

**Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie**

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

KATEDRA INFORMATYKI STOSOWANEJ I FIZYKI KOMPUTEROWEJ



PRACA INŻYNIERSKA

ERNEST JĘCZMIONEK

SYMULACJE EWOLUCJI KOALICJI MIESZANYCH

PROMOTOR:

prof. dr hab. Krzysztof Kułakowski

Kraków 2017

OŚWIADCZENIE AUTORA PRACY

OŚWIADCZAM, ŚWIADOMY ODPOWIEDZIALNOŚCI KARNEJ ZA POŚWIADCZENIE NIEPRAWDY, ŻE NINIEJSZĄ PRACĘ DYPLOMOWĄ WYKONAŁEM OSOBIŚCIE I SAMODZIELNIE, I NIE KORZYSTAŁEM ZE ŹRÓDEŁ INNYCH NIŻ WYMIENIONE W PRACY.

.....

PODPIS

AGH
University of Science and Technology in Krakow

Faculty of Physics and Applied Computer Science
DEPARTMENT OF APPLIED INFORMATICS AND COMPUTATIONAL PHYSICS



BACHELOR OF SCIENCE THESIS

ERNEST JĘCZMIONEK

SIMULATIONS OF EVOLUTION OF MIXED COALITIONS

SUPERVISOR:
Professor Krzysztof Kułakowski

Krakow 2017

Serdecznie dziękuję ... tu ciąg dalszych
podziękowań np. dla promotora, żony,
sąsiada itp.

Spis treści

1. Wprowadzenie	6
2. Opis teoretyczny	7
2.1. Gra	7
2.2. Model gry	7
2.3. Równania standardowe	8
2.4. Równania replikatorów	9
2.5. Ograniczenie prawdopodobieństwa	9
2.6. Rozwiązanie stacjonarne równań standardowych	11
2.7. Stabilność równań replikatorów	12
3. Implementacja symulacji	14
3.1. Środowisko QT	14
3.2. GLWidget	14
3.3. Schemat programu	14
3.4. Rysowanie 3D	14
3.5. Makefile	14
4. Wyniki	16
4.1. Gry 3-osobowe	16
4.2. Gry N-osobowe	18
5. Podsumowanie	20

1. Wprowadzenie

Teoria gier wielu osobom kojarzy się z opisem gier towarzyskich między dwojgiem graczy, lecz takie rozgrywki to rzadkość w naszym zróżnicowanym świecie, gdzie zwykle w grę ekonomiczną, społeczną czy polityczną angażuje się wielu uczestników. W niniejszej pracy zostaną umówione gry wieloosobowe o niepełnej informacji. W tym typie gier ważnym elementem strategii jest odpowiedni wybór koalicjantów. Oczywiście nie jest możliwe aby uwzględnić wszystkie czynniki mogące mieć wpływ na grę, ale zostaną przeanalizowane dwa równania ewolucyjne, które mogłyby sterować graczami oraz przeprowadzona będzie analiza ich stabilności. Modelami gry użytymi w niniejszej pracy będzie gra 3-osobowa oraz gra wieloosobowa, w której gracze będą ustawieni w okręgu. Symulację partii w przypadku gier 3-osobowych będą obrazowane jako trójwymiarowe funkcje prawdopodobieństwa, natomiast dla gier wieloosobowych jako funkcje prawdopodobieństwa od czasu dla poszczególnych graczy.

!!!TEST CYTATÓW!!! [Now06] [HS98] [P.01] [Qt] [Tut] [Sza] [Fsm]

2. Opis teoretyczny

2.1. Gra

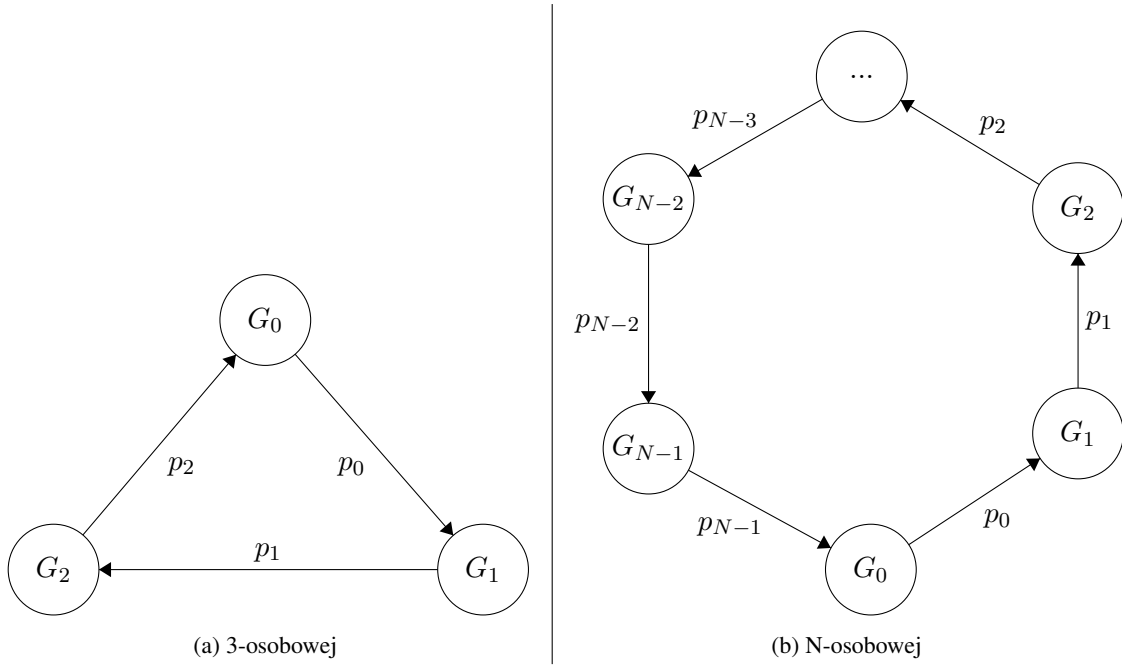
Niniejsza praca skupia się na grach wieloosobowych, których szczególnym przypadkiem jest gra 3-osobowa. Model gry 3-osobowej pokazuje, że decyzję jednego z zawodników mają bezpośredni wpływ na zachowanie sąsiadów. W modelu gry N-osobowej decyzje graczy będą wpływać nie tylko na najbliższych sąsiadów, ale pośrednio także na decyzje innych graczy. Omawiane tutaj gry są grami o niepełnej informacji, w tej pracy oznacza to grę, w której nie wszyscy uczestnicy znają prawdopodobieństwo wyborów przeciwników. Prawdopodobieństwo gry przeciwników będzie szacowane na podstawie obserwacji historii ich zagrań. Opisywane gry będą także grami ewolucyjnymi, czyli mającymi możliwość przewidywania i uczenia się na podstawie zachowań graczy.

2.2. Model gry

Jak wcześniej wspomniano będą potrzebne dwa modele gier. Pierwszym z nich będzie model gry 3-osobowej 2.1a. Graczy nazwiemy odpowiednio G_0 , G_1 , G_2 (gracz zerowy, pierwszy, drugi). Każdy z nich posiada prawdopodobieństwo zagrania, w celu nawiązania koalicji z graczem o wyższym indeksie. To prawdopodobieństwo oznaczone jest jako p_i (i jest indeksem gracza), przy czym dla G_2 gracz o wyższym indeksie to G_0 . Prawdopodobieństwo zagrania, w celu nawiązania koalicji z graczem o niższym indeksie to $1 - p_i$, co nie będzie przechowywane, ponieważ w łatwy sposób można to wyliczyć. Analogicznie dla G_0 gracz o niższym indeksie to G_2 . Ponieważ omawiana jest gra o niepełnej informacji żaden z zawodników nie ma dostępu do prawdopodobieństw innych graczy, lecz każdy ma dostęp do statystyki gry na którą składa się:

- $liczba_{partii}$ liczba rozegranych w grze partii
- $nast_i$ ilość zagrań G_i w celu zawiązania sojuszu z G_{i+1} , ilość zagrań G_i aby nawiązać sojusz z G_{i-1} wyraża się jako $liczba_{partii} - nast_i$

Model gry N-osobowej 2.1b będzie dysponował takimi samymi danymi jak model gry 3-osobowej. Różnicą między nimi będzie ustawienie graczy w okręgu, co będzie prowadziło do konsekwencji nieograniczających się do najbliższych sąsiadów. **UKŁAD**



Rysunek 2.1: Modele gry

2.3. Równania standardowe

W tym typie równań celem będzie maksymalizacja zysku(zyskiem jest prawdopodobieństwo) w czasie. Wyprowadzenie będzie przeprowadzone dla G_0 , przy założeniu gry o pełnej informacji. Pozostałe dwa równania można wyprowadzić analogicznie. Niech $x = p_0$, $y = p_1$, $z = p_2$. Wypłata dana jest przez:

$$W = \underbrace{x(1-y)}_{\text{wypłata sojuszu } G_0 \text{ z } G_1} + \underbrace{(1-x)z}_{\text{wypłata sojuszu } G_0 \text{ z } G_2} \quad (2.1)$$

Aby znaleźć dynamikę należy zróżniczkować wypłatę po δx .

$$\frac{\delta W}{\delta x} = 1 - x - y = W_x$$

Schematu różnicowy na wypłatę od czasu daje:

$$\begin{aligned} W_x(t) &= \frac{W(t+dt) - W(t)}{\Delta t} \\ W_x(t)\Delta t &= W(t+dt) - W(t) = \Delta p_0 \\ \Delta p_0 &= \Delta t(1 - y - z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

W dalszej części będzie stosowane oznaczenie $\alpha = \Delta t$. Równanie wygląda obiecująco, gdyż człon $1 - y$ jest prawdopodobieństwem zagrania G_1 aby zawiązać sojusz z G_0 . Podobnie $-z$ prowadzi do sojuszu G_2 z G_0 , minus przy z powoduje ubytek dla x , ponieważ prawdopodobieństwo zagrania G_0 w celu zawarcia sojuszu z G_2 jest dane przez $1 - x$.

W przypadku gry o niepełnej informacji należy zmodyfikować równanie 2.2. Opis użytych parametrów można znaleźć w podrozdziale 2.2.

$$\Delta p_i = \alpha \cdot \left(1 - \frac{nast_{i+1}}{liczba_{partii}} - \frac{nast_{i-1}}{liczba_{partii}}\right) \quad (2.3)$$

2.4. Równania replikatorów

Model dynamiki replikatorów jest najbardziej znanym różniczkowym modelem teorii gier ewolucyjnych, przez co może stanowić dobry wybór do sterowania zachowaniem graczy. Tak jak poprzednio przyjmijmy prawdopodobieństwa $x = p_0$, $y = p_0$ oraz $z = p_0$ pamiętając, że prawdopodobieństwa przeciwników w symulacji są szacowane. Podstawowy wzór równania replikatorów wygląda następująco:

$$\dot{x} = x \cdot (W_x - \bar{W}) \quad (2.4)$$

Gdzie W_x jest średnią wypłatą dla strategii x (prawdopodobieństw strategii x), natomiast \bar{W} jest średnią wypłatą co daje:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \cdot \left(\overbrace{(1-y)}^{W_x} - \overbrace{(x(1-y) + (1-x)z)}^{\bar{W}} \right) \\ &\quad \Downarrow \\ \dot{x} &= x \cdot (1-x) \cdot (1-y-z) \end{aligned}$$

Schemat różnicowy od czasu ponownie wyznaczy Δp_0 :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\dot{x}(t + \Delta t) - \dot{x}(t)}{\Delta t} \\ \dot{x}(t)\Delta t &= \dot{x}(t + \Delta t) - \dot{x}(t) = \Delta p_0 \end{aligned}$$

W dalszej części tej pracy $\alpha = \Delta t$. Co dla gry 3-osobowej generuje równania:

$$\begin{aligned} \Delta p_0 &= \alpha p_0 \cdot (1 - p_0) \cdot \left(1 - \frac{n_1}{liczba_{partii}} - \frac{n_2}{liczba_{partii}}\right) \\ \Delta p_1 &= \alpha p_1 \cdot (1 - p_1) \cdot \left(1 - \frac{n_2}{liczba_{partii}} - \frac{n_0}{liczba_{partii}}\right) \\ \Delta p_2 &= \alpha p_2 \cdot (1 - p_2) \cdot \left(1 - \frac{n_0}{liczba_{partii}} - \frac{n_1}{liczba_{partii}}\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.5. Ograniczenie prawdopodobieństwa

Wszystkie zmiany prawdopodobieństwa muszą zostać poddane funkcji ograniczającej.

$$p_i = ogr(p_i + \Delta p_i) \quad (2.6)$$

W przeciwnym razie równania z poprzednich podrozdziałów mogą wyjść poza przedział $< 0, 1 >$. Każde nowo obliczone prawdopodobieństwo podawane jest jako parametr do funkcji *ogr*, a dopiero jej

rezultat jest przypisywany poszczególnym prawdopodobieństwom graczy. Funkcja dbająca o pozostanie prawdopodobieństwa w dziedzinie wygląda następująco:

$$ogr(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } p_i > 1 \\ p_i & \text{jeżeli } 1 \geq p_i \geq 0 \\ 0 & \text{jeżeli } p_i < 0 \end{cases}$$

Wyjaśnienia wymaga wartość α , która została przyjęta jako 0.1. Jest to wartość przyjęta autorytarnie aby spowolnić rozgrywkę oraz umożliwić łatwiejszą zmianę koalicji. Najpierw przeanalizowane zostaną równania standardowe dla gry 3-osobowej o prawdopodobieństwie początkowym $\frac{1}{2}$ i $\alpha = 1$. Gdzie N oznacza zagranie G_i mające na celu zawiązanie sojuszu z G_{i+1} , a P ilość zagranie G_i mające na celu zawiązanie sojuszu z G_{i-1} . **UKŁAD**

$$\begin{array}{cc} G_0 = N, G_1 = P, G_2 = N & G_0 = N, G_1 = P, G_2 = P \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_0 = (1 - 0 - 1) = 0 & p_0 = \frac{1}{2} \\ \Delta p_1 = (1 - 1 - 1) = -1 & p_1 = 0 \\ \Delta p_2 = (1 - 1 - 0) = 0 & p_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_0 = (1 - 0 - \frac{1}{2}) = 0 & p_0 = \frac{3}{4} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{1}{2} - 1) = -\frac{1}{2} & p_1 = 0 \\ \Delta p_2 = (1 - 0 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} & p_2 = \frac{3}{4} \end{array} \right. \end{array}$$

Schemat przedstawia dwie osobne tury: po lewej pierwszą, a po prawej drugą. Parametr $\alpha = 1$ powoduje szybkie zawiązanie mocnych koalicji, których przerwanie staje się mało prawdopodobne, co może praktycznie uniemożliwiać jakiegokolwiek zmiany sojuszy.

Wartym rozważenia jest czy w równaniach replikatorów potrzebna będzie $\alpha < 1$, skoro posiadają one człon postaci $x(1 - x)$ gasnący na krańcach przedziału prawdopodobieństwa. Założenia zostały oparte na poprzednim przykładzie.

$$\begin{array}{cc} G_0 = N, G_1 = P, G_2 = N & \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_0 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - 0 - 1) = 0 & p_0 = \frac{1}{2} \\ \Delta p_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - 1 - 1) = 0 & p_1 = \frac{1}{4} \\ \Delta p_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - 0 - 1) = 0 & p_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right. & \\ G_0 = N, G_1 = P, G_2 = P & \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_0 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - 0 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{8} & p_0 = \frac{5}{8} \\ \Delta p_1 = \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{1}{4}) \cdot (1 - \frac{1}{2} - 1) = -\frac{1}{32} & p_1 = \frac{7}{32} \\ \Delta p_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - 0 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{8} & p_2 = \frac{5}{8} \end{array} \right. & \end{array}$$

Jak widać najszybsza zmiana zachodzi dla pierwszego gracza, który traci 25% z prawdopodobieństwa sojuszu z graczem o wyższym indeksie. W kolejnej partii nie widzimy już tak dużych zmian. Należy odpowiedzieć na pytanie czy jest to na tyle dużo, aby zastosować α taką jak w równaniach standardowych. Powinno się poruszyć dwie kwestie. Dynamika prawdopodobieństwa jest akceptowalna (wynosi do 10%), ale tylko dla prawdopodobieństw które oddalają się od środka przedziału, a grę rozpoczynamy właśnie w nim. Drugą sprawą jest porównanie obu równań. Porównanie wyników, o różnym kroku czasowym nie jest najłatwiejszą rzeczą do opisanie. Celem członu $x(1 - x)$ w równaniu replikatorów jest rozwiązanie problemu supersilnych, szybko tworzących się koalicji.

Omówiony teraz zostanie szczególny przypadek, gdy w dwóch osobnych grach żaden z graczy nie współpracował. Użyte będą równania standardowe, prawdopodobieństwo początkowe $\frac{1}{2}$ oraz $\alpha = 1$.

$$\begin{array}{cc} G_0 = N, G_1 = N, G_2 = N & G_0 = P, G_1 = P, G_2 = P \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - 1 - 1) = -1 \quad p_0 = 0 \\ \Delta p_1 = (1 - 1 - 1) = -1 \quad p_1 = 0 \\ \Delta p_2 = (1 - 1 - 1) = -1 \quad p_2 = 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - 0 - 0) = 1 \quad p_0 = 1 \\ \Delta p_1 = (1 - 0 - 0) = 1 \quad p_1 = 1 \\ \Delta p_2 = (1 - 0 - 0) = 1 \quad p_2 = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Przypadek ten pokazuje skutki braku ograniczenia kroku czasowego. Następny ruch jest z góry znany, każdy z graczy wykona ruch przeciwny do poprzedniego co daje w obu grach:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0 \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0 \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0 \end{array} \right.$$

Brak zmian prawdopodobieństw, gracze dokonują wyboru jak poprzednio.

$$\begin{array}{cc} G_0 = P, G_1 = P, G_2 = P & G_0 = N, G_1 = N, G_2 = N \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \quad p_0 = \frac{1}{3} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \quad p_1 = \frac{1}{3} \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \quad p_2 = \frac{1}{3} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} \quad p_0 = \frac{2}{3} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} \quad p_1 = \frac{2}{3} \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} \quad p_2 = \frac{2}{3} \end{array} \right. \end{array}$$

Nie jest to powrót do punktu wyjścia, w którym wyjściowym prawdopodobieństwem jest $\frac{1}{3}$ dla gry przedstawionej po lewej stronie i $\frac{2}{3}$ dla gry po prawej. W pamięci każdego z graczy jest liczba rozegranych partii ze swoimi rywalami co będzie prowadziło do niekoniecznie oczywistych zachowań. Od teraz dokonywany wybór będzie tym o większym prawdopodobieństwie.

$$\begin{array}{cc} G_0 = P, G_1 = P, G_2 = P & G_0 = N, G_1 = N, G_2 = N \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \quad p_0 = \frac{5}{6} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \quad p_1 = \frac{5}{6} \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \quad p_2 = \frac{5}{6} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{2} \quad p_0 = \frac{1}{6} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{2} \quad p_1 = \frac{1}{6} \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{2} \quad p_2 = \frac{1}{6} \end{array} \right. \end{array}$$

Obserwowana jest zmiana zachowania graczy spowodowana częstością gier przeciwników. Sytuacja takiej fluktuacji może się powtarzać. Dysponując odpowiednio dużą grupą instancji gry oraz dostatecznie długą rozgrywką możliwe byłoby zaobserwowanie funkcji prawdopodobieństwa od czasu (równą dla wszystkich graczy instancji) w kształcie sinusoidy o rosnącym okresie. Sytuacja taka nie jest pożądana, co stanowi dodatkowy argument za użyciem $\alpha < 1$ skutecznie niwelującego wystąpienie takich sytuacji.

2.6. Rozwiązanie stacjonarne równań standardowych

Do ustalenia punktów stałych potrzebny jest zanik dynamiki $\Delta p_i = 0$. Krok czasowy zostanie pominięty, gdyż nie daje wkładu do obliczeń. Należy rozwiązać układ równań, gdzie przyjęte jest $x = p_0$,

$y = p_1, z = p_2$:

$$\begin{cases} 1 - y - z = 0 \\ 1 - x - z = 0 \\ 1 - x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow p_0 = p_1 = p_2 = \frac{1}{2} \quad (2.7)$$

Z czego wynika że gra startująca w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ nie powinna z niego wyjść. Byłoby tak gdyby prawdopodobieństwa użyte w równaniu były faktycznymi prawdopodobieństwami p_i , są one natomiast jedynie obserwacją zachowania pozostałych graczy. Są one dane jako $\frac{nast_j}{liczba_{partii}}$, dzięki czemu gra w ogóle się odbywa.

2.7. Stabilność równań replikatorów

Aby wyznaczyć stabilność równań replikatorów należy najpierw znaleźć punkty stałe, jak poprzednio krok czasowy zostanie pominięty. Przyjęte zostały następujące oznaczenia $\dot{x} = \Delta p_0, \dot{y} = \Delta p_1, \dot{z} = \Delta p_2$.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{kombinacje} \begin{matrix} (0, 0, 0) & i = 0 \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & i = 1 \\ (1, 1, 1) & i = 2 \\ (0, 1, \xi) & i = 3 \end{matrix} \text{ dają punkty stałe } (x_i^*, y_i^*, z_i^*), \text{ gdzie } \xi \in (0, 1)$$

Przeanalizowane zostaną 4 przypadki, które nie są symetryczne względem siebie, wpierw jednak należy policzyć pochodne cząstkowe.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \dot{x}}{\delta x} &= 1 - y - z - 2x + 2xy + 2xz & \frac{\delta \dot{y}}{\delta x} &= y^2 - y \\ \frac{\delta \dot{x}}{\delta y} &= x^2 - x & \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} &= 1 - x - z - 2y + 2xy + 2yz \\ \frac{\delta \dot{x}}{\delta z} &= x^2 - x & \frac{\delta \dot{y}}{\delta z} &= y^2 - y \\ \frac{\delta \dot{z}}{\delta x} &= z^2 - z \\ \frac{\delta \dot{z}}{\delta y} &= z^2 - z \\ \frac{\delta \dot{z}}{\delta z} &= 1 - x - y - 2z + 2xz + 2yz \end{aligned}$$

Kolejnym krokiem jest znalezienie wartości własnych. **ZRÓB PIONOWĄ KRESKĘ PRZY =**

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta \dot{x}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{x}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{x}}{\delta z} \\ \frac{\delta \dot{y}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{y}}{\delta z} \\ \frac{\delta \dot{z}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{z}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{z}}{\delta z} \end{pmatrix} \begin{matrix} x = x_i^* \\ y = y_i^* \\ z = z_i^* \end{matrix} = J_i \quad \left| \begin{matrix} \frac{\delta \dot{x}}{\delta x} - \lambda & \frac{\delta \dot{x}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{x}}{\delta z} \\ \frac{\delta \dot{y}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} - \lambda & \frac{\delta \dot{y}}{\delta z} \\ \frac{\delta \dot{z}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{z}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{z}}{\delta z} - \lambda \end{matrix} \right| = J_i - \lambda I = J_{i,\lambda}$$

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ J_{i,\lambda} = 0 &\Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &\in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\} \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &\in \{-z, z-1\} \end{aligned} \end{aligned}$$

Warunkiem na stabilność punktu jest $Re\lambda_i < 0$, co eliminuje nam wszystkie lambdy poza λ_3 . Pokazuje to że punkty o kombinacji $(0, 1, \xi)$ są marginalnie stabilne. Ponieważ analiza matematyczna nie przyniosła jednoznacznej odpowiedzi co do stabilności, można spróbować przeanalizować równanie \dot{z} , dla sytuacji gdy p_i dwóch z graczy dojdą do granicy prawdopodobieństwa. W pierwszym wierszu tabelki 2.1 widać, że x dąży do zawarcia sojuszu z z , natomiast y gra aby osiągnąć sojusz z x . W tej sytuacji prawdopodobieństwo strategii z będzie rosło do zawiązania

koalicji z x . W kolejnych dwóch wierszach są stany ustalone. W wierszu drugim zmiana \dot{z} nie ma znaczenia gdyż obaj przeciwnicy są w wyłącznej koalicji z z . Wiersz trzeci pokazuje przeciwną sytuację, w której jakakolwiek zmiana \dot{z} nie wniesie nic do gry ze względu na trwały sojusz między x a y . Ostatni wiersz pokazuje przypadek symetryczny do pierwszego, z tym że jedynym możliwym sojusznikiem dla z jest y . Oczywiście omawiany teraz przykład do osiągnięcia stabilności wymagałby braku zmian decyzji pozostałych graczy. Musieli by oni znać realne prawdopodobieństwo przeciwników.

Tablica 2.1: Stabilność na krawędzi sześciangu

x	y	1-x-y	\dot{z}
0	0	1	$z \cdot (1 - z)$
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	-1	$-z \cdot (1 - z)$

3. Implementacja symulacji

W tym rozdziale chciałbym przedstawić technologie i narzędzia użyte do wykonania symulacji oraz sposoby ich uruchomienia.

3.1. Środowisko QT

Zdecydowałem się wykorzystać QT Creator IDE z kilku powodów, które zamierzam zaraz rozwinąć. Najważniejszą cechą środowiska jest udostępnienie go na kilku rodzajach licencji. Osobiście użyłem licencji LGPL, która pozwoliła mi bez ponoszenia kosztów korzystać ze środowiska. Kolejnym ważnym elementem jest multiplatformowość pozwalająca w łatwy sposób przenosić kod program między systemami operacyjnymi, o ile nie zostały użyte biblioteki dostępne tylko na jeden z systemów. Kolejną zaletą jest łatwy i intuicyjny interfejs tworzenia graficznego interfejsu użytkownika, osoba mająca wcześniej styczność z chociażby biblioteką Swing Java'y nie powinna mieć problemu z zaadaptowaniem się do formularza QT Creatora. Wykorzystywany jest model sygnałów i slotów, polegający na emitowaniu sygnału przez zdarzenie, który następnie trafia do podłączonego slotu. Jest to w stanie znacznie ułatwić komunikację między elementami. Używanie nowoczesnego języka C++ (ja używałem wersji 14) nie sprawia problemów, lecz powinniśmy być świadomi że przykładowe uruchomienie wątków w aplikacji powinno być zrobione przy użyciu klas i funkcji z biblioteki QT.

3.2. GLWidget

3.3. Schemat programu

3.4. Rysowanie 3D

3.5. Makefile

Symulując grę w okręgu postanowiłem rysować wykresy funkcji prawdopodobieństwa od numeru partii. Do tego celu uznałem, że najbardziej odpowiedni będzie plik *Makefile*, który wykona kompilację, uruchomienie oraz narysowanie wykresu przy pomocy programu *gnuplot*. Aby uruchomić program należy podać argument: G - ilość partii do rozegrania oraz P - ilość graczy. Poniżej przykład polecenia dla 100 partii rozegranych przez 20 zawodników.

```
make G=100 P=20
```

4. Wyniki

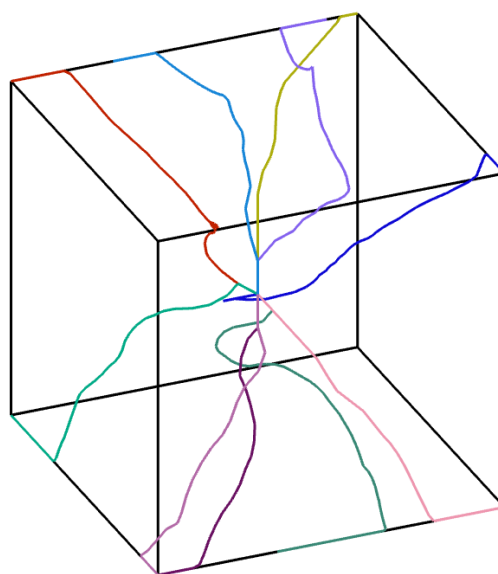
4.1. Gry 3-osobowe

Równania standardowe Postaramy się teraz przeanalizować wyniki symulacji z użyciem równań standardowych. Z analizy teoretycznej równań spodziewamy się zawiązania koalicji pomiędzy dwójką z graczy, wynikiem tego jest dążenie funkcji do krawędzi sześcianu. Po osiągnięcia trwałej koalicji trzeci gracz bezskutecznie stara się grać na jednego z koalicjantów. Jest to widoczne poprzez poruszanie się funkcji po krawędzi sześcianu dążącej do jego wierzchołków. Wiadać że funkcje idące od centrum zachowują się w miarę stabilnie idąc w kierunku jakiejś krawędzi nie zmieniają monotoniczności. Istnieją niewielkie wahania wynikające z prawdopodobieństwa, ale nie mają one większego wpływu w dążeniu do jednej z krawędzi i zmianę ich decyzji.

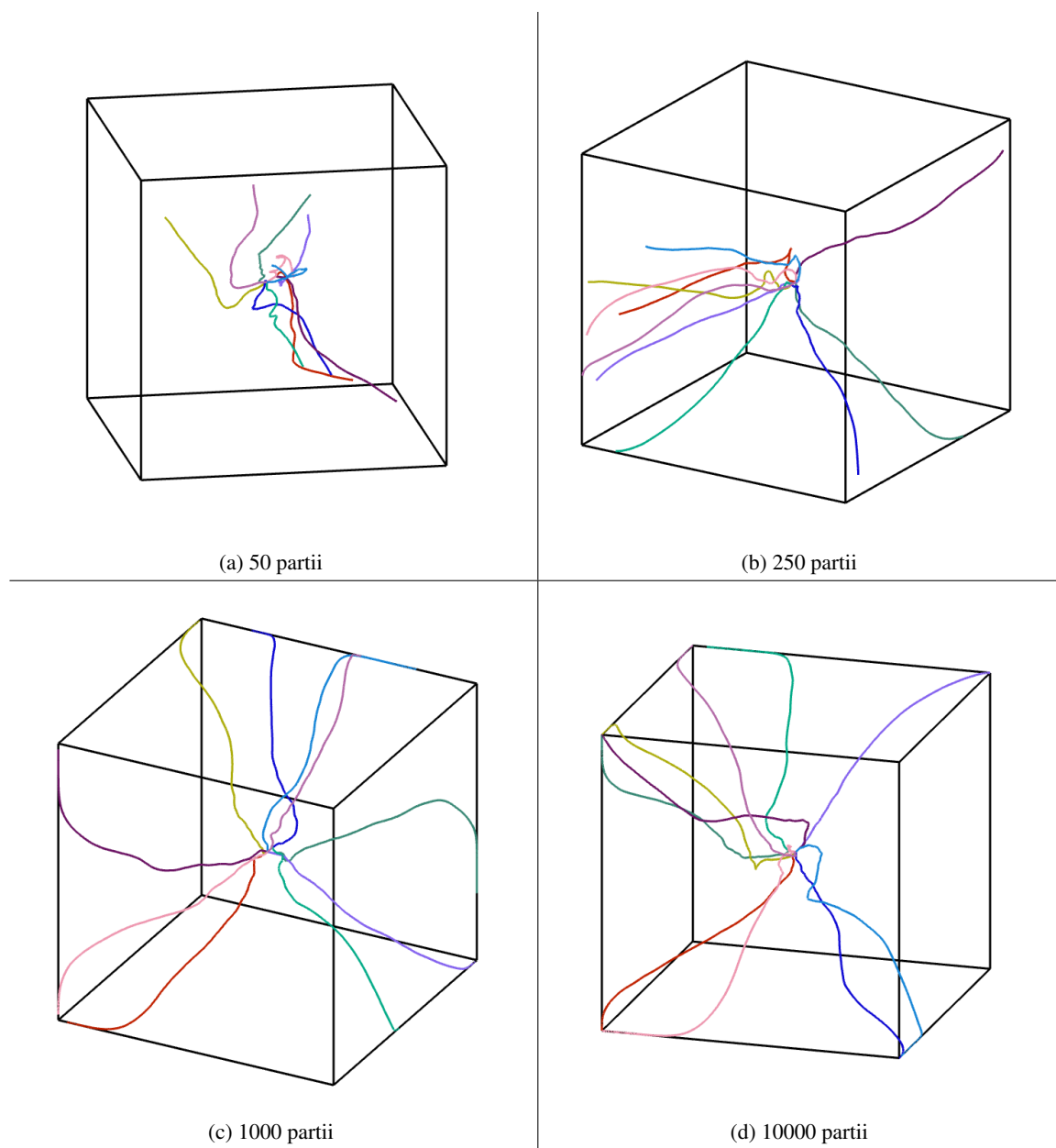
Tak naprawdę koalicje zawiązują się tuż po zaczęciu gry i dążą bezpośrednio do stanu ustalonego, ponieważ na początku gry szacowane prawdopodobieństwo u innych graczy jest bardzo duże. Wynika to z tego szacowane prawdopodobieństwo w pierwszej grze wynosi 0% albo 100% co definitywnie wskazuje aby grać na jednego z zawodników. Było to powodem dla którego wprowadziłem współczynnik α równy 0.1, który ma za zadanie blokować sytuacje w których od razu po pierwszej grze jesteśmy w trwałej koalicji.

Jeśli chcielibyśmy uzyskać szybszą grę powinniśmy używać większych współczynników α , co skutkować będzie mniejszą szansą na zerwanie koalicji. Jeśli natomiast chcielibyśmy żeby gra przebiegała wolniej moglibyśmy obniżyć współczynnik α , co doprowadziłoby do większej liczby zmian partnerów.

Równania replikatorów Od równania tego rodzaju spodziewamy się mniejszego wkładu, a jest to spowodowane tym że człon z własnym prawdopodobieństwem jest funkcją kwadratową $x(1 - x)$ któ-



Rysunek 4.1: Równania standardowe: 100 partii, 10 instancji



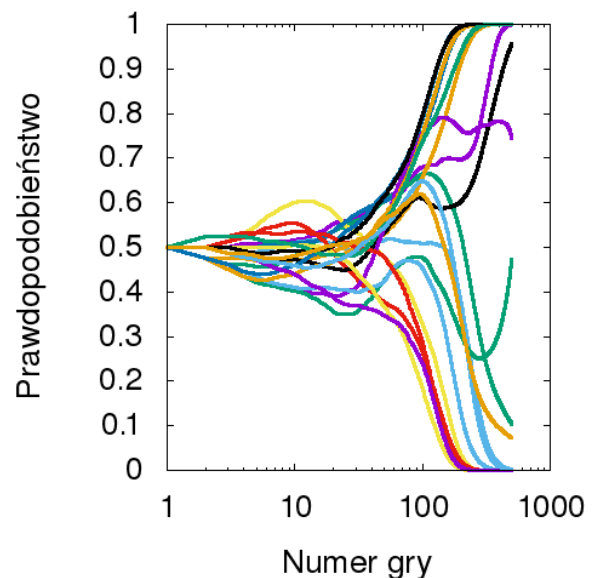
Rysunek 4.2: Równania replikatorów: 10 instancji

rej maksimum ma wartości 0.5 i wynosi ono 0.25. Na krańcach dziedziny funkcji $< 0, 1 >$ przyjmuje wartość 0 (przypomina wielomian węzłowy Lagrange'a). Co jest znacznym ograniczeniem dynamiki funkcji w stosunku do równań standardowych. Dobrym tego przykładem jest rysunek ?? na którym widać jak dla 50 gier prawdopodobieństwa zachowujemy się dużo wolniej w porównaniu z równaniami standardowymi co jest bezpośrednim wynikiem omawianego członu. Ograniczenie zmiany prawdopodobieństwa wprowadza możliwość zmiany koalicji, ponieważ prawdopodobieństwo przejścia między koalicjami wzrasta ze spadkiem maksymalnej pojedynczej jego zmiany. Widoczne na rysunku ?? kiedy to w początkowej fazie kilka koalicji rozwiązuje się i zmieniają partnerów, co nie było widoczne dla równań standardowych. Na rysunku 4.2b widzimy że tak samo jak dla równań standardowych i w tym przypadku funkcje prawdopodobieństwa dążą do krawędzi sześcianu, jednak dzieje się to znacznie wolniej gdyż człon równania z własnym prawdopodobieństwem dąży do 0. Dopiero dla 1000 gier zaczynamy obserwować sytuację podobną do 50 gier dla równań standardowych kiedy to funkcje prawdopodobieństwa dochodzą do krawędzi sześcianu i jeden z osamotniony graczy za wszelką cenę stara się grać tylko na jednego z partnerów aby wybić go ze stanu równowagi, co prowadzi do zmierzania do wierzchołków sześcianu, gdzie stan ustalony wygląda jako koalicja dwóch graczy z jednym wyobcowanym zawodnikiem, który jest zdecydowany na grę z jednym graczem lecz partner nie odwzajemnia jego chęci. Aż 10000 gier było wymagane aby prawdopodobieństwa doszły do wierzchołka gdzie mamy wcześniej opisaną sytuację.

4.2. Gry N-osobowe

Chciałbym teraz przeanalizować wyniki jednej z symulacji 4.3. Jak już wcześniej zaobserwowaliśmy równania replikatorów dają dużo mniejszą dynamikę decyzji graczy.

Peleton graczy tworzy stabilne koalicje około 300 partii które nie są w stanie ulec zmianie. Pozostałe przypadki tworzą niestabilne koalicje, które zmieniają się w czasie. Najlepszym tego przykładem jest gracz który początkowo gra w kierunku swojego prawego sąsiada, a później zapewne przez jego niechęć po kilku fluktuacjach zaczyna drastycznie zmieniać partnera swojej gry - zaznaczonych kolorem fioletowym. Czynniki losowe graczy utrudnia grę tylko z jednym wybranym partnerem, dlatego jak widzimy podczas pierwszych 50 gier dochodzi do dużej liczby zmian zachowań graczy. Szczególnie widoczne jest to w pierwszych 50 partiach, gdzie gracze dopiero szacują zachowanie sąsiadów. W kolejnych 50 partiach gracze zachowują się coraz bardziej liniowo, gdyż błąd przewidywanego i realnego prawdo-

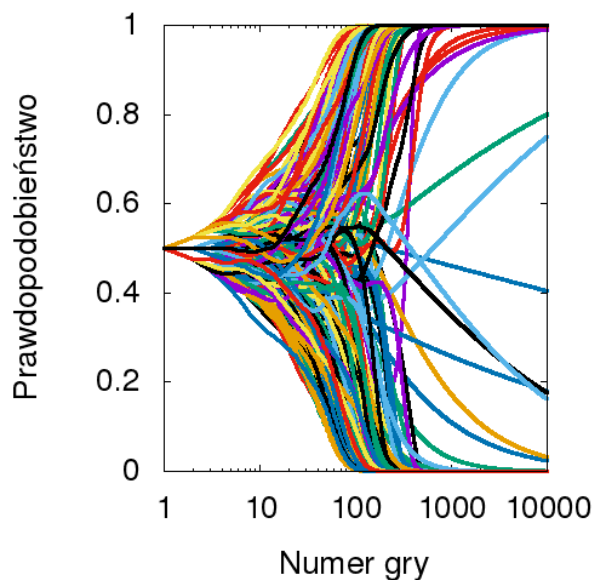


Rysunek 4.3: Gra w okręgu: 500 partii, 20 graczy

podobieństwa przeciwnika spada. Nie wchodzący w stałą koalicja mogą należeć do łańcucha graczy niezdecydowanych lub jednostek znajdujących się pomiędzy dwoma silnymi koalicjami które nie dają szansy na przyłączenie się do żadnej. Warty uwagi jest fakt że ostatnia zmiana monotoniczności funkcji zachodzi dopiero około 300 gry.

Rozpatrzmy teraz dużo dłuższą grę w której zaangażowanych jest więcej graczy, co może pokazać nam przypadki szczególne. Na rysunku widzimy że większość zawodników osiąga stabilne koalicję przed grą 1000. Występuje grupka kilku graczy którzy pomimo tak dużej ilości gier nie byli w stanie zawiązać trwałych koalicji.

Mogło to wynikać z dwóch faktów. Po pierwsze mogli znaleźć się między graczami znajdującymi się w trwałych sojuszach którzy nie byli zainteresowani wchodzeniem w nowe. Drugą przyczyną może być nieznajomość prawdziwego prawdopodobieństwa podejmowania decyzji przez sąsiadów które jest tylko wartością znaną z rozgrywki różnica pomiędzy faktycznym prawdopodobieństwem gry sąsiada a tym co reprezentował. W rozgrywce może się znacząco różnić wpływając na mylną ocenę prawdopodobieństwa gry zawodników i mogących ustalić stabilnej koalicji. Rysunek 4.4 pokazuje przypadek w którym dwóch silnych koalicjantów nie jest zainteresowanych wejście w sojusz z osamotnionym zawodnikiem między nimi, który jak widać z tabelki !!!REF!!! ZRÓB TABELKĘ !!! powoli próbuje dążyć do stałej koalicji z jednym z graczy.



Rysunek 4.4: Gra w okręgu: 10000 partii, 200 graczy

5. Podsumowanie

To be done!

Spis rysunków

2.1	Modele gry	8
4.1	Równania standardowe: 100 partii, 10 instancji	16
4.2	Równania replikatorów: 10 instancji	17
4.3	Gra w okręgu: 500 partii, 20 graczy	18
4.4	Gra w okręgu: 10000 partii, 200 graczy	19

Bibliografia

- [Fsm] Finite state machine designer. <http://madebyevan.com/fsm/>. 2017-12-20.
- [HS98] J. Hofbauer and K. Sigmund. *Evolutionary Games and Pupulation Dynamics*. Cambridge, 1998.
- [Now06] M. A. Nowak. *Evolutionary dynamics: exploring the equations of life*. The Belkan press of Harvard university press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 2006.
- [P.01] Straffin P. *Teoria gier*. Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, Warszawa, 2001.
- [Qt] Qt main site. <http://doc.qt.io/>. 2017-09-01.
- [Sza] Msc/eng thesis template of university of science and technology in krakow (agh). <https://www.sharelatex.com/templates/thesis/agh>. 2017-09-01.
- [Tut] Qt5 tutorial opengl with qglwidget - 2017. http://www.bogotobogo.com/Qt/Qt5_OpenGL_QGLWidget.php. 2017-09-01.