

**Akademia Górniczo-Hutnicza  
im. Stanisława Staszica w Krakowie**

---

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

KATEDRA INFORMATYKI STOSOWANEJ I FIZYKI KOMPUTEROWEJ



**PRACA INŻYNIERSKA**

**ERNEST JĘCZMIONEK**

**SYMULACJE EWOLUCJI KOALICJI MIESZANYCH**

PROMOTOR:

prof. dr hab. Krzysztof Kułakowski

Kraków 2017

## **OŚWIADCZENIE AUTORA PRACY**

OŚWIADCZAM, ŚWIADOMY ODPOWIEDZIALNOŚCI KARNEJ ZA POŚWIADCZENIE NIEPRAWDY, ŻE NINIEJSZĄ PRACĘ DYPLOMOWĄ WYKONAŁEM OSOBIŚCIE I SAMODZIELNIE, I NIE KORZYSTAŁEM ZE ŹRÓDEŁ INNYCH NIŻ WYMIENIONE W PRACY.

.....

PODPIS

**AGH**  
**University of Science and Technology in Krakow**

---

Faculty of Physics and Applied Computer Science  
DEPARTMENT OF APPLIED INFORMATICS AND COMPUTATIONAL PHYSICS



**BACHELOR OF SCIENCE THESIS**

**ERNEST JĘCZMIONEK**

**SIMULATIONS OF EVOLUTION OF MIXED COALITIONS**

SUPERVISOR:  
Professor Krzysztof Kułakowski

Krakow 2017

Serdecznie dziękuję ... tu ciąg dalszych  
podziękowań np. dla promotora, żony,  
sąsiada itp.

## Spis treści

<b>1. Wprowadzenie</b>	6
1.1. Cele pracy	6
1.2. Zawartość pracy	6
<b>2. Opis teoretyczny</b>	7
2.1. Gra	7
2.2. Model gry	7
2.3. Równania standardowe	8
2.4. Równania replikatorów	9
2.5. Ograniczenie prawdopodobieństwa	9
2.6. Rozwiązanie stacjonarne równań standardowych	11
2.7. Stabilność równań replikatorów	12
<b>3. Implementacja symulacji</b>	14
3.1. Środowisko QT	14
3.2. GLWidget	14
3.3. Schemat programu	14
3.4. Rysowanie 3D	14
3.5. Makefile	14
<b>4. Wyniki</b>	16
4.1. N gier 3-osobowych niezależnych	16
4.2. N gier 3-osobowych zależnych	17
<b>5. Podsumowanie</b>	20

# 1. Wprowadzenie

Teoria gier wielu osobom kojarzy się z opisem gier towarzyskich między dwojgiem graczy, lecz takie rozgrywki to rzadkość w naszym zróżnicowanym świecie, gdzie zwykle w grę ekonomiczną, społeczną czy polityczną angażuje się wiele uczestników. W niniejszej pracy weźmiemy na tapet jeden z jej filarów, czyli gry  $n$ -osobowe. W tym typie gier ważnym elementem strategii jest odpowiedni wybór koalicjantów. Oczywiście nie będziemy w stanie uwzględnić wszystkich czynników mogących mieć wkład do gry, ale przeanalizujemy dwa równania ewolucyjne, które mogłyby sterować graczami. Zaczynamy ...

## 1.1. Cele pracy

Celem poniższej pracy jest przeprowadzenie symulacji koalicji mieszanych oraz weryfikacji przewidywanych wyników.

## 1.2. Zawartość pracy

Rozdział *Opis teoretyczny* wyjaśnia co to jest gra 3-osobowa i o jakiej tabeli wypłat mówimy. Określenia Opisuje typy równań użyte do wyboru koalicjanta. Opis narzędzi, technik, schematy oraz sposób uruchomienia programów znajdziemy w rozdziale *Implementacja symulacji*. Na końcu omówimy rezultaty pracy wraz z rozpatrzeniem szczególnych przypadków.

!!!TO BE DONE!!! [Now06] [HS98] [P.01] [Qt] [Tut] [Sza] [Fsm]

## 2. Opis teoretyczny

### 2.1. Gra

W niniejszej pracy będziemy skupiali się na grach 3 oraz N-osobowych. Będziemy rozpatrywać tylko przypadki w których koalicja dwóch graczy wygrywa. Nie bierzemy pod uwagę sytuacji w których współpraca ze sobą wszystkich graczy mogłaby przynieść najlepsze korzyści. W tabelce wypłat rozważanej gry nie może pojawić się punkt równowagi wynikający ze strategii czystych. W rozważanej przez nas grze celem gracza nie jest zdobycie jak największego zysku, lecz osiągnięcie jak największej liczby wygranych. Osoba znajdująca się poza koalicją przegrywa i wszyscy gracze mają taką samą wagę wyboru. Model gry 3-osobowej pokazuje nam, że decyzję jednego z zawodników mają bezpośredni wpływ na zachowanie sąsiadów. W modelu gry N-osobowej decyzje graczy będą propagowane na kolejne lokalne gry 3-osobowe, co będzie pośrednio wpływać na decyzję graczy w sąsiednich rozgrywkach.

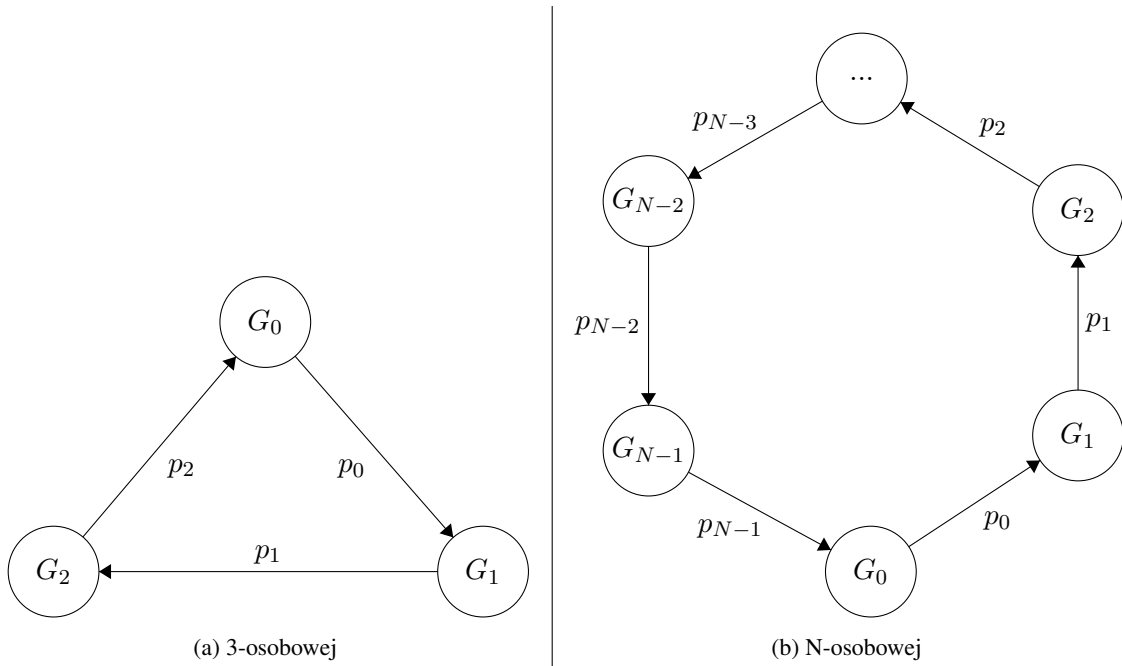
Omawiane tutaj gry są grami o niepełnej informacji. Najłatwiej to wyjaśnić opisując grę o pełnej informacji, czyli taką której:

- żaden z węzłów nie jest przypisany losowi
- każdy węzeł należy do osobnego zbioru informacji

Drzewko gry wizualizuje rozgrywkę analogicznie jak drzewko prawdopodobieństwa mogłoby pokazać wszystkie scenariusze rzutu 3 kostkami z rzędu. Jest to definicja która jest najczęściej używana, lecz my potrzebujemy innej. Jest to spowodowane tym, że omawiana przez nas gra nie jest sekwencyjna i nie możemy do niej użyć drzewka gry. W tej pracy przez grę o pełnej informacji będziemy rozumieli grę, w której wszyscy uczestnicy znają prawdopodobieństwo wyborów przeciwników, co nie jest prawdą w naszym przypadku.

### 2.2. Model gry

W niniejszej pracy będziemy potrzebowali dwóch modeli gier. Pierwszym z nich będzie model gry 3-osobowej 2.1a. Zaczniemy od nazwania graczy odpowiednio  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  (gracz pierwszy, drugi, trzeci). Każdy z nich posiada prawdopodobieństwo zagrania na gracza o wyższym indeksie (zapętlamy dla trzeciego gracza)  $p_i$ . Prawdopodobieństwo zagrania na gracza o niższym indeksie (zapętlamy dla pierwszego gracza) wynosi  $1 - p_i$  i nie musi być przechowywane, ponieważ możemy to w łatwy sposób wyliczyć.



Rysunek 2.1: Modele gry

Ponadto są one dostępne tylko dla graczy, których opisują. Żaden z zawodników nie ma dostępu do prawdopodobieństw innych graczy, lecz każdy ma dostęp do statystyki gry na którą składa się:

- $liczba_{partii}$  liczba rozegranych w grze partii
- $nast_i$  ilość zagrań  $G_i$  na gracza  $G_{i+1}$ , ilość zagrań na  $G_{i-1}$  możemy wziąć z  $liczba_{partii} - nast_i$

Drugi z modeli 2.1b będzie się nieznacznie różnił. Będzie to gra N-osobowa składająca się z lokalnych gier 3-osobowych. Pozostała część modelu się nie zmienia. **UKŁAD**

Wszystkie zmiany prawdopodobieństwa muszą przejść funkcję ograniczającą, więcej o niej znajdziemy w sekcji 2.5. Jak uzyskać  $\Delta p_i$  dowiemy się w dwóch następnych podrozdziałach.

$$p_i = ogr(p_i + \Delta p_i) \quad (2.1)$$

## 2.3. Równania standardowe

Podstawowym równaniem od którego wyjdziemy będzie równanie dla gracza o indeksie 0, pozostałe utworzymy analogicznie: **SKAŁ**

$$\Delta p_0 = (1 - p_1) - p_2 \quad (2.2)$$

Człon  $1 - p_1$  jest prawdopodobieństwem zagrania gracza 1 na gracza 0, więc prawdopodobieństwo zagrania gracza 0 na gracza 1 powinno z nim rosnać. Zniechęcić gracza 0 do sympatyzowania z graczem 1 mogłyby zagrania gracza 2 w kierunku gracza 3. Z tego właśnie powodu odejmujemy  $p_2$ , co ma pokazywać graczowi 0 że ma innego zawodnika, który wyciąga do niego rękę.

Z powodu że mamy do czynienia z grą o niepełnej informacji zdecydowałem się wprowadzić u zawodników statystykę zagrań przeciwników, pozwalającą obliczyć prawdopodobieństwo. W jednej z



następnych sekcji 2.5 omówimy bardziej szczegółowo niechciane zachowania z tego wynikające, ale na chwilę obecną przyjmijmy, że potrzebujemy dodatkowego parametru  $\alpha$  przyjętego na poziomie 0.1.

W poniższym równaniu  $n_N$  oznacza liczbę partii zagranych przez następnego (z wyższym indeksem) gracza w kierunku jego następnego gracza. Analogicznie  $n_P$  oznacza liczbę partii zagranych przez poprzedniego (z niższym indeksem) gracza w kierunku jego następnego gracza (czyli nas).

$$\Delta p_i = \alpha \cdot \left(1 - \frac{n_N}{liczba_{partii}} - \frac{n_P}{liczba_{partii}}\right) \quad (2.3)$$

## 2.4. Równania replikatorów

Model dynamiki replikatorów jest najbardziej znanym różniczkowym modelem teorii gier ewolucyjnych, przez co może stanowić dobry wybór do sterowania zachowaniem graczy. Tak jak w poprzednim przypadku przyjmijmy prawdopodobieństwa kolejno  $x$ ,  $y$  oraz  $z$  pamiętając, że prawdopodobieństwa poza tym z pochodnej są szacowane. Podstawowy wzór równania wygląda następująco:

$$\dot{x} = x \cdot (W - \bar{W}) \quad (2.4)$$

Gdzie  $W$  jest średnią wypłatą dla strategii  $x$  (dla nas prawdopodobieństwem gry na  $x$ ), natomiast  $\bar{W}$  jest średnią wypłatą co daje nam: **UKŁAD**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \cdot \left( \overbrace{(1-y)}^W - \overbrace{(x(1-y) + (1-x)z)}^{\bar{W}} \right) \\ &\Downarrow \\ \dot{x} &= x \cdot (1-x) \cdot (1-y-z) \end{aligned}$$

Co dla gry 3-osobowej generuje równania:

$$\begin{aligned} \Delta p_0 &= \alpha p_0 \cdot (1 - p_0) \cdot \left(1 - \frac{n_1}{liczba_{partii}} - \frac{n_2}{liczba_{partii}}\right) \\ \Delta p_1 &= \alpha p_1 \cdot (1 - p_1) \cdot \left(1 - \frac{n_2}{liczba_{partii}} - \frac{n_0}{liczba_{partii}}\right) \\ \Delta p_2 &= \alpha p_2 \cdot (1 - p_2) \cdot \left(1 - \frac{n_0}{liczba_{partii}} - \frac{n_1}{liczba_{partii}}\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

## 2.5. Ograniczenie prawdopodobieństwa

Jak zauważyliśmy powyższe równania w łatwy sposób mogą wyjść poza przedział  $< 0, 1 >$ . Aby temu zapobiec każda inkrementacja prawdopodobieństwa musi być obłożona funkcją ograniczającą. Każde nowo obliczone prawdopodobieństwo podawane jest jako parametr do funkcji *ogr*, a dopiero jej rezultat jest przypisywany poszczególnym prawdopodobieństwom graczom. Zdecydowałem się użyć następującej funkcji:

$$ogr(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } p_i > 1 \\ p_i & \text{jeżeli } 1 \geq p_i \geq 0 \\ 0 & \text{jeżeli } p_i < 0 \end{cases}$$

Zapewne naszą uwagę przykuł także parametr  $\alpha$  obecny w powyższych równaniach. W pierwszym z nich użycie go jest konieczne, gdyż w przeciwnym przypadku szacowanie prawdopodobieństwa innych doprowadziłoby do zawiązania trwałych koalicji już po pierwszej partii. N oznacza zagranie w stronę zawodnika z wyższym numerem, natomiast P z niższym. Zapętla to się dla pierwszego i ostatniego gracza. Zobaczmy przykład dla równania standardowego, prawdopodobieństwa początkowego  $\frac{1}{2}$  i  $\alpha = 1$  zakładając że:

$$\begin{array}{cc} Gracz_0 = N, Gracz_1 = P, Gracz_2 = N & Gracz_0 = N, Gracz_1 = P, Gracz_2 = P \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_0 = (1 - 0 - 1) = 0 & p_0 = \frac{1}{2} \\ \Delta p_1 = (1 - 1 - 1) = -1 & p_1 = 0 \\ \Delta p_2 = (1 - 1 - 0) = 0 & p_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_0 = (1 - 0 - \frac{1}{2}) = 0 & p_0 = \frac{3}{4} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{1}{2} - 1) = -\frac{1}{2} & p_1 = 0 \\ \Delta p_2 = (1 - 0 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} & p_2 = \frac{3}{4} \end{array} \right. \end{array}$$

Schemat po lewej przedstawia pierwszą partię, a po lewej drugą. Jak widzimy prowadzi to do bardzo szybkich zmian prawdopodobieństwa, co może praktycznie uniemożliwiać jakiekolwiek zmiany sojuszy. Wartym rozważenia jest czy w równaniach replikatorów potrzebny będzie jakiś parametr zmniejszający dynamikę skoro posiadają człon postaci  $x(1-x)$ . Weźmy założenia z poprzedniego przykładu. Przeanalizujmy przykład: **UKŁAD**

$$\begin{array}{cc} Gracz_0 = N, Gracz_1 = P, Gracz_2 = N & \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_0 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - 0 - 1) = 0 & p_0 = \frac{1}{2} \\ \Delta p_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - 1 - 1) = 0 & p_1 = \frac{1}{4} \\ \Delta p_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - 0 - 1) = 0 & p_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right. & \\ Gracz_0 = N, Gracz_1 = P, Gracz_2 = P & \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_0 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - 0 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{8} & p_0 = \frac{5}{8} \\ \Delta p_1 = \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{1}{4}) \cdot (1 - \frac{1}{2} - 1) = -\frac{1}{32} & p_1 = \frac{7}{32} \\ \Delta p_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - 0 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{8} & p_2 = \frac{5}{8} \end{array} \right. & \end{array}$$

Jak widzimy najszybsza zmiana zachodzi dla pierwszego gracza, który traci 25% zaufania do gracza o wyższym indeksie. W kolejnej partii nie widzimy już tak dużych zmian. Należy odpowiedzieć na pytanie czy jest to na tyle dużo, aby wprowadzać parametr mający spowalniać dynamikę zmian. Powinno się poruszyć dwie kwestie. Zgadza się że dynamika prawdopodobieństwa jest dla mnie akceptowalna (czyli wynosi do 10%), ale tylko dla prawdopodobieństw które oddalają się od środka przedziału, a grę rozpoczynamy właśnie w nim. Drugą sprawą jest porównanie obu równań. Porównanie wyników, w które rekurencyjnie wkładamy czynnik wymnażający zmianę nie jest najłatwiejszą rzeczą do opisanie. Celem członu  $x(1-x)$  w równaniu replikatorów jest rozwiązanie problemu supersilnych, szybko tworzących się koalicji.

Postaramy się teraz skupić na szczególnych przypadkach, gdy w obu osobnych grach żaden z graczy nie współpracował. Użyjemy równań standardowych, prawdopodobieństwo początkowe  $\frac{1}{2}$  oraz  $\alpha = 1$ .

$$\begin{array}{ll}
 Gracz_0 = N, Gracz_1 = N, Gracz_2 = N & Gracz_0 = P, Gracz_1 = P, Gracz_2 = P \\
 \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - 1 - 1) = -1 \quad p_0 = 0 \\ \Delta p_1 = (1 - 1 - 1) = -1 \quad p_1 = 0 \\ \Delta p_2 = (1 - 1 - 1) = -1 \quad p_2 = 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - 0 - 0) = 1 \quad p_0 = 1 \\ \Delta p_1 = (1 - 0 - 0) = 1 \quad p_1 = 1 \\ \Delta p_2 = (1 - 0 - 0) = 1 \quad p_2 = 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Przypadek ten pokaże nam skutki braku ograniczenia w prawdopodobieństwie. Wiemy że teraz każdy z graczy wykona ruch przeciwny do poprzedniego co da nam w obu grach:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0 \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0 \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0 \end{array} \right.$$

Brak wpływu na zmiany, gracze dokonują wyboru jak poprzednio.

$$\begin{array}{ll}
 Gracz_0 = P, Gracz_1 = P, Gracz_2 = P & Gracz_0 = N, Gracz_1 = N, Gracz_2 = N \\
 \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \quad p_0 = \frac{1}{3} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \quad p_1 = \frac{1}{3} \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \quad p_2 = \frac{1}{3} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} \quad p_0 = \frac{2}{3} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} \quad p_1 = \frac{2}{3} \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} \quad p_2 = \frac{2}{3} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Nie wróciliśmy to punktu wyjścia, w którym wyjściowym prawdopodobieństwem chęci gry na gracza z większym indeksem jest  $\frac{1}{3}$  dla gry przedstawionej po lewej stronie i  $\frac{2}{3}$  dla gry po prawej. W pamięci każdego z graczy jest liczba rozegranych partii ze swoimi rywalami co będzie prowadziło do niekoniecznie oczywistych zachowań, gdy przeanalizujemy ścieżki gier o wyborach z większym prawdopodobieństwem.

$$\begin{array}{ll}
 Gracz_0 = P, Gracz_1 = P, Gracz_2 = P & Gracz_0 = N, Gracz_1 = N, Gracz_2 = N \\
 \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \quad p_0 = \frac{5}{6} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \quad p_1 = \frac{5}{6} \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \quad p_2 = \frac{5}{6} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_0 = (1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{2} \quad p_0 = \frac{1}{6} \\ \Delta p_1 = (1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{2} \quad p_1 = \frac{1}{6} \\ \Delta p_2 = (1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{2} \quad p_2 = \frac{1}{6} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Widzimy zmianę zachowania graczy spowodowaną sumą częstości gier przeciwników. Sytuacja takiej fluktuacji będzie się powtarzać, lecz z czasem będziemy tracić naszą pulę graczy z powodu czynnika prawdopodobieństwa. Teoretycznie mając do dyspozycji nieskończoną populację graczy oraz nieograniczony czas, istniałby przypadek nieskończonej „sinusoidy” o zwiększającym się okresie. Sytuacja taka nie jest dla nas pożądana, co stanowi dodatkowy argument za użyciem parametru  $\alpha < 1$  skutecznie niwelującego wystąpienie takich sytuacji.

## 2.6. Rozwiązanie stacjonarne równań standardowych

Do ustalenia punktów stałych potrzebujemy  $\Delta p_i = 0$  oraz pominiemy współczynnik  $\alpha$ . Należy rozwiązać układ równań, gdzie przyjmijmy że kolejne prawdopodobieństwa  $x, y, z$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - y - z = 0 \\ 1 - x - z = 0 \\ 1 - x - y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow p_0 = p_1 = p_2 = \frac{1}{2} \quad (2.6)$$

Z czego wynika że gra startująca w punkcie  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  nie powinna z niego wyjść. Byłoby tak gdyby prawdopodobieństwa użyte w równaniu były faktycznymi prawdopodobieństwami  $p_i$ , są one natomiast jedynie obserwacją zachowania pozostałych graczy. Jak już wcześniej wspominaliśmy jest ono dane jako  $\frac{n_j}{liczba_{partii}}$ , dzięki czemu gra w ogóle się odbywa.

## 2.7. Stabilność równań replikatorów

Aby wyznaczyć stabilność równań replikatorów należy najpierw znaleźć punkty stałe. Dla przejrzystości postanowiłem pominąć parametr  $\alpha$ , który nie wnosi nic do obliczeń, wykorzystując realne prawdopodobieństwa jako szacowane oraz przyjmując następujące oznaczenia: **UKŁAD**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Delta p_0 \\ \dot{y} &= \Delta p_1 \\ \dot{z} &= \Delta p_2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{kombinacje} \quad \begin{array}{ll} (0, 0, 0) & i = 0 \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & i = 1 \\ (1, 1, 1) & i = 2 \\ (0, 1, \xi) & i = 3 \end{array} \quad \text{dają punkty stałe } (x_i^*, y_i^*, z_i^*), \text{ gdzie } \xi \in (0, 1)$$

Weźmiemy na tapet 4 przypadki, które nie są symetryczne względem siebie, ale najpierw musimy policzyć pochodne cząstkowe.

$$\begin{array}{lll} \frac{\delta \dot{x}}{\delta x} = 1 - y - z - 2x + 2xy + 2xz & \frac{\delta \dot{y}}{\delta x} = y^2 - y & \frac{\delta \dot{z}}{\delta x} = z^2 - z \\ \frac{\delta \dot{x}}{\delta y} = x^2 - x & \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} = 1 - x - z - 2y + 2xy + 2yz & \frac{\delta \dot{z}}{\delta y} = z^2 - z \\ \frac{\delta \dot{x}}{\delta z} = x^2 - x & \frac{\delta \dot{y}}{\delta z} = y^2 - y & \frac{\delta \dot{z}}{\delta z} = 1 - x - y - 2z + 2xz + 2yz \end{array}$$

Macierz Jacobiego i wzór na wartości własne **ZRÓB PIONOWĄ KRESKĘ PRZY =**

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta \dot{x}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{x}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{x}}{\delta z} \\ \frac{\delta \dot{y}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{y}}{\delta z} \\ \frac{\delta \dot{z}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{z}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{z}}{\delta z} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x = x_i^* \\ y = y_i^* \\ z = z_i^* \end{array} = J_i \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\delta \dot{x}}{\delta x} - \lambda & \frac{\delta \dot{x}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{x}}{\delta z} \\ \frac{\delta \dot{y}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{y}}{\delta y} - \lambda & \frac{\delta \dot{y}}{\delta z} \\ \frac{\delta \dot{z}}{\delta x} & \frac{\delta \dot{z}}{\delta y} & \frac{\delta \dot{z}}{\delta z} - \lambda \end{array} \right| = 0$$

$$\begin{array}{lll} \lambda_0 = 1 & & \\ J_{i,\lambda} = J_i - \lambda I & \lambda_1 \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\} & \wedge \quad Re \lambda_i < 0 \\ & \lambda_2 = 1 & \\ & \lambda_3 \in \{-z, z - 1\} & \end{array}$$

Warunek na ujemną część rzeczywistą wartości własnej eliminuje nam wszystkie lambdy poza  $\lambda_3$ . Możemy powiedzieć, że:

$$\lambda_3 \text{ jest marginalnie stabilna} \iff \xi \in \{0, 1\} \quad (2.7)$$

Jako że analiza matematyczna nie przyniosła nam odpowiedzi co do stabilności spróbujmy przeanalizować równanie  $\dot{z}$ . W pierwszym wierszu widzimy jak  $x$  ani  $y$  nie mogą nawiązać sojuszu i w tym przypadku punkt  $(0, 0, 1)$  będzie punktem stabilności w którym  $z$  będzie pewnym zwycięzcą. W przypadku gdy  $x$  i  $y$  mają przeciwne wartości występuje trwała koalicja co nie daje szansy na wejście w żaden sojusz.

Ostatni z przypadków jest przeciwieństwem pierwszego, w którym znowu dwójka z graczy uporczywie trwa na jedynce, co jest silnym bodźcem do dążenia w kierunku zera i zawiązania koalicji. Oczywiście omawiany teraz przykład do osiągnięcia stabilności wymagałby braku zmian decyzji pozostałych graczy. **UKŁAD**

Tablica 2.1: Na krawędzi sześcianu

x	y	1-x-y	$\dot{z}$
0	0	1	$z \cdot (1 - z)$
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	-1	$-z \cdot (1 - z)$

## 3. Implementacja symulacji

W tym rozdziale chciałbym przedstawić technologie i narzędzia użyte do wykonania symulacji oraz sposoby ich uruchomienia.

### 3.1. Środowisko QT

Zdecydowałem się wykorzystać QT Creator IDE z kilku powodów, które zamierzam zaraz rozwinąć. Najważniejszą cechą środowiska jest udostępnienie go na kilku rodzajach licencji. Osobiście użyłem licencji LGPL, która pozwoliła mi bez ponoszenia kosztów korzystać ze środowiska. Kolejnym ważnym elementem jest multiplatformowość pozwalająca w łatwy sposób przenosić kod program między systemami operacyjnymi, o ile nie zostały użyte biblioteki dostępne tylko na jeden z systemów. Kolejną zaletą jest łatwy i intuicyjny interfejs tworzenia graficznego interfejsu użytkownika, osoba mająca wcześniej styczność z chociażby biblioteką Swing Java'y nie powinna mieć problemu z zaadaptowaniem się do formularza QT Creatora. Wykorzystywany jest model sygnałów i slotów, polegający na emitowaniu sygnału przez zdarzenie, który następnie trafia do podłączonego slotu. Jest to w stanie znacznie ułatwić komunikację między elementami. Używanie nowoczesnego języka C++ (ja używałem wersji 14) nie sprawia problemów, lecz powinniśmy być świadomi że przykładowe uruchomienie wątków w aplikacji powinno być zrobione przy użyciu klas i funkcji z biblioteki QT.

### 3.2. GLWidget

### 3.3. Schemat programu

### 3.4. Rysowanie 3D

### 3.5. Makefile

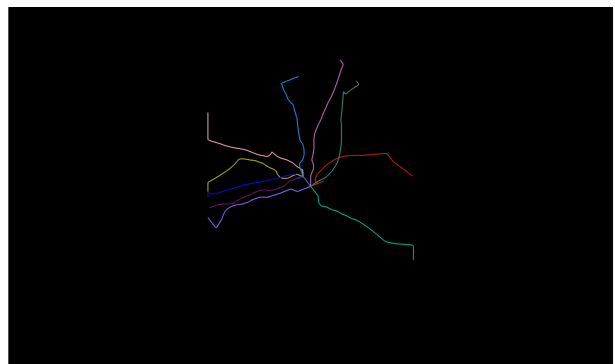
Symulując grę w okręgu postanowiłem rysować wykresy funkcji prawdopodobieństwa od numeru partii. Do tego celu uznałem, że najbardziej odpowiedni będzie plik *Makefile*, który wykona kompilację, uruchomienie oraz narysowanie wykresu przy pomocy programu gnuplot. Aby uruchomić program należy podać argument: G - ilość partii do rozegrania oraz P - ilość graczy. Poniżej przykład polecenia dla 100 partii rozegranych przez 20 zawodników.

```
make G=100 P=20
```

## 4. Wyniki

### 4.1. N gier 3-osobowych niezależnych

**Równania standardowe** Postaramy się teraz przeanalizować wyniki symulacji z użyciem równań standardowych. Z analizy teoretycznej równań spodziewamy się zawiązania koalicji pomiędzy dwójką z graczy, wynikiem tego jest dążenie funkcji do krawędzi sześcianu. Po osiągnięcia trwałej koalicji trzeci gracz bezskutecznie stara się grać na jednego z koalicjantów. Jest to widoczne poprzez poruszanie się funkcji po krawędzi sześcianu dążącej do jego wierzchołków. Wiadać że funkcje idące od centrum zachowują się w miarę stabilnie idąc w kierunku jakiejś krawędzi nie zmieniają monotoniczności. Istnieją niewielkie wahania wynikające z prawdopodobieństwa, ale nie mają one większego wpływu w dążeniu do jednej z krawędzi i zmianę ich decyzji.



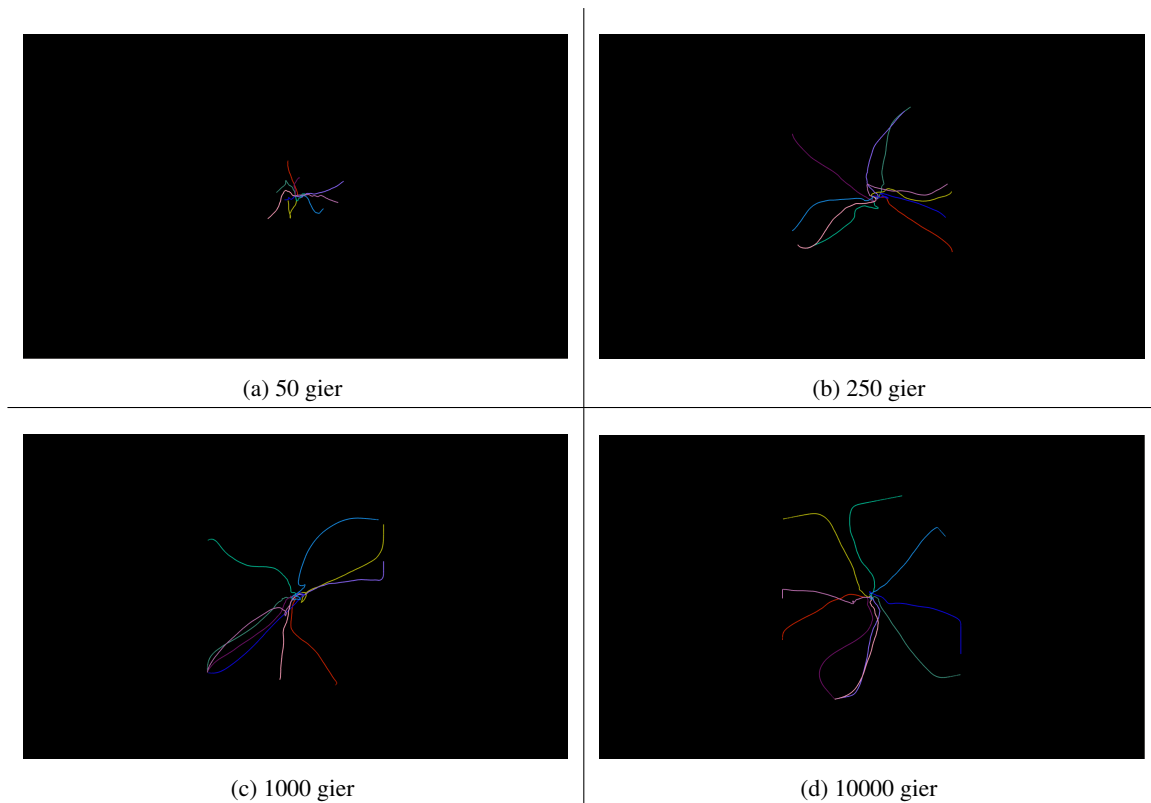
Rysunek 4.1: Równania standardowe: 50 gier, 10 graczy

Tak naprawdę koalicje zawiązują się tuż po zaczęciu gry i dążą bezpośrednio do stanu ustalonego, ponieważ na początku gry szacowane prawdopodobieństwo u innych graczy jest bardzo duże. Wynika to z tego szacowane prawdopodobieństwo w pierwszej grze wynosi 0% albo 100% co definitywnie wskazuje aby grać na jednego z zawodników. Było to powodem dla którego wprowadziłem współczynnik  $\alpha$  równy 0.1, który ma za zadanie blokować sytuacje w których od razu po pierwszej grze jesteśmy w trwałej koalicji.

Jeśli chcielibyśmy uzyskać szybszą grę powinniśmy używać większych współczynników  $\alpha$ , co skutkować będzie mniejszą szansą na zerwanie koalicji. Jeśli natomiast chcielibyśmy żeby gra przebiegała wolniej moglibyśmy obniżyć współczynnik  $\alpha$ , co doprowadziłoby do większej liczby zmian partnerów.

**Równania replikatorów** Od równania tego rodzaju spodziewamy się mniejszego wkładu, a jest to spowodowane tym że człon z własnym prawdopodobieństwem jest funkcja kwadratową  $x(1 - x)$  której maksimum ma wartości 0.5 i wynosi ono 0.25. Na krańcach dziedziny funkcji  $< 0, 1 >$  przyjmuje wartość 0 (przypomina wielomian węzłowy Lagrange'a). Co jest znacznym ograniczeniem dynamiki funkcji w stosunku do równań standardowych. Dobrym tego przykładem jest rysunek 4.2a na którym





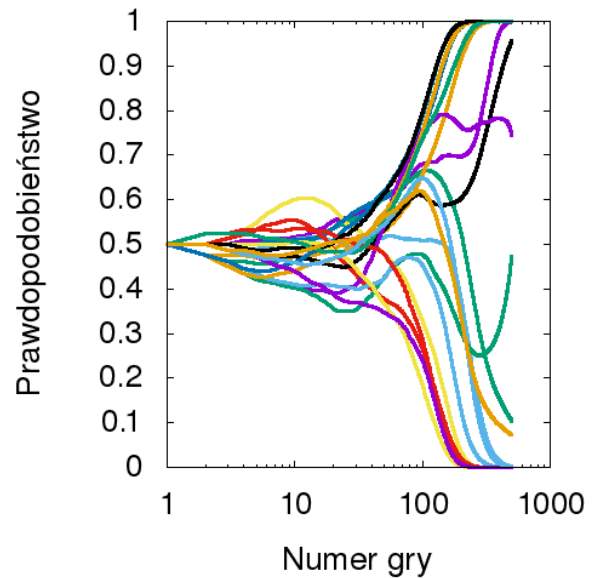
Rysunek 4.2: Równania replikatorów: 10 graczy

widać jak dla 50 gier prawdopodobieństwa zachowujemy się dużo wolniej w porównaniu z równaniami standardowymi co jest bezpośrednim wynikiem omawianego członu. Ograniczenie zmiany prawdopodobieństwa wprowadza możliwość zmiany koalicji, ponieważ prawdopodobieństwo przejścia między koalicjami wzrasta ze spadkiem maksymalnej pojedynczej jego zmiany. Widoczne na rysunku 4.2a kiedy to w początkowej fazie kilka koalicji rozwiązuje się i zmieniają partnerów, co nie było widoczne dla równań standardowych. Na rysunku 4.2b widzimy że tak samo jak dla równania standardowych i w tym przypadku funkcje prawdopodobieństwa dążą do krawędzi sześciangu, jednak dzieje się to znacznie wolniej gdyż człon równania z własnym prawdopodobieństwem dąży do 0. Dopiero dla 1000 gier zaczynamy obserwować sytuację podobną do 50 gier dla równań standardowych kiedy to funkcje prawdopodobieństwa dochodzą do krawędzi sześciangu i jeden z osamotnionych graczy za wszelką cenę stara się grać tylko na jednego z partnerów aby wybić go ze stanu równowagi, co prowadzi do zmierzania do wierzchołków sześciangu, gdzie stan ustalony wygląda jako koalicja dwóch graczy z jednym wyobcowanym zawodnikiem, który jest zdecydowany na grę z jednym graczem lecz partner nie odwzajemnia jego chęci. Aż 10000 gier było wymagane aby prawdopodobieństwa doszły do wierzchołka gdzie mamy wcześniej opisaną sytuację.

## 4.2. $N$ gier 3-osobowych zależnych

Chciałbym teraz przeanalizować wyniki jednej z symulacji 4.3. Jak już wcześniej zaobserwaliśmy równania replikatorów dają dużo mniej-szą dynamikę decyzji graczy.

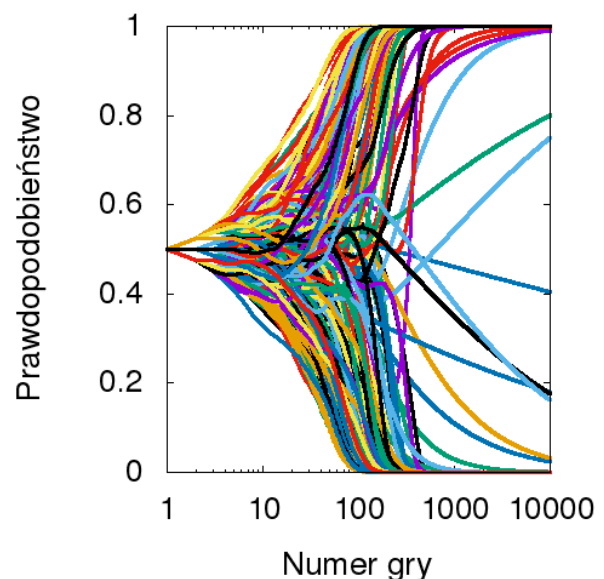
Peleton graczy tworzy stabilne koalicje około 300 partii które nie są w stanie ulec zmianie. Pozostałe przypadki tworzą niestabilne koalicje, które zmieniają się w czasie. Najlepszym tego przykładem jest gracz który początkowo gra w kierunku swojego prawego sąsiada, a później zapewne przez jego niechęć po kilku fluktuacjach zaczyna drastycznie zmieniać partnera swojej gry - zaznaczonych kolorem fioletowym. Czynniki losowy graczy utrudnia grę tylko z jednym wybranym partnerem, dlatego jak widzimy podczas pierwszych 50 gier dochodzi do dużej liczby zmian zachowań graczy. Szczególnie widoczne jest to w pierwszych 50 partiach, gdzie gracze dopiero szacują zachowanie sąsiadów. W kolejnych 50 partiach gracze zachowują się coraz bardziej liniowo, gdyż błąd przewidywanego i realnego prawdopodobieństwa przeciwnika spada. Nie wchodzący w stałą koalicja mogą należeć do łańcucha graczy niezdecydowanych lub jednostek znajdujących się pomiędzy dwoma silnymi koalicjami które nie dają szansy na przyłączenie się do żadnej. Warty uwagi jest fakt że ostatnia zmiana monotoniczności funkcji zachodzi dopiero około 300 gry.



Rysunek 4.3: Gra w okręgu: 500 gier, 20 graczy

Rozpatrzmy teraz dużo dłuższą grę w której zaangażowanych jest więcej graczy, co może pokazać nam przypadki szczególne. Na rysunku widzimy że większość zawodników osiąga stabilne koalicje przed grą 1000. Występuje grupka kilku graczy którzy pomimo tak dużej ilości gier nie byli w stanie zawiązać trwałych koalicji.

Mogło to wynikać z dwóch faktów. Po pierwsze mogli znaleźć się między graczami znajdującymi się w trwałe w sojuszach którzy nie byli zainteresowani wchodzeniem w nowe. Drugą przyczyną może być nieznajomość prawdziwego prawdopodobieństwa podejmowania decyzji przez sąsiadów które jest tylko wartością znaną z rozgrywki różnica pomiędzy faktycznym prawdopodobieństwem gry sąsiada a tym co reprezentował. W rozgrywce może się znacząco różnić wpływając na mylną ocenę prawdopodobieństwa gry zawodników i mogących ustalić stabilnej



Rysunek 4.4: Gra w okręgu: 10000 gier, 200 graczy

koalicji. Rysunek 4.4 pokazuje przypadek w którym dwóch silnych koalicjantów nie jest zainteresowanych wejście w sojusz z osamotnionym zawodnikiem między nimi, który jak widać z tabelki !!!REF!!! ZRÓB TABELKĘ !!! powoli próbuje dążyć do stałej koalicji z jednym z graczy.

## **5. Podsumowanie**

To be done!

## Spis rysunków

2.1	Modele gry . . . . .	8
4.1	Równania standardowe: 50 gier, 10 graczy . . . . .	16
4.2	Równania replikatorów: 10 graczy . . . . .	17
4.3	Gra w okręgu: 500 gier, 20 graczy . . . . .	18
4.4	Gra w okręgu: 10000 gier, 200 graczy . . . . .	18

## Bibliografia

- [Fsm] Finite state machine designer. <http://madebyevan.com/fsm/>. 2017-12-20.
- [HS98] J. Hofbauer and K. Sigmund. *Evolutionary Games and Pupulation Dynamics*. Cambridge, 1998.
- [Now06] M. A. Nowak. *Evolutionary dynamics: exploring the equations of life*. The Belkan press of Harvard university press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 2006.
- [P.01] Straffin P. *Teoria gier*. Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, Warszawa, 2001.
- [Qt] Qt main site. <http://doc.qt.io/>. 2017-09-01.
- [Sza] Msc/eng thesis template of university of science and technology in krakow (agh). <https://www.sharelatex.com/templates/thesis/agh>. 2017-09-01.
- [Tut] Qt5 tutorial opengl with qglwidget - 2017. [http://www.bogotobogo.com/Qt/Qt5\\_OpenGL\\_QGLWidget.php](http://www.bogotobogo.com/Qt/Qt5_OpenGL_QGLWidget.php). 2017-09-01.