulacije iz [3]. Postoje dva područja rađanja objekata  $m_{\gamma,k}^{(1)} = [250, 250, 0, 0]^T$  i  $m_{\gamma,k}^{(2)} = [-250, -250, 0, 0]^T$  s matricom kovarijance  $P_{\gamma,k} = diag([100, 100, 25, 25])^T$  i težinama  $w_{\gamma}^{(1)} = w_{\gamma,k}^{(2)} = 0.1$ . Standardna devijacija šuma procesa  $\sigma_\epsilon = 10m$  i standardna devijacija šuma mjerenja  $\sigma_v = 5m$ . Prosječan broj mjerenja dobivenih od strane šuma po  $m^2$  je  $\lambda_c = 12.5 * 10^{-6}$ .



Slika 5.1: Putanje objekata prve simulacije

Na slici možemo vidjeti putanje triju različitih objekata obojanih crvenom, zelenom i plavom bojom. Svaki od bojom ispunjenih krugova odgovara poziciji na kojoj se objekt rodio, a  $x$  odgovara poziciji na kojoj objekt umire.

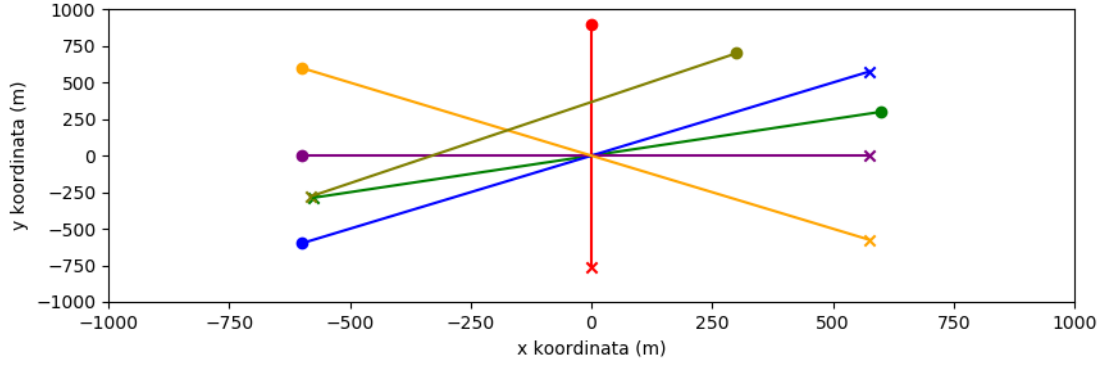




**Slika 5.2:** Graf mjerenja i estimacije gibanja objekata po osi x i y prve simulacije

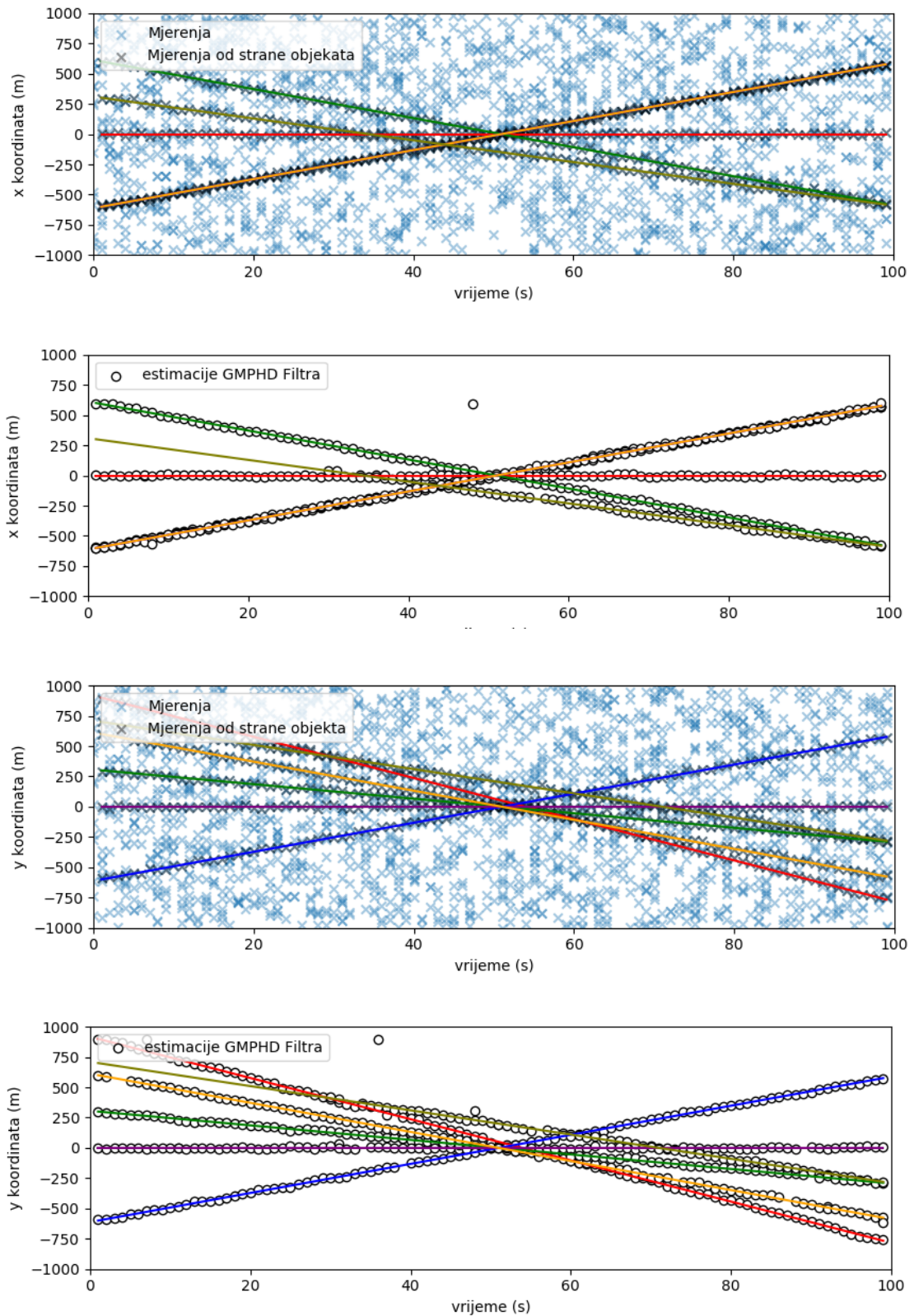
U priloženim grafovima možemo primijetiti kako GMPHD filtar uspješno detektira i prati objekte većinu puta kao što i uspijeva pratiti novorođeni objekt. U određenim vremenskim intervalima za pojedine objekte su estimacije filtra izostavljene, razlog tome može biti količina šumovitog mjerenja koja onda utječe na težinu pridijeljenu objektu interesa.

Druga simulacija uključuje gibanje šest objekata, od kojih se pet rađa u područjima predviđenim za rađanje objekata  $m_{\gamma,k}^{(1)} = [0, 900, 0, 0]$ ,  $m_{\gamma,k}^{(2)} = [600, 300, 0, 0]$ ,  $m_{\gamma,k}^{(3)} = [-600, -600, 0, 0]$ ,  $m_{\gamma,k}^{(4)} = [-600, 0, 0, 0]$ ,  $m_{\gamma,k}^{(5)} = [-600, 600, 0, 0]$ . Matrica kovarijance rođenih objekata i težine pridijeljene rođenim objektima jednake su kao i u prvoj simulaciji. Standardna devijacija šuma mjerenja jednaka je  $\sigma_\epsilon = 10$  i šuma procesa  $\sigma_v = 10$ , a prosječan broj mjerenja dobivenih od strane šuma po  $m^2$  jednak  $\lambda_c = 5 * 10^{-6}$ .



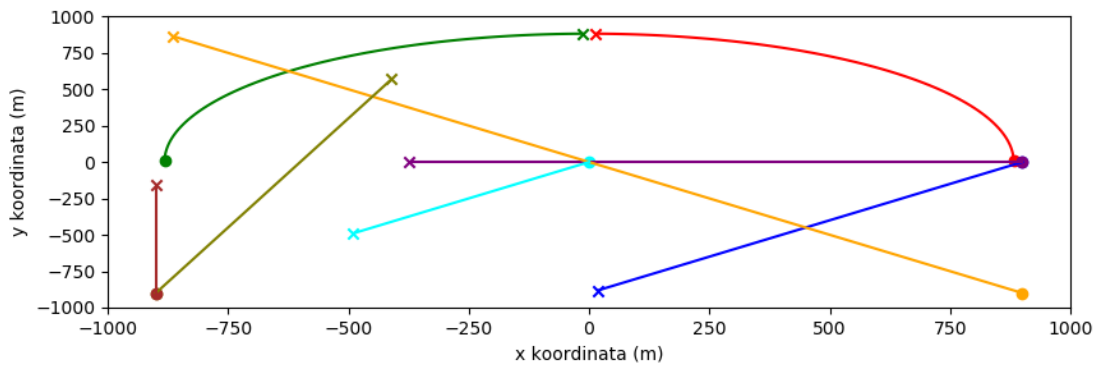
**Slika 5.3:** Putanje objekata druge simulacije

U odnosu na prvu simulaciju ovdje je prosječan broj mjerenja dobivenih od strane šuma po  $m^2$  manji što rezultira preciznijim estimacijama GMPHD filtra. Primijetimo da nemamo problem da su nam u određenim vremenskim intervalima izostavljene estimacije GMPHD filtra za pojedini objekt osim kod objekta koji se nije rodio u blizini jednog od navedenih središta područja rađanja. Estimacije GMPHD filtra za taj objekt počinju se javljati tek u trenutku kada dovoljno blizu približi jednom od objekata s dovoljno velikim težinama.



**Slika 5.4:** graf mjerenja i estimacije gibanja objekata po osi x i y druge simulacije

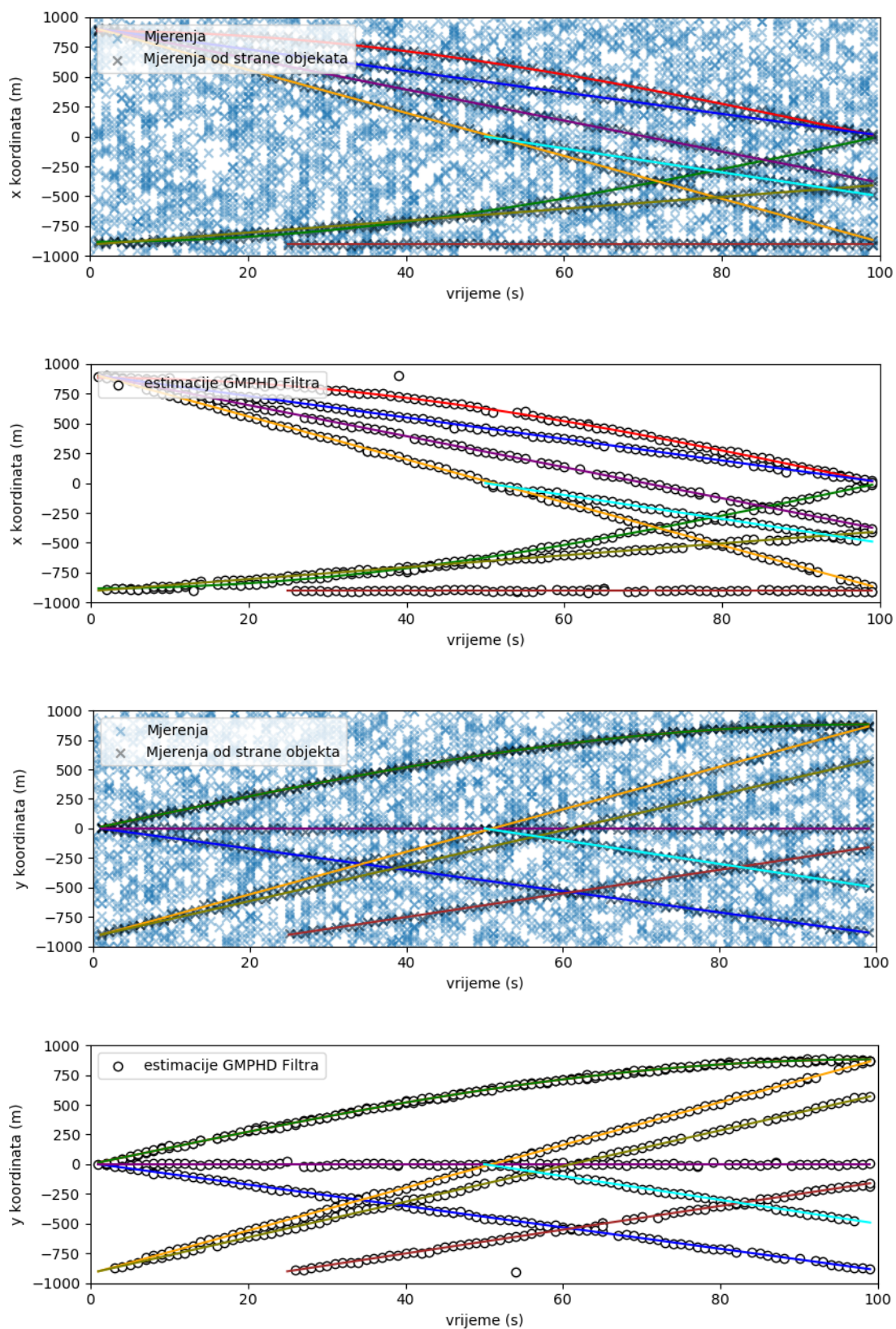
Kod treće i posljednje simulacije broj objekata koji se gibaju je osam. Središta intenziteta rađanja objekata jednaka su  $m_{\gamma,k}^{(1)} = [900, 0, 0, 0]$ ,  $m_{\gamma,k}^{(2)} = [900, -900, 0, 0]$ ,  $m_{\gamma,k}^{(3)} = [-900, -900, 0, 0]$ ,  $m_{\gamma,k}^{(4)} = [-900, 0, 0, 0]$  a matrica kovarijance rođenih objekata i težine pridijeljene rođenim objektima jednake su kao i u prvoj simulaciji. Standardna devijacija šuma mjerenja jednaka je  $\sigma_\epsilon = 10$  i šuma procesa  $\sigma_v = 5$ , a prosječan broj mjerenja dobivenih od strane šuma po  $m^2$  jednak  $\lambda_c = 10^{-5}$ . Razlika u odnosu na prijašnje simulacije jest što trajektorije objekata više nisu samo pravci.



**Slika 5.5:** Putanje objekata treće simulacije

Možemo primijetiti kako algoritam dobro funkcionira i za praćenje objekata koji se ne gibaju samo po pravcu. Algoritam je za oba objekta dao dobre estimacije njihovih pozicija. U nastavku slijede slike rezultata simulacije.





**Slika 5.6:** graf mjerenja i estimacije gibanja objekata po osi x i y treće simulacije

## 6. Zaključak

Filtar gustoće vjerojatnosti hipoteza Gaussovih mješavina rješava problem praćenja više objekata u određenim uvjetima pa je tako svoju primjenu pronašao u polju računalnog vida i praćenju zračnog prometa. GMPHD filtar važan je zato što predstavlja rješenje zatvorenog oblika za PHD rekurziju. Uz pretpostavke linearnog dinamičnog sustava u kojem se objekti ponašaju kao normalne slučajne varijable i ukoliko je početni intenzitet Gaussova mješavina pokazano je da su onda i mješavine koje se propagiraju kroz vrijeme također Gaussove mješavine. Predstavljeno je i rješenje za implementaciju GMPHD filtra na računalu u obliku pseudokoda koji propagira komponente Gaussove mješavine kroz vrijeme. Prednost algoritma je što je sva informacija o pojedinom objektu sadržana u težini, srednjoj vrijednosti i matrici kovarijance i što su potrebna samo trenutna mjerenja.

Moguća buduća proširenja ovog rada su modeliranje više objektnog sustava s nelinearnim gibanjem pri čemu će se koristiti prošireni Kalmanov filtar. Dodatno, moguća je implementacija mjere optimalne dodjele pod-uzoraka (end. Optimal sub-pattern assignment metric, OSPA metric)[1].

# LITERATURA

- [1] Michael Beard, Ba Tuong Vo, i Ba-Ngu Vo. Ospa(2): Using the ospa metric to evaluate multi-target tracking performance. U *2017 International Conference on Control, Automation and Information Sciences (ICCAIS)*, stranice 86–91, 2017. doi: 10.1109/ICCAIS.2017.8217598.
- [2] Rudolph Emil Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering*, 82(Series D):35–45, 1960.
- [3] B.-N. Vo i W.-K. Ma. The gaussian mixture probability hypothesis density filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(11):4091–4104, 2006. doi: 10.1109/TSP.2006.881190.
- [4] Ba-Ngu Vo, Mahendra Mallick, Yaakov bar shalom, Stefano Coraluppi, Richard III, Ronald Mahler, i Ba-Tuong Vo. Multitarget tracking. *Wiley Encyclopedia*, stranice 1–25, 09 2015. doi: 10.1002/047134608X.W8275.
- [5] Wikipedia contributors. Recursive bayesian estimation — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Recursive\\_Bayesian\\_estimation&oldid=1121610248](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Recursive_Bayesian_estimation&oldid=1121610248). posjećeno 9. lipnja 2023.
- [6] Wikipedia contributors. Kalman filter — Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kalman\\_filter&oldid=1157161503](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kalman_filter&oldid=1157161503), 2023. posjećeno 6.lipnja 2023.
- [7] Wikipedia contributors. Markov chain — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Markov\\_chain&oldid=1158483222](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Markov_chain&oldid=1158483222). posjećeno 6.lipnja 2023.

## **Praćenje gibajućih objekata pomoću filtra gustoće vjerojatnosti hipoteza**

### **Sažetak**

Praćenje više gibajućih objekata odnosi na problem estimiranja broja objekata i njihovih stanja ili krivulja kretanja na osnovu mjerenja dobivenih od strane senzora. Jedna od poteškoća s kojima se praćenje objekata susreće je pridjeljivanje mjerenja odgovarajućim objektima. U ovom radu dan je kratak uvid u Kalmanov filter koji je često prisutan u algoritmima praćenja više objekata te kratak pregled različitih pristupa problemu praćenja gibajućih objekata. Također opisano je rješenje za praćenje gibajućih objekata s linearnim dinamičkim sustavima pomoću filtra gustoće vjerojatnosti hipoteza Gaussovih mješavina koji predstavlja zatvoren oblik PHD rekurziji. Cilj ovog rada je i programska implementacija GMPHD filtra u Pythonu i testiranje istog na simulacijama.

**Ključne riječi:** Kalmanov filter, Praćenje više objekata, Slučajni konačni skupovi, PHD Filter, GMPHD Filter

## **Moving object tracking via probability hypothesis density filter**

### **Abstract**

Multiple object tracking refers to the problem of estimating the number of objects and their states or trajectories based on measurements obtained by sensors. One of the difficulties object tracking faces is assigning measurements to the appropriate objects. This thesis provides a brief insight into the Kalman filter, which is often present in multi-object tracking algorithms and a brief overview of different approaches to the problem of tracking moving objects. Also described is a solution for tracking moving objects with linear dynamical systems using a Gaussian mixture hypothesis probability density filter that represents a closed form of PHD recursion. The goal of this work is to implement the GMPHD filter in Python and test it on simulations.

**Keywords:** Kalman filter, Multiple object tracking, Random finite sets, PHD Filter, GMPHD Filter