logic hw theory solutions

by Petrova Ksenia (cs y2021)

itmo cs t4 2023

prac 1

схемы аксиом для КИВ

(1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(2) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$

(3) $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$

(4) $\alpha \& \beta \to \alpha$

(5) $\alpha \& \beta \to \beta$

(6) $\alpha \to \alpha \vee \beta$

(7) $\beta \to \alpha \vee \beta$

(8) $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$

(9) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$

(10) $\neg\neg\alpha \to \alpha$

task 3g

task: $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ (закон Пирса)

по теореме о дедукции достаточно доказать: $(A \to B) \to A \vdash A$

1. $(\phi \to \pi) \to (\psi \to \pi) \to (\phi \vee \psi \to \pi)$ - аксиома 8
   $\phi = A \to B \quad \pi = A \quad \psi = A$
   $((A \to B) \to A) \to (A \to A) \to ((A \to B) \vee A \to A)$
2. $\dfrac{(A \to B) \to A \quad ((A \to B) \to A) \to (A \to A) \to ((A \to B) \vee A \to A)}{(A \to A) \to ((A \to B) \vee A \to A)}$
3. ранее доказано: $A \to A$
4. $\dfrac{A \to A \quad (A \to A) \to ((A \to B) \vee A \to A)}{(A \to B) \vee A \to A}$

5. гипотеза: $(A \to B) \to A \quad \Rightarrow \quad A \to B \vdash A \quad \Rightarrow \quad A \to B$

6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$ - аксиома 6
   $\alpha = A \to B \quad \beta = A$
   $(A \to B) \to (A \to B) \vee A$

7. $\dfrac{A \to B \quad (A \to B) \to (A \to B) \vee A}{(A \to B) \vee A}$ (5, 6 пункты)

8. $\dfrac{(A \to B) \vee A \quad (A \to B) \vee A \to A}{A}$ (4, 7 пункты)

prac 3

определения

Замкнутое множество — такое, дополнение которого открыто.
Внутренностью множества A° назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в A.
Замыканием множества $\overline{A}$ назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее A.
Назовём *окрестностью* точки x такое открытое множество V, что $x \in V$.
Будем говорить, что точка $x \in A$ *внутренняя*, если существует окрестность V, что $V \subseteq A$.
Точка x — *граничная*, если любая её окрестность V пересекается как с A, так и с его дополнением.

task 1a

task: покажите, что A открыто тогда и только тогда, когда все точки A — внутренние. Также покажите, что $A^\circ = \{x \mid x \in A \ \& \ x$ — внутренняя точка$\}$.

proof:

$\Rightarrow \quad A$ — открытое $\Rightarrow \forall x \mid x \in A \ \exists \ V_x = A$ — открытое и $A \subseteq A \Rightarrow x$ — внутренняя
$\Leftarrow \quad \forall x \in A \ \exists \ V_x \mid V_x \in A \ \& \ V_x$ — открытое
V_x — открытое $\Rightarrow V_x \in \Omega$
Возьмём $V_x \ \forall x \in A \Rightarrow \bigcup_{x \in A} V_x \in \Omega$
$\bigcup_{x \in A} V_x = A \Rightarrow A \in \Omega \Rightarrow A$ — открытое

proof:

A° — наибольшее открытое множество $\mid A^\circ \subseteq A$
Рассмотрим $A^\circ \cup x \mid x \notin A$

$$\left[\begin{array}{l} A^\circ \cup x \text{ — не открытое} \Rightarrow x \text{ — не внутренняя} \\ \qquad\qquad A^\circ \cup x \nsubseteq A \Rightarrow x \notin A \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \forall x \mid x \in A^\circ \Rightarrow x \in A \;\&\; x \text{ — внутренняя}$$

task 1b

task: покажите, что A замкнуто тогда и только когда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что $\overline{A} = \{x \mid x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$. Верно ли, что $\overline{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$?

proof:

$\Rightarrow$ Пусть $\exists\ x$ — граничная точка для $A \mid x \notin A \Rightarrow x \in A^c$

A — замкнутое $\Rightarrow A^c$ — открытое $\Rightarrow x$ — внутренняя для $A^c \Rightarrow$

$\exists\ V_x \mid V_x \subseteq A^c \Rightarrow V_x \cap A = \varnothing \Rightarrow x$ — не граничная для $A \Rightarrow$

любая граничная для A точка принадлежит A

$\Leftarrow$ A содержит все свои граничные точки $\Rightarrow$ не все точки A внутренние $\Rightarrow$

A — не открытое $\Rightarrow A$ — замкнутое

task: Также покажите, что $\overline{A} = \{x \mid x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$.

proof:

Рассмотрим x - внутренняя для A и $x \notin \overline{A}$

x - внутренняя для $A \Rightarrow x \in A$ и $x \notin \overline{A} \Rightarrow A \nsubseteq \overline{A} \Rightarrow \overline{A}$ — не замыкание A

Рассмотрим x - граничная для A и $x \notin \overline{A}$

x - граничная для $A \Rightarrow \exists\ V_x \mid V_x \cap A \neq \varnothing$

$A \subseteq \overline{A} \Rightarrow V_x \cap \overline{A} \neq \varnothing \Rightarrow x$ — граничная для $\overline{A}$ или x — внутренняя для $\overline{A}$

Если x — граничная для $\overline{A}$ и $x \notin \overline{A} \Rightarrow \overline{A}$ — не замкнутое

Если x — внутренняя для $\overline{A}$ и $x \notin \overline{A} \Rightarrow x$ — не внутренняя для $\overline{A}$

task: Верно ли, что $\overline{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$?

proof:

$X \setminus A = A^c$

$(X \setminus A)^\circ = (A^c)^\circ = A^c \setminus \partial A$

$X \setminus ((X \setminus A)^\circ) = X \setminus (A^c)^\circ = X \setminus (A^c \setminus \partial A) = A \cup \partial A = \overline{A}$

task 1f

task: Покажите, что $\overline{\left(\overline{A^\circ}\right)^\circ} = \overline{A^\circ}$.

proof:

Пусть $B = \overline{A^\circ}$. Заметим, что B — замкнутое множество, значит содержит все свои граничные точки

$B^\circ = B \setminus \partial B$

$\overline{B^\circ} = (B \setminus \partial B) \cup \partial B = B$

task 2a

task: Связны ли $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ как топологические подпространства $\mathbb{R}$?

$A \subseteq X$ — несвязное как подпространство $\mathbb{R}$, если $\exists\ U, V \subseteq X \mid U, V \in \Omega$ и удовлетворяют условиям:

1. $U \cap A \neq \varnothing,\ V \cap A \neq \varnothing$
2. $U \cap V \cap A = \varnothing$
3. $A \subseteq U \cup V$

proof:

Рассмотрим $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2} + n, \sqrt{2} + n + 1)$

$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2} - n - 1, \sqrt{2} - n)$

$A, B \in \Omega$ как счётное объединение открытых на $\mathbb{R}$ множеств

1. $A \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing,\ B \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$
2. $A \cap B \cap \mathbb{Q} = \varnothing$
3. $\mathbb{Q} \subseteq A \cup B$

$\mathbb{Q}$ - несвязное как подпространство

С $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ аналогично, только 0 вместо $\sqrt{2}$

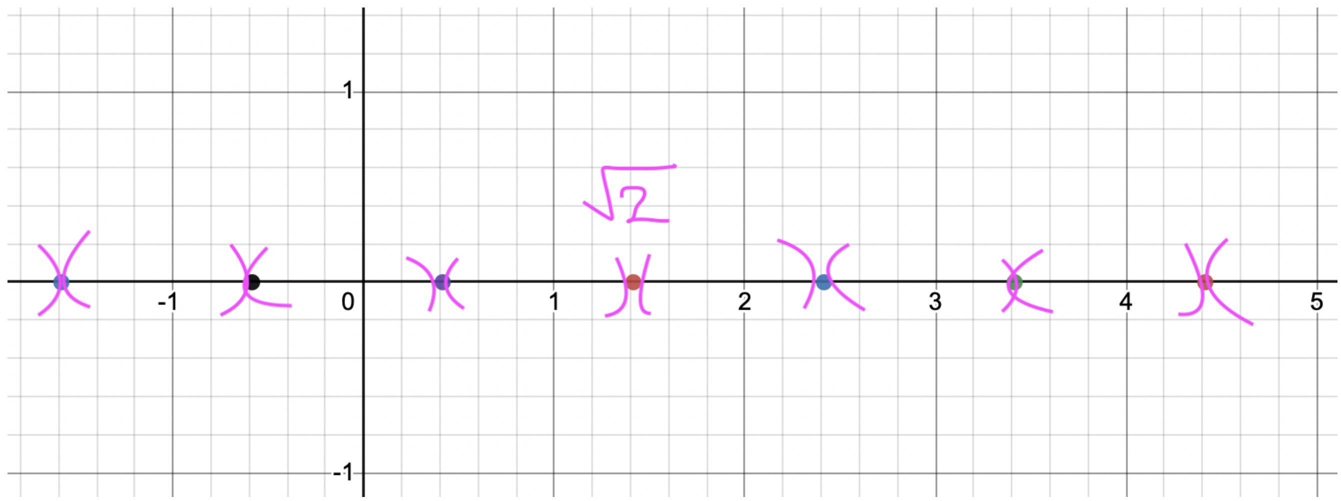
task 2b

покажем, что $\nexists\ A, B \in \Omega \mid A \cup B = (0, 1),\ A \cap B = \varnothing,\ A, B \neq \varnothing$

попробуем найти $A = (a_0, a_1),\ B = (b_0, b_1)$, удовлетворяющие условиям

$(a_0, a_1) \cup (b_0, b_1) = (0, 1) \Rightarrow a_0 = 0,\ b_1 = 1$

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = b_0 \text{ или } a_0 > b_1 \Rightarrow A \cap B \neq \varnothing \\ a_1 < b_0 \Rightarrow (a_0, a_1) \cup (b_0, b_1) \neq (0, 1) \end{array}\right.$$



task 3a

Для каждого из примеров ниже проверьте, задано ли в нём топологическое пространство, и ответьте на следующие вопросы, если это так: каковы окрестности точек в данной топологии; каковы замкнутые множества в данной топологии; связно ли данное пространство.

Топология Зарисского на $\mathbb{R}$: $\Omega = \{\varnothing\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus X \text{ конечно}\}$, то есть пустое множество и все множества с конечным дополнением.

1. $\varnothing \in \Omega \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \varnothing$ — конечное $\Rightarrow \mathbb{R} \in \Omega$
2. Пусть $A_i \in \Omega \quad \mathbb{R} \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathbb{R} \setminus A_i)$ - конечно, как конечное объединение конечных множеств $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \Omega$
3. Пусть $A_i \in \Omega \quad \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus A_i)$ - конечно, как счётное пересечение конечных множеств $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Omega$

Окрестность точки x — такое открытое множество V_x, что $x \in V_x$
Для $x \in A \in \Omega \Rightarrow V_x = A$ — набор интервалов

Замкнутые множества - множества, дополнения которых открыты
Замкнутые множества: конечные множества (наборы точек)

Покажем, что $\nexists\, A, B \in \Omega \mid A \cup B = \mathbb{R},\ A \cap B = \varnothing,\ A, B \neq \varnothing$
Пусть $A \in \Omega \Rightarrow A$ — набор интервалов. Пусть $A \cup B = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A = B$ — конечный набор точек $\Rightarrow B \notin \Omega \Rightarrow$ пространство связное

prac 4

task 5

task: Покажите аналог теоремы о дедукции для естественного вывода: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

solution

$\Leftarrow$

пусть $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

1. по условию существует вывод $\dfrac{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}}{\alpha \to \beta}$
2. $\Rightarrow \dfrac{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, \alpha \to \beta, \alpha}{\beta}$ - тоже вывод
3. в предыдущем пункте α стало гипотезой, а β получилось по правилу Modus Ponens из $\alpha \to \beta$ и β
4. $\Rightarrow \Gamma, \alpha \vdash \beta$

$\Rightarrow$

воспользуемся правилом введения связок с лекции: $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}$

prac 5

task 5.6a

task: Покажите, что исчисление предикатов не полно в моделях ограниченной конечной мощности. А именно, пусть дана модель $\mathcal{M} = \langle D, F, T, E \rangle$. Назовём мощностью модели мощность её предметного множества: $|\mathcal{M}| = |D|$. Покажите, что для любой конечной мощности модели $n \in \mathbb{N}$ найдётся такая формула α, что при $|\mathcal{M}| \leq n$ выполнено $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{M}} = \text{И}$, но $\not\vdash \alpha$.

solution

1. $|D| = n$ - конечная мощность
2. введём в модель операцию равенства $x_1 = x_2$, будем оценивать её так: $[\![x_1 = x_2]\!] = \text{И}$, если $x_1 = x_2$

3. рассмотрим формулу $\alpha_k = \exists x_1...x_k. \bigwedge_{1\le p<q\le k} \neg(x_p = x_q)$
$= \exists x_1...x_k.(\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge ... \wedge \neg(x_1 = x_k) \wedge \neg(x_2 = x_3) \wedge ... \wedge \neg(x_{k-1} = x_k))$

4. из лекции знаем, что оценка предметной области $E(x) \mid E \subseteq D$. пусть $|E| = |D| = n$ (максимальная можность $|E|$). буквами $a_1...a_n \in D$ будем обозначать значения функции оценки предметных переменных

5. чтобы большая конъюкция оценивалась в истину, нужно, чтобы каждое равенство оценивалось в ложь $\Rightarrow$ каждую переменную нужно оценить разным элементом из $E \Rightarrow$ $[\![x_i]\!] = a_i$

6. для любого $k \le n$ выполнено $[\![\alpha_k]\!] =$ И, однако для $k = n+1$ так оценить уже не получится и большая конъюкция оценится в ложь ($[\![\alpha_{n+1}]\!] =$ Л) $\Rightarrow$ формула α не общезначима ($\not\models \alpha$)

7. теорема о корректности исчисления предикатов: всякая формула, выводимая в классическом исчислении предикатов, общезначима ($\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$)

   $\Rightarrow \not\models \alpha \Rightarrow \nvdash \alpha$ (вспоминаем правило $A \Rightarrow B$ значит $\neg B \Rightarrow \neg A$)

8. итак, получили, что формула α_k оценивается в истину $\forall k \le n$, но $\nvdash \alpha$

9. для общезначимости α и доказемости необходимо, чтобы $|D| = \infty$

task 5.4a

task: Докажите или опровергните (каждую формулу в отдельности): $(\forall x.\exists y.\phi) \to (\exists x.\forall y.\phi)$ и $(\exists x.\forall y.\phi) \to (\forall x.\exists y.\phi)$

solution

формула 1: $(\forall x.\exists y.\phi) \to (\exists x.\forall y.\phi)$

опровергнем:

пусть $D = \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y) = x + y > 0$

$[\![\forall x.\exists y.\phi]\!] =$ И, но $[\![\exists x.\forall y.\phi]\!] =$ Л

формула 2: $(\exists x.\forall y.\phi) \to (\forall x.\exists y.\phi)$

опровергнем: $D = \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x > 0$

$[\![\exists x.\forall y.\phi]\!] =$ И, но $[\![\forall x.\exists y.\phi]\!] =$ Л

prac 6

task 6.4b

task: Пусть M — непротиворечивое множество формул и $\mathcal{M}$ — построенная в соответствии с теоремой о полноте исчисления предикатов оценка для M. Мы ожидаем, что $\mathcal{M}$ будет моделью для M, для чего было необходимо доказать несколько утверждений. Восполните некоторые пробелы в том доказательстве. А именно, если φ — некоторая формула и для любой формулы ζ, более короткой, чем φ, выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда покажите:
(b) если $\varphi = \neg\alpha$, $\mathcal{M} \models \neg\alpha$, то $\neg\alpha \in M$; и если $\mathcal{M} \not\models \neg\alpha$, то $\neg\alpha \notin M$.

solution

1. докажем, что если $\varphi = \neg\alpha$, $\mathcal{M} \models \neg\alpha$, то $\neg\alpha \in M$
   (a) по условию $\mathcal{M} \models \neg\alpha \Rightarrow [\![\neg\alpha]\!]_{\mathcal{M}} = \text{И} \Rightarrow [\![\alpha]\!]_{\mathcal{M}} = \text{Л}$
   (b) $\mathcal{M} \not\models \alpha$ и α короче, чем $\neg\alpha \Rightarrow$ по условию $\alpha \notin M \Rightarrow$ по теореме о полноте $\neg\alpha \in M$
2. докажем, что если $\mathcal{M} \not\models \neg\alpha$, то $\neg\alpha \notin M$
   (a) $\mathcal{M} \not\models \neg\alpha \Rightarrow [\![\neg\alpha]\!]_{\mathcal{M}} = \text{Л} \Rightarrow [\![\alpha]\!]_{\mathcal{M}} = \text{И}$
   (b) $\mathcal{M} \models \alpha$ и α короче, чем $\neg\alpha \Rightarrow$ по условию $\alpha \in M \Rightarrow M \vdash \alpha$
   (c) предположим, что $\neg\alpha \in M \Rightarrow M \vdash \neg\alpha$
   (d) $M \vdash \alpha$ и $M \vdash \neg\alpha \Rightarrow M$ — противоречиво, что противоречит условию, значит предположение неверно $\Rightarrow \neg\alpha \notin M$

task 6.2a

task: Покажите, что если классическое исчисление высказываний противоречиво, то также противоречиво и интуиционистское исчисление высказываний.

solution
предположим, что КИВ противоречиво, то есть $\exists\alpha \mid\ \vdash \alpha \& \neg\alpha$
высказывание α в КИВ эквивалентно высказыванию $\alpha \to \perp$ в ИИВ

1. $\alpha \& \beta \to \alpha$ — аксиома 4
   $\beta = \neg\alpha$
   $\alpha \& \neg\alpha \to \alpha$

2. $\dfrac{\alpha\&\neg\alpha \quad \alpha\&\neg\alpha \to \alpha}{\alpha}$ — М.Р. предположение и п.1

3. $\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$ по теореме о полноте

4. при любой оценке $[\![\alpha]\!] = \text{И} \Rightarrow [\![\alpha \to \bot]\!] = \text{Л}$

5. $\alpha\&\beta \to \beta$ — аксиома 5

   $\beta = \neg\alpha$

   $\alpha\&\neg\alpha \to \neg\alpha$

6. $\dfrac{\alpha\&\neg\alpha \quad \alpha\&\neg\alpha \to \neg\alpha}{\neg\alpha}$ — М.Р. предположение и п.5

7. $\vdash \neg\alpha \Rightarrow \models \neg\alpha$ по теореме о полноте

8. при любой оценке $[\![\neg\alpha]\!] = \text{И} \Rightarrow [\![\alpha]\!] = \text{Л} \Rightarrow [\![\alpha \to \bot]\!] = \text{И}$

пришли к противоречию

prac 7

task 7.2e

task: Определим отношение «меньше или равно» так: $0 \le a$ и $a' \le b'$, если $a \le b$. Докажите, что:
Будем говорить, что a делится на b с остатком, если существуют такие p и q, что $a = b \cdot p + q$ и $0 \le q < b$. Покажите, что p и q всегда существуют и единственны, если $b > 0$.

solution

$\exists$

```
p = 0
q = 0
while b * p' <= a:
    p = p'
while b * p + q' <= a:
    q = q'
```

$\exists!$

1. докажем от противного: пусть $\exists p_1, p_2, q_1, q_2 \mid p_1 \neq p_2, \quad q_1 \neq q_2, \quad a = b \cdot p_1 + q_1$, $a = b \cdot p_2 + q_2$

2. $a = b \cdot p_1 + q_1$ и $b \cdot p_1' > a$ (по тому, как работает алгоритм) $\Rightarrow p_2 \leq p_1$
   $p_2 \neq p_1 \Rightarrow p_2 < p_1$

3. $a = b \cdot p_2 + q_2$ и $b \cdot p_2' > a$ (по тому, как работает алгоритм) $\Rightarrow p_1 \leq p_2$
   $p_1 \neq p_2 \Rightarrow p_1 < p_2$

4. противоречие: $p_1 = p_2 = p$

5. $a = b \cdot p + q_2$ и $b \cdot p + q_2' > a$ (по тому, как работает алгоритм) $\Rightarrow q_1 \leq q_2$
   $q_1 \neq q_2 \Rightarrow q_1 < q_2$

6. $a = b \cdot p + q_1$ и $b \cdot p + q_1' > a$ (по тому, как работает алгоритм) $\Rightarrow q_2 \leq q_1$
   $q_2 \neq q_1 \Rightarrow q_2 < q_1$

task 7.3d

task: Определим «ограниченное вычитание»:

$$ab = \begin{cases} 0, & a = 0 \\ a, & b = 0 \\ pq, & a = p', b = q' \end{cases}$$

Докажите, что: $ab = 0$ тогда и только тогда, когда $a \leq b$.

solution

1. $a = 0^{(n)} \quad b = 0^{(m)}$, где n, m — количество штрихов

2. $ab = 0$, когда $a = 0$ (по условию)

3. в противном случае: $ab = pq = 0^{(n-1)}0^{(m-1)}$

4. в этом случае $ab = 0$, если такимим переходами мы уменьшим количество штрихов у a до 0, не позже чем у $b \Rightarrow n \leq m \Rightarrow a \leq b$

task 7.5a

task: Будем говорить, что k-местное отношение R выразимо в формальной арифметике, если существует формула формальной арифметики ρ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_k$, что:

- для всех $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \in R$ выполнено $\vdash \rho[x_1 := \overline{a_1}] \dots [x_k := \overline{a_k}]$ (доказуема формула ρ с подставленными значениями $a_1, \dots, a_k$ вместо свободных переменных $x_1, \dots, x_k$);
- для всех $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \notin R$ выполнено $\vdash \neg\rho[x_1 := \overline{a_1}] \dots [x_k := \overline{a_k}]$.

Выразите в формальной арифметике (укажите формулу ρ и докажите требуемые свойства про неё):

- «полное» отношение $R = \mathbb{N}^2$ (любые два числа состоят в отношении);

solution

1. рассмотрим $\rho = (x_1 \cdot 0 = 0) \& (x_2 \cdot 0 = 0)$
2. для всех $\langle a_1, a_2 \rangle \in R = \mathbb{N}^2$ формула доказуема:
   (a) $\overline{a_1} \cdot 0 = 0 \quad — \quad$ нелогическая аксиома 7
   (b) $\overline{a_2} \cdot 0 = 0 \quad — \quad$ нелогическая аксиома 7
   (c) $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta \quad — \quad$ аксиома 3
   $\alpha = (\overline{a_1} \cdot 0 = 0) \quad \beta = (\overline{a_2} \cdot 0 = 0)$
   $(\overline{a_1} \cdot 0 = 0) \to (\overline{a_2} \cdot 0 = 0) \to (\overline{a_1} \cdot 0 = 0) \& (\overline{a_2} \cdot 0 = 0)$
   (d) $\dfrac{\overline{a_1} \cdot 0 = 0 \quad (\overline{a_1} \cdot 0 = 0) \to (\overline{a_2} \cdot 0 = 0) \to (\overline{a_1} \cdot 0 = 0) \& (\overline{a_2} \cdot 0 = 0)}{(\overline{a_2} \cdot 0 = 0) \to (\overline{a_1} \cdot 0 = 0) \& (\overline{a_2} \cdot 0 = 0)} \quad — \quad$ M.P. (a), (c)
   (e) $\dfrac{\overline{a_2} \cdot 0 = 0 \quad (\overline{a_2} \cdot 0 = 0) \to (\overline{a_1} \cdot 0 = 0) \& (\overline{a_2} \cdot 0 = 0)}{(\overline{a_1} \cdot 0 = 0) \& (\overline{a_2} \cdot 0 = 0)} \quad — \quad$ M.P. (b), (d)
3. $\nexists \langle a_1, a_2 \rangle \notin \mathbb{N}^2$

prac 8

task 8.4

task: Покажите, что в определении представимости пункт
$\vdash \neg\varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$ при $f(x_1, \dots, x_n) \neq y$ не является обязательным и может быть доказан из остальных пунктов определения представимой функции.

определение

Будем говорить, что функция $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ представима в ФА, если существует формула φ, что:

1. если $f(a_1, \ldots, a_n) = u$, то $\vdash \varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, \overline{u})$

2. если $f(a_1, \ldots, a_n) \neq u$, то $\vdash \neg\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, \overline{u})$

3. для всех $a_i \in \mathbb{N}_0$ выполнено
   $\vdash (\exists x.\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, x))(\forall p.\forall q.\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, p)\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, q) \to p = q)$

solution

1. покажем, что пункт 2 следует из остальных пунктов определения

2. предположим, что $f(x_1, \ldots, x_n) \neq u \Rightarrow \vdash \varphi(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, u)$

3. $f(x_1, \ldots, x_n) \neq u \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = v$

4. по 1 пункту определения: $f(x_1, \ldots, x_n) = v \Rightarrow \vdash \varphi(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, v)$

5. по 3 пункту определения: $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, u) \& \varphi(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, v) \to u = v$

6. из 3 пункта: $f(x_1, \ldots, x_n) = v = u$ — противоречие

prac 9

task d9.2b

$f(a,b) = [\frac{b}{a}] = q \quad \Rightarrow \quad \vdash \varphi(a,b,q) = \exists d.(b = a \cdot q + d) \& (d < a)$