Задания к практическим занятиям по курсу «Численные методы»

1. Численная интерполяция

Варианты заданий

Построить численную интерполяцию функции $y = f(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$, в точках $x^* \in [a, b]$ не совпадающих с узлами интерполяции, используя интерполяционный полином Лагранжа. В качестве x^* выбрать середины отрезков между интерполяционными узлами. В качестве узлов интерполяции по пространственной переменной x использовать: (а) – равномерный шаг h между узлами, (б) – узлы Чебышева.

1. $f(x) = \sin\left(\dfrac{e^{x/2}}{35}\right), \quad x \in [0, 10];$

2. $f(x) = \sin^5(x-2) + \cos^7\left(\dfrac{x}{10}\right), \quad x \in [0, 10];$

3. $f(x) = \sin^3\left(\dfrac{x}{3}\right)\arctan(x), \quad x \in [0, 10];$

4. $f(x) = \dfrac{10 - \cos(2x) + \ln(1+x)}{10 + x}, \quad x \in [0, 10];$

5. $f(x) = \cos\left(\dfrac{e^{x/2}}{25}\right), \quad x \in [0, 10];$

6. $f(x) = e^{\sin(x)}, \quad x \subseteq [0, 10];$

7. $f(x) = \dfrac{e^{x/3}}{1 + x^2}, \quad x \in [0, 10];$

8. $f(x) = \dfrac{2 + x^2 + 10\cos(x)}{10 + x}, \quad x \in [0, 10];$

9. $f(x) = \sin\left(\dfrac{e^{\frac{x}{3}}}{10}\right), \quad x \in [0, 10];$

10. $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3} + e^{\sin^2(x/3)}\right), \quad x \in [0, 10];$

11. $f(x) = \tan\left(\cos\left(\dfrac{x}{5}\right)\right), \quad x \in [0, 10];$

12. $f(x) = \dfrac{5}{2 + x + \cos(x)\ln(1+x)}, \quad x \in [0, 10];$

13. $f(x) = \cos\left(\dfrac{e^{x/3}}{10}\right), \quad x \in [0, 10];$

14. $f(x) = \left(\dfrac{x}{10}\right)^{\sin(x)}, \quad x \in [0, 10];$

15. $f(x) = \sinh\left\{\sin^2\left(\dfrac{x}{5}\right)\right\}, \quad x \in [0, 10];$

16. $f(x) = -5 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{10}\cos(x), \quad x \in [0, 10];$

17. $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x+2)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right), \quad x \in [0, 10];$

18. $f(x) = e^{\sin^2(x/5)}\cos^2\left(\dfrac{x}{5}\right), \quad x \in [0, 10];$

19. $f(x) = \dfrac{\cos^2(x/3)}{1+x^2}, \quad x \in [0, 10];$

20. $f(x) = \ln\left(2 + x\left(1 + \cos(x)\right)\right), \quad x \in [0, 10];$

21. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right), \quad x \in [0, 10];$

22. $f(x) = e^{(\sin(x/5))}\ln\left(2 + \cos\left(\dfrac{x}{6}\right)\right), \quad x \in [0, 10];$

23. $f(x) = \dfrac{\tanh(x^3)}{x}, \quad x \in [0, 10];$

24. $f(x) = x^2 e^{-3-\cos\left(\frac{3x}{2}\right)}, \quad x \in [0, 10];$

25. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right)\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right), \quad x \in [0, 10];$

26. $f(x) = 2^{\cos(x)-\sin(x)}\cos(1 + \ln(1+x)), \quad x \in [0, 10];$

27. $f(x) = \dfrac{\cosh x}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}, \quad x \in [0, 10];$

28. $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x+3)\cos^2\left(\dfrac{x}{4}\right), \quad x \in [0, 10];$

29. $f(x) = \dfrac{e^{\cos^2(x/10)}\sinh(x)}{1+x^3}, \quad x \in [0, 10];$

30. $f(x) = \dfrac{\sin^2(x/10) + \cos^2(x/10)}{1+x^2}, \quad x \in [0, 10];$

2. Численное дифференцирование

Варианты заданий

Во всех задачах требуется используя правую и центральные разности численно вычислить первую производную функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в узлах сетки. Используя центральные разности, вычислить вторую производную функции $f(x)$ со вторым и четвертым порядком точности в узлах сетки.

1. $f(x) = e^{-x}\sin x, \quad x \in [-0.8, 0.8]$

2. $f(x) = e^{-2x}\cos x, \quad x \in [-0.8, 0.8]$

3. $f(x) = \sin^2 x, \quad x \in [-1.5, 1.5]$

4. $f(x) = \cos^2 x, \quad x \in [-1.5, 1.5]$

5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + x}, \quad x \in [-1.5, 1.5]$

6. $f(x) = \ln(x^2 + 1), \quad x \in [-4, 4]$

7. $f(x) = \ln(\sin^2 x + 1), \quad x \in [-1.5, 1.5]$

8. $f(x) = \mathrm{arctg} x, \quad x \in [-3, 3]$

9. $f(x) = \mathrm{arctg}(\sin x), \quad x \in [-3, 3]$

10. $f(x) = [\mathrm{arctg}(\ln(x^2 + 1) + 1)]^2, \quad x \in [-5, 5]$

11. $f(x) = \cos(\mathrm{arctg}(x) + 1), \quad x \in [-3, 3]$

12. $f(x) = \cosh(\sin x), \quad x \in [-1.5, 1.5]$

13. $f(x) = \cosh(e^{-x^2}), \quad x \in [-5, 5]$

14. $f(x) = \sinh\left(\dfrac{1}{1 + x^2}\right), \quad x \in [-3, 3]$

15. $f(x) = 2^{\sin x}, \quad x \in [-1.5, 1.5]$

16. $f(x) = \ln(1 + \arctan^2(x)), \quad x \in [-1.5, 1.5]$

17. $f(x) = \ln(\cosh x), \quad x \in [-3, 3]$

18. $f(x) = e^{-x^2} \ln(x^2 + 1), \quad x \in [-3, 3]$

19. $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{1 + x^2}\right), \quad x \in [-5, 5]$

20. $f(x) = \dfrac{x}{1 + \tan^2(x)}, \quad x \in [-1.5, 1.5]$

21. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 + x^2}, \quad x \in [-3, 3]$

22. $f(x) = e^{\cos(x)}(1 + x^2), \quad x \in [-1, 1]$

23. $f(x) = (1 + \ln(1 + x^2))\cos(e^x), \quad x \in [0, 2]$

24. $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos^2(x) + 1}, \quad x \in [-1, 1]$

25. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2 + \ln(1 + x^2)}, \quad x \in [-1, 1]$

26. $f(x) = 1 + \tanh\{x + x^3\}, \quad x \in [-1, 1]$

27. $f(x) = \sin^2\{\cos(x)\}, \quad x \in [-1.5, 1.5]$

28. $f(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{3 + x^3}, \quad x \in [-1, 1]$

29. $f(x) = \sin\left\{e^{x - \frac{x^3}{3}}\right\}, \quad x \in [-1.5, 1.5]$

30. $f(x) = 2^{x + \frac{1}{x+2}}, \quad x \in [-1.5, 1.5]$

3. Численное интегрирование

Варианты заданий

Во всех задачах требуется используя формулу прямоугольников, трапеции и Симпсона вычислить приближенное значение интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ на отрезке $[a, b]$. Исследовать зависимость ошибки вычислений от шага сетки.

1. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 1}, \quad x \in [-1, 1]$

2. $f(x) = (x + 1)\cos x, \quad x \in [-1, 1]$

3. $f(x) = \dfrac{1}{2 + x^3}, \quad x \in [-1, 1]$

4. $f(x) = x \ln x, \quad x \in [1, 2]$

5. $f(x) = x^5 \sin x, \quad x \in [-1, 1]$

6. $f(x) = e^x \sin x, \quad x \in [-1, 2]$

7. $f(x) = x\, e^x, \quad x \in [-2, 1]$

8. $f(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}, \quad x \in [-1, 3]$

9. $f(x) = \tanh x, \quad x \in [0, 5]$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x + 10}, \quad x \in [-1, 1]$

11. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + x^2}, \quad x \in [1, 2]$

12. $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - x^4}, \quad x \in [2, 4]$

13. $f(x) = \sqrt{2 - x^2}, \quad x \in [0, 1]$

14. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}, \quad x \in [-2, 1]$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{5-x^2}}, \quad x \in [1, 2]$

16. $f(x) = f(x) = \sin^4 x, \quad x \in [-3, 3]$

17. $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos(x/5)}, \quad x \in [-3, 3]$

18. $f(x) = \dfrac{1}{\sinh x}, \quad x \in [1, 2]$

19. $f(x) = x^2 \cosh(3x), \quad x \in [-1, 1]$

20. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}, \quad x \in [-1, 1]$

21. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}, \quad x \in [1, 3]$

22. $f(x) = 2^x \cos(x), \quad x \in [-1, 1]$

23. $f(x) = \cosh(x)\sin(x), \quad x \in [-0.5, 1]$

24. $f(x) = x\ln(1+x), \quad x \in [0, 1]$

25. $f(x) = \dfrac{10x^4}{1-x^5}, \quad x \in [-1, 0.5]$

4. Поиск приближённых значений корней нелинейных уравнений

Варианты заданий

С точностью $\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$ найти приближённое значение корня уравнения, лежащее на интервале (0,10). Для поиска корня использовать метод дихотомии и метод Ньютона.

1. $\ln\left(x^2+3x+1\right)-\cos(2x+1)=0;$

2. $x^5-x^4-3x-1=0;$

3. $\operatorname{tg}(\operatorname{th} x)-\operatorname{sh}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)-1=0;$

4. $x\operatorname{arctg} x+\dfrac{x}{2}\cos x-3=0;$

5. $4\sin\dfrac{x}{2}+(\cos x)\operatorname{th} x-x+2=0;$

6. $\cos\dfrac{1}{1+x}+\sin\dfrac{3x}{2}+x-7=0;$

7. $\arccos\dfrac{x-3}{8}-\dfrac{x^2}{2}+3x+1=0;$

8. $4\ln\left(2-e^{-x}\right)-x+5=0;$

9. $\exp\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)-\operatorname{arctg} x+1=0;$

10. $\arcsin(\operatorname{th} x)-\dfrac{x}{2}+3=0;$

11. $\ln\left(x^2+x+2\right)+2\sin(x-1)=0;$

12. $x^5-x^4-x^2-1=0;$

13. $x^5-7x^3-3x-2=0;$

14. $\exp\left(-(x-3)^2\right)+\ln(1+x)-\dfrac{x}{2}=0;$

15. $x^5 - 16x^3 - 9x^2 - 13 = 0$;

16. $\ln\left(2x^2 + x + 1\right) - x^2 + 5x + 1 = 0$;

17. $x \sin\left(\cos \dfrac{x}{3}\right) - e^{-x} + 4 = 0$;

18. $\arcsin \dfrac{x-5}{6} - 2e^{-x} - \dfrac{1}{2} = 0$;

19. $4 - \operatorname{tg} \dfrac{x-1}{7} - \ln(2+x) = 0$;

20. $\exp(\operatorname{arctg} x) - x + 5 = 0$;

21. $\operatorname{ch} \dfrac{1}{1+x} - \operatorname{th} x - x = 0$;

22. $x^5 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$;

23. $x^5 - x^4 - 3x^3 - 2 = 0$;

24. $\operatorname{sh} \dfrac{1}{1+x} - \operatorname{arctg} x + 1 = 0$;

25. $\exp\left(\sqrt{x}\right) - x \ln(1+x) - \dfrac{1}{2} = 0$;

26. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{4} - 1\right) + x^2 - 5x - 3 = 0$;

27. $\operatorname{arctg} x - x^3 + 6x^2 + 1 = 0$;

28. $\operatorname{ch}\left(1 + \dfrac{1}{(1+x)^2}\right) - x + 6 = 0$;

29. $\exp\left(1 - \dfrac{x}{4}\right) - \arccos(\operatorname{th} x) - \dfrac{1}{3} = 0$;

30. $x \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{6} - 1\right) - e^{-x} - \sqrt{3x} = 0.$

5. Приближённое решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Варианты заданий

Методами Эйлера, Рунге — Кутта четвертого порядка точности и методом Адамса третьего порядка найти приближённое решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке [0,1]. Шаг сетки $h = 0.05$. Начало расчёта — точка $x = 0$. Используя расчёт на грубой сетке с $h = 0.1$, найти оценку точности по Рунге для половины узлов подробной сетки (только для решения, полученного с четвертым порядком точности по методу Рунге-Кутты). Для сравнения приведено точное решение $u_0(x)$.

1. $$u'' + \frac{1}{2(1+x)}u' - \frac{1+2x}{2(1+x)}u = \frac{3\cos x - (3+4x)\sin x}{2\sqrt{1+x}},$$
$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad u_0(x) = \sqrt{1+x}\sin x + e^{-x};$$

2. $$u'' - (\operatorname{th} x)u' + \left(\operatorname{ch}^2 x\right) u = \frac{x\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{th} x}{3},$$
$$u(0) = 0, \quad u'(0) = \frac{4}{3}, \quad u_0(x) = \sin(\operatorname{sh} x) + \frac{x}{3};$$

3. $$u'' + (\cos x)u' + (\sin x)u = 1 - \cos x - \sin x,$$
$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad u_0(x) = \sin x + \cos x;$$

4. $$u'' + \frac{1}{1+x}u' + \frac{1}{(1+x)^2}u = \frac{2+6x+5x^2}{(1+x)^2},$$
$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u_0(x) = x^2 + \sin\bigl(\ln(1+x)\bigr);$$

5. $$u'' + (\operatorname{ch} x)u' + (\operatorname{sh} x)u = \operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x,$$
$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad u_0(x) = \exp(-\operatorname{sh} x) + x;$$

6. $u'' + \dfrac{2x}{1+x^2}u' + \dfrac{2x\operatorname{tg} x}{1+x^2}u = \dfrac{2x\operatorname{tg} x}{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \cos x,$
$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad u_0(x) = \cos x + \operatorname{arctg} x;$

7. $u'' - \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}u' - \left(1 + \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}\right)u = -\dfrac{\sqrt{\cos x}}{2}(3 + \operatorname{tg} x),$
$u(0) = 2, \quad u'(0) = -1, \quad u_0(x) = \sqrt{\cos x} + e^{-x};$

8. $u'' + \dfrac{1}{1+x}u' + \dfrac{\operatorname{tg} x}{1+x}u = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+x}\ln(1+x) - \cos x,$
$u(0) = 1, \quad u'(0) = 2, \quad u_0(x) = \cos x + 2\ln(1+x);$

9. $u'' + (\operatorname{tg} x)u' - \dfrac{2x}{\cos x}u = 2 - \dfrac{2x^3}{\cos x},$
$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u_0(x) = \sin x + x^2;$

10. $u'' + \dfrac{2x}{1+x^2}u' - \dfrac{2}{1+x^2}u = \dfrac{2 + \left(1 - 2x - x^2\right)e^x}{1+x^2},$
$u(0) = -1, \quad u'(0) = -1, \quad u_0(x) = x\operatorname{arctg} x - e^x;$

11. $u'' + \dfrac{1}{1+x}u' + \dfrac{2}{\operatorname{ch}^2 x}u = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\left(\dfrac{1}{1+x} + 2\ln(1+x)\right),$
$u(0) = 0, \quad u'(0) = 2, \quad u_0(x) = \ln(1+x) + \operatorname{th} x;$

12. $u'' + \left(\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)u' - (\cos x)u = -\sin x - \dfrac{1}{2}\sin 2x,$
$u(0) = 0, \quad u'(0) = \dfrac{3}{2}, \quad u_0(x) = \sin x + \operatorname{th}\dfrac{x}{2};$

13. $u'' + \dfrac{x}{1+x^2}u' - \dfrac{1}{1+x^2}u = \dfrac{3 - 2x + 4x^2}{1+x^2}e^{-2x},$
$u(0) = 2, \quad u'(0) = -2, \quad u_0(x) = \sqrt{1+x^2} + e^{-2x};$

14. $u'' + (\cos x)u' + (\sin x)u = x \sin x,$
$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad u_0(x) = x + \cos x;$

15. $u'' + \dfrac{1}{1+x}u' - \dfrac{x}{1+x}u = -\dfrac{x\ln(1+x)}{1+x},$
$u(0) = 2, \quad u'(0) = -1, \quad u_0(x) = \ln(1+x) + 2e^{-x};$

16. $u'' - \dfrac{x}{4-x^2}u' - \dfrac{x \operatorname{tg} x}{4-x^2}u = -2\cos x - \dfrac{x \operatorname{tg} x}{4-x^2} \arcsin \dfrac{x}{2},$
$u(0) = 2, \quad u'(0) = \dfrac{1}{2}, \quad u_0(x) = \arcsin \dfrac{x}{2} + 2\cos x;$

17. $u'' - \dfrac{2x}{1+x^2}u' - \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}u = -\dfrac{5\left(x^5+2x^3+3x\right)}{2\left(1+x^2\right)^2},$
$u(0) = 0, \quad u'(0) = 2, \quad u_0(x) = 2(1+x^2)\operatorname{arctg} x - \dfrac{5}{4}x^3;$

18. $u'' + (\operatorname{th} x)u' + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}u = -2\operatorname{th} x - \dfrac{2x}{\operatorname{ch}^2 x},$
$u(0) = 1, \quad u'(0) = -2, \quad u_0(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} - 2x;$

19. $u'' + (\cos x)u' + (1+\sin x)u = \dfrac{e^x}{2}(2 + \sin x + \cos x),$
$u(0) = \dfrac{3}{2}, \quad u'(0) = \dfrac{1}{2}, \quad u_0(x) = \cos x + \dfrac{e^x}{2};$

20. $u'' + (\operatorname{tg} x)u' + \dfrac{\cos^2 x}{4(1+\sin x)^2}u = 1 + x\operatorname{tg} x + \dfrac{x^2\cos^2 x}{8(1+\sin x)^2},$
$u(0) = 1, \quad u'(0) = \dfrac{1}{2}, \quad u_0(x) = \dfrac{x^2}{2} + \sqrt{1+\sin x};$

21. $u'' + (\operatorname{tg} x)u' + (\cos^2 x)u = \operatorname{tg} x + x\cos^2 x,$
$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad u_0(x) = \cos(\sin x) + x;$

22. $u'' - \dfrac{x}{4 - x^2}u' + \dfrac{1}{4 - x^2}u = -\dfrac{2x}{4 - x^2},$
$u(0) = 0, \quad u'(0) = 2, \quad u_0(x) = x + 2\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}\arcsin\dfrac{x}{2};$

23. $u'' - 2\,(\operatorname{tg} x)\,u' + \dfrac{1}{\cos^4 x}u = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^4 x},$
$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad u_0(x) = \operatorname{tg} x + \cos(\operatorname{tg} x);$

24. $u'' + 2(\operatorname{th} x)u' + 2(\sin x)u = \sin 2x - \cos x,$
$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad u_0(x) = \cos x + \operatorname{th} x;$

25. $u'' + 3(\operatorname{th} 2x)u' + (1 - \operatorname{th} 2x)u = \dfrac{1}{2}(3\cos x - \sin x)\operatorname{th} 2x,$
$u(0) = 1, \quad u'(0) = \dfrac{3}{2}, \quad u_0(x) = \sqrt{1 + \operatorname{th} 2x} + \dfrac{1}{2}\sin x;$

26. $u'' + \dfrac{1}{\cos^2 x}u' + 2\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}u = 2 + 2x\dfrac{1 + x\operatorname{tg} x}{\cos^2 x},$
$u(0) = 1, \quad u'(0) = -1, \quad u_0(x) = x^2 + \exp(-\operatorname{tg} x);$

27. $u'' + 2(\operatorname{th} x)u' + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^4 x}u = -4\operatorname{th} x - \dfrac{2x}{\operatorname{ch}^4 x},$
$u(0) = 0, \quad u'(0) = -1, \quad u_0(x) = \sin(\operatorname{th} x) - 2x;$

28. $u'' + (\operatorname{tg} x)u' + xu = (1 + x)\cos x + x^2\sin x,$
$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad u_0(x) = x\sin x + \cos x;$

29. $u'' + (2\,\mathrm{th}\,x)u' + (1 - \mathrm{th}\,x)u = (1 - \mathrm{th}\,x)\arcsin(\mathrm{th}\,x),$

$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad u_0(x) = \arcsin(\mathrm{th}\,x) + \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x};$

30. $u'' - \dfrac{1}{1+x}u' + \dfrac{1}{(1+x)^2}u = -1 - \dfrac{1}{(1+x)^2},$

$u(0) = 0, \quad u'(0) = 2, \quad u_0(x) = 2(1+x)\ln(1+x) - x^2;$

6. Приближённое решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

Варианты заданий

Найти приближённое решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке $[0,1]$ с шагом $h = 0.05$. Для вычисления решения использовать метод прогонки с краевыми условиями первого и второго порядка точности. Для сравнения приведено точное решение $u_0(x)$.

1. $u'' + \dfrac{1}{2(1+x)}u' - \dfrac{1+2x}{2(1+x)}u = \dfrac{3\cos x - (3+4x)\sin x}{2\sqrt{1+x}}$,
$u(0) = 1, \quad u(1) - 2u'(1) = 0.1704$,
$u_0(x) = \sqrt{1+x}\sin x + e^{-x}$;

2. $u'' - (\operatorname{th} x)u' + \left(\operatorname{ch}^2 x\right) u = \dfrac{x\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{th} x}{3}$,
$u(0) + u'(0) = 1.3333, \quad u'(1) = 0.9280$,
$u_0(x) = \sin(\operatorname{sh} x) + \dfrac{x}{3}$;

3. $u'' + (\cos x)u' + (\sin x)u = 1 - \cos x - \sin x$,
$u(0) - u'(0) = 0, \quad u(1) = 1.3818$,
$u_0(x) = \sin x + \cos x$;

4. $u'' + \dfrac{1}{1+x}u' + \dfrac{1}{(1+x)^2}u = \dfrac{2+6x+5x^2}{(1+x)^2}$,
$2u(0) - u'(0) = -1, \quad 3u(1) + u'(1) = 7.3015$,
$u_0(x) = x^2 + \sin\bigl(\ln(1+x)\bigr)$;

5. $u'' + (\operatorname{ch} x)u' + (\operatorname{sh} x)u = \operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x$,
$u'(0) = 0, \quad 6u(1) + u'(1) = 8.3761$,
$u_0(x) = \exp(-\operatorname{sh} x) + x$;

6. $u'' + \dfrac{2x}{1+x^2}u' + \dfrac{2x\,\mathrm{tg}\,x}{1+x^2}u = \dfrac{2x\,\mathrm{tg}\,x}{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x - \cos x,$
$u(0) = 1, \quad u(1) + 2u'(1) = 0.6428,$
$u_0(x) = \cos x + \mathrm{arctg}\,x;$

7. $u'' - \dfrac{\mathrm{tg}\,x}{2}u' - \left(1 + \dfrac{\mathrm{tg}\,x}{2}\right)u = -\dfrac{\sqrt{\cos x}}{2}(3 + \mathrm{tg}\,x),$
$4u(0) + u'(0) = 7, \quad u'(1) = -0.9403,$
$u_0(x) = \sqrt{\cos x} + e^{-x};$

8. $u'' + \dfrac{1}{1+x}u' + \dfrac{\mathrm{tg}\,x}{1+x}u = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1+x}\ln(1+x) - \cos x,$
$u(0) - u'(0) = -1, \quad u(1) = 1.9266,$
$u_0(x) = \cos x + 2\ln(1+x);$

9. $u'' + (\mathrm{tg}\,x)u' - \dfrac{2x}{\cos x}u = 2 - \dfrac{2x^3}{\cos x},$
$2u(0) - u'(0) = -1, \quad 3u(1) + u'(1) = 8.0647,$
$u_0(x) = \sin x + x^2;$

10. $u'' + \dfrac{2x}{1+x^2}u' - \dfrac{2}{1+x^2}u = \dfrac{2 + \left(1 - 2x - x^2\right)e^x}{1+x^2},$
$u'(0) = -1, \quad 4u(1) + u'(1) = -9.1644,$
$u_0(x) = x\,\mathrm{arctg}\,x - e^x;$

11. $u'' + \dfrac{1}{1+x}u' + \dfrac{2}{\mathrm{ch}^2 x}u = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\left(\dfrac{1}{1+x} + 2\ln(1+x)\right),$
$u(0) = 0, \quad u(1) - u'(1) = 0.5348,$
$u_0(x) = \ln(1+x) + \mathrm{th}\,x;$

12. $u'' + \left(\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right) u' - (\cos x)u = -\sin x - \dfrac{1}{2}\sin 2x,$
$u(0) - u'(0) = -1.5, \quad u'(1) = 0.9335,$
$u_0(x) = \sin x + \operatorname{th}\dfrac{x}{2};$

13. $u'' + \dfrac{x}{1+x^2}u' - \dfrac{1}{1+x^2}u = \dfrac{3-2x+4x^2}{1+x^2}e^{-2x},$
$2u(0) - u'(0) = 6, \quad u(1) = 1.5495,$
$u_0(x) = \sqrt{1+x^2} + e^{-2x};$

14. $u'' + (\cos x)u' + (\sin x)u = x\sin x,$
$3u(0) - u'(0) = 2, \quad 2u(1) + u'(1) = 3.2391,$
$u_0(x) = x + \cos x;$

15. $u'' + \dfrac{1}{1+x}u' - \dfrac{x}{1+x}u = -\dfrac{x\ln(1+x)}{1+x},$
$u'(0) = -1, \quad 6u(1) + u'(1) = 8.3377,$
$u_0(x) = \ln(1+x) + 2e^{-x};$

16. $u'' - \dfrac{x}{4-x^2}u' - \dfrac{x\operatorname{tg} x}{4-x^2}u = -2\cos x - \dfrac{x\operatorname{tg} x}{4-x^2}\arcsin\dfrac{x}{2},$
$u(0) = 2, \quad u(1) - 2u'(1) = 3.8154,$
$u_0(x) = \arcsin\dfrac{x}{2} + 2\cos x;$

17. $u'' - \dfrac{2x}{1+x^2}u' - \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}u = -\dfrac{5\left(x^5+2x^3+3x\right)}{2\left(1+x^2\right)^2},$
$2u(0) + u'(0) = 2, \quad u'(1) = 1.3916,$
$u_0(x) = 2(1+x^2)\operatorname{arctg} x - \dfrac{5}{4}x^3;$

18. $u'' + (\operatorname{th} x)u' + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}u = -2\operatorname{th} x - \dfrac{2x}{\operatorname{ch}^2 x}$,
$u(0) - u'(0) = 3, \quad u(1) = -1.3519$,
$u_0(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} - 2x$;

19. $u'' + (\cos x)u' + (1 + \sin x)u = \dfrac{e^x}{2}(2 + \sin x + \cos x)$,
$2u(0) - u'(0) = 2.5, \quad 2u(1) - u'(1) = 3.2812$,
$u_0(x) = \cos x + \dfrac{e^x}{2}$;

20. $u'' + (\operatorname{tg} x)u' + \dfrac{\cos^2 x}{4(1 + \sin x)^2}u = 1 + x\operatorname{tg} x + \dfrac{x^2\cos^2 x}{8(1 + \sin x)^2}$,
$u'(0) = 0.5, \quad 6u(1) - u'(1) = 9.9430$,
$u_0(x) = \dfrac{x^2}{2} + \sqrt{1 + \sin x}$;

21. $u'' + (\operatorname{tg} x)u' + (\cos^2 x)u = \operatorname{tg} x + x\cos^2 x$,
$u(0) = 1, \quad u(1) - u'(1) = 1.0692$,
$u_0(x) = \cos(\sin x) + x$;

22. $u'' - \dfrac{x}{4 - x^2}u' + \dfrac{1}{4 - x^2}u = -\dfrac{2x}{4 - x^2}$,
$u(0) + u'(0) = 2, \quad u'(1) = 1.6977$,
$u_0(x) = x + 2\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}\arcsin\dfrac{x}{2}$;

23. $u'' - 2\,(\operatorname{tg} x)\,u' + \dfrac{1}{\cos^4 x}u = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^4 x}$,
$u(0) - u'(0) = 0, \quad u(1) = 1.5708$,
$u_0(x) = \operatorname{tg} x + \cos(\operatorname{tg} x)$;

24. $u'' + 2(\operatorname{th} x)u' + 2(\sin x)u = \sin 2x - \cos x,$
$3u(0) - u'(0) = 2, \quad 2u(1) - u'(1) = 3.0253,$
$u_0(x) = \cos x + \operatorname{th} x;$

25. $u'' + 3(\operatorname{th} 2x)u' + (1 - \operatorname{th} 2x)u = \dfrac{1}{2}(3\cos x - \sin x)\operatorname{th} 2x,$
$u'(0) = 1.5, \quad 3u(1) - u'(1) = 5.1460,$
$u_0(x) = \sqrt{1 + \operatorname{th} 2x} + \dfrac{1}{2}\sin x;$

26. $u'' + \dfrac{1}{\cos^2 x}u' + 2\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}u = 2 + 2x\dfrac{1 + x\operatorname{tg} x}{\cos^2 x},$
$u(0) = 1, \quad u(1) - u'(1) = -0.0676,$
$u_0(x) = x^2 + \exp(-\operatorname{tg} x);$

27. $u'' + 2(\operatorname{th} x)u' + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^4 x}u = -4\operatorname{th} x - \dfrac{2x}{\operatorname{ch}^4 x},$
$u(0) + u'(0) = -1, \quad u'(1) = -1.6960,$
$u_0(x) = \sin(\operatorname{th} x) - 2x;$

28. $u'' + (\operatorname{tg} x)u' + xu = (1 + x)\cos x + x^2 \sin x,$
$u(0) - u'(0) = 1, \quad u(1) = 1.3818,$
$u_0(x) = x\sin x + \cos x;$

29. $u'' + (2\operatorname{th} x)u' + (1 - \operatorname{th} x)u = (1 - \operatorname{th} x)\arcsin(\operatorname{th} x),$
$3u(0) - u'(0) = 2, \quad 2u(1) + u'(1) = 3.1821,$
$u_0(x) = \arcsin(\operatorname{th} x) + \dfrac{1}{\operatorname{ch} x};$

30. $u'' - \dfrac{1}{1 + x}u' + \dfrac{1}{(1 + x)^2}u = -1 - \dfrac{1}{(1 + x)^2},$
$u'(0) = 2, \quad u(1) - u'(1) = 0.3863,$
$u_0(x) = 2(1 + x)\ln(1 + x) - x^2;$

7. Приближённое решение смешанной краевой задачи для волнового уравнения

Варианты заданий

Найти приближённое решение смешанной краевой задачи для неоднородного волнового уравнения при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Для расчёта решения использовать схему «крест» с шагом $h = 0.05$ по переменной x. Предусмотреть возможность произвольного задания шага по переменной t и времени окончания расчёта (по умолчанию $\tau = 0.05$ и $T = 1$, соответственно). Для получения решения использовать начальные и граничные условия первого и второго порядка точности. Для сравнения приведено точное решение $u_0(x,t)$.

1. $2u_{tt} = u_{xx} + \operatorname{ch}(x-t)$,
$u(x,0) = \operatorname{ch} x, \quad u_t(x,0) = -\operatorname{sh} x$,
$u(0,t) - u_x(0,t) = e^t, \quad 2u(1,t) - u_x(1,t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{1-t} + 3e^{t-1}\right)$,
$u_0(x,t) = \operatorname{ch}(x-t)$;

2. $2u_{tt} = u_{xx} - 2 + \dfrac{2t(x-1)^3 - t^3(x-1)}{\left(4 - t^2(x-1)^2\right)^{3/2}}$,
$u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = \dfrac{x+1}{2}$,
$u(0,t) = t - \arcsin\dfrac{t}{2}, \quad u(1,t) + 2u_x(1,t) = 5 + 2t$,
$u_0(x,t) = t + x^2 + \arcsin\dfrac{t(x-1)}{2}$;

3. $2u_{tt} = u_{xx} - 2 + xt\dfrac{t^2 - 2x^2}{(4 - x^2t^2)^{3/2}},$

$u(x,0) = x^2 + \dfrac{\pi}{2}, \quad u_t(x,0) = -\dfrac{x}{2},$

$u_x(0,t) = -\dfrac{t}{2}, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = 3 + \arccos\dfrac{t}{2} - \dfrac{t}{\sqrt{4-t^2}},$

$u_0(x,t) = x^2 + \arccos\dfrac{xt}{2};$

4. $2u_{tt} = u_{xx} + 5\dfrac{\operatorname{th}(t-x)}{\operatorname{ch}^2(t-x)},$

$u(x,0) = \dfrac{5}{2}\operatorname{th} x, \quad u_t(x,0) = -\dfrac{5}{2\operatorname{ch}^2 x},$

$2u(0,t) - u_x(0,t) = -5\operatorname{th} t - \dfrac{5}{2\operatorname{ch}^2 t}, \quad u_x(1,t) = \dfrac{5}{2\operatorname{ch}^2(1-t)},$

$u_0(x,t) = \dfrac{5}{2}\operatorname{th}(x-t);$

5. $2u_{tt} = u_{xx} - 2\cos(t-x),$

$u(x,0) = 2\cos x, \quad u_t(x,0) = 2\sin x,$

$u(0,t) - u_x(0,t) = 2(\cos t - \sin t), \quad u(1,t) = 2\cos(1-t),$

$u_0(x,t) = 2\cos(t-x);$

6. $2u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{1}{4}e^{x+t},$

$u(x,0) = \dfrac{1}{4}e^x, \quad u_t(x,0) = \dfrac{1}{4}e^x,$

$2u(0,t) - u_x(0,t) = \dfrac{1}{4}e^t, \quad 3u(1,t) - u_x(1,t) = \dfrac{1}{2}e^{1+t},$

$u_0(x,t) = \dfrac{1}{4}e^{x+t};$

7. $2u_{tt} = u_{xx} - \dfrac{1}{4}e^{x+t-1} + 2\left(2x^2 - t^2\right)\dfrac{2\,\mathrm{th}^2(xt) - 1}{\mathrm{ch}(xt)}$,

$u(x,0) = 2 - \dfrac{1}{4}e^{x-1}, \quad u_t(x,0) = -\dfrac{1}{4}e^{x-1}$,

$u(0,t) = 2 - \dfrac{1}{4}e^{t-1}, \quad u(1,t) - u_x(1,t) = \dfrac{2 + 2t\,\mathrm{th}\,t}{\mathrm{ch}\,t}$,

$u_0(x,t) = -\dfrac{1}{4}e^{x+t-1} + \dfrac{2}{\mathrm{ch}(xt)}$;

8. $2u_{tt} = u_{xx} - 2 + \left(2x^2 - t^2\right)\mathrm{sh}(xt)$,

$u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = x$,

$u_x(0,t) = t, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = 3 + \mathrm{sh}\,t + t\,\mathrm{ch}\,t$,

$u_0(x,t) = x^2 + \mathrm{sh}(xt)$;

9. $2u_{tt} = u_{xx} - \dfrac{16(x+t)}{\left(1 + 4(x+t)^2\right)^2}$,

$u(x,0) = \mathrm{arctg}(2x), \quad u_t(x,0) = \dfrac{2}{1 + 4x^2}$,

$u(0,t) - u_x(0,t) = \mathrm{arctg}(2t) - \dfrac{2}{1 + 4t^2}, \quad u_x(1,t) = \dfrac{2}{1 + 4(1+t)^2}$,

$u_0(x,t) = \mathrm{arctg}\,2(x+t)$;

10. $2u_{tt} = u_{xx} - 2\sin(x+t)$,

$u(x,0) = 2\sin x, \quad u_t(x,0) = 2\cos x$,

$u(0,t) - u_x(0,t) = 2(\sin t - \cos t), \quad u(1,t) = 2\sin(1+t)$,

$u_0(x,t) = 2\sin(x+t)$;

11. $2u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{(1+t)^2 - 2x^2}{4(1+x+xt)^{3/2}},$

$u(x,0) = \sqrt{1+x}, \quad u_t(x,0) = \dfrac{x}{2\sqrt{1+x}},$

$3u(0,t) + u_x(0,t) = \dfrac{7+t}{2}, \quad u(1,t) - 2u_x(1,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2+t}},$

$u_0(x,t) = \sqrt{1+x+xt};$

12. $2u_{tt} = u_{xx} + 2 + \dfrac{\left(2x^2 - t^2\right)\left(1 + 2\operatorname{tg}^2(xt)\right)}{2\cos(xt)},$

$u(x,0) = x^2 + 1/2, \quad u_t(x,0) = -2x,$

$u(0,t) = t^2 + 1/2, \quad u(1,t) - u_x(1,t) = t^2 - 1 + \dfrac{1 - t\operatorname{tg} t}{2\cos t},$

$u_0(x,t) = (x-t)^2 + \dfrac{1}{2\cos(xt)};$

13. $2u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{2 + 2\cos(t-x) + x\sin(t-x)}{\big(1+\cos(t-x)\big)^2},$

$u(x,0) = x - x\operatorname{tg}(x/2), \quad u_t(x,0) = 1 + x/(1+\cos x),$

$u_x(0,t) = 1 + \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}, \quad u(1,t) - u_x(1,t) = t + \dfrac{1}{1+\cos(t-1)},$

$u_0(x,t) = t + x + x\operatorname{tg}\dfrac{t-x}{2};$

14. $2u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{10\left(x^4 - 1 + xt(t+2x)^2\right)}{3\big(1 + x^2(x+t)^2\big)^2},$

$u(x,0) = \dfrac{5}{3}\operatorname{arctg} x^2, \quad u_t(x,0) = \dfrac{5x}{3\left(1+x^4\right)},$

$2u(0,t) - u_x(0,t) = -\dfrac{5t}{3}, \quad u_x(1,t) = \dfrac{5(2+t)}{3\big(1+(1+t)^2\big)},$

$u_0(x,t) = \dfrac{5}{3}\operatorname{arctg}\left(x^2 + xt\right);$

15. $2u_{tt} = u_{xx} - 2 + \dfrac{1 + 2\,\mathrm{tg}^2(x-t)}{2\cos(x-t)},$

$u(x,0) = x^2 + \dfrac{1}{2\cos x}, \quad u_t(x,0) = -\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{2\cos x},$

$u(0,t) - u_x(0,t) = \dfrac{1 + \mathrm{tg}\, t}{2\cos t}, \quad u(1,t) = 1 + \dfrac{1}{2\cos(1-t)},$

$u_0(x,t) = x^2 + \dfrac{1}{2\cos(x-t)};$

16. $2u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{8}{3}\left(1 - x^2\right) e^{t-x^2},$

$u(x,0) = \dfrac{2}{3}e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = \dfrac{2}{3}e^{-x^2},$

$2u(0,t) - u_x(0,t) = \dfrac{4}{3}e^{t}, \quad 2u(1,t) - u_x(1,t) = \dfrac{8}{3}e^{t-1},$

$u_0(x,t) = \dfrac{2}{3}e^{t-x^2};$

17. $2u_{tt} = u_{xx} + 4\cos(2 + 2t - 2x),$

$u(x,0) = 2\sin^2(1-x), \quad u_t(x,0) = 2\sin(2-2x),$

$u(0,t) = 2\sin^2(1+t), \quad u(1,t) + u_x(1,t) = 2\left(\sin^2 t - \sin(2t)\right),$

$u_0(x,t) = 2\sin^2(1+t-x);$

18. $2u_{tt} = u_{xx} - 2 + 2\left(2x^2 - t^2\right)\dfrac{\mathrm{tg}(xt)}{\cos^2(xt)},$

$u(x,0) = (1-x)^2, \quad u_t(x,0) = x,$

$u_x(0,t) = t - 2, \quad 3u(1,t) + u_x(1,t) = 3\,\mathrm{tg}\, t + \dfrac{t}{\cos^2 t},$

$u_0(x,t) = (1-x)^2 + \mathrm{tg}(xt);$

19. $2u_{tt} = u_{xx} - 3\dfrac{2+t-x^2}{(1+t+x^2)^2}$,

$u(x,0) = \dfrac{3}{2}\ln\left(1+x^2\right), \quad u_t(x,0) = \dfrac{3}{2\,(1+x^2)}$,

$2u(0,t) - u_x(0,t) = 3\ln(1+t), \quad u_x(1,t) = \dfrac{3}{2+t}$,

$u_0(x,t) = \dfrac{3}{2}\ln\left(1+t+x^2\right)$;

20. $2u_{tt} = u_{xx} - 3 + \dfrac{xe^{-t}}{(4-x^2)^{3/2}} + 2e^{-t}\arccos\dfrac{x}{2}$,

$u(x,0) = \dfrac{3}{2}x^2 + \arccos\dfrac{x}{2}, \quad u_t(x,0) = -\arccos\dfrac{x}{2}$,

$2u(0,t) + u_x(0,t) = \left(\pi - \dfrac{1}{2}\right)e^{-t}, \quad u(1,t) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\pi}{3}e^{-t}$,

$u_0(x,t) = \dfrac{3}{2}x^2 + e^{-t}\arccos\dfrac{x}{2}$;

21. $2u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{3+2t}{2\,(2+t-x^2)^{3/2}}$,

$u(x,0) = \sqrt{2-x^2}, \quad u_t(x,0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2-x^2}}$,

$3u(0,t) + u_x(0,t) = 3\sqrt{2+t}, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$,

$u_0(x,t) = \sqrt{2+t-x^2}$;

22. $2u_{tt} = u_{xx} - 4\cos(2-2x-2t)$,

$u(x,0) = 2\cos^2(1-x), \quad u_t(x,0) = 2\sin(2-2x)$,

$u(0,t) = 2\cos^2(1-t), \quad u(1,t) + u_x(1,t) = 2\left(\cos^2 t - \sin(2t)\right)$,

$u_0(x,t) = 2\cos^2(1-x-t)$;

23. $2u_{tt} = u_{xx} - 2 + \left(2x^2 - t^2\right)\operatorname{ch}(xt),$
$u(x,0) = 2 - 2x + x^2, \quad u_t(x,0) = -x,$
$u_x(0,t) = -t - 2, \quad u(1,t) + 2u_x(1,t) = 2t\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t - 3t,$
$u_0(x,t) = (1-x)^2 - xt + \operatorname{ch}(xt);$

24. $2u_{tt} = u_{xx} + 2 + 4\dfrac{t^2 - 2x^2}{(1+xt)^2},$
$u(x,0) = -x^2, \quad u_t(x,0) = 4x,$
$u(0,t) - u_x(0,t) = -4t, \quad u_x(1,t) = 2\dfrac{t-1}{t+1},$
$u_0(x,t) = 4\ln(1+xt) - x^2;$

25. $2u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{4\operatorname{th}^2(x-t) - 2}{\operatorname{ch}(x-t)},$
$u(x,0) = \dfrac{2}{\operatorname{ch} x}, \quad u_t(x,0) = 2\dfrac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x},$
$u(0,t) + u_x(0,t) = \dfrac{2 + 2\operatorname{th} t}{\operatorname{ch} t}, \quad u(1,t) = \dfrac{2}{\operatorname{ch}(1-t)},$
$u_0(x,t) = \dfrac{2}{\operatorname{ch}(x-t)};$

26. $2u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}(1+t-x),$
$u(x,0) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}(1-x), \quad u_t(x,0) = \dfrac{1}{2}\operatorname{ch}(1-x),$
$2u(0,t) + u_x(0,t) = \dfrac{1}{4}\left(e^{1+t} - 3e^{-1-t}\right), \quad u(1,t) - u_x(1,t) = \dfrac{1}{2}e^t,$
$u_0(x,t) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}(1+t-x);$

27. $2u_{tt} = u_{xx} + 1 + \dfrac{\big(2x^2 - t^2\big)\big(3 + \operatorname{ch}(2xt)\big)}{8\big(\operatorname{ch}(xt)\big)^{3/2}},$

$u(x,0) = 1 + \dfrac{x^2}{2}, \quad u_t(x,0) = -x,$

$u(0,t) = 1 + \dfrac{t^2}{2}, \quad 2u(1,t) - u_x(1,t) = t^2 - t + \dfrac{4\operatorname{ch} t - t\operatorname{sh} t}{2\sqrt{\operatorname{ch} t}},$

$u_0(x,t) = \dfrac{1}{2}(x-t)^2 + \sqrt{\operatorname{ch}(xt)};$

28. $2u_{tt} = u_{xx} - 2t - \dfrac{xt^2}{(4-x^2)^{3/2}} + 4\arcsin\dfrac{x}{2},$

$u(x,0) = \dfrac{x}{3}, \quad u_t(x,0) = x^2,$

$u_x(0,t) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{t^2}{2}, \quad 3u(1,t) - u_x(1,t) = \dfrac{2}{3} + t + \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)t^2,$

$u_0(x,t) = \dfrac{x}{3} + x^2 t + t^2\arcsin\dfrac{x}{2};$

29. $2u_{tt} = u_{xx} - 2 + 2\left(t^2 - 2x^2\right)\dfrac{\operatorname{th}(xt)}{\operatorname{ch}^2(xt)},$

$u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = x,$

$u(0,t) - u_x(0,t) = -t, \quad u_x(1,t) = 2 + \dfrac{t}{\operatorname{ch}^2 t},$

$u_0(x,t) = x^2 + \operatorname{th}(xt);$

30. $2u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{4\big(1 - 3\operatorname{th}^2(x+t)\big)}{\operatorname{ch}^2(x+t)},$

$u(x,0) = 2\operatorname{th}^2 x, \quad u_t(x,0) = \dfrac{4\operatorname{th} x}{\operatorname{ch}^2 x},$

$u(0,t) - u_x(0,t) = 2\operatorname{th}^2 t - \dfrac{4\operatorname{th} t}{\operatorname{ch}^2 t}, \quad u(1,t) = 2\operatorname{th}^2(1+t),$

$u_0(x,t) = 2\operatorname{th}^2(x+t);$

8. Приближённое решение смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности

Варианты заданий

Найти приближённое решение смешанной краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Для расчёта решения использовать симметричную схему с шагом $h = 0.05$ по переменной x. Предусмотреть возможность произвольного задания шага по переменной t и времени окончания расчёта (по умолчанию $\tau = 0.05$ и $T = 1$, соответственно). Для получения решения использовать граничные условия первого и второго порядка точности. Для сравнения приведено точное решение $u_0(x,t)$.

1. $$u_t = u_{xx} + \frac{5\big(1+\cos(x+t)-\sin(x+t)\big)}{4\big(1+\cos(x+t)\big)^2},$$
$$u_x(0,t) = \frac{5}{4(1+\cos t)}, \quad u(1,t)+u_x(1,t) = \frac{5\big(1+\sin(t+1)\big)}{4\big(1+\cos(t+1)\big)},$$
$$u(x,0) = \frac{5}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad u_0(x,t) = \frac{5}{4}\operatorname{tg}\frac{x+t}{2};$$

2. $$u_t = u_{xx} + \frac{e^x}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 t} - \operatorname{tg} t\right),$$
$$u(0,t)+u_x(0,t) = \operatorname{tg} t - \frac{1}{2}, \quad u(1,t) = \frac{e\operatorname{tg} t - 1}{2},$$
$$u(x,0) = -\frac{x}{2}, \quad u_0(x,t) = \frac{e^x\operatorname{tg} t - x}{2};$$

3. $$u_t = u_{xx} + \frac{2x(1+x+xt)+(1+t)^2}{4(1+x+xt)^{3/2}},$$
$$u(0,t)+2u_x(0,t) = 2+t, \quad u(1,t)+2u_x(1,t) = \frac{3+2t}{\sqrt{2+t}},$$
$$u(x,0) = \sqrt{1+x}, \quad u_0(x,t) = \sqrt{1+x+xt};$$

4. $u_t = u_{xx} - 2(1+x-t) + \dfrac{x\operatorname{tg}(xt) - t^2\left(1+2\operatorname{tg}^2(xt)\right)}{2\cos(xt)},$

$u(0,t) = t^2 + \dfrac{1}{2}, \quad 3u(1,t) + u_x(1,t) = 5 - 8t + 3t^2 + \dfrac{3 + t\operatorname{tg} t}{2\cos t},$

$u(x,0) = x^2 + \dfrac{1}{2}, \quad u_0(x,t) = (x-t)^2 + \dfrac{1}{2\cos(xt)};$

5. $u_t = u_{xx} + \dfrac{3\left(3x^2 - t - 1\right)}{2\left(1+t+x^2\right)^2},$

$u(0,t) - u_x(0,t) = \dfrac{3}{2}\ln(1+t), \quad u_x(1,t) = \dfrac{3}{2+t},$

$u(x,0) = \dfrac{3}{2}\ln\left(1+x^2\right), \quad u_0(x,t) = \dfrac{3}{2}\ln\left(1+t+x^2\right);$

6. $u_t = u_{xx} + \dfrac{x - 2t^2\operatorname{tg}(xt)}{2\cos^2(xt)},$

$u_x(0,t) = 1 + \dfrac{t}{2}, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = 2 + \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{tg} t + \dfrac{t}{\cos^2 t}\right),$

$u(x,0) = x, \quad u_0(x,t) = x + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(xt);$

7. $u_t = u_{xx} + 2 + \dfrac{3}{2}e^{xt}\left(x\cos(xt) + \left(2t^2 - x\right)\sin(xt)\right),$

$u(0,t) - 2u_x(0,t) = \dfrac{3}{2} - 3t, \quad u(1,t) = \dfrac{3}{2}e^t\cos t - 1,$

$u(x,0) = \dfrac{3}{2} - x^2, \quad u_0(x,t) = \dfrac{3}{2}e^{xt}\cos(xt) - x^2;$

8. $u_t = u_{xx} + \left(2 - \dfrac{8x^2}{3}\right)e^{t-x^2},$

$u(0,t) - u_x(0,t) = \dfrac{2}{3}e^t, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = -\dfrac{2}{3}e^{t-1},$

$u(x,0) = \dfrac{2}{3}e^{-x^2}, \quad u_0(x,t) = \dfrac{2}{3}e^{t-x^2};$

9. $u_t = u_{xx} - \dfrac{2\Big(x\,\mathrm{th}(xt) + t^2\left(2\,\mathrm{th}^2(xt) - 1\right)\Big)}{\mathrm{ch}(xt)},$

$u(0,t) = 2 - \dfrac{1}{4}e^{t-1}, \quad u(1,t) - 2u_x(1,t) = \dfrac{1}{4}e^t + \dfrac{2(1 + 2t\,\mathrm{th}\,t)}{\mathrm{ch}\,t},$

$u(x,0) = 2 - \dfrac{1}{4}e^{x-1}, \quad u_0(x,t) = \dfrac{2}{\mathrm{ch}(xt)} - \dfrac{1}{4}e^{x+t-1};$

10. $u_t = u_{xx} + \dfrac{x + 2t^2\,\mathrm{th}(xt)}{\mathrm{ch}^2(xt)},$

$u(0,t) + u_x(0,t) = 1 + t, \quad u_x(1,t) = 1 + \dfrac{t}{\mathrm{ch}^2\,t},$

$u(x,0) = x, \quad u_0(x,t) = x + \mathrm{th}(xt);$

11. $u_t = u_{xx} + x - t^2\,\mathrm{ch}(xt) + x\,\mathrm{sh}(xt),$

$u_x(0,t) = t - 1, \quad u(1,t) - 3u_x(1,t) = 2(1-t) + \mathrm{ch}\,t - 3t\,\mathrm{sh}\,t,$

$u(x,0) = 1 - x, \quad u_0(x,t) = x(t-1) + \mathrm{ch}(xt);$

12. $u_t = u_{xx} + 2xt + \dfrac{1 + \mathrm{th}(x-t) - 2\,\mathrm{th}^2(x-t)}{\mathrm{ch}(x-t)},$

$u(0,t) + u_x(0,t) = t^2 + \dfrac{1 + \mathrm{th}\,t}{\mathrm{ch}\,t}, \quad u(1,t) = t^2 + \dfrac{1}{\mathrm{ch}(1-t)},$

$u(x,0) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}, \quad u_0(x,t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x-t)} + xt^2;$

13. $u_t = u_{xx} - \mathrm{sh}(x-t) - \mathrm{ch}(x-t),$

$u(0,t) - u_x(0,t) = e^t, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = e^{1-t},$

$u(x,0) = \mathrm{ch}\,x, \quad u_0(x,t) = \mathrm{ch}(x-t);$

14. $u_t = u_{xx} - \dfrac{3\left(1+\operatorname{ch}^2(1-x-t)+\operatorname{sh}(2-2x-2t)\right)}{8\big(\operatorname{ch}(1-x-t)\big)^{3/2}}$,

$u(0,t) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\operatorname{ch}(1-t)}, \quad u(1,t) - 2u_x(1,t) = \dfrac{3(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)}{2\sqrt{\operatorname{ch} t}}$,

$u(x,0) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\operatorname{ch}(1-x)}, \quad u_0(x,t) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\operatorname{ch}(1-x-t)}$;

15. $u_t = u_{xx} + \dfrac{5\big(2\operatorname{th}(x-t)-1\big)}{2\operatorname{ch}^2(x-t)}$,

$u(0,t) - u_x(0,t) = -\dfrac{5}{2}\left(\operatorname{th} t + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right), \quad u_x(1,t) = \dfrac{5}{2\operatorname{ch}^2(t-1)}$,

$u(x,0) = \dfrac{5}{2}\operatorname{th} x, \quad u_0(x,t) = \dfrac{5}{2}\operatorname{th}(x-t)$;

16. $u_t = u_{xx} - 1 + x\operatorname{ch}(xt) - t^2\operatorname{sh}(xt)$,

$u_x(0,t) = t, \quad 2u(1,t) + u_x(1,t) = 2 + 2\operatorname{sh} t + t\operatorname{ch} t$,

$u(x,0) = \dfrac{x^2}{2}, \quad u_0(x,t) = \dfrac{x^2}{2} + \operatorname{sh}(xt)$;

17. $u_t = u_{xx} - 2 - \dfrac{1+\operatorname{tg}(x-t)+2\operatorname{tg}^2(x-t)}{2\cos(x-t)}$,

$3u(0,t) - u_x(0,t) = \dfrac{3+\operatorname{tg} t}{2\cos t}, \quad u(1,t) = 1 + \dfrac{1}{2\cos(1-t)}$,

$u(x,0) = x^2 + \dfrac{1}{2\cos x}, \quad u_0(x,t) = x^2 + \dfrac{1}{2\cos(x-t)}$;

18. $u_t = u_{xx} + \dfrac{6+3t-x^2}{2\left(2+t-x^2\right)^{3/2}}$,

$u(0,t) - 3u_x(0,t) = \sqrt{2+t}, \quad u(1,t) + 3u_x(1,t) = \dfrac{t-2}{\sqrt{1+t}}$,

$u(x,0) = \sqrt{2-x^2}, \quad u_0(x,t) = \sqrt{2+t-x^2}$;

19. $u_t = u_{xx} + 3 + 2x\cos(xt) + 2t^2\sin(xt),$
$u(0,t) = t, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = t - 3 + 2(\sin t + t\cos t),$
$u(x,0) = -x^2, \quad u_0(x,t) = 2\sin(xt) + t - x^2;$

20. $u_t = u_{xx} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3\left(x + t^2 + x^2 t\right)}{(1+xt)^2},$
$5u(0,t) - u_x(0,t) = -3t, \quad u_x(1,t) = \dfrac{3t}{1+t} - \dfrac{2}{3},$
$u(x,0) = -\dfrac{x^2}{3}, \quad u_0(x,t) = 3\ln(1+xt) - \dfrac{x^2}{3};$

21. $u_t = u_{xx} + 1 - \dfrac{2xe^t}{\left(4-x^2\right)^{3/2}} + 2e^t \arcsin\dfrac{x}{2},$
$u_x(0,t) = e^t, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = \left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)e^t - \dfrac{3}{2},$
$u(x,0) = 2\arcsin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2}, \quad u_0(x,t) = 2e^t\arcsin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2};$

22. $u_t = u_{xx} + 2\cos(x+t) + 2\sin(x+t),$
$u(0,t) + 4u_x(0,t) = 2\sin t + 8\cos t, \quad u(1,t) = 2\sin(1+t),$
$u(x,0) = 2\sin x, \quad u_0(x,t) = 2\sin(x+t);$

23. $u_t = u_{xx} + \dfrac{1}{2}\operatorname{ch}(1+t-x) - \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}(1+t-x),$
$u(0,t) - u_x(0,t) = \dfrac{1}{2}e^{1+t}, \quad u(1,t) + 2u_x(1,t) = -\dfrac{1}{4}\left(e^t + 3e^{-t}\right),$
$u(x,0) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}(1-x), \quad u_0(x,t) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}(1+t-x);$

24. $u_t = u_{xx} - 1 + \dfrac{(x-1)\left(4 - t^3 - t^2(x-1)^2\right)}{\left(4 - t^2(x-1)^2\right)^{3/2}},$

$u(0,t) = t - \arcsin\dfrac{t}{2}, \quad u(1,t) + 4u_x(1,t) = 3(3+t),$

$u(x,0) = x^2, \quad u_0(x,t) = t + x^2 + \arcsin\dfrac{t(x-1)}{2};$

25. $u_t = u_{xx} + \dfrac{8(x+t)(x+t+2)+2}{\left(1+4(x+t)^2\right)^2},$

$u(0,t) - u_x(0,t) = \operatorname{arctg}(2t) - \dfrac{2}{1+4t^2}, \quad u_x(1,t) = \dfrac{2}{1+4(1+t)^2},$

$u(x,0) = \operatorname{arctg}(2x), \quad u_0(x,t) = \operatorname{arctg}(2x+2t);$

26. $u_t = u_{xx} + x + \dfrac{8t + x^2\left(x^2t^2 - t^3 - 4\right)}{(4 - x^2t^2)^{3/2}},$

$u_x(0,t) = t + \dfrac{\pi}{2}, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = 2t + 2\arccos\dfrac{t}{2} - \dfrac{t}{\sqrt{4-t^2}},$

$u(x,0) = \dfrac{\pi x}{2}, \quad u_0(x,t) = xt + x\arccos\dfrac{xt}{2};$

27. $u_t = u_{xx} - 3 + \dfrac{xe^{-t}}{(4-x^2)^{3/2}} - e^{-t}\arccos\dfrac{x}{2},$

$u(0,t) - u_x(0,t) = \dfrac{1+\pi}{2}e^{-t}, \quad u(1,t) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\pi}{3}e^{-t},$

$u(x,0) = \dfrac{3x^2}{2} + \arccos\dfrac{x}{2}, \quad u_0(x,t) = \dfrac{3x^2}{2} + e^{-t}\arccos\dfrac{x}{2};$

28. $u_t = u_{xx} + \left(1 + xt - t^3\right)e^{xt},$

$u(0,t) - u_x(0,t) = 1 + t - t^2, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = \left(t + t^2\right)e^t - 2,$

$u(x,0) = -x, \quad u_0(x,t) = te^{xt} - x;$

29. $u_t = u_{xx} + 2 + 2\cos(1 - x - t) + 2\sin(1 - x - t)$,
$u(0,t) = 2\cos(1-t), \quad 2u(1,t) + u_x(1,t) = 4\cos t - 2\sin t - 4,$
$u(x,0) = 2\cos(1-x) - x^2, \quad u_0(x,t) = 2\cos(1-x-t) - x^2;$

30. $u_t = u_{xx} + \dfrac{4x\left(1 + x^2t^2 + 2t^3\right)}{\left(1 + x^2t^2\right)^2}$,
$u(0,t) - u_x(0,t) = 1 - 4t, \quad u_x(1,t) = \dfrac{4t}{1+t^2} - 1,$
$u(x,0) = -x, \quad u_0(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}(xt) - x;$

9. ОТВЕТЫ

Задачи по численному интегрированию

1. $I = 1.351021717$

2. $I = 1.682941970$

3. $I = 1.041540518$

4. $I = 0.6362943610$

5. $I = 0.2501622$

6. $I = 5.151054001$

7. $I = 0.4060058496$

8. $I = 1.756648910$

9. $I = 4.306898218$

10. $I = 0.2017910096$

11. $I = 0.3820513769$

12. $I = -0.7083033360$

13. $I = 1.285398164$

14. $I = -1$

15. $I = 0.4304089413$

16. $I = 2.356171942$

17. $I = 3.093362496$

18. $I = 0.499595364$

19. $I = 3.688196462$

20. $I = 1$

21. $I = 8.0387148755$

22. $I = 1.800422551$

23. $I = 0.4474630833$

24. $I = 0.2350018146$

25. $I = 0.25$

26. $I = 1.449791758$