MODUL MATEMATIKA SMP/MTs
KELAS 9 SEMESTER 1 REVISI 2019

OLEH:

YOYO APRIYANTO

BLOG ILMU MATEMATIKA

“Mengungkap Rahasia Ilmu Matematika Modern”

https://ilmu-matematika.blogspot.com

2019

Preface Kata Pengantar

Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT., Atas limpahan Ridho, Rahmat, Berkah, dan Hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan **"Modul Matematika SMP/MTs Kelas 9 Semester 1 Revisi 2019"** tepat pada waktunya.

Modul ini bisa berhasil ada di tangan Anda juga berkat dukungan dari semua pihak terutama Orang Tuaku tercinta, Istriku tercinta, Anakku tersayang serta Saudara-saudaraku terkasih yang memberi saya motivasi dan kekuatan yang sangat besar untuk dapat menyelesaikannya.

Buku ini bisa di download/unduh secara GRATIS dalam bentuk file PDF, selain itu Anda bisa mendownload Bank Soal baik Ujian Nasional, SBMPTN, Olimpiade Matematika, Prediksi & Try Out Ujian Nasional, Kisi-Kisi & POS Ujian Nasional, Artikel Pendidikan, dan lain sebagainya. Semua ini Anda bisa download/unduh secara gratis di blog resmi **YOYO APRIYANTO** dengan mengklik: **https://ilmu-matematika.blogspot.com**.

Kami menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam penyusunan Modul ini, oleh karena itu, kami mengharapkan saran dan kritik yang sifatnya membangun demi sempurnanya Modul ini. Kami juga berharap semoga Modul ini dapat bermanfaat bagi semua pihak. Amiin.

Kediri, 7 Mei 2019
Hormat kami,

YOYO APRIYANTO, S.Pd
Phone/WA: +6285337633121
ilmu-matematika.blogspot.com

Contents Daftar Isi

BAB 1 Bentuk Pangkat dan Akar

A. BILANGAN BERPANGKAT BULAT POSITIF

1. Definisi

Bilangan berpangkat bulat positif, yaitu jika a ∈ R dan n adalah bilangan bulat positif, maka:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak n faktor}}$$

Bilngan a^n disebut bilangan berpangkat dengan basis (bilangan pokok) a dan pangkat n. Bentuk pangkat digunakan untuk menyederhanakan penulisan dari perkalian bilangan yang sama.

2. Tanda Hasil Perpangkatan

1) Bilanga pokok positif
   Bilangan pokok positif berpangkat genap maupun ganjil selalu bernilai positif.

2) Bilangan pokok negatif
   - Bilangan negatif berpangkat bilangan genap hasilnya bilangan positif
   - Bilangan negatif berpangkat bilangan ganjil hasilnya bilangan negatif

3. Rumus-Rumus Bentuk Pangkat

a. $a^0 = 1$

b. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ atau $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

c. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

d. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

e. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

f. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

g. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

h. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, untuk $a \geq 0$

i. $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$

j. $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

k. $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$

LATIHAN 1 Bilangan Berpangkat Bulat Positif

A. Soal Pilihan Ganda

1. Hasil dari $4^{\frac{3}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}}$ adalah...
2. Hasil dari $4^{-2} + 4^{-3}$ adalah...
3. Hasil dari $10^0 + 2^0 + 5^0$ adalah...
4. Hasil dari $8^{\frac{5}{3}}$ adalah...
5. Hasil dari $(-8m^2n^3) \times (2k^3n^4)$ adalah...
6. Hasil dari $\frac{4^2}{2^3}$ adalah...
7. Hasil dari $\frac{2^4}{2^2} + \frac{3^4}{3^2}$ adalah...
8. Diketahui bilanga berpangkat seperti berikut.
   $\frac{a^6b^6c^6}{a^{-2}b^{-3}c^{-4}}$
   Bentuk sederhana dari bilangan berpangkat di atas adalah...
9. Bentuk sederhana dari $\left(\frac{5p^{-2}q^2}{25p^3q^4}\right)^{-1}$ adalah...
10. Hasil dari $\frac{45 + 4^{2014} - 4^{2012}}{3 + 4^{2012}}$ adalah...
11. Tentukan nilai dari $\sqrt[2]{4^3}$ = ...

ULANGAN Bilangan Berpangkat Bulat Positif

A. Soal Pilihan Ganda

1. Hasil dari $81^{\frac{3}{4}}$ adalah.... ***(UN Matematika SMP 2017)***
   A. 18 C. 36
   B. 27 D. 54

2. $32^{\frac{3}{5}}$ =...
   A. 4 C. 16
   B. 8 D. 24

3. Nilai dari $256^{\frac{1}{2}}$ x $27^{\frac{1}{3}}$ =...
   A. 52 C. 48
   B. 126 D. 144

4. Hasil dari $\sqrt[3]{6.859}$ =...
   A. 13 C. 19
   B. 17 D. 29

5. Hasil dari $12^2 + 15^2$ adalah...
   A. 54 C. 369
   B. 116 D. 639

6. Nilai dari $(\sqrt[4]{2})^6$ adalah...
   A. $2\sqrt{2}$ C. $2^{-\frac{3}{2}}$
   B. 2^6 D. $4\sqrt{2}$

7. Penyederhanaan dari bentuk $\left(\sqrt[8]{2}\right)^{12}$ adalah...
   A. $\sqrt[3]{4}$ C. $\sqrt[4]{2}$
   B. $\sqrt[3]{2}$ D. $2\sqrt{2}$

8. Bentuk akar dari $3^{\frac{4}{5}}$ adalah...
   A. $\sqrt[5]{3^4}$ C. $\sqrt[4]{3^5}$
   B. $\sqrt[5]{4^3}$ D. $\sqrt[3]{5^4}$

9. Bentuk pangkat negatif dari 125 adalah…
   A. 5^3
   B. $\frac{1}{5^3}$
   C. 5^{-3}
   D. $\frac{1}{5^{-3}}$

10. $\frac{x^3y^6}{x^4y^{-3}} : \frac{x^7y}{xy^{-4}}$ = …
   A. $\frac{x^4y}{x^{11}y^{-2}}$
   B. $x^{-7}y^4$
   C. $\frac{x^3y^{-24}}{x^{28}y^{-3}}$
   D. $x^{15}y^{-4}$

11. Nilai dari $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ = …
   A. $\frac{2}{3}$
   B. 2
   C. $\frac{4}{3}$
   D. $\frac{2}{9}$

12. Bentuk pangkat negatif dari 0,125 adalah…
   A. $\frac{1}{8}$
   B. $\frac{5^2}{200}$
   C. 2^{-3}
   D. $\frac{1}{2^{-3}}$

13. Hasil nilai dari 2^{-3} adalah…
   A. -8
   B. $-\frac{1}{8}$
   C. $\frac{1}{8}$
   D. 8

14. Bentuk pangkat bilangan positif dari $\frac{8^{-4}}{2^{-6}}$ adalah…
   A. 2^6
   B. 2^{-6}
   C. $\frac{1}{2^5}$
   D. $\frac{1}{2^6}$

B. SIFAT-SIFAT BENTUK AKAR

1. Operasi bentuk akar sejenis
   Operasi akar yang dapat dilakukan terhadap akar yang sejenis yaitu:
   a. Penjumlahan/pengurangan
      - $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{b} = (a \pm c)\sqrt{b}$
   b. Perkalian
      - $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$
      - $a\sqrt{b} \times c\sqrt{b} = abc$
   c. pembagian
      - $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$

2. Operasi bentuk akar tidak sejenis
   Operasi akar yang dapat dilakukan terhadap akar yang tidak sejenis yaitu:
   a. Perkalian
      - $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
      - $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$
   b. Pembagian
      - $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

3. Merasionalkan Penyebut Bentuk Akar
   Merasionalkan penyebut bentuk akar, yaitu dengan cara mengalikan dengan konjugat (faktor sekawan) dari penyebut.
   a. $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \dfrac{a}{b}\sqrt{b}$
   b. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \times \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$
   c. $\dfrac{1}{a-\sqrt{b}} = \dfrac{1}{(a-\sqrt{b})} \times \dfrac{(a+\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a^2-b}$

4. Rumus-Rumus yang Berkaitan dengan Bentuk Pangkat dan Akar
   a. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
   b. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   c. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   d. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}}$
   e. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) - 2\sqrt{ab}}$

LATIHAN 2 Bentuk Akar

1. Bentuk sederhana dari $\sqrt{75}$ adalah...
2. Hasil dari $\sqrt{8^{\frac{2}{3}}}$ adalah...
3. Hasil dari $3\sqrt{6}+\sqrt{24}$ = ...
4. Hasil dari $2\sqrt{5}+\sqrt{125}$ = ...
5. Hasil dari $\sqrt{48}-\sqrt{12}+\sqrt{27}$ = ...
6. Hasil dari $\sqrt{8}\times\sqrt{18}$ = ...
7. Hasil dari $2\sqrt{8}\times\sqrt{3}$ = ...
8. Hasil dari $4\sqrt{10}\times\sqrt{2}$ = ...
9. Hasil dari $\sqrt{60}\div\sqrt{5}$ = ...
10. Hasil dari $\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{27}}{\sqrt{9}}$ = ...
11. Diketahui $a=\sqrt{2}$ dan $b=\sqrt{3}$. Nilai dari $5ab+2\sqrt{24}$ adalah...
12. Hasil dari $\frac{\sqrt{98}+\sqrt{18}-\sqrt{8}}{\sqrt{32}}$ = ...
13. Bentuk yang ekuivalen dengan $\frac{20}{\sqrt{5}}$ adalah...
14. Bilangan $\frac{2}{\sqrt{6}}$ dirasionalkan penyebutnya menjadi...
15. Bentuk sederhana dari $\frac{4}{3+\sqrt{5}}$ adalah...
16. Bentuk sederhana dari $\frac{15}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ adalah...
17. Bentuk rasional dari $\frac{20}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ adalah...

ULANGAN Bentuk Akar

A. Soal Pilihan Ganda

1. Hasil dari $\sqrt{60}:\sqrt{5}$ adalah.... ***(UN Matematika SMP 2017)***
   A. $3\sqrt{3}$
   B. $3\sqrt{2}$
   C. $2\sqrt{3}$
   D. $2\sqrt{2}$

2. Bentuk sederhana dari $\frac{16}{3-\sqrt{5}}$ adalah.... ***(UN Matematika SMP 2017)***
   A. $12+4\sqrt{5}$
   B. $12+\sqrt{5}$
   C. $12-\sqrt{5}$
   D. $12-4\sqrt{5}$

15. $\sqrt{36}$ + $\sqrt{49}$ – $\sqrt{144}$ = n, maka nilain adalah...
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4

16. Jika a = 4, b = –3 dan c = 8, maka ab^2 – $\sqrt{\frac{1}{2}c}$ = ...
   A. 34
   B. 46
   C. 50
   D. 52

17. Bentuk pangkat dari $\frac{1}{\sqrt[6]{7^5}}$ adalah...
   A. $7^{\frac{5}{6}}$
   B. $7^{-\frac{5}{6}}$
   C. $7^{\frac{6}{5}}$
   D. $7^{-\frac{6}{5}}$

18. Hasil dari $\sqrt{3}\times\sqrt{8}$ adalah...
   A. $4\sqrt{6}$
   B. $3\sqrt{6}$
   C. $2\sqrt{6}$
   D. $4\sqrt{3}$

19. $\sqrt{32}-5\sqrt{8}+3\sqrt{2}$ = ...
   A. $-3\sqrt{2}$
   B. $3\sqrt{2}$
   C. $4\sqrt{2}$
   D. $5\sqrt{2}$

B. Soal Uraian

1. $36^{\frac{3}{2}}$ = …

2. Jika a = –2, b = 3 dan c = 9, maka nilai dari $(a.b)^2 - \sqrt{c}$ + a.b.c =…

3. $5^3 + (-4)^3$ adalah…

4. Jika $\sqrt{7{,}5}$ = 2,74 dan $\sqrt{75}$ = 8,66 , maka $\sqrt{0{,}75}$ = …

5. $(5 + \sqrt{8})(5 - \sqrt{8})$ = …

6. Hasil dari $\sqrt{18} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{8}$ = …

7. Bentuk sederhana dari $\dfrac{a^{-5}b^{3}}{a^{-1}b^{4}} \times \dfrac{a^{2}b^{4}}{a^{-3}b^{-1}}$ adalah…

8. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x}$ = 27, maka nilai x adalah…

BAB 2 Persamaan dan Fungsi Kuadrat

A. PERSAMAAN KUADRAT

1. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah persamaan yang berbentuk:

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

Dengan a, b, dan c bilangan real, a ≠ 0.

2. Menentukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat:

a. Pemfaktoran

Menentukan akar-akar dengan memfaktorkan yaitu dengan menguraikan bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ menjadi $\frac{(ax+p)(ax+q)}{a} = 0$, dengan syarat p.q = a.c dan p + q = b.

b. Melengkapkan kuadrat sempurna

Untuk menyelesaikan persamaan kuadrat dengan cara melengkapkan bentuk kuadrat ada beberapa langkah, yaitu:

- Mengubah bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ menjadi bentuk $ax^2 + bx = -c$
- Apabila a ≠ 1, bagilah kedua ruas persamaan dengan a, sehingga diperoleh:

  $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
- Lengkaplah bentuk kuadrat dengan menambah ke-2 ruas dengan $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ sehingga menjadi:

  $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

  $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \sqrt{-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}$

c. Rumus abc atau rumus kuadrat

Jika x_1 dan x_2 akar-akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + + bx + c = 0$

Maka: $x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3. Jenis-Jenis Akar Persamaan Kuadrat

Dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dapat ditentukan diskriminan (D) persamaan kuadrat, dengan rumus:

$\boxed{D = b^2 - 4a}$

a. Jika $D \geq 0$, maka kedua akarnya nyata (real)
b. Jika $D > 0$, maka kedua akarnya nyata dan berbeda
c. Jika $D = 0$, maka kedua akarnya nyata dan sama/akar kembar ($x_1 = x_2$), serta rasional
d. Jika $D < 0$, maka kedua akarnya tidak nyata atau imajiner

4. Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

Apabila x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, maka jumlah akar-akar ($x_1 + x_2$) dan hasil kali akar-akar ($x_1 . x_2$) persamaan itu ditentukan oleh rumus berikut

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{D}}{a}, \; x_1 > x_2$$

5. Sifat-sifat Jumlah dan Hasil Kali Akar Persamaan Kuadrat

Diketahui persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan x_1 dan x_2 akar-akarnya, maka sifat akar-akar persamaan kuadrat yang diketahui:

a. Kedua akarnya positif, jika: $D \geq 0$
$x_1 + x_2 > 0$
$x_1 . x_2 > 0$

b. Kedua akarnya positif, jika: $D \geq 0$
$x_1 + x_2 < 0$
$x_1 . x_2 < 0$

c. Kedua akarnya positif, jika: $D > 0$
$x_1 . x_2 < 0$

d. Kedua akarnya positif, jika: $D > 0$
$x_1 + x_2 = 0$

e. Kedua akarnya positif, jika: $D \geq 0$
$x_1 . x_2 = 1$

6. Menyusun Persamaan Kuadrat

Dalam menyusun persamaan kuadrat, kita perlu memperhatikan beberapa bentuk yaitu:

a. Menggunakan Faktor

Jika x_1 dan x_2 akar-akar dari persamaan kuadrat yang telah diketahui, maka persamaan kuadrat tersebut dapat ditentukan oleh:

$$\boxed{(x - x_1).(x - x_2) = 0}$$

b. Menggunakan Rumus Jumlah dan Hasil Kali Akar

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, yaitu dengan membagi kedua ruas persamaan semua dengan a. Dari rumus jumlah dan hasil kali akar-akar, diperoleh hubungan:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = (x_1 \cdot x_2)$

Jadi, persamaan $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\boxed{x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0}$$

c. Menyusun persamaan kuadrat bila akar-akarnya berhubungan dengan akar-akar yang lainnya
Misalkan akar-akar persamaan kuadrat baru α dan β merupakan pengganti akar-akar dari persamaan kuadrat yang diketahui yaitu x_1 dan x_2. Antara α dan β serta x_1 dan x_2 mempunyai hubungan yang dapat ditentukan dengan bentuk homogen, maka bentuk persamaan baru ditentukan oleh:

$$\boxed{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha.\beta = 0}$$

7. Rumus-Rumus yang berkaitan dengan Persamaan Kuadrat

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab\,(a + b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$
$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2$
$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)$

<u>**Contoh:**</u>

1. Jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 4x + 6 = 0$ adalah…

<u>**Penyelesaian:**</u>
$2x^2 - 4x + 6 = 0$
Maka: a = 2, b = -4, dan c = 6

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3$

Jadi, jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah 2 dan 3.

2. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 5 dan -2 adalah?

   Penyelesaian:
   $x_1 = 5$, dan $x_2 = -2$
   $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 \,.\, x_2 = 0$
   $x^2 + (5 - 2)x + 5 \,.\, (-2) = 0$
   $x^2 + 3x - 10 = 0$

LATIHAN 1 Persamaan Kuadrat

A. Soal Pilihan Ganda

1. Akar-akar dari persamaan $x^2 - 5x + 6 = 0$ adalah…
   A. 1 dan 2
   B. 2 dan 3
   C. 3 dan 5
   D. -2 dan -3
   E. -6 dan 1

2. Apabila persamaan $x^2 - 8x + 15 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2, maka nilai $x_1 + x_2$ adalah…
   A. 3
   B. 5
   C. 8
   D. 9
   E. 12

3. Jika diketahui akar-akar dari suatu persamaan yaitu 3 dan 8, maka persamaannya adalah…
   A. $x^2 - 11x + 24 = 0$
   B. $2x^2 - 6x + 2 = 0$
   C. $x^2 - 6x - 1 = 0$
   D. $2x^2 - 4x + 2 = 0$
   E. $x^2 - 7x + 21 = 0$

4. Apabila x_1 dan x_2 merupakan akar-akar dari persamaan $4x^2 - 12x - 7 = 0$, maka nilai dari $4(x_1 \cdot x_2)$ adalah…
   A. -3
   B. -5
   C. -6
   D. -7
   E. 4

5. Akar-akar persamaan $2x^2 - 6x + 2m - 1 = 0$ adalah α dan β. Jika $\alpha = 2\beta$, maka nilai m adalah…
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{5}{2}$
   C. $\frac{3}{2}$
   D. $\frac{1}{3}$
   E. $\frac{2}{3}$

6. Budi akan memilih dua nomor dengan ketentuan, selisihnya 2 dan hasil kalinya 168. Jumlah kedua nomor yang dipilih adalah…
   A. 26
   B. 30
   C. 16
   D. 28
   E. 32

7. Jika p dan q adalah akar-akar persamaan $x^2 - 5x - 1 = 0$, maka persamaan kuadrat yang akar-akarnya $2p + 1$ dan $2q + 1$ adalah…
   A. $x^2 + 10x + 11 = 0$
   B. $x^2 - 10x + 7 = 0$
   C. $x^2 - 10x + 11 = 0$
   D. $x^2 - 12x + 7 = 0$
   E. $x^2 - 12x - 7 = 0$

8. Tentukan nilai m, agar salah satu akar dari persamaan $x^2 = mx + 18 = 0$ dua kali akar lain, adalah…
   A. -3 atau 3
   B. -4 atau 4
   C. -5 atau 5
   D. -8 atau 8
   E. -9 atau 9

9. Persamaan kuadrat $3x^2 = 6x - 1 = 0$ mempunyai akar α dan β. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $(1 - \alpha)$ dan $(1 - \beta)$ adalah…
   A. $3x^2 - 18x - 37 = 0$
   B. $3x^2 - 18x - 13 = 0$
   C. $3x^2 - 18x + 11 = 0$
   D. $x^2 + 6x - 37 = 0$
   E. $x^2 - 6x + 11 = 0$

10. Akar-akar persamaan $x^2 + (2a - 3)x + 18 = 0$ adalah p dan q. Jika $p = 2q$, untuk $p > 0$, dan $q > 0$. Nilai $a - 1$ adalah…
    A. -5
    B. -4
    C. 2
    D. 3
    E. 4

11. Akar-akar dari $2x^2 + 5x + 2 = 0$ adalah…
    A. Berbeda
    B. Nyata dan irasional
    C. Nyata, berbeda dan rasional
    D. Rasional
    E. Nyata dan berbeda

12. Jika persamaan $x^2 + 4x + k = 0$ mempunyai akar real, maka…
    A. $k \leq 0$
    B. $k \geq 0$
    C. $k \leq 4$
    D. $k \geq 4$
    E. $0 \leq k \leq 4$

13. Persamaan kuadrat $2x^2 - px + (p - 3) = 0$ akar-akarnya berkebalikan, maka nilai p adalah…
    A. 1
    B. 2
    C. 3
    D. 4
    E. 5

14. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 3x + 4 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $x_1 - 3$ dan $x_2 - 3$ adalah…
    A. $x^2 + 9x + 22 = 0$
    B. $x^2 + 3x + 6 = 0$
    C. $2x^2 + 3x + 8 = 0$
    D. $x^2 - 4x + 4 = 0$
    E. $2x^2 - 5x + 9 = 0$

15. Diketahui $y = x^2 - 8x + 16$ merupakan persamaan parabola, titik balik dari persamaan tersebut adalah…
    A. (2, 1)
    B. (4, 0)
    C. (3, 6)
    D. (2, 4)
    E. (5, 9)

16. Persamaan grafik fungsi kuadrat yang mempunyai titik ekstrem (-1, 4) dan melalui titik (0, 3) adalah…
    A. $y = -x^2 + 2x - 3$
    B. $y = -x^2 + 2x + 3$
    C. $y = -x^2 - 2x + 3$
    D. $y = x^2 + 2x - 3$
    E. $y = x^2 + 2x + 3$

17. tentukan persamaan parabola yang melalui titik-titik A(1, 11), B(-, 6), dan C(-2, 2) serta mempunyai sumbu simetri sejajar dengan sumbu y adalah…
    A. $y = x^2 + 4x + 6$
    B. $y = x^2 - 2x + 3$
    C. $y = x^2 - 4x + 4$
    D. $y = 2x^2 - 4x + 6$
    E. $y = 2x^2 + 4x + 6$

18. Nilai minimum dari fungsi $f(x) = x^2 + 6x + 2$ adalah…
    A. -2
    B. -3
    C. -5
    D. -6
    E. -7

19. Jika diketahui fungsi $f(x) = 10 + 2x - x^2$, maka nilai maksimum fungsi tersebut adalah…
    A. 3
    B. 5
    C. 8
    D. 11
    E. 15

20. Tentukan batas-batas nilai a agar bentuk $x^2 + 3x + 4 = 0$ selalu bernilai positif untuk setiap $x \in$ bilangan real, maka nilai a adalah…
    A. $a < 0$
    B. $a > 0$
    C. $a < 1$
    D. $a > 1$
    E. $0 < a < 1$

B. Soal Uraian

1. Susunlah suatu persamaan kuadrat, dari akar-akar berikut:
   a. -8 dan 5
   b. $-\frac{3}{2}$ dan $\frac{1}{2}$
   c. -2 dan 7

2. Dani melakukan perjalanan dengan sebuah mobil dari kota A ke kota B. Kecepatan rata-rata mobil pada 120 km pertama lebih lambat 40 km/jam dari pada 200 km berikutnya. Jika lama perjalanan dari kota A ke B adalah 4 jam, berapakah kecepatan rata-rata mobil pada 120 km pertama?

3. Nyatakan persamaan $y = x^2\ 6x + 2$ dalam bentuk $y = p(x + h)^2 + k$, kemudian tentukan koordinat titik balik, persamaan sumbu simetri dan nilai minimum atau maksimalnya!

4. Lintasan sebuah peluru yang ditembakkan vertikal ke atas setinggi h meter dalam waktu t detik, dinyatakan dengan rumus $h = 40t - 5t^2$. Carilah:
   a. Waktu yang diperlukan untuk mencapai tinggi maksimum
   b. Tinggi maksimum peluru tersebut

B. FUNGSI KUADRAT

Karakteristik Grafik Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat memiliki bentuk umum $y = ax^2 + bx + c$. Dari bentuk aljabar tersebut dapat diilustrasikan sebagi bentuk lintasan lengkung atau parabola dengan karakteristik sebagai berikut.

Jika,

1. *a* > 0, maka parabola terbuka ke atas
2. *a* < 0, maka parabola terbuka ke bawah
3. D < 0, maka parabola tidak memotong maupun menyinggung sumbu X
4. D = 0, maka parabola menyinggung sumbu X
5. D > 0, maka parabola memotong sumbu X di dua titik

Menggambar Grafik Fungsi Kuadrat

Langkah-langkah yang diperlukan untuk membuat sketsa grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ adalah sebagai berikut

a. Menentukan titik potong dengan sumbu X, diperoleh jika y = 0
b. Menentukan titik potong dengan sumbu Y, diperoleh jika x = 0
c. Menentukan persamaan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$
d. Menentukan nilai ekstrim grafik $y = \frac{D}{-4a}$
e. Koordinat titik balik $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$

Contoh:

Buatlah sketsa grafik fungsi kuadrat $y = x^2 + 4x$

Penyelesaian:

a. Titik potong dengan sumbu X, jika y = 0

$x^2 + 4x = 0$
$x(x+4) = 0$
$x = 0$ atau $(x + 4) = 0$
$x = -4$

Jadi memotong sumbu X di titik (0, 0) dan (–4, 0)

b. Titik potong dengan sumbu Y, jika x = 0

maka,

$y = 0^2 + 4.0$
$= 0$

Jadi memotong sumbu Y di titik (0, 0)

c. Persamaan sumbu simetri

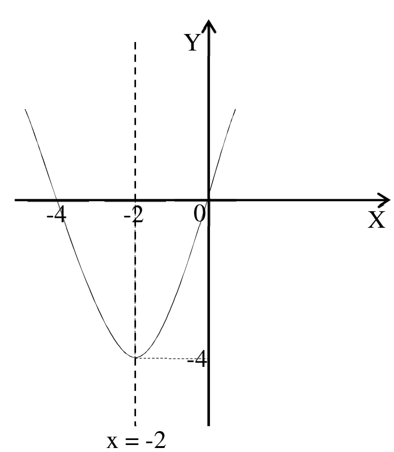
$$x = \frac{-4}{2.1} = -2$$

Jadi persamaan sumbu simetrinya x = –2

d. Nilai Ekstrim/nilai stasioner, untuk x = –2

$y = (-2)^2 + 4(-2)$
$= -4$

Koordinat titik balik: (–2, –4)



LATIHAN 2 Fungsi Kuadrat

A. Soal Uraian

1. Gambarlah sketsa grafik fungsi kuadrat di bawah ini
   a. $y = (x - 2)^2$
   b. $y = x^2 - 4x + 3$
   c. $y = 8 - 2x - x^2$
   d. $y = (1 + x)\ (3 - x)$
   e. $y = (2x - 9)\ (2x + 7)$

2. Manakah yang benar dan manakah yang salah?
   a. kurva $y = x^2 + 6x$ simetris terhadap garis $x = 3$
   b. kurva $y = (x - 1)(x + 5)$ simetris terhadap garis $x = -2$
   c. kurva $y = x^2 - 2x + 5$ tidak memotong sumbu X
   d. Titik balik minimum kurva $y = x^2 + 6x + 7$ adalah (-3, -2)
   e. Nilai maksimum kurva $y = -x^2 + 2x + 4$ adalah 4

BAB 3 Transformasi Geometri

A. PENGERTIAN TRANSFORMASI GEOMETRI

Transformasi geometri adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto dari sembarang titik di suatu bidang ke titik lain di bidang tersebut. Titik lain di bidang itu disebut bayangan atau peta. Perubahan karena transformasi geometri ini dapat berupa perubahan letak, perubahan penyajian, maupun perubahan bentuk.

B. TRANSLASI (PERGESERAN)

Translasi (pergeseran) merupakan transformasi suatu titik, sekumpulan titik, atau bangun datar dengan jarak dan arah yang tetap. Translasi ditandai oleh matriks transformasi yang berbentuk matriks kolom, yaitu $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dengan a sebagai komponen x pada sumbu horizontal dan b sebagai komponen y pada sumbu vertikal.

1. Translasi Titik

Titik Awal/Benda = A	Matriks Transformasi (T)	Bayangan (A')
$A(x_A, y_A) \equiv \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	Ditanya: $\begin{pmatrix} x_A' \\ y_A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + x_A \\ b + y_A \end{pmatrix}$
$A(x_A, y_A) \equiv \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$	Ditanya: $T = \begin{pmatrix} x_A' - x_A \\ y_A' - y_A \end{pmatrix}$	$A'(x_A', y_A') = \begin{pmatrix} x_A' \\ y_A' \end{pmatrix}$
Ditanya: $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A' - a \\ y_A' - b \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$A'(x_A', y_A') = \begin{pmatrix} x_A' \\ y_A' \end{pmatrix}$

Contoh:

1. Tentukan hasil translasi masing-masing titik sudut sebuah segitiga ABC dengan A(–1, 2), B(2, 1), dan C(0, 3) karena translasi $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   Pembahasan:

Titik	Translasi $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$	Bayangan
A(–1, 2)	→	A'(–1 – 2, 2 + 5) = A'(–3, 7)
B(2, 1)	→	B'(2 – 2, 1 + 5) = B'(0, 6)
C(0, 3)	→	C'(0 – 2, 3 + 5) = C'(–2, 8)

2. Diketahui titik R(4, 6), S(6, 4), dan T(–3, 3).
   a. Tentukan translasi titik R ke S, R ke T, dan S ke T.
   b. Carilah bayangan titik T(–3, 3) oleh translasi dari R ke S

   Pembahasan:

   a. $T_{RS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

   $T_{RT} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

   $T_{ST} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$

   b. $T^{'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Jadi bayangannya adalah T’(–1, 1)

3. Tentukan titik $A(x, y)$ jika ditranslasikan oleh matriks $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan $A'(5,7)$.

   Pembahasan:

   $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Jadi, A(4, 3)

4. Jika titik (2, 3) ditranslasikan oleh $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menghasilkan (3, 7), tentukan hasil translasi dari titik (–3, 2).

   Pembahasan:

   Mula-mula kita harus mencari komponen translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

   $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

   Hasil translasi titik (–3, 2) oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ adalah (–3 + 1, 2 + 4) = (–2, 6)

LATIHAN 1 Translasi (Pergeseran)

A. Soal Uraian

1. ∆ABC dengan titik-titik sudut A(0, 2), B(1, 3), dan C(4, 1) ditranslasikan oleh matriks $T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Bayangan ∆A'B'C' mempunyai titik-titik sudut…
2. Tuliskan bayangan setiap titik dibawah ini jika ditranslasikan oleh matriks $T = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   a. A(6, 7)
   b. B(–3, 4)
   c. C(5, –4)
   d. D(–2, –7)
3. Tentukan titik (x, y) jika ditranslasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ yang menghasilkan bayangan berikut.

   a. (–3, –10)
   b. (–3, 10)
   c. (10, 3)
   d. (–10, 3)
4. Tentukan matriks translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ yang memetakan setiap titik berikut ke titik (8, 9).

   a. (2, 3)
   b. (–3, 6)
   c. (5, –7)
   d. (–4, –8)
5. ∆ABC dengan titik-titik sudut A(0, 2), B(1, 3), dan C(4, 1) ditranslasi oleh matriks $T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Tentukan bayangan Titik A', B', dan C'.
6. Titik A(3, 2) ditranslasi oleh matriks $T = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ mempunyai bayangan yaitu…
7. Titik P'(–5, 4) adalah bayangan dari titik P(3, 4) oleh translasi sesuai matriks $T = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$, maka nilai m =…
8. Persamaan garis $x + 2y + 3 = 0$ ditranslasi oleh matriks $T = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, mempunyai persamaan bayangan…
9. Titik N(a, b) ditranslasi oleh matriks $T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan (7, 4). Nilai a + b =…
10. Titik A'(4, –3) merupakan bayangan dari titik A(2, 5) karena translasi oleh matriks $T = \begin{pmatrix} 6 \\ -n \end{pmatrix}$. Nilai n =…
11. Diberikan sebuah garis $y - 3x + 4 = 0$ ditranslasi oleh matriks $\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$ memperoleh bayangan yang melalui titik (0, 0). Maka nilai n=…

C. REFLEKSI (PENCERMINAN)

Refleksi (pencerminan) merupakan suatu transormasi geometri yang memindahkan setiap titik pada suatu bidang dengan menggunakan sifat-sifat bayangan pada suatu cermin.

1. Refleksi Titik dan Kurva Terhadap Sumbu X (y = 0)

Tranformasi refleksi titik A(x, y) terhadap sumbu X (y = 0)

$$A(x,y)\xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}} A'(x,-y)$$

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ -y'\end{pmatrix}$$

Contoh:

1. Tentukan bayangan sebuah titik A(–3, 2) karena refleksi terhadap sumbu X (y = 0)

   Pembahasan:

   $$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+0\\ 0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ -2\end{pmatrix}$$

   Jadi bayangannya adalah A’(–3, –2)

2. Refleksi Titik dan Kurva Terhadap Sumbu Y (x = 0)

Tranformasi refleksi titik A(x, y) terhadap sumbu X (y = 0)

$$A(x,y)\xrightarrow{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}} A'(-x,y)$$

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x'\\ y'\end{pmatrix}$$

Contoh:

1. Tentukan bayangan sebuah titik A(2, 3) karena refleksi terhadap sumbu Y (x = 0)

   Pembahasan:

   $$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+0\\ 0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$$

   Jadi bayangannya adalah A’(–2, 3)

LATIHAN 2 Refleksi (Pencerminan)

A. Soal Uraian

1. Jika ΔABC dengan titik-titik sudut A(2, 1), B(4, 1), dan C(3, 6) dicerminkan terhadap sumbu X dan Y, tuliskan titik-titik bayangan ΔA'B'C'.

2. Jika ΔABC dengan titik-titik sudut A(1, 2), B(3, 5), dan C(6, 4) dicerminkan terhadap sumbu Y, tuliskan titik-titik bayangan ΔA'B'C'.

3. Titik (x, y) dicerminkan terhadap sumbu X memperoleh bayangan (–2, 4). Titik (x, y) adalah…

4. Jika ΔABC dengan titik-titik sudut A(–2, 1), B(5, –1), dan C(–1, –6) dicerminkan terhadap sumbu Y, tuliskan titik-titik bayangan ΔA'B'C'.

5. Bayangan dari titik A(–7, 6) pada pencerminan terhadap garis x = 8 adalah…

6. Bayangan dari titik B(–20, –30) pada pencerminan terhadap garis y = 5 adalah…

7. Bayangan dari titik C(25, –30) pada pencerminan terhadap garis y = –x adalah…

8. Titik P(15, –18) dicerminkan terhadap sumbu X, kemudian dicerminkan lagi terhadap sumbu Y. Koordinat bayangn terakhir dari titik P adalah…

9. Koordinat bayangan dari titik Q(10, 7) pada pencerminan terhadap titik pusat koordinat adalah…

10. Titik R(–8, 16) dicerminakan terhadap garis y = x kemudian dicerminkan lagi terhadap garis x = –6. Koordinat bayangan terakhir dari titik R adalah…

11. P'(8, –14) adalah bayangan dari titik P pada pencerminan terhadap garis y = –10. Koordinat titik P adalah…

12. Titik B(–3, 5) dicerminkan terhadap garis y = 7, kemudian bayangan ditranslasikan dengan (x + 2, y + 3). Koordinat bayangan terakhir dari titik B adalah…

13. Titik C(7, –5) dicerminkan terhadap garis y = –x, kemudian bayangan ditranslasikan dengan (x – 8, y + 2). Koordinat bayangan terakhir dari titik C adalah…

D. ROTASI (PERPUTARAN)

Rotasi (perputaran) sebuah titik atau bangun datar merupakan transformasi (isometri) yang ditentukan oleh tiga unsur penting, yaitu pusat rotasi ≡ P(h, k), besar sudut rotasi ≡θ, dan arah sudut rotasi.

(i) Rotasi bernilai positif (+), jika arah putaran berlawanan arah jarum jam

(ii) Rotasi bernilai (–), jika arah putaran searah jarum jam

1. Rotasi Titik dan Kurva Terhadap Pusat O(0, 0) sejauh θ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

2. Rotasi Titik dan Kurva Terhadap Pusat P(h, k) sejauh θ

$$\begin{pmatrix} x_A' - h \\ y_A' - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_A - h \\ y_A - k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - h \\ y - k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Contoh:

1. Tentukan bayangan titik berikut arena [O, R(θ)]
   a. A(4, 10), R(45^0)
   b. B(3, 5) dengan θ = $\frac{1}{3}\pi$ searah jarum jam
   c. C(4, –3), R(-30^0)
   d. D(–2, 5) dengan θ = 2π

Pembahasan:

Gunakan persamaan matriks berikut:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a. A(4, 10), R(45^0)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^0 & -\sin 45^0 \\ \sin 45^0 & \cos 45^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 4-10 \\ 4+10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 7\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A'($-3\sqrt{2}$, $7\sqrt{2}$)

b. B(3, 5) dengan θ = $\frac{1}{3}\pi$ searah jarum jam

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) & -\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) \\ \sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) & \cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{3}\pi & \sin\frac{1}{3}\pi \\ -\sin\frac{1}{3}\pi & \cos\frac{1}{3}\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik B'($\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}$)

c. C(4, –3), R(–30^0)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-30^0\right) & -\sin\left(-30^0\right) \\ \sin\left(-30^0\right) & \cos\left(-30^0\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^0 & \sin 30^0 \\ -\sin 30^0 & \cos 30^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - \frac{3}{2} \\ -2 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A'($2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$, $-2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$)

d. D(–2, 5) dengan θ = 2π

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A'(–2, 5)

LATIHAN 4 Rotasi (Perputaran)

A. Soal Uraian

1. Titik-titik sudut segitiga ABC adalah A(0, 2), B($\sqrt{3}$, 1), C($\sqrt{3}$, –1). Tentukan bayangan segitiga ABC karena rotasi berikut.
   a. $\left[O(0,0), R\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]$
   b. $\left[P(2,1), R\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

2. Titik D(12, 15) dirotasikan –90 derajat pusat O(0, 0), kemudian ditranslasikan dengan (x + 4, y – 6). Koordinat bayangan terakhir dari titik D adalah…

3. Tentukan bayangan titik (–2, 8) oleh rotasi R[O, 135] adalah…

4. Tentukan bayangan titik (5, –3) oleh rotasi R[P, 90] dengan koordinat titik P(–1, 2) adalah…

E. DILATASI (PERKALIAN)

Dilatasi (perkalian) merupakan transformasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) sebuah bangun geometri, tetapi tidak mengubah bentuk bangun geometri tersebut dari bangun geometri asal. Bangun asal selalu sebangun dengan bayangan bangun geometri setelah didilatasi. Proses dilatasi sebuah bangun geometri dapat dilakukan terhadap pusat dilatasi dan faktor skala dilatasi k dinotasikan oleh [P(a, b), k]

1. Dilatasi Titik Kurva yang Berpusat di O(0, 0) dan Faktor Skala k [O(0,0), D(k)]

Secara umum, dituliskan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matriks dilatasi dengan faktor skala k dinotasikan oleh: $D(k) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = k \cdot I$

2. Dilatasi Titik Kurva yang Berpusat di P(a,b) dan Faktor Skala k [P(a,b), D(k)]

Secara umum, dituliskan:

$$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

<u>Contoh:</u>

1. Tentukan bayangan titik A(2, 3) karena dilatasi berikut.
   a. $[O(0,0), D(2)]$
   b. $[O(0,0), D(-2)]$
   c. $\left[O(0,0), D\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

   <u>Pembahasan:</u>

   Berdasarkan persamaan matriks transformasi dilatasi [O(0,0), D(k)]; $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   a. $A(2,3) \xrightarrow{[O(0,0),D(2)]} A'(x',y')$

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(2)+0(3) \\ 0(2)+2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 \\ 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

   Jadi A'(4, 6)

   b. $A(2,3) \xrightarrow{[O(0,0),D(-2)]} A'(x',y')$

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(2)+0(3) \\ 0(2)-2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+0 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

   Jadi A'(–4, –6)

   c. $A(2,3) \xrightarrow{\left[O(0,0),D\left(\frac{1}{2}\right)\right]} A'(x',y')$

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2)+0(3) \\ 0(2)+\frac{1}{2}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   Jadi A'(1, $1\frac{1}{2}$)

2. Tentukan bayangan dari transformasi dilatasi:
   a. Titik A(5,4) karena $[P(1,2), D(2)]$
   b. Titik B(3, 4) karena $\underrightarrow{\left[P(3,1), D\left(-\frac{1}{2}\right)\right]}$

   Pembahasan:
   Berdasarkan persamaan matriks transformasi dilatasi [P(a,b), D(k)]:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

   a. $A(5,4) \xrightarrow{[P(1,2),D(2)]} A'(x',y')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(4)+0(2) \\ 0(4)+2(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8+0 \\ 0+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Jadi A’(9, 6)

   b. $B(3,4) \xrightarrow{\left[P(1,2),D\left(-\frac{1}{2}\right)\right]} B'(x',y')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(2)+0(2) \\ 0(4)-\frac{1}{2}(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+0 \\ 0-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Jadi B’(0, 1)

LATIHAN 5 Dilatasi (Perkalian)

A. Soal Uraian

1. Diketahui titik-titik P(2, 1), Q(4, 1), R(4, 3), dan S(2,3) didilatasi terhadap pusat O(0,0) dan faktor skala 3. Tentukan:
   a. Bayangan masing-masing titik tersebut
   b. Bayangan garis PQ, PR, dan QS
   c. Luas bayangan bangun PQRS

2. Tentukan bayangan masing-masing titik berikut oleh dilatasi $\underrightarrow{\left[P(1,2), D\left(-\frac{1}{2}\right)\right]}$:
   a. R(9, 0)
   b. S(5, 1)
   c. T(3, 6)
   d. U(5, 8)

3. Jika R'(9, 17) dan T'(9, 21), merupakan bayangan dari R(9, 9), dan T(9, 11) karena dilatasi [P(a, b), D(k)]. Tentukan nilai a, b, dan k?

4. Parabola didilatasi [P(a, b), D(k)] dibawah ini. Tentukan persamaan bayangan parabola tersebut:
   a. a = 1, b = –2, dan k = –2
   b. a = 2, b = –1, dan k = $\frac{1}{2}$

5. Koordinat bayangann dari titik A(3, –5) oleh dilatasi [O, 4] adalah…

6. Titik P'(15, –20) adalah hasil dilatasi P(–6, 8) dengan pusat O(0, 0) dan faktor skala k. Nilai k adalah…

7. Segitiga ABC siku-siku di A dengan AB = 12 cm, AC = 9 cm dan BC = 15 cm. Segitiga A'B'C' adalah hasil dilatasi dari segitiga ABC dengan pusat A dan faktor skala 3. Luas segitiga A'B'C' adalah…

8. Diagonal-diagonal belah ketupat PQRS berpotongan di titik O dengan PR = 9 cm dan QS = 14 cm. Pada dilatasi yang berpusat di O dengan faktor skala 4, maka luas bangun hasil dilatasi adalah…

9. Tentukan bayangan garis y = 3x – 5 oleh translasi T(–2, 1) adalah…

10. Tentukan bayangan titik A(9, 3) oleh dilatasi [O, $\frac{1}{3}$] adalah…

Bibliography Daftar Pustaka

Adinawan, M. C. & Sugijono. Seribu Pena Matematika Jilid 1 untuk SMP kelas IX. Jakarta: Erlangga.

Aufmann, R. N., Lockwood, J. S., Nation, R. D., & Clegg, D. K. (2008). Mathematical Thinking and Quantitative Reasoning. Houghton Miffl in Company: Boston.

Kemdikbud, 2013, Matematika Kelas IX SMP/MTs: Buku Siswa Semester 1, Jakarta: Puskurbuk.

Kemdikbud, 2013, Matematika Kelas IX SMP/MTs: Buku Siswa Semester 2, Jakarta: Puskurbuk.

Kemdikbud. (2013). Matematika Kelas IX SMP/MTs: Buku Siswa. Jakarta: Puskurbuk.

Kemdikbud. (2014 – 2018). Ujian Nasional SMP/MTs. Jakarta: Puspendik.

Kohar, A. W dan Zulkardi. (2014). Pengembangan Soal Berbasis Literasi Matematika dengan Menggunakan Kerangka PISA 2012, dalam Prosiding Konferensi Nasional Matematika 17, ITS, IndoMS. Juli 2014.

Sukino & Wilson, S. (2006). Matematika untuk SMP Kela IX. Erlangga: Jakarta.

Sukino. (2009). Maestro Olimpiade Matematika SMP Seri B. Erlangga: Jakarta.

TIMSS 2011 International Results in Mathematics, http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf, diunduh tanggal 7 Oktober 2018.

TIMSS 2015 Assessment Frameworks, http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15_Frameworks_Full_Book.pdf, diunduh Tanggal 7 Oktober 2018.

Wijaya, Ariyadi., 2012, Pendidikan Matematika Realistik Suatu Alternatif Pendekatan Pembelajaran Matematika, Yogyakarta: Graha Ilmu.