Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

KATEDRA INFORATYKI STOSOWANEJ I FIZYKI KOMPUTEROWEJ

PRACA INŻYNIERSKA

ERNEST JĘCZMIONEK

SYMULACJE EWOLUCJI KOALICJI MIESZANYCH

PROMOTOR:
prof. dr hab. Krzysztof Kułakowski

Kraków 2017

OŚWIADCZENIE AUTORA PRACY

OŚWIADCZAM, ŚWIADOMY ODPOWIEDZIALNOŚCI KARNEJ ZA POŚWIADCZENIE NIEPRAWDY, ŻE NINIEJSZĄ PRACĘ DYPLOMOWĄ WYKONAŁEM OSOBIŚCIE I SAMODZIELNIE, I NIE KORZYSTAŁEM ZE ŹRÓDEŁ INNYCH NIŻ WYMIENIONE W PRACY.

. . . . . .

PODPIS

AGH

University of Science and Technology in Krakow

Faculty of Physics and Applied Computer Science

Department of Applied Informatics and Computational Physics

Bachelor of Science Thesis

Ernest Jęczmionek

Simulations of evolution of mixed coalitions

Supervisor:
Professor Krzysztof Kułakowski

Krakow 2017

Serdecznie dziękuję . . . tu ciąg dalszych podziękowań np. dla promotora, żony, sąsiada itp.

Spis treści

1. Wprowadzenie

Teoria gier wielu osobom kojarzy się z opisem gier towarzyskich między dwojgiem graczy, lecz takie rozgrywki to rzadkość w naszym zróżnicowanym świecie, gdzie zwykle w grę ekonomiczną, społeczną czy polityczną angażuje się wielu uczestników. W niniejszej pracy zostaną umówione gry wieloosobowe o niepełnej informacji. W tym typie gier ważnym elementem strategii jest odpowiedni wybór koalicjantów. Oczywiście nie jest możliwe aby uwzględnić wszystkie czynniki mogące mieć wpływ na grę, ale zostaną przeanalizowane dwa równania ewolucyjne, które mogłyby sterować graczami oraz przeprowadzona będzie analiza ich stabilności. Modelami gry użytymi w niniejszej pracy będzie gra 3-osobowa oraz gra wieloosobowa, w której gracze będą ustawieni w okręgu. Symulacje partii w przypadku gier 3-osobowych będą obrazowane jako trójwymiarowe funkcje prawdopodobieństwa, natomiast dla gier wieloosobowych jako funkcje prawdopodobieństwa od czasu dla poszczególnych graczy.

!!!TEST CYTATÓW!!! [7] [6] [8] [4] [5] [3] [2] [1]

2. Opis teoretyczny

2.1. Gra

Niniejsza praca skupia się na grach wieloosobowych, których szczególnym przypadkiem jest gra 3-osobowa. Model gry 3-osobowej pokazuje, że decyzję jednego z zawodników mają bezpośredni wpływ na zachowanie sąsiadów. W modelu gry N-osobowej decyzje graczy będą wpływać nie tylko na najbliższych sąsiadów, ale pośrednio także na decyzje innych graczy. Omawiane tutaj gry są grami o niepełnej informacji, w tej pracy oznacza to grę, w której nie wszyscy uczestnicy znają prawdopodobieństwo wyborów przeciwników. Prawdopodobieństwo gry przeciwników będzie szacowane na podstawie obserwacji historii ich zagrań. Opisywane gry będą także grami ewolucyjnymi, czyli mającymi możliwość przewidywania i uczenia się na podstawie zachowań graczy.

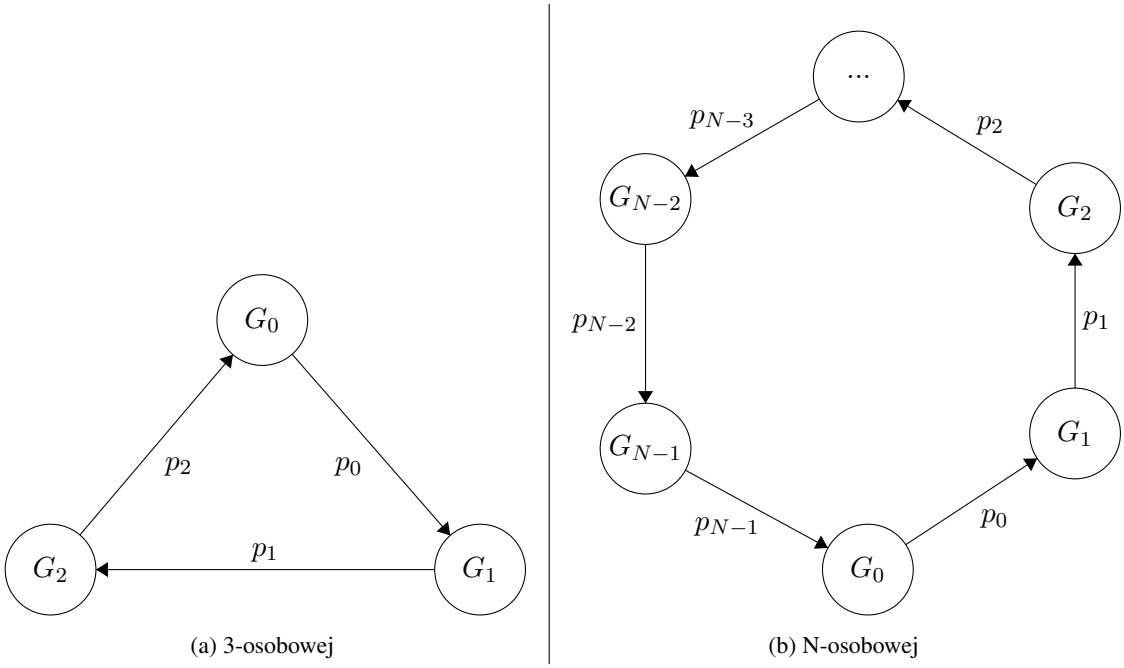
2.2. Model gry

Jak wcześniej wspomniano będą potrzebne dwa modele gier. Pierwszym z nich będzie model gry 3-osobowej 2.1a. Graczy nazwiemy odpowiednio G_0, G_1, G_2 (gracz zerowy, pierwszy, drugi). Każdy z nich posiada prawdopodobieństwo zagrania, w celu nawiązania koalicji z graczem o wyższym indeksie. To prawdopodobieństwo oznaczone jest jako p_i (i jest indeksem gracza), przy czym dla G_2 gracz o wyższym indeksie to G_0. Prawdopodobieństwo zagrania, w celu nawiązanie koalicji z graczem o niższym indeksie to $1 - p_i$, co nie będzie przechowywane, ponieważ w łatwy sposób można to wyliczyć. Analogicznie dla G_0 gracz o niższym indeksie to G_2. Ponieważ omawiana jest gra o niepełnej informacji żaden z zawodników nie ma dostępu do prawdopodobieństw innych graczy, lecz każdy ma dostęp do statystyki gry na którą składa się:

- $liczba_{partii}$ liczba rozegranych w grze partii

- $nast_i$ ilość zagrań G_i w celu zawiązania sojuszu z G_{i+1}, ilość zagrań G_i aby nawiązać sojusz z G_{i-1} wyraża się jako $liczba_{partii} - nast_i$

Model gry N-osobowe 2.1b będzie dysponował takimi samymi danymi jak model gry 3-osobowej. Różnicą między nimi będzie ustawienie graczy w okręgu, co będzie prowadziło do konsekwencji nieograniczających się do najbliższych sąsiadów. UKŁAD



(a) 3-osobowej (b) N-osobowej

Rysunek 2.1: Modele gry

2.3. Równania standardowe

Pomysł na równania standardowe został zaczerpnięty ze wzoru na siłę w polu potencjału.

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = -\nabla\varphi(\overrightarrow{r}) \tag{2.1}$$

Z tym że żądana jest maksymalizacja, a nie minimalizacja odpowiednika energii potencjalnej. Z tego powodu należy zmienić znak. Co przekłada się na ogólny wzór, gdzie β jest zmienną funkcji W:

$$W_\beta = \frac{\delta W}{\delta \beta} \tag{2.2}$$

W tym typie równań celem będzie maksymalizacja zysku(zyskiem jest prawdopodobieństwo) w czasie. Wyprowadzenie będzie przeprowadzone dla G_0, przy założeniu gry o pełnej informacji. Pozostałe dwa równania można wyprowadzić analogicznie. Niech $x = p_0$, $y = p_1$, $z = p_2$. Wypłata dana jest przez:

$$W = \underbrace{x(1-y)}_{\text{wypłata sojuszu } G_0 \text{ z } G_1} + \overbrace{(1-x)z}^{\text{wypłata sojuszu } G_0 \text{ z } G_2} \tag{2.3}$$

W równaniu 2.2 podstawiamy x jako β.

$$W_x = \frac{\delta W}{\delta x} = 1 - x - y$$

Iloraz różnicowy na zmianę wypłaty od czasu daje:

$$W_x(t) = \frac{W_x(t+\Delta t) - W_x(t)}{\Delta t}$$
$$W_x(t)\Delta t = W_x(t+\Delta t) - W_x(t) = \Delta p_0$$
$$\Delta p_0 = \Delta t(1-y-z) \tag{2.4}$$

W dalszej części będzie stosowane oznaczenie $\alpha = \Delta t$. Równanie wygląda obiecująco, gdyż człon $1-y$ jest prawdopodobieństwem zagrania G_1 aby zawiązać sojusz z G_0. Podobnie $-z$ prowadzi do sojuszu G_2 z G_0, minus przy z powoduje ubytek dla x, ponieważ prawdopodobieństwo zagrania G_0 w celu zawarcia sojuszu z G_2 jest dane przez $1-x$.

W przypadku gry o niepełnej informacji należy zmodyfikować równanie 2.4. Opis użytych parametrów można znaleźć w podrozdziale 2.2.

$$\Delta p_i = \alpha \cdot (1 - \frac{nast_{i+1}}{liczba_{partii}} - \frac{nast_{i-1}}{liczba_{partii}}) \tag{2.5}$$

2.4. Równania replikatorów

Model dynamiki replikatorów jest najbardziej znanym różniczkowym modelem teorii gier ewolucyjnych, przez co może stanowić dobry wybór do sterowania zachowaniem graczy. Tak jak poprzednio przyjmijmy prawdopodobieństwa $x = p_0$, $y = p_0$ oraz $z = p_0$ pamiętając, że prawdopodobieństwa przeciwników w symulacji są szacowane. Podstawowy wzór równania replikatorów wygląda następująco:

$$\dot{x} = x \cdot (W_x - \overline{W}) \tag{2.6}$$

Gdzie W_x jest średnią wypłatą dla strategii x (prawdopodobieństw strategii x), natomiast $\overline{W}$ jest średnią wypłatą co daje:

$$\dot{x} = x \cdot (\overbrace{(1-y)}^{W_x} - \overbrace{(x(1-y) + (1-x)z)}^{\overline{W}})$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{x} = x \cdot (1-x) \cdot (1-y-z)$$

Iloraz różnicowy zmiany wypłaty od czasu ponownie wyznaczy Δp_0:

$$x(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$
$$x(t)\Delta t = x(t+\Delta t) - x(t) = \Delta p_0$$

W dalszej części tej pracy $\alpha = \Delta t$. Co dla gry 3-osobowej generuje równania:

$$\begin{aligned}
\Delta p_0 &= \alpha p_0 \cdot (1-p_0) \cdot (1 - \frac{n_1}{liczba_{partii}} - \frac{n_2}{liczba_{partii}}) \\
\Delta p_1 &= \alpha p_1 \cdot (1-p_1) \cdot (1 - \frac{n_2}{liczba_{partii}} - \frac{n_0}{liczba_{partii}}) \\
\Delta p_2 &= \alpha p_2 \cdot (1-p_2) \cdot (1 - \frac{n_0}{liczba_{partii}} - \frac{n_1}{liczba_{partii}})
\end{aligned} \tag{2.7}$$

2.5. Ograniczenie prawdopodobieństwa

Wszystkie zmiany prawdopodobieństwa muszą zostać poddane funkcji ograniczającej.

$$p_i = ogr(p_i + \Delta p_i) \tag{2.8}$$

W przeciwnym razie równania z poprzednich podrozdziałów mogą wyjść poza przedział $< 0,1 >$. Każde nowo obliczone prawdopodobieństwo podawane jest jako parametr do funkcji ogr, a dopiero jej rezultat jest przypisywany poszczególnym prawdopodobieństwom graczy. Funkcja dbająca o pozostanie prawdopodobieństwa w dziedzinie wygląda następująco:

$$ogr(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } p_i > 1 \\ p_i & \text{jeżeli } 1 \geq p_i \geq 0 \\ 0 & \text{jeżeli } p_i < 0 \end{cases}$$

Wyjaśnienia wymaga wartość α, która została przyjęta jako 0.1. Jest to wartość przyjęta arbitralnie aby spowolnić rozgrywkę oraz umożliwić łatwiejszą zmianę koalicji.

2.6. Ograniczenie prawdopodobieństwa - przykłady

Najpierw przeanalizowane zostaną równania standardowe dla gry 3-osobowej o prawdopodobieństwie początkowym $\frac{1}{2}$ i $\alpha = 1$. Gdzie N oznacza zagranie G_i mające na celu zawiązanie sojuszu z G_{i+1}, a P ilość zagranieG_i mające na celu zawiązanie sojuszu z G_{i-1}. UKŁAD

$$G_0 = N, G_1 = P, G_2 = N \qquad\qquad G_0 = N, G_1 = P, G_2 = P$$

$$\begin{cases} \Delta p_0 = (1-0-1) = 0 & p_0 = \frac{1}{2} \\ \Delta p_1 = (1-1-1) = -1 & p_1 = 0 \\ \Delta p_2 = (1-1-0) = 0 & p_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta p_0 = (1-0-\frac{1}{2}) = 0 & p_0 = \frac{3}{4} \\ \Delta p_1 = (1-\frac{1}{2}-1) = -\frac{1}{2} & p_1 = 0 \\ \Delta p_2 = (1-0-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} & p_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Schemat przedstawia dwie osobne tury: po lewej pierwszą, a po prawej drugą. Parametr $\alpha = 1$ powoduje szybkie zawiązanie mocnych koalicji, których przerwanie staje się mało prawdopodobne, co może praktycznie uniemożliwiać jakiekolwiek zmiany sojuszy.

Wartym rozważenia jest czy w równaniach replikatorów potrzebna będzie $\alpha < 1$, skoro posiadają one człon postaci $x(1-x)$ gasnący na krańcach przedziału prawdopodobieństwa. Założenia zostały oparte na poprzednim przykładzie.

$$G_0 = N, G_1 = P, G_2 = N$$

$$\begin{cases} \Delta p_0 = \frac{1}{2} \cdot (1-\frac{1}{2}) \cdot (1-0-1) = 0 & p_0 = \frac{1}{2} \\ \Delta p_1 = \frac{1}{2} \cdot (1-\frac{1}{2}) \cdot (1-1-1) = 0 & p_1 = \frac{1}{4} \\ \Delta p_2 = \frac{1}{2} \cdot (1-\frac{1}{2}) \cdot (1-0-1) = 0 & p_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$G_0 = N, G_1 = P, G_2 = P$$

$$\begin{cases} \Delta p_0 = \frac{1}{2} \cdot (1-\frac{1}{2}) \cdot (1-0-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} & p_0 = \frac{5}{8} \\ \Delta p_1 = \frac{1}{4} \cdot (1-\frac{1}{4}) \cdot (1-\frac{1}{2}-1) = -\frac{1}{32} & p_1 = \frac{7}{32} \\ \Delta p_2 = \frac{1}{2} \cdot (1-\frac{1}{2}) \cdot (1-0-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} & p_2 = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Jak widać najszybsza zmiana zachodzi dla pierwszego gracza, który traci 25% z prawdopodobieństwa sojuszu z graczem o wyższym indeksie. W kolejnej partii nie widzimy już tak dużych zmian. Należy odpowiedzieć na pytanie czy jest to na tyle dużo, aby zastosować α taką jak w równaniach standardowych. Powinno się poruszyć dwie kwestie. Dynamika prawdopodobieństwa jest akceptowalna(wynosi

do 10%), ale tylko dla prawdopodobieństw które oddalają się od środka przedziału, a grę rozpoczynamy właśnie w nim. Drugą sprawą jest porównanie obu równań. Porównanie wyników, o różnym kroku czasowym nie jest najłatwiejszą rzeczą do opisania.

Omówiony teraz zostanie szczególny przypadek, gdy w dwóch osobnych grach żadna para graczy nie nawiązała koalicji. Użyte będą równania standardowe, prawdopodobieństwo początkowe $\frac{1}{2}$ oraz $\alpha = 1$.

$$G_0 = N, G_1 = N, G_2 = N \qquad G_0 = P, G_1 = P, G_2 = P$$

$$\begin{cases} \Delta p_0 = (1 - 1 - 1) = -1 & p_0 = 0 \\ \Delta p_1 = (1 - 1 - 1) = -1 & p_1 = 0 \\ \Delta p_2 = (1 - 1 - 1) = -1 & p_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta p_0 = (1 - 0 - 0) = 1 & p_0 = 1 \\ \Delta p_1 = (1 - 0 - 0) = 1 & p_1 = 1 \\ \Delta p_2 = (1 - 0 - 0) = 1 & p_2 = 1 \end{cases}$$

Przypadek ten pokazuje skutki braku ograniczenia kroku czasowego. Następny ruch jest z góry znany, każdy z graczy wykona ruch przeciwny do poprzedniego co daje w obu grach:

$$\begin{cases} \Delta p_0 = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0 \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0 \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

Brak zmian prawdopodobieństw, gracze dokonują wyboru jak poprzednio.

$$G_0 = P, G_1 = P, G_2 = P \qquad G_0 = N, G_1 = N, G_2 = N$$

$$\begin{cases} \Delta p_0 = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} & p_0 = \frac{1}{3} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} & p_1 = \frac{1}{3} \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} & p_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta p_0 = (1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} & p_0 = \frac{2}{3} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} & p_1 = \frac{2}{3} \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} & p_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Nie jest to powrót do punktu wyjścia, w którym wyjściowym prawdopodobieństwem jest $\frac{1}{3}$ dla gry przedstawionej po lewej stronie i $\frac{2}{3}$ dla gry po prawej. W pamięci każdego z graczy jest liczba rozegranych partii ze swoimi rywalami co będzie prowadziło do niekoniecznie oczywistych zachowań. Od teraz dokonywany wybór będzie tym o większym prawdopodobieństwie.

$$G_0 = P, G_1 = P, G_2 = P \qquad G_0 = N, G_1 = N, G_2 = N$$

$$\begin{cases} \Delta p_0 = (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} & p_0 = \frac{5}{6} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} & p_1 = \frac{5}{6} \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} & p_2 = \frac{5}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta p_0 = (1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{2} & p_0 = \frac{1}{6} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{2} & p_1 = \frac{1}{6} \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{2} & p_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Obserwowana jest zmiana zachowania graczy spowodowana częstością gier przeciwników. Sytuacja takiej fluktuacji może się powtarzać. Dysponując odpowiednio dużą grupą instancji gry oraz dostatecznie długą rozgrywką możliwe byłoby zaobserwowanie funkcji prawdopodobieństwa od czasu (równą dla wszystkich graczy instancji) w kształcie sinusoidy o rosnącym okresie. Sytuacja taka nie jest pożądana, co stanowi dodatkowy argument za użyciem $\alpha < 1$ skutecznie niwelującego wystąpienie takich sytuacji.

2.7. Rozwiązanie stacjonarne równań standardowych

Do ustalenia punktów stałych potrzebny jest zanik dynamiki $\Delta p_i = 0$. Krok czasowy zostanie pominięty, gdyż nie daje wkładu do obliczeń. Należy rozwiązać układ równań, gdzie przyjęte jest $x = p_0$, $y = p_1$, $z = p_2$:

$$\begin{cases} 1 - y - z = 0 \\ 1 - x - z = 0 \\ 1 - x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow p_0 = p_1 = p_2 = \frac{1}{2} \tag{2.9}$$

Z czego wynika że gra startująca w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ nie powinna z niego wyjść. Byłoby tak gdyby prawdopodobieństwa użyte w równaniu były faktycznymi prawdopodobieństwami p_i, są one natomiast jedynie obserwacją zachowania pozostałych graczy. Są ono dane jako $\frac{nast_j}{liczba_{partii}}$. Użycie prawdopodobieństw obserwowanych umożliwia opuszczenie punktu stałego.

2.8. Stabilność równań replikatorów

Stabilność równań replikatorów będzie badana poprzez znalezienie ich wartości własnych. Najpierw przyjmijmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, z) = \Delta p_0 = x(1 - x)(1 - y - z) \\ \dot{y} &= g(x, y, z) = \Delta p_1 = y(1 - y)(1 - x - z) \\ \dot{z} &= h(x, y, z) = \Delta p_2 = z(1 - z)(1 - x - y) \end{aligned}$$

Punkty stałe wymagają zanikania pochodnych.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_i^*, y_i^*, z_i^*$$

Punkty stałe dane są jako:

$$(x_i^*, y_i^*, z_i^*) = \begin{cases} (0, 0, 0) & i = 0 \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & i = 1 \\ (1, 1, 1) & i = 2 \\ P_3\{0, 1, \xi\} & i = 3, \text{ permutacja gdzie } \xi \in < 0, 1 > \end{cases}$$

Przeanalizowane zostaną wyżej wymienione przypadki, przy czym w ostatnim przypadku będzie uwzględniony tylko jeden, ze względu na symetrię. Do znalezienia wartości własnych będzie potrzebna macierz Jacoby'ego (macierz pochodnych cząstkowych funkcji).

$$J_i = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\delta \dot{x}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{x}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{x}}{\delta z} \\ \frac{\delta \dot{y}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} \\ \frac{\delta \dot{z}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{z}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{z}}{\delta x} \end{array} \right) \Bigg| \begin{array}{l} x = x_i^* \\ y = y_i^* \\ z = z_i^* \end{array}$$

Pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \dot{x}}{\delta x} &= 1 - y - z - 2x + 2xy + 2xz & \frac{\delta \dot{y}}{\delta x} &= y^2 - y \\
\frac{\delta \dot{x}}{\delta y} &= x^2 - x & \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} &= 1 - x - z - 2y + 2xy + 2yz \\
\frac{\delta \dot{x}}{\delta z} &= x^2 - x & \frac{\delta \dot{y}}{\delta z} &= y^2 - y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \dot{z}}{\delta x} &= z^2 - z \\
\frac{\delta \dot{z}}{\delta y} &= z^2 - z \\
\frac{\delta \dot{z}}{\delta z} &= 1 - x - y - 2z + 2xz + 2yz
\end{aligned}$$

Wyznaczenie wartości własnych.

$$J_{i,\lambda} = J_i - \lambda I = \begin{vmatrix} \frac{\delta \dot{x}}{\delta x} - \lambda & \frac{\delta \dot{x}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{x}}{\delta z} \\ \frac{\delta \dot{y}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} - \lambda & \frac{\delta \dot{y}}{\delta z} \\ \frac{\delta \dot{z}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{z}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{z}}{\delta z} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$J_{i,\lambda} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 \in \{1, 1, 1\} \\ \lambda_1 \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\} \\ \lambda_2 \in \{1, 1, 1\} \\ \lambda_3 \in \{0, -z, z - 1\} \end{cases}$$

Warunkiem na stabilność punktu jest $Re\lambda_i < 0$, co eliminuje nam wszystkie lambdy poza λ_3. Pokazuje to że punkty o kombinacji $(0, 1, \xi)$ są marginalnie stabilne.

Tablica 2.1: Stabilność na krawędzi sześcianu

x	y	1-x-y	$\dot{z}$
0	0	1	$z \cdot (1 - z)$
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	-1	$-z \cdot (1 - z)$

Ponieważ analiza matematyczna nie przyniosła jednoznacznej odpowiedzi co do stabilności, można spróbować przeanalizować równanie $\dot{z}$, dla sytuacji gdy p_i dwóch z graczy dojdą do granicy prawdopodobieństwa. W pierwszym wierszu tabelki 2.1 widać, że x dąży do zawarcia sojuszu z z, natomiast y gra aby osiągnąć sojusz z x. W tej sytuacji prawdopodobieństwo strategii z będzie rosło do zawiązania koalicji z x. W kolejnych dwóch wierszach są stany ustalone. W wierszu drugim zmiana $\dot{z}$ nie ma znaczenia gdyż obaj przeciwnicy są w wyłącznej koalicji z z. Wiersz trzeci pokazuje przeciwną sytuację, w której jakakolwiek zmiana $\dot{z}$ nie wniesie nic do gry ze względu na trwały sojusz między x a y. Ostatni wiersz pokazuje przypadek symetryczny do pierwszego, z tym że jedynym możliwym sojusznikiem dla z jest y. Oczywiście omawiany teraz przykład do osiągnięcia stabilności wymagałby braku zmian decyzji pozostałych graczy. Musieli by oni znać realne prawdopodobieństwo przeciwników.

3. Implementacja symulacji

W tym rozdziale chciałbym przedstawić technologie i narzędzia użyte do wykonania symulacji oraz sposoby ich uruchomienia.

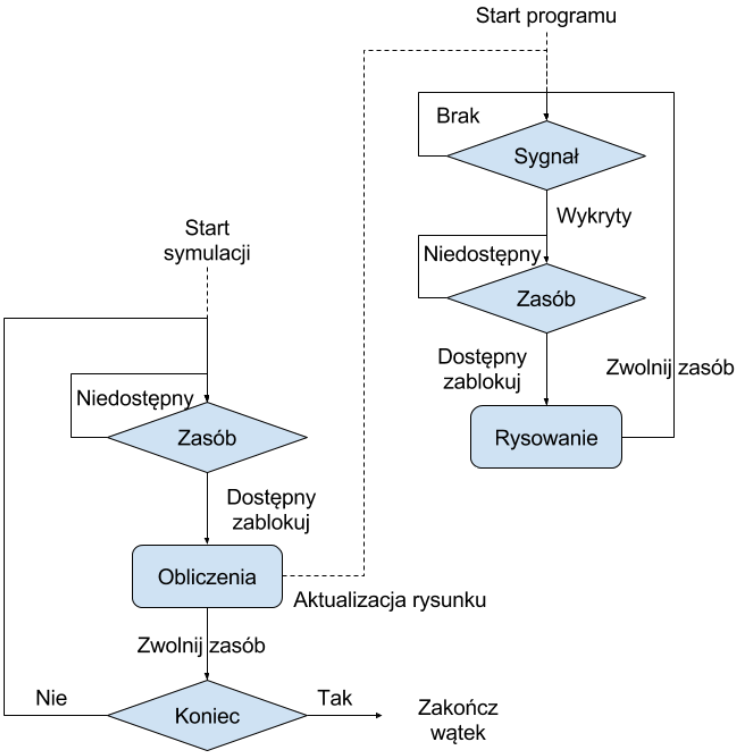
3.1. Środowisko QT

CHECK Zdecydowałem się wykorzystać QT Creator IDE z kilku powodów, które zamierzam zaraz rozwinąć. Najważniejszą cechą środowiska jest udostępnienie go na kilku rodzajach licencji. Osobiście użyłem licencji LGPL, która pozwoliła mi bez ponoszenia kosztów korzystać ze środowiska. Kolejnym ważnym elementem jest multiplatformowość pozwalająca w łatwy sposób przenosić kod program między systemami operacyjnymi, o ile nie zostały użyte biblioteki dostępne tylko na jeden z systemów. Kolejną z zalet jest łatwy i intuicyjny interfejs tworzenia graficznego interfejsu użytkownika, osoba mająca wcześniej styczność z chociażby biblioteką Swing Java'y nie powinna mieć problemu z zaadaptowaniem się do formularza QT Creatora. Wykorzystywany jest model sygnałów i slotów, polegający na emitowaniu sygnału przez zdarzenie, który następnie trafia do podłączonego slotu. Jest to w stanie znacznie ułatwić komunikację między elementami. Używanie nowoczesnego języka C++ (ja używałem wersji 14) nie sprawia problemów, lecz powinniśmy być świadomi że przykładowe uruchomienie wątków w aplikacji powinno być zrobione przy użyciu klas i funkcji z biblioteki QT.

3.2. Schemat programu

Rysunek 3.1 przedstawia poglądowy schemat działania programu. Dzieląc rysunek na lewą i prawą część możemy wyodrębnić dwa wątki. Po lewej wątek odpowiadający za wykonanie symulacji, po prawej wątek odpowiadający za rysowanie. Określeniem Źasóbópisuję współdzielone dane (opisane w podrozdziale 3.4) między wątkami, którymi jest historia symulacji.

Podczas startu programu zostaje narysowany sześcian, po czym program przechodzi w stan nasłuchiwania na sygnały. Przykładowymi sygnałami mogą być zmiana rozmiaru okna aplikacji, bądź obrót figury. Po wykryciu takowego, następują próby zablokowania dostępu do zasobu dopóki nie zostanie to wykonane (zasób może być zablokowany przez inny wątek). Następnie na podstawie historii symulacji i/lub sygnału dokonywane jest nowe rysowanie. Po czym zasób zostaje zwolniony, a główny wątek (odpowiedzialny za rysowanie) wraca do stanu nasłuchiwania. Podczas startu symulacji (spowodowanej naciśnięciem przycisku `RUN`) identycznie poprzednio musi być uzyskany dostęp do zasobów. Dopiero



Rysunek 3.1: Schemat programu

po tym możliwe jest przeprowadzenie symulacji po jednej partii dla każdej instancji gry. Następnie zostaje to zapisane do zasobów, które zostają zwolnione. Równocześnie do wątku głównego wysyłany jest sygnał mówiący o aktualizacji historii symulacji. Jeśli była to ostatnia planowana partia wątek kończy swoje działanie.

3.3. Sygnały, sloty i mutex

Komunikacja między klasami dziedziczącymi po `QObject` odbywa się przy pomocy połączonych ze sobą sygnałów i slotów. Można na nie patrzeć jako funkcje (sloty) oraz wskaźniki do funkcji (sygnały). Sygnał może trafiać do wielu slotów oraz do slotu może docierać wiele sygnałów. Ważne jest aby typy parametrów w deklaracji sygnału pokrywały się z typami parametrów deklaracji slotu. W przypadku gdy sygnał będzie miał zbyt dużo parametrów dla slotu, nadmiarowe parametry zostaną pominięte.

W celu uniknięcia kolizji zapis-odczyt na współdzielonych zasobach została użyta klasa `mutex`. Jest to semafor, lecz nie chroni on danych przed dostępem z wielu źródeł, a jedynie informuje czy zasoby są obecnie używane czy nie. Nie ma niebezpieczeństwa wykonania operacji kolizyjnych, gdyż jest wykorzystywany jedynie przez wewnętrzne struktury programu, które nie wykonują operacji na wspólnych zasobach jeśli semafor jest zablokowany.

3.4. Kod

W tym podrozdziale będą opisane kluczowe fragmenty kodu, niezbędne do zrozumienia implementacji programu. Współdzielonymi zasobami są:

```
1 template<typename T> using tup3= tuple<T,T,T>;
2 vector<vector<tup3<double>>> beginsp; //wektor punktów początkowych
      odcinków
3 vector<vector<tup3<double>>> endsp; //wektor punktów końcowych odcink
      ów
4 vector<tup3<int>>colorsp;
5 mutex points;
```

Interfejs klasy `Game` Cała symulacja przeprowadzana jest w klasie `Game`, dlatego chciałbym ją teraz omówić. Reprezentuje ona jedną instancję gry 3-osobowej. Parametrem konstruktora jest indeks tablicy `decision_funs`, której element zostaje przypisany do `decision`. `function` jest wrapperem biblioteki standardowej dla dowolnej funkcji, wyrażenia lambda, wyrażenia bind, funkcjonału lub wskaźników do funkcji. W poniższym kodzie `function` jest parametryzowany bezargumentowym, bezwynikowym zachowaniem. Funkcja `next` przeprowadza rozgrywkę jednej partii. Jej implementacja zostanie przedstawiona później. Zmienna `current` odpowiada $liczba_{partii}$, natomiast `nr[i]` odpowiada $nast_i$ (opisano w podrozdziale 2.2). Funkcja `checker` jest odpowiednikiem funkcji *ogr* (opisano w podrozdziale 2.5). Tablica `decision_funs` zawiera funkcje lambda mające dostęp do prywatnych zmiennych klasy `Game`. W tablicach `result` znajdują się obliczone Δp_i, które następnie poddawane są funkcji ograniczającej.

```
1  class Game{
2  public:
3      Game(int f);
4      tup3<double> next();
5      int getCurrent(); //zwraca numer bieżącej partii
6      tup3<double> prelast(); //zwraca pre
7  private:
8      array<double,3> p; //prawdopodobieństwa
9      tup3<double> pre; //ostatnia krotka prawdopodobieństw na
           podstawie, których było dokonane losowanie sojuszników
10     int current; //numer bieżącej partii
11     array<int,3> nr;
12     double checker(double r);
13     function<void()> decision; //dokonuje modyfikacji prawdopodobień
           stw
14     array<function<void()>,2>decision_funs={{
```

```
15        [this](){//standardowe
16          array<double,3> result= {
17              0.1*( 1 - static_cast<double>(nr[1])/current -
                    static_cast<double>(nr[2])/current),
18              0.1*( 1 - static_cast<double>(nr[2])/current -
                    static_cast<double>(nr[0])/current ),
19              0.1*( 1 - static_cast<double>(nr[0])/current -
                    static_cast<double>(nr[1])/current )
20          };
21          for(int i=0; i<3; i++)
22              p[i]= checker(p[i]+result[i]);
23        },
24        [this](){//replikatorów
25          array<double,3> result= {
26              0.1*(p[0]*(1-p[0])*(1-static_cast<double>(nr[1])/current-
                    static_cast<double>(nr[2])/current)),
27              0.1*(p[1]*(1-p[1])*(1-static_cast<double>(nr[0])/current-
                    static_cast<double>(nr[2])/current)),
28              0.1*(p[2]*(1-p[2])*(1-static_cast<double>(nr[0])/current-
                    static_cast<double>(nr[1])/current))
29          };
30          for(int i=0; i<3; i++)
31              p[i]= checker(p[i]+result[i]);
32        }
33      }};
34  };
```

Implementacja `Game::next` Tablica `choices` zawiera losowe wartości dla każdego z zawodników, na podstawie których dokonywane jest losowanie sojusznika.

```
1  tup3<double> Game::next(){
2       pre= make_tuple(p[0],p[1],p[2]);
3       current++;
4       array<double,3> choices= {static_cast<double>(rand())/RAND_MAX,
            static_cast<double>(rand())/RAND_MAX, static_cast<double>(rand
            ())/RAND_MAX};
5       for(int i=0; i<3; i++)
6            if(choices[i]<p[i])
7                 nr[i]++;
8       decision();
```

```
9       return make_tuple(p[0],p[1],p[2]);
10  }
```

Implementacja wątku symulującego `QtConcurrent::run` jest funkcją uruchamiającą w osobnym wątku funkcję podaną jako parametr. Zwraca ona obiekt `QFuture`, który nie może przerwać lub wstrzymać wątku. Poprzez `beginsp.resize(p)` tworzony jest wektor posiadający p pustych elementów(wektorów krotek), ponieważ już w pierwszej partii będziemy potrzebować osobnego wektora dla każdej instancji gry. Natomiast `beginsp[i].reserve(g)` rezerwuje pamięć dla g partii, gdyby ta funkcja nie została użyta prawdopodobnie wystąpiłaby realokacja pamięci, w celu zapewnienia jej ciągłości. Przekładałoby się to na spowolnienie działania programu. Napisałem prawdopodobnie, ponieważ standard języka nie precyzuje ilości pamięci domyślnie rezerwowanej przez wektor, co jest zostawione po stronie implementacji. Przed wykonaniem każdej partii wątek czeka na dostęp do zasobu. Funkcja `try_lock()` zwróci `true` w przypadku udanego przydzielenia zasobu, w przeciwnym razie zwróci `false`.

```
1   QtConcurrent::run(
2               [&]()->void{
3                   ui->pushButton_Run->setEnabled(false);
4                   const int g= nr_rounds;
5                   const int p= nr_players;
6                   const int f= fun;
7                   vector<unique_ptr<Game>> tab;
8                   std::default_random_engine generator;
9                   std::uniform_int_distribution<int> distribution
                        (0,255);
10                  auto r= bind(distribution, generator);
11                  clear_vectors();
12                  chrono::milliseconds d(delay);
13                  beginsp.resize(p);
14                  endsp.resize(p);
15                  for(int i=0; i<p;i++){
16                      tab.push_back(make_unique<Game>(f));
17                      colorsp.push_back(make_tuple( r(), r(), r() ));
18                      beginsp[i].reserve(g);
19                      endsp[i].reserve(g);
20                  }
21                  for(int j=0; j<g;j++){
22                      if(quit) return;
23                      while(!points.try_lock());
24                      for(int i=0; i<p;i++){
```

```
25                          beginsp[i].push_back(tab[i]->next());
26                          endsp[i].push_back(tab[i]->prelast());
27                      }
28                      points.unlock();
29                      emit copy();
30                      this_thread::sleep_for(d);
31                  }
32                  ui->pushButton_Run->setEnabled(true);
33              });
```

3.5. Rysowanie 3D

Rysowanie

Rozciąganie

Obracanie

3.6. Makefile

Symulując grę w okręgu postanowiłem rysować wykresy funkcji prawdopodobieństwa od numeru partii. Do tego celu uznałem, że najbardziej odpowiedni będzie plik `Makefile`, który wykona kompilację, uruchomienie oraz narysowanie wykresu przy pomocy programu gnuplot. Aby uruchomić program należy podać argument: G - ilość partii do rozegrania oraz P - ilość graczy. Poniżej przykładowe polecenie do wykonania symulacji dla 100 partii rozegranych przez 20 zawodników.

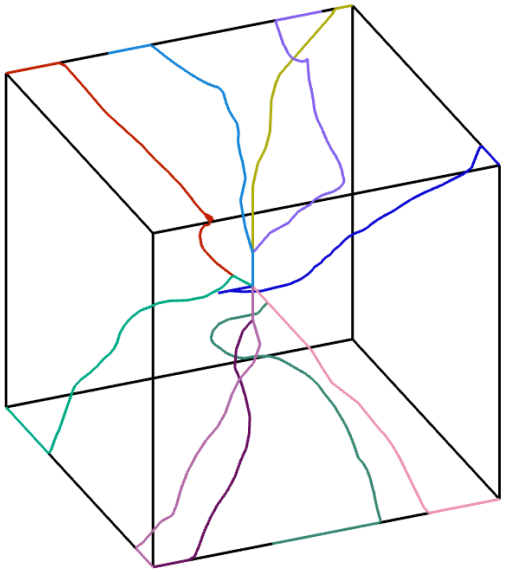
```
make G=100 P=20
```

Wymagany kompilator g++ ver.5+ oraz gnuplot.

4. Wyniki

4.1. Gry 3-osobowe

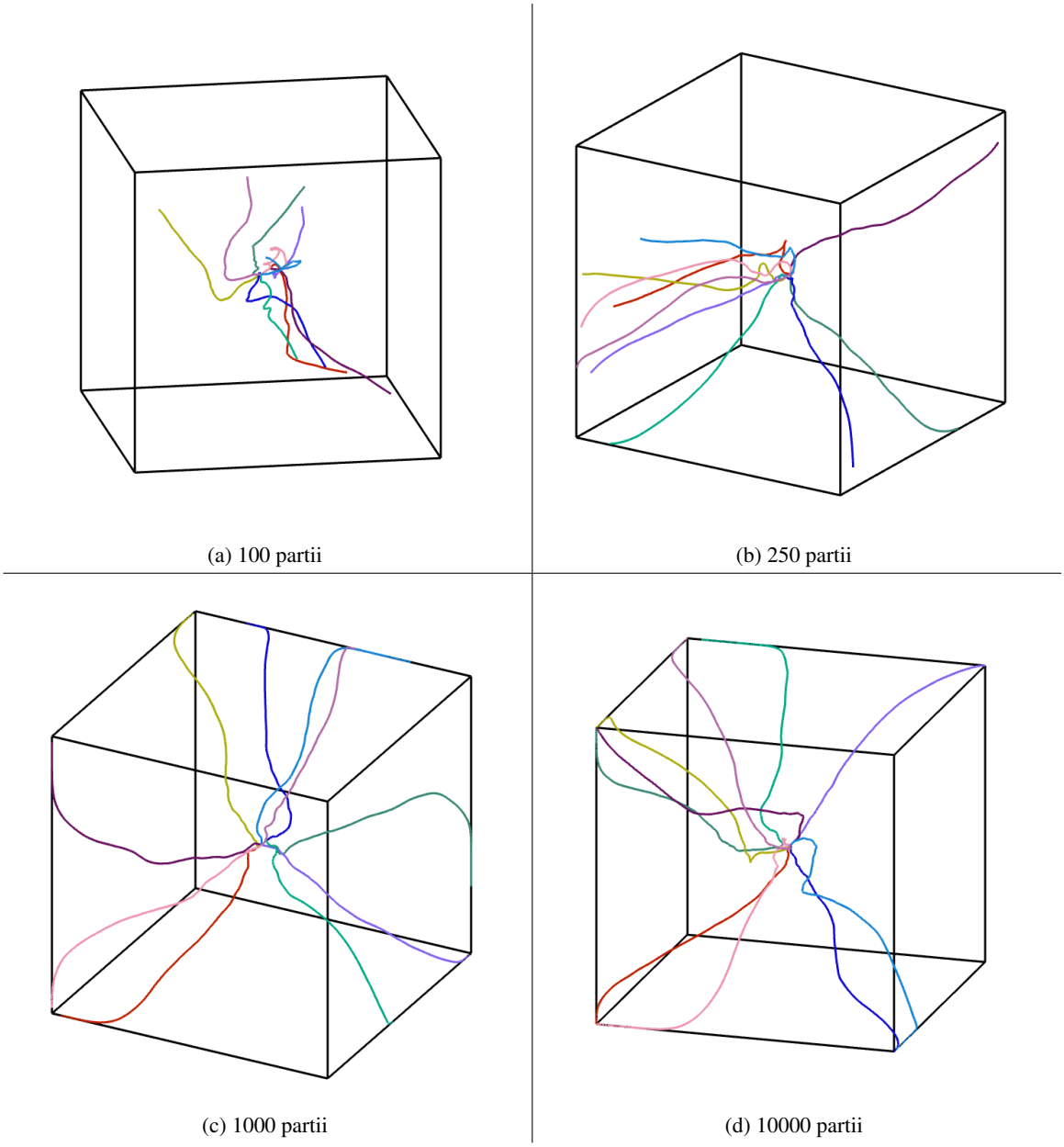
Równania standardowe Analiza teoretyczna równań wskazała punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ jako punkt stały. Wynika to z założenia gry o pełnej informacji. Nie jest tak dla symulacji, której funkcje opuszczają centrum sześcianu. Osiągnięcie przez funkcję krawędzi sześcianu oznacza zawiązanie koalicji, po czym funkcja przesuwa się po krawędzi dążąc do wierzchołka. Odnosząc tabelkę 2.1 do równań standardowych należy stwierdzić, że funkcja powinna osiągać punkt stabilności na krawędzi i nie poruszać się dalej. Byłoby tak gdyby błąd szacowania prawdopodobieństw przeciwników był odpowiednio mały. Szacowanie prawdopodobieństw dane jest przez $\frac{nast_j}{liczba_{partii}}$. Wynika z tego, że wystarczy kilka zagrań przeciwników niezgodnych z zawartą koalicją, aby gracz szacujący ich prawdopodobieństwa nie mógł stwierdzić, że ich realne prawdopodobieństwa wynoszą 0 lub 1. Pokazuje to rysunek 4.1, na którym widać funkcje o wielu punktach przegięcia. Szybkość dążenia do wierzchołków będzie malała wraz z czasem spędzonym na krawędzi, gdyż



Rysunek 4.1: Równania standardowe: 100 partii, 10 instancji

$$\lim_{nast_j \to liczba_{partii} \wedge liczba_{partii} \to \infty} \frac{nast_j}{liczba_{partii}} \in \{0, 1\}$$

Równania replikatorów Równania replikatorów charakteryzują się mniejszą dynamiką gry w stosunku do równań standardowych. Przyczyną jest człon $x(1 - x)$, którego maksimum wynosi 0.25. Daje to czterokrotnie mniejsze Δp w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Na krańcach dziedziny $< 0, 1 >$ wspomniany człon szybko dąży do 0, co znacznie opóźnia osiągnięcie koalicji. Widać to porównując rysunki 4.1 oraz 4.2a. Natomiast rysunki 4.1 oraz 4.2d pokazują liczbę partii potrzebną do osiągnięcia podobnych miejsc w przestrzeni sześcianu. Gra używająca równań replikatorów musiała wykonać ich 100 razy więcej niż gra używająca równań standardowych.



(a) 100 partii

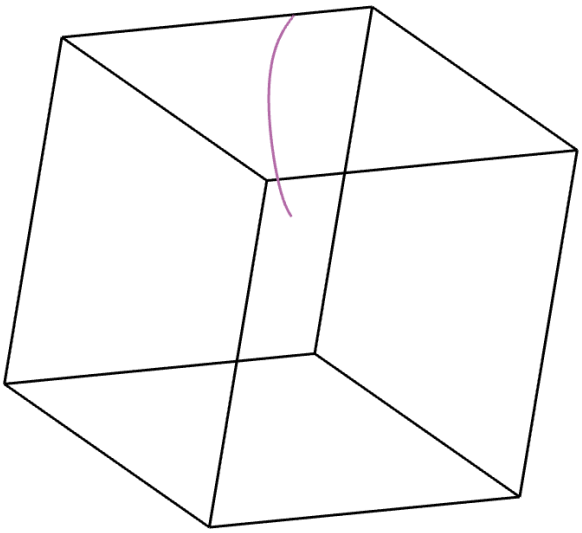
(b) 250 partii

(c) 1000 partii

(d) 10000 partii

Rysunek 4.2: Równania replikatorów: 10 instancji

Zaś analiza stabilności pokazała, że każda krawędź sześcianu powinna być linią punktów stabilnych, co obrazuje rysunek 4.3. Natomiast symulacja przedstawiona na rysunku 4.2c pokazuje przemieszczanie się funkcji ku wierzchołkom. Powodem tego jest błąd gracza w szacowaniu prawdopodobieństwa przeciwników, wynikający z gry o niepełnej informacji. Nie występuje on jednak we wszystkich instancjach gry, na przykład w jasnozielonej rozgrywce 4.2c widać, że funkcja nieznacznie porusza się po krawędzi, co świadczy o mniejszym błędzie szacowania prawdopodobieństwa w stosunku do innych rozgrywek. Analiza stabilności wskazuje, że punkty $(0,0,0)$ oraz $(1,1,1)$ nie są stabilne, co wynika z tego iż żadna z symulacji do nich nie zmierza. Co więcej pierwszy i ostatni wiersz tabelki 2.1 nie może wystąpić w symulacji. Osiągnięcie punktu $(0,0,\xi)$ lub $(1,1,\xi)$, gdzie ξ nie jest w pobliżu 0 lub 1, nie jest możliwe w symulacji. Oznaczałoby to zawiązanie sojuszu pomiędzy graczami, których zagrania nie mają na celu zawiązania między nimi koalicji. Potwierdzają to symulacje z których żadna nie dochodzi do krawędzi wychodzących z punktów $(0,0,0)$ oraz $(1,1,1)$.

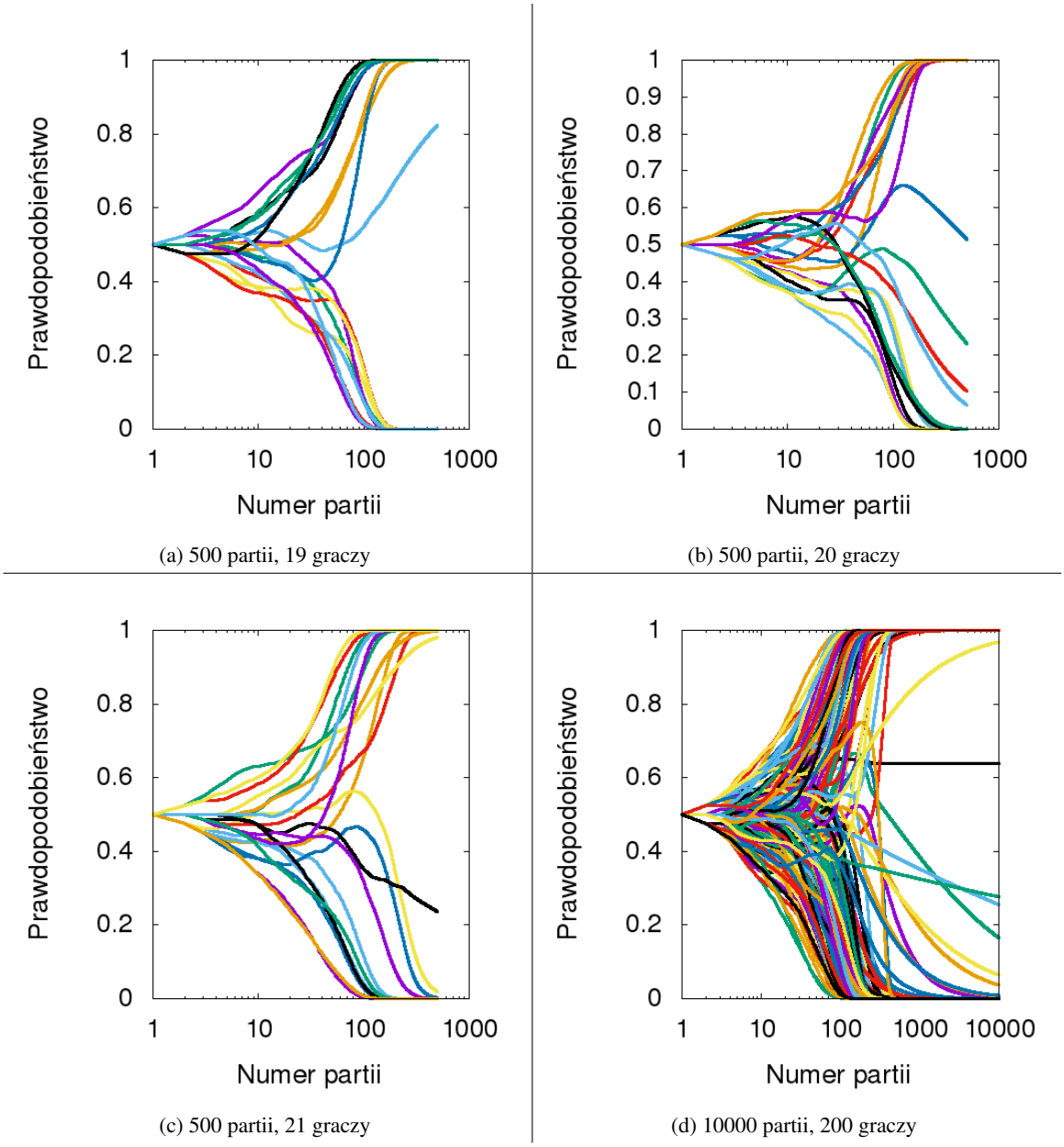


Rysunek 4.3: Równania replikatorów, gra o pełnej informacji: 300 partii, 10 instancji

4.2. Gry N-osobowe

W grze w której ustawionych w okręgu jest N graczy, spodziewamy się, że istotnym czynnikiem będzie parzystość ich liczby. Teoretyczna liczba graczy mogących nie znaleźć koalicjanta wynosi $< N \bmod 2, \lfloor \frac{N}{3} \rfloor >$. W grze o parzystej liczbie graczy zawsze istnieje rozwiązanie, które gwarantuje każdemu graczowi przynależność do koalicji. Natomiast w grach o nieparzystej liczbie graczy musi istnieć co najmniej jeden zawodnik, który nie zawrze sojuszu (posiadanie prawdopodobieństwa 0 lub 1, nie jest równoznaczne z byciem w sojuszu, co pokazały symulacje dla 3-graczy, kiedy funkcje dążyły do wierzchołków). Maksymalna liczba graczy bez sojuszu może być maksymalnie połową liczby graczy będących w sojuszy(maksymalnie co trzeci gracz może być bez sojuszy z zaokrągleniem w dół). Gdyby była większa oznaczałoby to, że istnieją pary sąsiadujących graczy, którzy nie są w żadnej koalicji. Taka sytuacja nie może mieć miejsca, ponieważ omawiane pary stałyby się koalicjami.

W przypadku występowania dużej ilości zawodników łatwiej można zaobserwować sytuacje, w których sąsiedzi zawodnika stosują w przewadze jedną taktykę. Co prowadzi do dokładnego szacowania ich prawdopodobieństw. Gracz wtedy nie dokonuje zmian w swoim zachowaniu, co wynika z tabelki 2.1. Przypadek taki można zaobserwować również na rysunku 4.4d, oznaczony kolorem czarnym.



(a) 500 partii, 19 graczy

(b) 500 partii, 20 graczy

(c) 500 partii, 21 graczy

(d) 10000 partii, 200 graczy

Rysunek 4.4: Gry N-osobowe

5. Podsumowanie

Celem pracy było przyprowadzenie symulacji koalicji mieszanych przy użyciu ewolucyjnej teorii gier. Oczekiwane wyniki na podstawie analizy matematycznej nie odpowiadały ściśle wynikom uzyskanym z symulacji. Powodem tego było założenie gry o pełnej informacji, gdzie symulacja zakładała grę o niepełnej informacji.

W celu zmniejszenia błędu szacowanego prawdopodobieństwa, można by uwzględniać do niego jedynie k-ostatnich gier. Spowodowałoby to trafne szacowanie prawdopodobieństwa podczas monotonicznej gry przeciwników w k partiach, czego skutkiem byłyby punkty stabilne na krawędziach po przeprowadzeniu na nich k partii. W niniejszej pracy szacowane prawdopodobieństwa nie mają możliwości dojścia do 0 lub 1, jeśli decyzje przeciwników nie były monotoniczne przez całą grę. Skutkiem tego jest przemieszczanie się funkcji po krawędziach sześcianu, co mogłoby ustać po k partiach jeśli tylko one uwzględniany byłyby w szacowaniu. Oczywiście szybkość poruszania się po krawędziach spada z czasem, lecz nigdy nie dojdzie do sytuacji w której spadnie do 0. Szacowanie prawdopodobieństw nie na podstawie wszystkich partii, rodzi problem natury doboru k.

Zgodnie z analizą funkcje dążyły do krawędzi sześcianu, omijając punkty niestabilne oraz krawędzie reprezentujące niemożliwe do zawiązania koalicje.

Symulacje gier N-osobowych pokazały dążenie graczy do trwałych koalicji. Wartą przeanalizowania byłaby sytuacja losowej zmiany prawdopodobieństw części graczy w stanie ustalonym. Powinno to z czasem doprowadzić ustalenia nowego stanu ustalonego.

Bibliografia

[1] C++ reference. http://en.cppreference.com/. 2017-12-26.

[2] Finite state machine designer. http://madebyevan.com/fsm/. 2017-12-20.

[3] Msc/eng thesis template of university of science and technology in krakow (agh). https://www.sharelatex.com/templates/thesis/agh. 2017-09-01.

[4] Qt main site. http://doc.qt.io/. 2017-09-01.

[5] Qt5 tutorial opengl with qglwidget - 2017. http://www.bogotobogo.com/Qt/Qt5_OpenGL_QGLWidget.php. 2017-09-01.

[6] J. Hofbauer and K. Sigmund. *Evolutionary Games and Pupulation Dynamics*. Cambridge, 1998.

[7] M. A. Nowak. *Evolutionary dynamics: exploring the equations of life*. The Belkan press of Harvard university press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 2006.

[8] S. P. *Teoria gier*. Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, Warszawa, 2001.